UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVACÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Fabiano Calacio Silva

PROPORCIONALIDADE E REGRA DE TRÊS: Um olhar sobre o Teorema Fundamental da Proporcionalidade

São Luís – MA
2021

Fabiano Calacio Silva

PROPORCIONALIDADE E REGRA DE TRÊS: Um olhar sobre o Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Santana Campos Costa

São Luís – MA

2021

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Silva, Fabiano Calacio.

PROPORCIONALIDADE E REGRA DE TRÊS: Um olhar sobre o Teorema Fundamental da Proporcionalidade / Fabiano Calacio Silva. - 2021.

80 p.

Orientador: Prof. Dr. José Santana Campos Costa
Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/CCET, Universidade Federal do Maranhão, São Luís - MA, 2021.

1. Proporção. 2. Razão. 3. Regra de Três. I. Costa, José Santana Campos. II. Título.

Fabiano Calacio Silva

PROPORCIONALIDADE E REGRA DE TRÊS: Um olhar sobre o Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 20 / 04 / 2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Santana Campos Costa (Orientador)
Universidade Federal do Maranhão – UFMA

Profa. Dra. Valeska Martins de Souza
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. Elivaldo Rodrigues Macedo
Universidade Federal do Maranhão – UFMA

À minha esposa, às minhas filhas e à minha mãe.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Todo Poderoso e Eterno Deus por este presente em minha vida, que é a realização do sonho de ser mestre em matemática, intercedendo por meio de pessoas que foram um canal de bênçãos, parcerias e conhecimentos na elaboração desta pesquisa científica.

À minha querida esposa, Rose Calacio, por toda sabedoria e amparo nos momentos difíceis em que estive dedicado a este trabalho.

Às minhas filhas pela compreensão e de onde pude tirar forças de encorajamento e de otimismo para suportar todas as resistências, percalços, lamúrias, enfim, todas as contradições que, aliás e infelizmente, são naturais na caminhada humana, considerando que no mundo teremos aflições, sendo comum superar as críticas para alcançar a vitória.

À minha família, sobretudo na pessoa de minha mãe, inspiradora no que se refere à matemática financeira e que soube suportar o momento de vida de pesquisador pelo qual passei, quando estive empenhado nas atividades acadêmicas, pelo suporte educacional e por não me deixar desistir nos momentos de dificuldade.

Ao meu orientador Prof. Dr. José Santana Campos Costa pela singular ajuda e dedicação a meu trabalho.

Aos Professores Anselmo B. Raposo Junior, Elivaldo R. Macedo, Luis Fernando C. Amaral, Marcos A. F. Araújo, Renata de F. L. Carvalho, Valeska M. de Souza e Cleber A. Cavalcanti por toda cordialidade, compreensão, conversa e disponibilidade para a promoção do meu desenvolvimento em matemática.

Ao Prof. Dr. Antônio José da Silva, Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Rede Nacional – Matemática – PROFMAT/CCET/UFMA, Servidor de elevado espírito público, por todas as iniciativas para o bom andamento deste mestrado, bem como pela excelente prestação de serviço junto à Coordenação do Programa, objetivando sempre em atender satisfatoriamente aos Discentes e em defesa destes.

Aos meus colegas de turma (Aléssio A. dos S. Dias, Antônio B. L. Gaspar, Edu S. Pinheiro, Alex Santos Moura Diniz, José de R. S. Neto, Lenildo M. de Azevedo, Marco A. S. de Aquino, Paulo R. R. da Silva, Rafael S. Miranda, Sadoc F. R. Filho, Stênio H. do N. Cerqueira e Wagner de J. P. Sá) que passaram pelas mesmas dificuldades, mas seguiram com perseverança e camaradagem em busca dos objetivos.

Aos colegas da turma PROFMAT/UFMA 2019 (Celso H. A. Berredo, David S. Costa, João R. de Carvalho, Laécio A. da S. Lucena, Leudilene de J. R. Costa, Moises R. Dourado, Orley de B. Santos, Valdir de O. Junior e Waleff M. Leal) pelo suporte, recepção, aliança, consideração, respeito e interação na reta final deste mestrado.

À Universidade Federal do Maranhão por intermédio do PROFMAT pela oportunidade de acesso ao conhecimento, pelo desenvolvimento desta competência com a diplomação, possibilitando ensinamentos que levarei para toda a minha vida.

Enfim, a todas as amigas e a todos os amigos do decurso desta história, sem os quais seria impossível a concretização desta etapa.

“*Toda a boa dádiva e todo o dom perfeito vem do alto, descendo do Pai das luzes, em quem não há mudança nem sombra de variação*”.

Tiago 1:17

RESUMO

Neste trabalho temos como principais objetivos mostrar o conceito de razão, de proporção e do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, empregando métodos como uma forma mais simples e didática de fazer divisão proporcional direta, inversa e mista, bem como uma estratégia de utilizar o Teorema Fundamental da Proporcionalidade para a resolução de problemas de regra de três simples e composta. Ao final do trabalho, os resultados e conclusões estão em destaque com aplicações.

Palavras-chave: Razão. Proporção. Regra de Três.

ABSTRACT

In this work we have as main objectives to show the concept of reason, proportion and the Fundamental Proportionality Theorem, employing methods as a simpler and more didactic way of doing direct, inverse and mixed proportional division, as well as a strategy of using the Fundamental Theorem of Proportionality for the resolution of three simple and compound rule problems. At the end of the work, the results and conclusions are highlighted with applications.

Keywords: Reason. Proportion. Rule of three.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

a.C.	Antes de Cristo
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
d.C.	Depois de Cristo
E.C.	Era Comum
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A partir da capacidade de ler, escrever e manipular números, é possível ao sujeito compreender os conteúdos do currículo escolar, fazendo uso dos mesmos em variadas situações da vida cotidiana. Sem o domínio dos conhecimentos básicos, todo o percurso escolar (e pós-escolar) do indivíduo é potencialmente prejudicado. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), no Ensino Médio, a Matemática possui:

> [...] um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas (BRASIL, 1996b, p. 40).

Contudo, no cotidiano escolar, a Matemática pode se apresentar difícil para muitos alunos. Nessa perspectiva, vamos apresentar os conceitos de razão, os quais já aparecem a partir do 6º Ano (primeira série dos Anos Finais do Ensino Fundamental), que são fundamentais não só no contexto escolar, mas também na vida cotidiana e infelizmente, nestes conteúdos, os estudantes têm grandes dificuldades, pois o aprendizado passa a ir além das quatro operações básicas, abordando conceitos mais complexos e abstrações.

Tomando como ponto de partida a importância desses conceitos, chama-se a atenção para a questão da compreensão adequada e uma visão não limitada, por parte dos professores de matemática.

Estudos acerca do conceito de proporcionalidade, que são aqui referenciados, têm se destacado na literatura sobre Educação Matemática. Além disso, esses estudos indicam a História da Matemática como um dos possíveis caminhos para o ensino de matemática no Ensino Fundamental e Ensino Médio. O conhecimento de diversas possibilidades para o trabalho em sala de aula auxiliará o docente na construção da sua prática.

O uso da História da Matemática se apresenta como uma dessas possibilidades. A História da Matemática aparece nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) como uma indicação de recurso alternativo à prática pedagógica do professor de matemática e ressalta que esta pode contribuir de maneira significativa para o ensino e aprendizagem nessa área do conhecimento.

A prática do ensino de matemática tem vários desafios, por isso, existe uma procura por novas formas metodológicas que melhore e incentive à aprendizagem dessa disciplina. Visto isto, procurou-se fazer de forma mais simples e didática as divisões proporcionais e regra de três. A qual foi abordada de duas maneiras: por classificação de grandezas diretas e inversas (método direto e inverso) e pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

A inquietude que motivou a elaboração deste trabalho reside na necessidade de saber o conceito de grandeza direta e inversamente proporcional sob o aspecto prático, ou seja, um conceito intimamente entendido à luz do nosso cotidiano para facilitar a aprendizagem tanto para o aluno, quanto para o professor, pois este assunto é muito pouco explorado em sua formação no nível superior ao rigor e vivência merecida.

Sendo assim, portanto, tem como objetivo geral apresentar o conceito de proporcionalidade partindo das civilizações antigas, como Babilônica, Egípcia, Grega, Indiana, Árabes, bem como na Idade Média e Renascimento. E objetivos específicos: conhecer de que maneira este conceito era empregado pelos povos antigos, além de conhecer alguns problemas em que o mesmo estava presente no procedimento de resolução de problemas.

Nesta perspectiva, os educadores precisam desenvolver uma compreensão conceitual adequada da proporcionalidade, evitando a visão simplista e errônea de que este conceito se trata de um tópico do currículo da matemática que precisa ser ensinado para o aluno, onde o procedimento algorítmico, a exemplo da regra de três, é o cerne do processo de aprendizagem. Esta visão deve ser superada nos meios escolares. Apresento uma abordagem desse conhecimento com diversas possibilidades para o trabalho em sala de aula, auxiliando o discente na construção de seu aprendizado.

O conceito de razão, regra de três e proporcionalidade são fundamentais não só no contexto escolar, mas também no dia a dia das pessoas. Neste sentido, este conceito é importante para lidar com várias situações do mundo, para estudar e compreender outras áreas do conhecimento, além de contribuir para o desenvolvimento cognitivo dos indivíduos.

Este trabalho está estruturado em três capítulos. No primeiro Capítulo tratamos da proporcionalidade na antiguidade, ou seja, abordamos quesitos matemáticos no Egito, Mesopotâmia e Grécia, destacando apontamentos de Eudoxo e Tales. Partimos no Segundo Capítulo para razão e proporção, abordando: conceito e propriedades das proporções, algumas demonstrações do Teorema de Thales e finalizando com o conceito de razão áurea; por fim, apresentamos no Terceiro Capítulo o conceito de grandezas proporcionais, grandezas direta e inversamente proporcionais, números proporcionais a regra de três, relacionando-a ao Teorema Fundamental da Proporcionalidade e exploramos também a regra de três composta.

1 PROPORCIONALIDADE NA ANTIGUIDADE

A Proporcionalidade tem sido muito utilizada nos diferentes povos e civilizações ao longo do tempo. Relevantes contribuições filosóficas e estéticas surgiram em torno da proporção no momento que a humanidade começou a estudar sobre as formas geométricas nas construções, na agricultura, nos remédios e nos alimentos. Desde milênios, há uma preocupação em observar e interpretar a natureza e tomar proveito afim de cumprir tarefas e melhorar sua capacidade de sobrevivência. Então pode-se verificar que as tentativas iniciais de usar a proporcionalidade para resolver alguma tarefa do cotidiano foram realizadas pelo homem pré-histórico, o que pode ser verificado em desenhos nas cavernas onde habitavam.

Nos desenhos feitos nas rochas das cavernas percebe-se que, muitas vezes, o homem pré-histórico se aproveitava da curvatura natural da rocha, de suas saliências e reentrâncias, integrando a corporeidade da parede com o formato do objeto ou animal desenhado, sem perder a proporção devida. Da idade da pedra até a idade dos metais verificou-se um período em que surgem os povos que se situaram primeiro em vales de rios, como os do Egito, Mesopotâmia, Índia e China.

1.1 Egito

A civilização egípcia teve início por volta de 4.000 a.C. e temos nos hieroglíficos, que são os escritos egípcios, fontes de registros para pesquisas, os quais foram decifrados através de uma expedição napoleônica, por volta de 1.799. A partir de uma grande peça achada em Rosetta, antigo porto de Alexandrina, que continha três escritas: grega, demótica e hieroglífica, e como o idioma grego já era conhecido, a decifração dos hieróglifos foi feita de forma mais rápida. Dessas pesquisas temos que a matemática egípcia, a qual se desenvolveu ao longo do rio Nilo, era preocupada com as práticas do cotidiano e os egípcios começaram cedo as observações e interesse pela astronomia; observaram que as inundações do Nilo tinham um período de repetição 365 dias (estrela Sirius se levantava a leste logo antes do sol).

Os egípcios eram muito precisos nas contas e nas medições. Desse estudo, surge o calendário solar. Nele, são estabelecidos 12 meses de 30 dias e mais cinco dias de festas. Essa precisão também foi mostrada na construção das pirâmides. E com respeito às operações matemáticas, pode-se afirmar que a operação aritmética fundamental no Egito era a adição. Já nossas operações de multiplicação e divisão eram efetuadas no tempo de Ahmes (Papiro de Ahmes) por duplicações sucessivas. A solução de problemas algébricos de Ahmes não é a de livros modernos. Este tipo de resolução apresenta como característica um processo conhecido como “método de falsa posição” em que a incógnita é chamada de “aha”.

> [...] os egípcios eram louvavelmente precisos nas contas e nas medições. As pirâmides exibem tão alto grau de precisão na construção e na orientação que lendas mal–fundamentadas surgiram em tono delas. A sugestão, por exemplo, que a razão do perímetro da base da “Grande Pirâmide” (de Khufu ou ou Quéops) para a altura foi conscientemente posta no valor de 2π está claramente em desacordo com a geometria egípcia. (BOYER, 1974)

A matemática egípcia foi descoberta através de papiros dessa civilização. Apenas quatro papiros ofereceram resoluções de problemas matemáticos em documentos administrativos, que deduzem indiretamente o conhecimento matemático do Antigo Egito, que lidam com as inundações do Nilo, o cálculo de impostos, a distribuição de terras aráveis, a distribuição de campos após a destruição de marcos (sinalizadores de fronteira) após inundações. De acordo com alguns egiptólogos, as pirâmides de Guizé mostraram um conhecimento geométrico, guardados em papiros, posto a serviço da arquitetura. Um certo número desses registros, os quais continham o dito conhecimento geométrico, de algum modo resistiu ao desgaste do tempo por mais de 3.500 anos. Um desses papiros foi comprado, em 1858, por um antiquário escocês, Henry Rhind, por isso é chamado de Papiro de Rhind, ou de Ahmes, veja Figura 1.1, em honra ao escriba que o copiou por volta de 1650 a. C.

Figura 1.1 Papiro de Rh

Fonte: http://mundomatematicodocaldas.blogspot.com/

Muitos problemas foram encontrados no Papiro de Ahmes, que mostram o uso de manipulações equivalentes à regra de três. No problema 63, por exemplo, divida 700 pães por quatro homens na proporção dos números 2/3, 1/2, 1/3 e 1/4.Qual a parte de cada homem?

Resolução: Primeiro, faz-se a seguinte soma 2/3 + 1/2 + 1/3 + 1/4 = 7/4. Depois, efetua-se a divisão de 700 por 7/4 que dá 400. Multiplica-se este número por cada uma das frações: 2/3, 1/2, 1/3, 1/4, obtendo-se a respectiva quantidade de pão a cada homem.

O processo de resolução desse problema é atualmente chamado de "divisão em partes diretamente proporcionais", portanto, está caracterizado que os egípcios tinham uma compreensão e usavam a proporcionalidade.

1.2 Mesopotâmia

Considerada o berço da civilização, a Mesopotâmia compreende um conjunto de povos que viveram nos vales dos rios Tigres e Eufrates, no que hoje corresponde ao território do Iraque e regiões adjacentes da Síria, Turquia e Irã, no período que se estende aproximadamente, do ano de 3500 a.C. até o começo da era Cristã. Dentre os reinos mesopotâmicos merece destaque aquele baseado na cidade de Babilônia, veja na Figura 1.2.

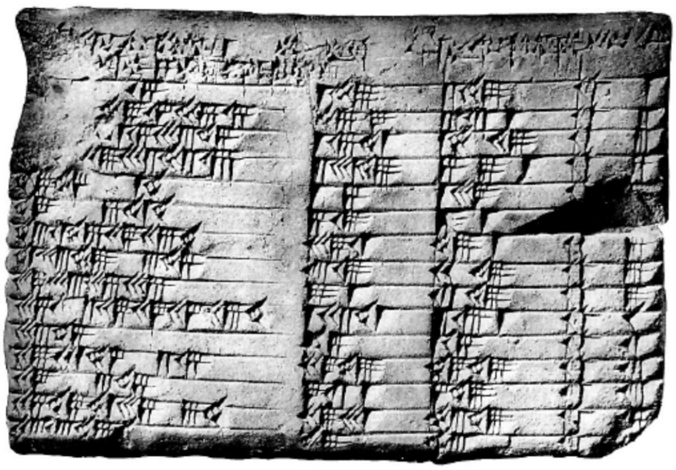
Figura 1.2 Mesopotâmia

Fonte: https://www.coladaweb.com/historia/mesopotamia

Segundo (EVES, 2011), os arqueólogos que estudam a Mesopotâmia já desenterraram mais de 500.000 tabuletas de argila, das quais, cerca de 400 delas foram identificadas como estritamente matemáticas, sendo quase a metade dessas 400 eram tábuas matemáticas e o restante eram tipos de problemas matemáticos, voltados para matemática comercial e agrária, geometria e álgebra, quer de natureza prática ou não.

Os babilônios também sabiam que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais. E eles também já conheciam o Teorema de Pitágoras muito antes dele ser descoberto! Isso se deve ao fato da curiosa tábua de Plimpton-322, veja a Figura 1.3, escrita entre 1900 e 1600 a.C. Nela encontramos alguns dos chamados ternos pitagóricos.

Figura 1.3 Tábua de Plimpton 322 – Original



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322>

O conteúdo principal do Plimpton 322 é uma tabela de números, com quatro colunas e quinze linhas, em notação sexagesimal babilônica. A quarta coluna é apenas uma linha de números em ordem de 1 a 15. A segunda e terceira colunas são totalmente visíveis na tabela.

No entanto, a ponta da primeira coluna foi quebrada, e há duas consistentes extrapolações para o que poderia ser a falta de dígitos; estas interpretações diferem apenas em saber se cada série começa ou não com um dígito adicional igual a 1. Com as diferentes extrapolações mostradas entre parênteses, esses números são os seguintes, como mostra a Tabela 1.1.

Tabela 1.1: Plimptom 332 traduzida

(1)59:00:15	1:59	2:49	1
(1)56:56:58:14:50:06:15	56:07	120:25	2
(1)55:07:41:15:33:45	1:16:41	1:50:49	3
(1)53:10:29:32:52:16	3:31:49	5:09:01	4
(1)48:54:01:40	1:05	1:37	5
(1)47:06:41:40	5:19	8:01	6
(1)43:11:56:28:26:40	38:11	59:01	7
(1)41:33:45:14:03:45	13:19	20:49	8
(1)38:33:36:36	8:01	12:49	9
(1)35:10:02:28:27:24:26	1:22:41	2:16:01	10
(1)33:45	45	1:15	11
(1)29:21:54:02:15	27:59	48:49	12
(1)27:00:03:45	2:41	4:49	13
(1)25:48:51:35:06:40	29:31	53:49	14
(1)23:13:46:40	56	1:46	15

Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322>

Os babilônicos também tinham conhecimento de três médias. Se b é a média de a e c onde a < c, então as três quantidades estão relacionadas por uma das proporções seguintes, a aritmética $\frac{b-a}{c-b}$ = $\frac{a}{a}$, a geométrica $\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{b}$ e a subcontrária(harmônica), $\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{c}$.

Vamos explicar um pouco sobre essas proporções que se tornam médias. Observemos o raciocínio abaixo:

Se b é a média aritmética de a e c onde $0 < a$ < c , podemos relacionar os três valores através da proporção $\frac{b-a}{c-b}$ = $\frac{a}{a}$.

De fato,

$$\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{a} \Rightarrow \frac{b-a}{c-b} = \frac{1}{1},$$

aplicando produto dos meios pelos extremos temos,

$$b - a = c - b \Rightarrow b = \frac{a+c}{2}.$$

Analogamente, podemos mostrar que

$$\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b = \sqrt{a \cdot c} \qquad \text{e} \qquad \frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow b = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}.$$

1.3 Grécia

A Grécia está situada no sudeste da Europa, no sul da península Balcânica. A Grécia é circulada ao norte pela Bulgária, pela Macedônia e pelo Império Persa; ao oeste pelo mar Jônico; ao sul pelo mar Mediterrâneo e a leste pelo mar Egeu e pela Turquia, Figura 1.4.

Figura 1.4: Grécia

Fonte: http://radiomaffei.blogspot.com/2013/02/alguns-mapas-da-grecia-antiga.html

Em relação ao conhecimento, dentre as civilizações antigas que mais se destacam está a grega, não só pela matemática, pois a Grécia era conhecida como o berço do conhecimento mundial. Quase não há registros e nem fontes originais de formas primitivas do uso da matemática. A história dos 300 primeiros anos da matemática na Grécia foi ofuscada pela grandeza dos Elementos de Euclides, escritos por volta de 300 a.C., segundo (EVES, 2011).

As fontes de estudos da matemática grega pré–Euclides é quase toda obtida de forma indireta através do chamado Sumário Eudemiano, de Proclo. Esse sumário é um breve resumo do desenvolvimento da matemática grega até Euclides.

Nesse sumário continha descrições sobre os feitos de Tales, de Mileto e Pitágoras de Samos, os quais foram os fundadores das Escolas Ioniana e Pitagórica, respectivamente.

Enquanto na Mesopotâmia e no Egito a matemática era essencialmente voltada para as atividades práticas, essas duas escolas passaram a questionar o porquê das coisas. Diferente dos egípcios, com Tales, a geometria passou a ser estudada de forma abstrata e dedutiva e a filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que as causas últimas das várias características do homem e da matéria são os números inteiros e frações desses números, “todas as coisas são números”, segundo Pitágoras.

A escola pitagórica recebeu esse nome derivado de seu fundador e principal representante: Pitágoras de Samos. Ele defendia que todas as coisas são números e o princípio fundamental de tudo seria a estrutura numérica. A geometria era baseada na teoria das proporções, sendo aplicada apenas aos comensuráveis.

Uma das descobertas dos pitagóricos é a Teoria das Proporcionais. É bem provável que Pitágoras tenha tomado conhecimento das três médias aritmética, a geométrica e a harmônica e da “proporção áurea” que relaciona dois números com suas medias da seguinte forma: o primeiro de dois números está para sua média aritmética assim como a média harmônica está para o segundo número. Porém, os pitagóricos generalizaram esse trabalho acrescentando mais sete novas médias, perfazendo assim um total de dez médias. Se b é a média de a e c onde $a < c$, então as três quantidades estão relacionadas por uma das proporções seguintes (BOYER, 1974).

(1) $\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{a}$

(2) $\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{b}$

(3) $\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{c}$

(4) $\frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{a}$

(5) $\frac{b-a}{c-b} = \frac{b}{a}$

(6) $\frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{b}$

(7) $\frac{c-a}{b-a} = \frac{c}{a}$

(8) $\frac{c-a}{c-b} = \frac{c}{a}$

(9) $\frac{c-a}{b-a} = \frac{b}{a}$

(10) $\frac{c-a}{c-b} = \frac{b}{a}$

As quais representam segundo (SILVA, 2012):

(1) Proporção Aritmética crescente (6) Contrária à Geométrica 2

(2) Proporção Geométrica crescente (7) (7a - primeira de quatro)

(3) Proporção Harmônica crescente (8) (8a - segunda de quatro)

(4) Subcontrária à Harmônica (9) (9a - terceira de quatro)

(5) Contrária à Geométrica 1 (10) (10a - quarta de quatro)

Esses fatos mostram bem o conhecimento das proporções entre os gregos. A obra Os Elementos, atribuída a Euclides, 300 a.C., é uma das mais influentes na História da Matemática servindo como o principal livro para o ensino de matemática (especialmente geometria) desde a data da sua publicação até o fim do século XIX e início do século XX.

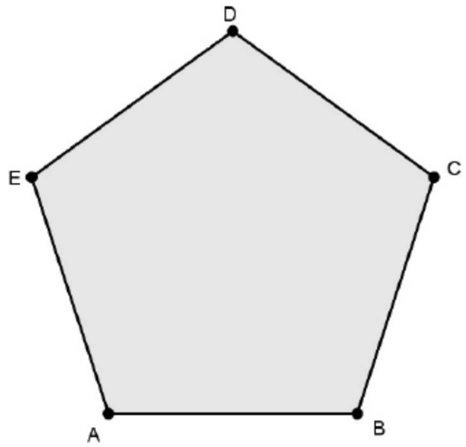
Nessa obra, os princípios do que é hoje chamado de geometria euclidiana foram deduzidos a partir de um pequeno conjunto de axiomas. São treze livros, um deles, o livro V, é dedicado apenas a Teoria das Proporções. (EVES, 2011)

Como já foi dito, na Grécia, a palavra número somente era usada para os inteiros, uma vez que a fração era vista como relação entre inteiros ou como uma razão. A ideia da existência de quantidades que não podem ser expressas por números surge na matemática grega no contexto de alguns problemas geométricos que podem parecer elementares, como é o caso da diagonal de um quadrado ou do perímetro de uma circunferência.

No livro Os Elementos de Euclides, na tradução por Irineu Bicudo (2009), é posto que os pitagóricos provavelmente conheciam as propriedades do pentágono regular e uma das questões que mais encanta na geometria pitagórica diz respeito a construção do pentagrama ou pentágono estrelado.

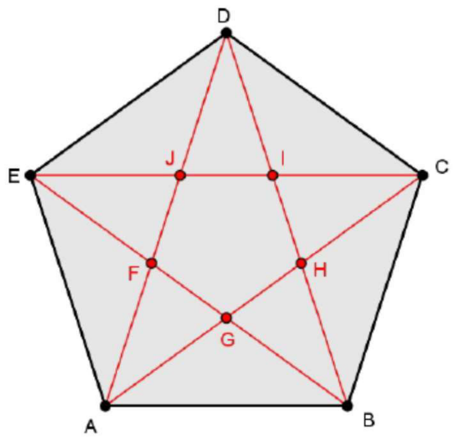
Vamos falar um pouco sobre essas propriedades. Começando com o pentágono regular $ABCDE$ como mostra a Figura 1.6, temos a propriedade do pentágono regular.

Figura 1.5: Pentágono $ABCDE$



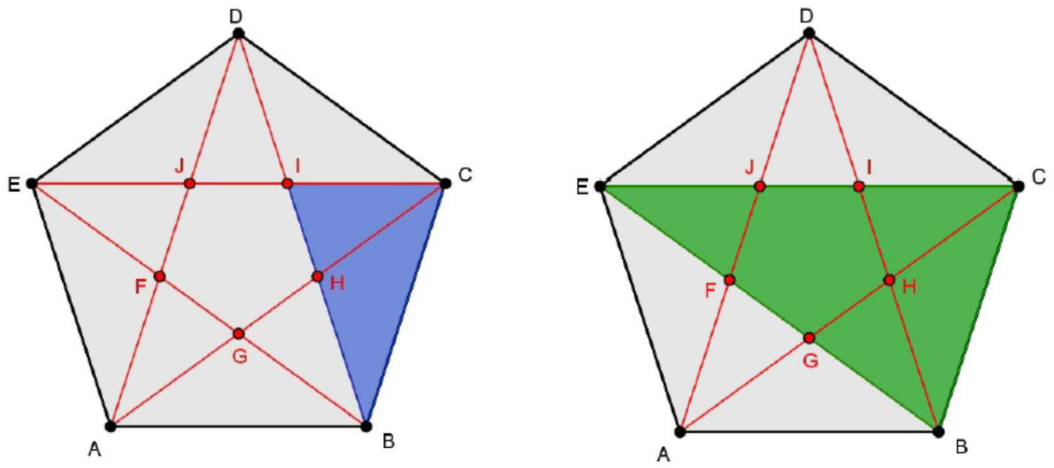
Traça-se suas diagonais, elas se cortam em pontos $FGHIJ$, que formam outro pentágono regular como na Figura 1.6.

Figura 1.6: Pentágono $ABCDE$ com suas 5 diagonais



Observa-se que o triângulo BCI e semelhante ao triângulo EBC (isósceles) além desses, há muitos outros pares de triângulos semelhantes.

Figura 1.7 Pentágono destacando os triângulos BCI e EBC



Assim, é fácil ver que os pontos $F, G, H, I\ e\ J$ dividem as diagonais em dois segmentos tais que a razão da diagonal toda para o maior segmento é igual à deste para o menor segmento. Algumas proporções que podem ser escritas:

$$\frac{AC}{GC} = \frac{GC}{AG} \quad \frac{BD}{HD} = \frac{HD}{BH} \quad \frac{CE}{IE} = \frac{IE}{CI} \quad \frac{DA}{JA} = \frac{JA}{DJ} \quad \frac{EA}{FB} = \frac{FB}{EF}$$

Essa é a divisão de um segmento em média e extrema razão que se tornou muito familiar para os gregos. Por volta de dois mil anos mais tarde essa subdivisão ficou conhecida como “secção áurea” de um segmento (Veja mais sobre a razão áurea na Seção 2.3).

1.3.1 Thales

Dedicamos esta seção a um grande matemático e filosofo grego. Ele fez algo prodigioso medindo a altura da Pirâmide de Queops (a mais alta das pirâmides) usando como ferramenta um pedaço de pau e a ideia de proporção. Algo que impressionou até o faraó que era considerado um deus para os egípcios por sua sabedoria.

Segundo Boyer (1998), Thales teria nascido no ano de 640 a.C. na cidade de Mileto, na Grécia antiga e sua morte teria ocorrido, aproximadamente, aos 78 anos, entre 548-545 a.C. A data de sua morte foi tomada com base no eclipse total do Sol ocorrido em 28 de maio de 585 a.C. Segundo Eves (2004), a geometria demonstrativa começou com Tales de Mileto, um dos “sete sábios” da Antiguidade, durante a primeira metade do sexto século a.C.

Thales era descendente de família nobre, esse fato deve ter ajudado na prática de várias atividades. Por ser nobre, provavelmente proporcionou que ele tivesse acesso a muitas informações e tempo para que estudasse. Foi estadista, matemático, astrônomo, engenheiro e próspero comerciante, que passava a grande parte do seu tempo viajando. São atribuídas muitas descobertas Matemáticas a ele. Thales desenvolveu uma estrutura lógica para a geometria e introduziu, nesse estudo, a ideia de prova. Existem evidências de que ele escreveu um livro sobre navegação, intitulado *O guia da estrela Náutica*. “É também muito conhecido o fato de Tales ter aconselhado os navegantes a se guiarem pela Ursa Menor em vez da Ursa Maior, como era a prática corrente da navegação. Isso se deve ao fato de a Ursa Menor conter a estrela polar que está a apenas um grau do pólo celeste” (LINTZ, 1999: 35).

Thales alcançou fama, como cientista na previsão do eclipse total do Sol. Para alguns pesquisadores há dúvidas sobre a autenticidade dessa história, mas Lintz (1999, 32-33) afirma que “(...) deve ter sido baseado nas observações dos Babilônios e Caldeus que já tinham estabelecido de maneira bastante completa os ciclos dos eclipses do sol e da lua.

Segundo Eves (2004), em geometria, creditam-se a ele os seguintes resultados elementares:

1. Qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que e traçado.
2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
3. Ângulos opostos pelo vértice são iguais.
4. Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais. [Tales talvez tenha usado esse resultado na determinação que fez da distância de um navio a praia

5. Um ângulo inscrito num semicírculo e reto. (Este resultado era do conhecimento dos babilônios cerca de 1400 anos antes.) .

Segundo Eves (2004), Ha duas versões de como Tales calculou a altura de uma pirâmide egípcia por meio da sombra. O relato mais antigo, dado por Hieronimos, um discípulo de Aristóteles, diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que esta era igual a altura da pirâmide que a projetava. A versão posterior, dada por Plutarco, diz que ele fincou verticalmente uma vara e fez uso da semelhança de triângulos. Ambas as versões peçam ao não mencionar a dificuldade de obter, nos dois casos, o comprimento da sombra da pirâmide — isto e, a distância da extremidade da sombra ao centro da base da pirâmide.

1.3.2 Eudoxo

Dedicaremos esta seção a um outro estudioso grego que se destacou no estudo das proporções.

Eudoxo (viveu entre 408 a 355 a.C.) foi um astrônomo, matemático e filósofo. Considerado por alguns como o maior dos matemáticos gregos clássicos, e em toda a antiguidade, perdendo apenas para Arquimedes. Ele rigorosamente desenvolveu o Método da Exaustão, de Antífona, se tornou um precursor do cálculo integral (EVES, 2011). Eudoxo provou tais afirmações matemáticas como: as áreas dos círculos estão entre si como os quadrados dos seus raios, os volumes das esferas estão um para o outro como os cubos dos seus raios, o volume de uma pirâmide é um terço do volume de um prisma com a mesma base e altura e o volume de um cone é um terço da de seu cilindro correspondente. Na Astronomia teve sua contribuição, viajou ao Egito, de onde teria trazido o cálculo mais exato do ano solar que introduziu na Grécia. O valor que atribuía era de 365 dias e 1/4, valor adotado pelo calendário juliano.

Eudoxo define, também, a igualdade de razões, que se aplica a grandezas comensuráveis ou incomensuráveis e contém a ideia de proporcionalidade:

> Diz-se que quatro grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando equimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que, os últimos equimúltiplos considerados em ordem

correspondente (Definição 5 do V Livro de Os Elementos de Euclides, Irineu Bicudo, 2009).

Nessa definição usaremos como grandeza um segmento de reta, tal qual como está na definição original de Eudoxo, porém com notações atuais. Esta definição se encontra no Livro V, Os Elementos de Euclides. Dados quatro segmentos A, B, C e D, diz–se que A está para B assim como C está para D, se quaisquer que sejam m e n inteiros positivos, então

$$n \cdot A > m \cdot B \Rightarrow n \cdot C > m \cdot D,$$
$$n \cdot A = m \cdot B \Rightarrow n \cdot C = m \cdot D,$$
$$n \cdot A < m \cdot B \Rightarrow n \cdot C < m \cdot D,$$

Com essa definição Eudoxo conseguiu resolver o problema gerado pela descoberta dos números irracionais por Pitágoras, assim como teve uma grande influência na elaboração de uma teoria dos números reais por Dedekind, mais de dois milênios após sua elaboração.

Uma das consequências, supostamente causadas pela teoria das proporções de Eudoxo, foi forçar a forte separação entre números e geometria, deixando somente à geometria o tratamento das razões incomensuráveis. Os gregos foram um tanto afastados de um desenvolvimento numérico da Matemática. A aritmética e a álgebra só voltariam a ganhar importância e autonomia próprias com a influência árabe, a partir do século XII.

2 RAZÃO E PROPORÇÃO

Neste capítulo apresentam-se as definições de razão e outras definições relacionadas com razão, mostrando a equivalência entre elas. É também abordado o conceito de proporção, bem como suas propriedades e aplicações, algumas demonstrações do Teorema de Thales e a definição de razão áurea.

2.1 Razão

Definição 2.1 Sejam $a,\ b \in \mathbb{R}$, e $b\ \neq\ 0$, o quociente $\frac{a}{b}$ é chamado de razão de a para b.

Ao se trata de uma grandeza que é uma razão entre duas medidas, essa razão entre as medidas será um número se, para essas medidas, for possível obter um submúltiplo comum na mesma unidade de medida. Caso essa razão seja entre grandezas de espécies diferentes teremos que manter as unidades de medidas inicialmente usadas.

Algo crucial a ser destacado é a importância do uso da razão no cotidiano, a qual pode ser usada para estabelecer uma comparação entre duas grandezas, tornando-se uma ferramenta poderosa na resolução de problemas do cotidiano e podem ser de grande ajuda na tomada decisões. Por exemplo, podemos usar a razão para calcular a velocidade média, encontrando a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto no percurso, que é muito útil no trânsito.

Também a densidade demográfica de uma região, que é a razão entre o número de habitantes e a área dessa região se a região tiver uma grande densidade, a região é boa para investir em um supermercado.

Calcular o índice de massa corporal (IMC), que é razão entre a massa do corpo e o quadrado da altura, e com auxílio do educador físico e outros dados, pode-se tomar a decisão de emagrecer ou não, dentre várias outras aplicações.

Por exemplo: em um simpósio de matemática, ao conferir a quantidade de participantes verificou-se que existiam 15 mulheres e 30 homens. Daí, uma forma de relacionar o número de mulheres e o número de homens no simpósio é através do cálculo da razão.

O número de mulheres (M) está para o número de homens (H) na razão de 15 para 30, se escreve:

$$\frac{M}{H} = \frac{15}{30}$$

Simplificando, temos:

$$\frac{M}{H} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

Essa igualdade informa é que para cada 1mulher participando do simpósio, 2 homens também estão participando. Tomemos então a razão $\frac{M_i}{H_i} = \frac{1}{2}$, onde M_i é a quantidade de mulheres e H_i a quantidade de homens inscritos no simpósio. Agora temos $w = mdc$[1](M_i, H_i) então, w caberá, 1 vez em M_i e 2 vezes em H_i, ou seja $M_i = 1w$ e $H_i = 2w$. Somando as duas igualdades obtemos, $M_i + H_i = 3w$.

Logo essa igualdade diz que w cabe 3 vezes em $M_i + H_i$, ou seja, é múltiplo de três, que são os números $3, 6, 9, 12, 15. .$. Assim se tornarmos $w = 14$, por exemplo, teremos:

$$M_i + H_i = 3.w$$

$$M_i + H_i = 3.14$$

$$M_i + H_i = 42$$

Ou seja, o simpósio teria 42 participantes, dos quais $M_i = 1.14 = 14\ e\ H_i = 2.14 = 28$, então teríamos 14 mulheres e 28 homens no simpósio.

---

[1] Dados a, b e $c \in \mathbb{N}$, c é Máximo Divisor Comum de $a\ e\ b$, se $c|\ a$ e $c|\ b$ e se $\exists d \in \mathbb{N}|\ d|\ a$ e $d|\ b$ então $d \leq c$. Logo , $c = mdc(a, b)$.

Vamos relembrar a definição de igualdade entre duas frações para isso usaremos a definição dada por (RPM05, 2010).

Definição 2.2 (Igualdade de frações). Sejam $\frac{m}{n}$ e $\frac{m\prime}{n\prime}$ duas frações com $n, m, n' e\ m'$ inteiros positivos, dizemos que elas são iguais se, e somente se, $m \cdot n' = m' \cdot n$, e se escreve,

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \Leftrightarrow m \cdot n' = m' \cdot n$$

Definição de razão entre grandezas comensuráveis (RPM07, 2010). Considere duas grandezas, A e B, de mesma espécie e medidas na mesma unidade (ambos segmentos de reta, áreas, volumes, massa, etc....).

Definição 2.3 Diz que A está para B na razão $\frac{m}{n}$ e se escreve

$$\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$$

se existe u tal que

$$A = m \cdot u \ e \ B = n \cdot u$$

Sendo u a unidade de medida de A e de B, isto é, u cabe m vezes em A e n vezes em B, com m e n inteiros positivos.

Mostremos agora que a definição dada tem significado único e preciso. Ou seja, se existem outros u', unidade de medida de A e de B, e inteiros m' e n' tais que

$$A = m' \cdot u' \, e \, B = n' \cdot u'$$

Pela definição dada, a razão de A para B seria o número $\frac{m\prime}{n\prime}$, desde que $\frac{m}{n} = \frac{m\prime}{n\prime}$, isto é, $m \cdot n' = m' \cdot n$

(i). Mostremos primeiro que se (2.2) e (2.3) ocorrerem então,

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \Leftrightarrow m \cdot n' = m' \cdot n$$

De fato, multiplicando em (2.2) $A = m.u$ por n, obtemos:

$$n \,.\, A = n \,.\, (m.u)$$

Usando a propriedade associativa e comutativa, temos

$$= m.(n \,.\, u)$$
$$= m.B$$

Substituindo nessa última igualdade os valores obtidos em (2.3), tem-se que

$$n \cdot (m' \cdot u') = m \cdot (n' \cdot u')$$

Usando a propriedade associativa, temos

$$(n \cdot m') \cdot u' = (m \cdot n') \cdot u' n \cdot m'$$
$$= m \cdot n'$$
$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$$

como queríamos demonstrar.

(ii). Mostremos agora que se (2.2) e (2.3) ocorrerem, então

$$A = m' \cdot u' \; e \; B = n' \cdot u'.$$

De fato, multiplicando em (2.3) $A = m' \cdot u'$ por n', obtemos

$$n' \cdot A = m' \cdot B,$$

como antes.

Agora dividindo A em m' unidades de medida iguais a um certo u', e B em n’ unidades de medida iguais a u’ encontramos $A = m' \cdot u'$ que é a primeira relação em (2.3). Substituindo

$A = m' \cdot u'$ em $n \cdot A = m \cdot B$, teremos,

$$m \cdot B = n \cdot A$$
$$= n \cdot (m' \cdot u')$$

Usando a propriedade associativa, temos

$$= (m' \cdot n) \cdot u'$$

Por outro lado, substituindo $m' \cdot n = m \cdot n'$, por (2.1), na igualdade abaixo, obtemos

$$(m \cdot n') \cdot u' = m \cdot B$$
$$\Rightarrow m \cdot (n' \cdot u') = m \cdot B \text{ (associativa)}$$
$$\Rightarrow n' \cdot u' = B$$
$$\Rightarrow B = n' \cdot u'$$

que é a última igualdade de (2.3), assim fica demonstrado (ii). Por (i) e (ii) fica demonstrado que a Definição 2.3 dada tem significado único e preciso.

Definição 2.4 Diz–se que A está para B na razão $\frac{m}{n}$ se, e somente se, $n \cdot A = m \cdot B$, isto é,

$$\frac{A}{B} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow \mathrm{n} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{B}$$

Mostrar que a Definição 2.2 implica na Definição 2.3 já está demonstrado, mostraremos agora que Definição 2.3 implica na Definição 2.4. De fato, suponhamos que existam inteiros m e n tais que $n \cdot A = m \cdot B$, tomemos u, unidade de medida, de tal forma que

$$A = m \cdot u$$

Multiplicando essa última igualdade por n, obtemos

$$n \cdot (m \cdot u) = m \cdot B$$
$$\Rightarrow m \cdot (n \cdot u) = m \cdot B$$
$$\Rightarrow n \cdot u = B$$
$$\Rightarrow B = n \cdot u$$

Dai,

$$\frac{A}{B} = \frac{m \cdot \mathrm{u}}{n \cdot \mathrm{u}} \Leftrightarrow \frac{A}{B} = \frac{m}{n}$$

Assim, fica demonstrado que a Definição 2.3 implica na Definição 2.4

2.2 Proporção

Como vimos, a razão é o quociente entre dois números, ou seja, resultando é um número, por exemplo: *A minha biblioteca pessoal possui* 50 *livros. Entre eles,* 30 *exemplares são de contos e* 20 *são livros de poesias. Portanto a razão entre o número de livros de poesia e o total de exemplares da minha biblioteca* é dado por $\frac{20}{50}$ = $0{,}4$, ou seja, um número.

Já a proporção é determinada pela igualdade entre duas razões, ou ainda, quando duas razões possuem o mesmo resultado. Utilizando-se do mesmo exemplo anterior, suponhamos que exista uma outra biblioteca que tenha um total de 80 livros e a razão entre a quantidade de livros de poesia e o total de livros desta biblioteca seja também $0{,}4$. Logo, podemos estabelecer uma relação entre as quantidades de livros nas bibliotecas e encontrar a quantidade de livros de poesia da outra biblioteca. Esta relação de comparação é chamada de proporção. Ainda que não tenhamos consciência disso, utilizamos cotidianamente os conceitos de razão e proporção. Para preparar uma receita, por exemplo, utilizamos certas medidas proporcionais entre os ingredientes.

Definição 2.5. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com $b \neq 0$ e $d \neq 0$, dizemos que eles estão em proporção, na ordem dada, se, e somente se, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = c \cdot b$ .Isto é, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é condição necessária e suficiente para que se tenha $a \cdot d = c \cdot b$.

Proposição (propriedade das proporções): se $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$, então:

$$P_1 : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d} \; ;$$

$$P_2 : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c} \text{ ;}$$

$$P_3 : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ;}$$

$$P_4 : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{a.c}{b.d}$$

Demonstração de (P_1): Mostraremos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$. Basta adicionar 1 a ambos os membros da igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ obtemos:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

Para demonstrar que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$, basta adicionar -1 a ambos os membros $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e proceder como no caso anterior.

Demonstração de (P_2): $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$. Se multiplicarmos ambos os membros da igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ por $\frac{b \cdot d}{a \cdot c}$ obtemos:

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{b.d}{a.c} = \frac{c}{d} = \frac{b.d}{a.c} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \text{ ;}$$

Por P_1:

$$\frac{b+a}{a} = \frac{d+c}{c} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

Portanto:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}.$$

Da mesma forma que foi demostrada a segunda parte de P_1 se demonstra a segunda parte de P_2 , ou seja, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$.

Demonstração de (P_3): Demonstraremos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. A segunda igualdade vem da própria definição de igualdade. Demonstrarmos a primeira igualdade, ou seja, que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. De fato, pela definição de proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c$ adicionando aos dois membros $a.b$ obtemos:

$$a.d = b.c \Leftrightarrow a.b + a.d = b.c + a.d$$

$$\Leftrightarrow a.(b+d) = b.(a+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$$

E portanto:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Do mesmo modo se demonstra que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Demonstração de (P_4): De fato, elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ obtemos $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{d}\right)^2$ que equivale a $\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$, assim fica demonstrado a primeira igualdade. Agora basta multiplicar $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ por $\frac{c}{d}$,

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a.c}{b.d}=\left(\frac{c}{d}\right)^2$$

Agora é só multiplicar a igualdade $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ por $\frac{a}{b}$, temos:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}\Leftrightarrow\frac{a^2}{b^2}=\frac{a.c}{b.d}$$

Daí,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}=\frac{a.c}{b.d}$$

2.2.1 Teorema de Tales

Como vimos Tales é um personagem importante para a histórias das proporções e principalmente no que diz respeito no seu teorema sobres as paralelas. Por esse motivo dedicaremos esta seção para fazer alguns enunciados e demonstrações desse teorema.

De início faremos uma demonstração pela Teoria da Proporção - até antes da descoberta da Teoria das Proporções, trabalhava-se apenas com o caso em que os segmentos (grandezas) eram comensuráveis, associado a número natural ou a uma razão de dois números naturais. Entretanto, após a descoberta do problema das grandezas incomensuráveis, muitos dos matemáticos gregos voltaram-se para solucionar o problema das grandezas incomensuráveis, desenvolvendo, assim, novas teorias.

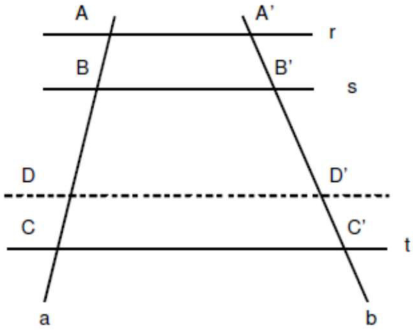
Esse problema foi resolvido pela descoberta da teoria das proporções de Eudoxo de Cnido (408 a.C. - 355 a.C.), encontrado no Livro V de *Os Elementos* de Euclides.

Demonstremos agora o Teorema de Tales, supondo, agora, para segmentos incomensuráveis ou não, pela definição de proporção de Eudoxo.

DEFINIÇÂO: Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas transversais, então as medidas dos segmentos correspondentes que estão sobre a reta são diretamente proporcionais.

Demonstração: Para provar o teorema de Thales utilizando a teoria das proporções devemos considerar os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ (comensuráveis ou não), em que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$ válida, se as três condições abaixo, para todo m e n naturais quaisquer, forem satisfeitas:

Se $n \cdot AB < m \cdot BC \Rightarrow n \cdot A'B' < m \cdot B'C'$;
Se $n \cdot AB = m \cdot BC \Rightarrow n \cdot A'B' = m \cdot B'C'$;
Se $n \cdot AB > m \cdot BC \Rightarrow n \cdot A'B' > m \cdot B'C'$.



Agora provaremos cada uma dessas afirmações. Assim, tomaremos m e n dois números naturais quaisquer, iremos dividir o segmento AB em m partes iguais cada uma determinando um segmento U, então teremos $AB = m \cdot U$ e traçando-se paralelas dividiremos $A'B'$ em m partes iguais de um certo U', de modo que $A'B' = m \cdot U'$. Na reta *a*, partindo de B para C, marcaremos n segmentos U $(BC = n \cdot U)$. Do mesmo modo na reta *b*, partindo de B' para C', marcaremos n segmentos U' $(B'C' = n \cdot U')$. Sendo D a última extremidade do último segmento contido em BC podemos ter três casos possíveis:

1º caso: D está entre B e C $(n \cdot AB < m \cdot BC \Rightarrow n \cdot A'B' < m \cdot B'C')$;
2º caso: D coincide com C $(n \cdot AB = m \cdot BC \Rightarrow n \cdot A'B' = m \cdot B'C')$;
3º caso: D está além de C $(n \cdot AB > m \cdot BC \Rightarrow n \cdot A'B' > m \cdot B'C')$.

Analisando o **1º caso** em que D está entre B e C.

De $AB = m \cdot U$ temos que $n \cdot AB = n \cdot m \cdot U$ e de $BD = n \cdot U$ temos que $m \cdot BD = m \cdot n \cdot U$. Logo $n \cdot AB = m \cdot BD$.

Como $BD < BC$ então $n \cdot AB = m \cdot BD < m \cdot BC$. Portanto $n \cdot AB < m \cdot BC$.

Por outro lado, de $A'B' = m \cdot U'$ temos que $n \cdot A'B' = n \cdot m \cdot U'$ e de $B'D' = n \cdot U'$ temos que $m \cdot B'D' = m \cdot n \cdot U''$. Logo $n \cdot A'B' = m \cdot B'D'$.

Como $B'D' < B'C'$ então $n \cdot A'B' = m \cdot B'D' < m \cdot B'C'$. Portanto $n \cdot A'B' < m \cdot B'C'$.

Concluímos que $n \cdot AB < m \cdot BC \Rightarrow n \cdot A'B' < m \cdot B'C'$.

O **2º caso** em que D coincide com C.

De $AB = m \cdot U$ temos que $n \cdot AB = n \cdot m \cdot U$ e de $BD = n \cdot U$ temos que $m \cdot BD = m \cdot n \cdot U$. Logo $n \cdot AB = m \cdot BD$.

De $A'B' = m \cdot U'$ vem que $n \cdot A'B' = n \cdot m \cdot U'$ e de $B'C' = n \cdot U'$ vem que $m \cdot B'C' = m \cdot n \cdot U'$.

Logo $n \cdot A'B' = m \cdot B'C'$

Concluímos que $n \cdot AB = m \cdot BD \Rightarrow n \cdot A'B' = m \cdot B'C'$.

O **3º caso** em que D está além de C.

De $AB = m \cdot U$ temos que $n \cdot AB = n \cdot m \cdot U$ e de $BD = n \cdot U$ temos que $m \cdot BD = m \cdot n \cdot U$. Logo $n \cdot AB = m \cdot BD$.

Como $BD > BC$ então $n \cdot AB = m \cdot BD > m \cdot BC$. Logo $n \cdot AB > m \cdot BC$.

De $A'B' = m \cdot U'$ temos que $n \cdot A'B' = n \cdot m \cdot U'$ e de $B'D' = n \cdot U'$ então m$\cdot B'D' = m \cdot n \cdot U'$. Logo $n \cdot A'B' = m \cdot B'D'$.

Como $B'D' > B'C'$ então $n \cdot A'B' = m \cdot B'D' > m \cdot B'C'$.

Logo $n \cdot A'B' = m \cdot B'D' > m \cdot B'C'$.

Concluímos que $n \cdot AB > m \cdot BD \Rightarrow n \cdot A'B' > m \cdot B'C'$.

Portanto, as três condições estão satisfeitas, provando que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$.

Vamos fazer outro enunciado e demonstração do Teorema de Tales que se encontra em LIMA, 2004.

Para a prova o Teorema, o autor, durante a demonstração, utiliza o teorema, abaixo, porém não iremos demonstrá-lo, apenas enunciá-lo (LIMA, 2004: 129):

Teorema: As seguintes afirmações a respeito de $y = f(x)$ são equivalentes:

1) y é diretamente proporcional a x;

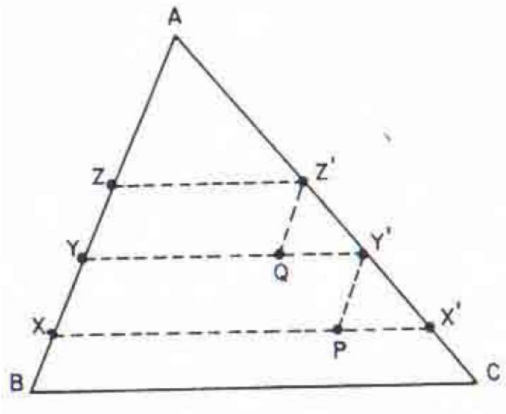
2) para todo número real $c > 0$, tem-se $f(c.x) = c.f(x)$;

3) existe um número k, chamado a "constante de proporcionalidade"

entre x e y, tal que $f(x) = k.x$ para todo x.

Segue o enunciado e a demonstração do teorema de Thales

Teorema 2.2 Toda paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois lados em segmentos proporcionais.



Demonstração: Seja ABC o triângulo. A cada ponto X do lado AB façamos corresponder o ponto X' do lado AC, de tal modo que XX' seja paralela a BC. Provaremos que o comprimento $\mathrm{X'C}$ é diretamente proporcional ao comprimento XB. Em primeiro lugar, é claro que se X, Y são pontos de AB tais que $\mathrm{XB} < \mathrm{YB}$ então $\mathrm{X'B} < \mathrm{Y'B}$ porque XX' e YY' são paralelos. Em seguida, afirmamos que se os pontos $\mathrm{X, Y, Z}$ do lado AB são tais que $\mathrm{XY} = \mathrm{YZ}$ então $\mathrm{X'Y'} = \mathrm{Y'Z'}$. Para ver isto, tomemos os pontos P em XX' e Q em YY' de modo que $\mathrm{Y'P}$ e $\mathrm{Z'Q}$ sejam paralelas a AB. Os triângulos $\mathrm{PX'Y'}$e $\mathrm{QY'Z'}$ são congruentes porque têm um lado igual ($\mathrm{PY'} = \mathrm{QZ'}$) compreendido entre ângulos iguais. Desta observação resulta que se X, Ysão pontos de AB com $\mathrm{YB} = \mathrm{n} \cdot \mathrm{XB}$ então seus correspondentes X', Y' no lado AC são tais que $\mathrm{Y'C} = \mathrm{n} \cdot \mathrm{X'C}$. Isto conclui a verificação de que o comprimento $\mathrm{X'C}$ é diretamente proporcional a XB. Pelo Teorema 1, existe uma constante k tal que, para todo ponto X do segmento AB, tem-se $\mathrm{X'C} = \mathrm{k} \cdot \mathrm{XB}$ (1). Em particular, para $\mathrm{X} = \mathrm{A}$, como $\mathrm{A}' = \mathrm{A}$, obtemos $\mathrm{AC} = \mathrm{k} \cdot \mathrm{AB}(2)$. Subtraindo (1) de (2) vem: $\mathrm{AX}' = \mathrm{k} \cdot \mathrm{AX}(3)$. Dividindo a igualdade (3) pela igualdade (1) resulta:

$$\frac{AX'}{X'C} = \frac{AX}{XB}$$

Isso é precisamente o que estipula o Teorema de Tales. (LIMA, 2004: 132-133)

Em seguida o autor faz uma observação que “o Teorema de Tales equivale a afirmar que $X'C$ é diretamente proporcional a XB. O leitor interessado poderá verificar que a constante de proporcionalidade $k = \frac{AC}{AB}$ é igual a $\frac{senB}{senC}$” (LIMA, 2004: 133).

2.3 Razão áurea

Grande parte dessa seção foi extraída de SANTOS (2020) e aqui vamos dar mais ênfase no que foi falado na Seção 1.3 sobre a razão áurea.

Há várias maneiras de dividir um segmento $\overline{AB}$ em duas partes. O matemático alemão Zeizing afirmou, em 1855, a seguinte declaração: "Para que um todo dividido em duas partes desiguais pareça belo do ponto de vista da forma, deve apresentar entre a parte menor e a maior a mesma relação que entre esta e o todo. ”

A primeira definição da Razão Áurea (“razão extrema e média) foi dada por volta de 300 a.C. por Euclides de Alexandria. Nas palavras de Euclides: “Diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor” (Figura 2.1).

A definição geométrica da Razão Áurea é: Dado um segmento $\overline{AB}$, para escolher um ponto C entre A e B, tal que C divida o segmento $\overline{AB}$ é necessário que sendo $\overline{AC} > \overline{BC}$, então $\overline{AC}$ dividido por $\overline{BC}$ é igual a $\overline{AB}$ dividido por $\overline{AC}$.

Figura 2.1 Segmento Áureo

Com isso, temos a relação matemática:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

2.3.1 Valor Numérico

Considerando o segmento $\overline{AC}=x$ e $\overline{BC}=y$ da Figura 2.1 e substituindo os valores na definição,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

temos:

$$\frac{x}{y}=\frac{x+y}{x} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{y}{x}+1$$

Chamando $\frac{x}{y}=k$, temos $k=\frac{1}{k}+1 \Rightarrow k^2=1+k \Rightarrow k^2-k-1=0$. Agora basta resolver a equação do 2º grau:

$$k=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow k=\frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2-4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2}$$

$\Rightarrow k=\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ e como k é positivo, pois é a razão entre as medidas de dois segmentos de reta, temos $k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1,6180339887...

Apenas em 1899 que começou a utilizar-se a letra grega Phi (Φ) (lê-se fi) para representar o Número de Ouro. Até então, usava-se a letra grega tau (τ), que em grego, significa “o corte”, entretanto o matemático americano Mark Barr, sugeriu começar a utilizar a letra Phi fazendo menção a Fídias, um dos maiores escultores e arquitetos da Grécia que viveu entre 490 e 460 a.C. Alguns historiadores da arte sustentam que Fídias utilizava Razão Áurea como fator de proporção em suas esculturas. As maiores realizações desse escultor foram o “Partenon de Atenas” e o “Zeus” no templo de Olímpia

Percebe-se a presença da Razão Áurea em diversas figuras geométricas como, Pentagrama, triângulo áureo, retângulo áureo, em algumas espirais e outras figuras geométricas. Essas figuras auxiliam na compreensão dos elementos da natureza. Por exemplo, a quantidade de folhas e o ângulo ideal para distribuição dos ramos de plantas podem estar relacionados ao Número de Ouro.

Durante toda a história muitas mentes matemáticas brilhantes, como Pitágoras, Euclides, Leonardo de Pisa, o astrônomo Johannes Kepler, o físico Roger Penrose, dedicaram horas de trabalho relacionadas a razão áurea e suas propriedades e segundo Livio (2015) esse estudo não se restringiu apenas aos matemáticos, mas também a biólogos, artistas, músicos, historiadores, arquitetos, psicólogos e até místicos que dedicam seu tempo a examinar e debater as bases da Razão Áurea, pois se trata de um número misterioso por surgir onde menos se espera. Segundo Tomás de Aquino: “a beleza é aquilo que agrada à mera contemplação”. Muitas coisas que são consideradas belas apresentam uma proporção chamada áurea.

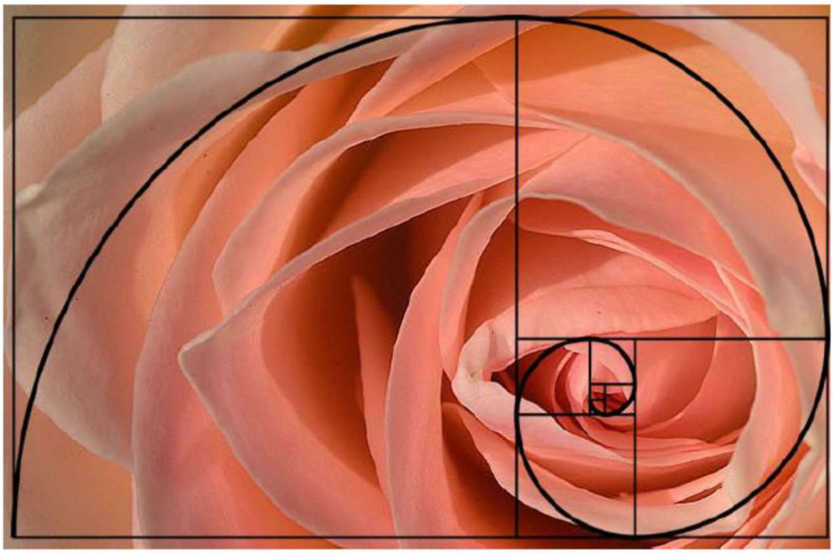
Vejamos algumas situações naturais onde esse número aparece, se pegarmos uma maçã, e cortarmos a fruta pela sua circunferência, encontraremos as sementes, que estão dispostas em um formato de uma estrela de cinco pontas, ou seja, um pentagrama, onde cada um dos triângulos isósceles que formam as pontas do pentagrama tem a propriedade da Razão Áurea.

Figura 2.2 Pentagrama na maçã

Fonte: http://profestevam.blogspot.com.br

Outra situação onde se pode observar o aparecimento da Razão Áurea é o arranjo das pétalas de uma rosa, observe a maneira com que elas se sobrepõem a suas antecessoras, veja a Figura 2.3.

Figura 2.3 Arranjos de pétalas de rosa

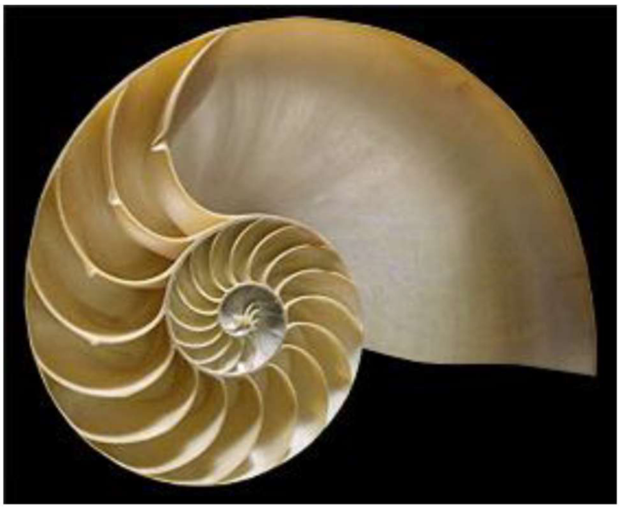


Fonte: estheraliu.blogspot.com

O crescimento das conchas espirais do molusco náutilo também obedece a um padrão orientado pela Razão Áurea.

Pode-se obter o espiral de ouro traçando um espiral por toda a concha, isso se dá pelo fato de que o crescimento dessa concha é proporcional ao crescimento do organismo que dela faz parte. Veja a Figura 2.4.

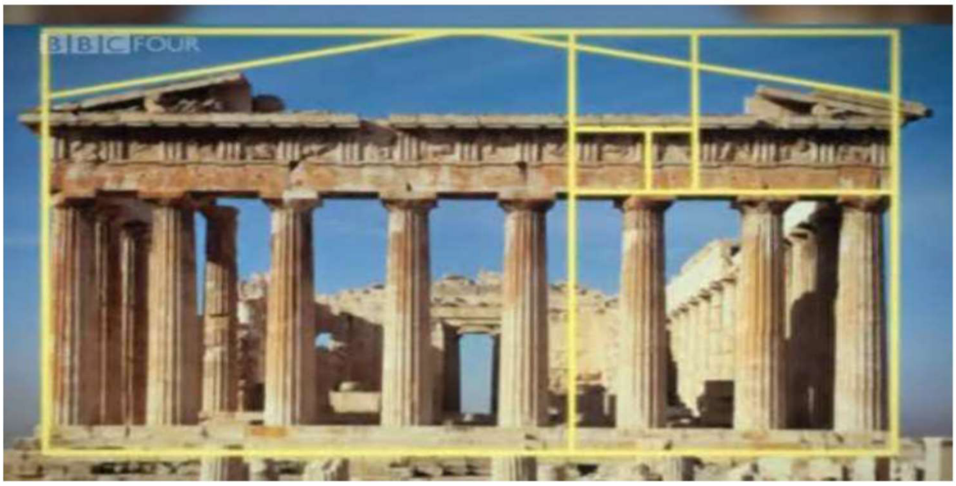
Figura 2.4 Cocha Marinha



Fonte: http://www.seasky.org/

Na Arquitetura, também podemos ver o aparecimento da razão áurea. Por exemplo: o Parthenon é conhecido também como templo da deusa Atena foi construído por Fídias entre 447 e 433 a.C. na Grécia, esse templo traz em seu frontispício vários retângulos áureos. Veja a Figura 2.5

Figura 2.5 Parthenon



Fonte: https://matematicalidades.files.wordpress.com/2011/03/partenon.png

3 TEOREMA FUNDAMENTAL DA PROPORCIONALIDADE E REGRA DE TRÊS

3.1 Grandezas Proporcionais

Assim como no capítulo anterior grande parte foi compilada de (LIMA, 2012). Suponhamos que duas grandezas x e y se relacionem de tal modo que a cada valor especificado de x corresponde um valor bem determinado de y. Nesse caso dizemos que y é função de x, $y = f(x)$.

Para os valores x_1 e x_2, da grandeza x, correspondem os valores

$$y_1 = f(x_1)$$

e

$$y_2 = f(x_2)$$

da grandeza. Se $x_1 < x_2$ implicar $y_1 < y_2$ diremos que y é uma função crescente de x. Se, todavia, $x_1 < x_2$ implicar $y_1 > y_2$, diremos que y é função decrescente de x.

Podemos definir Grandezas diretamente proporcionais, assim:

Definição 3.1 Diz-se que y é diretamente proporcional a x quando as seguintes condições forem satisfeitas:

1ª) y é função crescente de x;

2ª) se multiplicarmos x por um número natural n, o valor correspondente da grandeza, o valor correspondente de y ficará também multiplicado por n.

Em termos matemáticos: $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$, para todo valor de x e todo $n \in \mathbb{N}$. Para facilitar nosso trabalho, de agora em diante lidaremos apenas com grandezas cujas medidas são números positivos.

Exemplo 3.1 Seja x o volume e y a massa de uma porção de líquido homogêneo. A massa y é diretamente proporcional ao volume x.

De fato, aumentando o volume a massa também aumentará, além do mais multiplicar o volume x por n equivale adicionar n volumes iguais a x , isto é, $n \cdot x = x + x + x + \ldots + x$, onde o segundo membro dessa igualdade possui n parcelas iguais a x. Para cada volume x corresponde a massa y, e para parcelas iguais a n se fará corresponderem a n parcelas iguais a y, ou seja, $y + y + y + \ldots + y = n \cdot y$. Assim, teremos $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$, para todo x e para todo n natural.

Importante salientar que y pode ser uma função crescente sem que e seja diretamente proporcional a x. Por exemplo, a área de um quadrado é função crescente do lado porém, se dobramos o lado, a área fica multiplicada por quatro (em vez de dois).

Observamos que na definição de grandezas diretamente proporcionais dada por meio de duas condições, a primeira não é o suficiente, isto é, a segunda não é consequência dela. Mas, poderia a segunda condição implicar a primeira?

Se existissem apenas números racionais, ou seja, se duas grandezas da mesma espécie fossem sempre comensuráveis, então da igualdade

$f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ válida para todo x e todo n natural, poderíamos concluir que $y = f(x)$ é função crescente. Isto é o que mostraremos agora mas, antes vejamos o seguinte.

Lema 3.1 Se $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ para todo $x > 0$ e todo n natural, então $f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$ para todo número racional $r = \frac{p}{q}$ onde p e q são naturais.

$$q \cdot f(r \cdot n) =$$
$$f(q \cdot r \cdot n) = f\left(q \cdot \frac{p}{q} \cdot n\right)$$
$$= f(p \cdot n) = p.f(n) \Rightarrow$$

$$f(r \cdot n) = \frac{p}{q} \cdot f(n) \Rightarrow$$
$$f(r \cdot n) = r \cdot f(n)$$

Mostremos agora que a condição $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ implica a função $y = f(x)$ é crescente. Para isto, consideremos $x < x_1$. Então, $x_1 = c \cdot x$, onde $c > 1$. Se o número c fosse racional (ou seja, se as grandezas x e x_1 fossem comensuráveis), teríamos $f(x_1) = f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$ e dai $f(x) < f(x_1)$ porque

$c > 1$, e portanto $y = f(x)$ é crescente.

Entretanto, poderia ocorrer que c seja irracional (por exemplo x pode ser lado e x_1 a diagonal de um quadrado), e então não poderíamos utilizar o lema acima. O teorema abaixo, que é o resultado fundamental a respeito das grandezas proporcionais, esclarece a questão.

Teorema 3.1 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade). As seguintes afirmações a respeito de $y = f(x)$ são equivalentes:

1) y é diretamente proporcional a x;
2) para todo real $c > 0$, tem-se $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$;
3) existe um número k, chamado a "constante de proporcionalidade" entre x e y, tal que $f(x) = k \cdot x$ para todo x.

Demonstração: 1) ⇒ 2). Suponhamos, por absurdo, que $y = f(x)$ seja diretamente proporcional a y mas que se consiga achar um número real c tal que

$$f(c \cdot x) \neq c \cdot f(x).$$

Suponhamos inicialmente que $f(c \cdot x) < c \cdot f(x)$, isto é, $\frac{f(c \cdot x)}{f(x)} < c$ Entre dois números reais quaisquer existe sempre um número racional. Podemos então achar r racional tal que $\frac{f(c \cdot x)}{f(x)} < r < c$, o que significa $f(c \cdot x) < r \cdot f(x) < c \cdot f(x)$. O Lema 3.1 nos permite reescrever essas desigualdades como $f(c \cdot x) < f(r \cdot x) < c \cdot f(x)$. Mas a desigualdade $f(c \cdot x) < f(r \cdot x)$, juntamente com o fato de que $r < c$, está em contradição com a hipótese que y seja diretamente proporcional a x, e ser portanto uma função crescente em x. Suponhamos então que $f(c \cdot x) > c \cdot f(x)$, isto é, $\frac{f(c \cdot x)}{f(x)} > c$ e como entre dois números reais quaisquer sempre existe um racional, seja r esse racional de modo que $\frac{f(c \cdot x)}{f(x)} > r > c$, ou $f(c \cdot x) > r \cdot f(x) > c \cdot f(x)$ e pelo lema 3.1, temos desigualdade $f(c \cdot x) > f(r \cdot x) > c \cdot f(x) \Rightarrow f(c \cdot x) > f(r \cdot x)$, juntamente com o fato de ser $r > c$, está em contradição com a hipótese de que y seja diretamente proporcional a x, e ser, portanto, uma função crescente de x. Logo só podemos ter

$$f(c \cdot x) = c \cdot f(x).$$

2) ⇒ 3). Tomemos $k = f(1)$. Então, em virtude de 2) usada com x em lugar de c, temos

$f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = k \cdot x,$ logo $f(x) = k \cdot x$.

3) ⇒ 1). Por estarmos lidando apenas com grandezas cujas medidas são números positivos.

Logo, $k = f(1) > 0$. Então, $x < x_1$ implica $k \cdot x < k \cdot x_1$, ou seja,

$f(x) < f(x_1),$ portanto,

$y = f(x)$ é crescente em x. Além disso,

$$f(n \cdot x) = k \cdot n \cdot x = n \cdot (k \cdot x) = n \cdot f(x).$$

Portanto, y seja diretamente proporcional a x.

Já as grandezas inversamente proporcionais são assim definidas:

Definição 3.2 Diz-se que y é inversamente proporcional a x quando as seguintes condições forem satisfeitas:

1º) $y = f(x)$ é uma função decrescente de x;

2º) ao se multiplicar x por um número natural n, o valor corresponde y fica dividido n por, isto é, $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ para todo x e todo n natural.

Por exemplo, o tempo necessário para ir, em linha reta, de um ponto A para um ponto B, com velocidade constante, é inversamente proporcional a essa velocidade. De fato, esse tempo diminui quando se aumenta a velocidade. Além disso, ele reduz-se à metade, a um terço, a um quarto etc... quando se duplica, triplica, quadruplica etc... a velocidade.

Teorema 3.2 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade). As seguintes afirmações a cerca de $y = f(x)$ são equivalentes:

1) y é inversamente proporcional a x;

2) para todo número real $c > 0$, tem-se $f(c \cdot x) = \frac{1}{c} \cdot f(x)$;
3) Existe k, chamado “fator de proporcionalidade entre x e y, tal que $f(x) = k \cdot \frac{1}{x}$ Para todo x.

Uma demonstração para esse teorema poderá ser visualizada em [AMARAL,2014].

Observações a respeito dos Teoremas Fundamentais da Proporcionalidade:

Os teoremas acima significam que, do ponto de vista estritamente matemático, tanto faz escolhermos a definição que demos em 4.1. e em 4.2., que corresponde à condição 2) dos teoremas ou aquela dada pela condição 3): “y é diretamente (ou inversamente) proporcional a x quando existe uma constante k tal que $y = k.x$ $\left(ou\ y = k.\frac{1}{x}\right)$“.

Do ponto de vista da aplicabilidade, entretanto, essas duas maneiras de definir proporcionalidade não são equivalentes. Nos problemas, a tarefa de verificar se y é diretamente (ou inversamente) proporcional a x é mais facilmente executada com as definições dadas em 4.1. e em 4.2.

Quanto à condição 3), a fórmula $y = k.x$ nem sempre é dada, cabendo a nós deduzi-la e, para isso, precisamos conhecer as propriedades das grandezas relacionadas. Além disso, se já estamos em posse da fórmula $y = k.x$,pouco importa saber sobre proporcionalidade; a fórmula já nos dá tudo que precisamos saber. As fórmulas $y = k.x\ e\ y = k.\frac{1}{x}$ nos conduzem a outra maneira de definir o mesmo conceito, que é o seguinte.

Definição 3.3 Sejam $x_{1,}x_{2,}\ x_3, \ldots x_n$ valores assumidos pela grandeza $x\ e\ y_{1,}\ y_{2,}y_{3,}\ldots y_n$ os valores correspondentes da grandeza y, respectivamente. Dizemos que y é diretamente proporcional a x se, e somente se,

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \ldots = \frac{x_n}{y_n} = k,$$

em que k é a constante de proporcionalidade. De fato, afirmar que $y_1 = k.x_1,\ y_2 = k.x_2,\ y_3 = k.x_3, \ldots,\ y_n = k.x_{n,}$, equivale a

$$\frac{x_1}{y_1} = k, \frac{x_2}{y_2} = k, \frac{x_3}{y_3} = k, \ldots = \frac{x_n}{y_n} = k$$

Que equivale a

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \ldots = \frac{x_n}{y_n} = k.$$

Definição 3.4 Sejam $x_{1,}x_{2,}\ x_3, \ldots x_n$ valores assumidos pela grandeza $x\ e\ y_{1,}\ y_{2,}y_{3,} \ldots y_n$ os valores correspondentes da grandeza y ,respectivamente. Dizemos que yé inversamente proporcional a x se, e somente se,

$$x_1.y_1 = x_2.y_2 = x_3.y_3 = \ldots = x_n.y_n = k$$

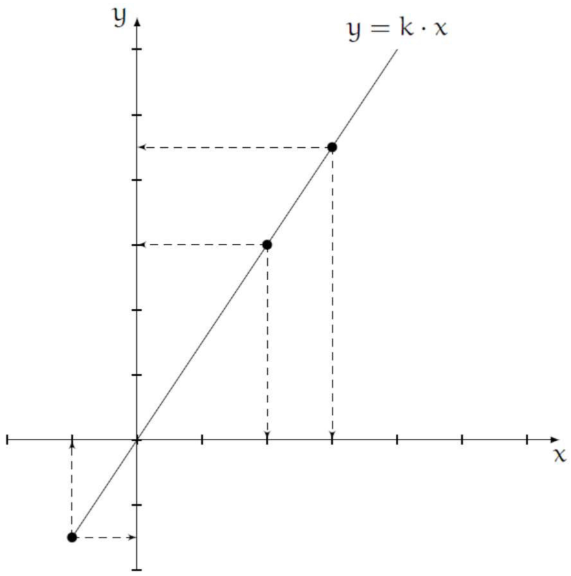
em que k é a constante de proporcionalidade. De fato, afirmar que $y_1 = \frac{k}{x_1}, y_2 = \frac{k}{x_2}, y_3 = \frac{k}{x_3}, \ldots, y_n = \frac{k}{x_n}$ equivale a:

$$x_1.y_1 = k, x_2.y_2 = k, x_3.y_3 = k, \ldots, x_n.y_n = k$$

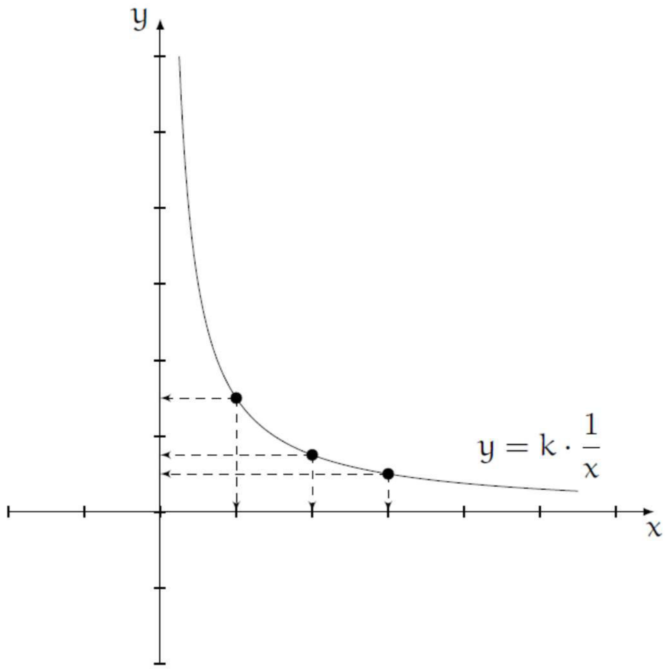
Que equivale a

$$x_1.y_1 = x_2.y_2 = x_3.y_3 = \ldots = x_n.y_n = k.$$

O esboço do gráfico da função $y = k.x$, conforme especificada acima, é uma reta que passa pela origem do sistema de coordenadas, o gráfico abaixo.



No caso da função $y = k.\frac{1}{x}$ o esboço seria uma hipérbole como no gráfico abaixo:



3.2 Grandezas proporcionais a várias outras

Em um grande número de problemas tem-se uma grandeza z, de tal modo relacionada com outras, digamos, $x, y, u, v\ e\ w$, que a cada escolha de valores para estas últimas corresponde um valor bem determinado para z. Então dizemos que z é uma função das variáveis $x, y, u, v\ e\ w$ escrevemos $z = f(x, y, u, v\ e\ w)$.

Nessas condições, diz-se que z é diretamente proporcional a x quando:

1°) Para quaisquer valores fixados de $x, y, u, v\ e\ w$, a grandeza z é uma função crescente
de x, isto é, a desigualdade $x_1 < x_2$ implica

$$f(x_1, y\ , u\ , v\ , w) < \ f(x_2, y, u, v, w);$$

2°) para quaisquer $x, y, u, v\ , w\ e\ n$ natural tem-se

$$f(n \cdot x\ , y\ , u\ , v\ , w) = n\ . f(x, y, u, v, w).$$

Analogamente, diz-se que z é inversamente proporcional a x quando:

1°) para quaisquer valores fixados de $x, y, u, v\ e\ w$, a grandeza z é uma função decrescente de x, isto é, a desigualdade $x_1 < x_2$ implica

$$f(x_1, y\ , u\ , v\ , w) > \ f(x_2, y, u, v, w);$$

2°) para quaisquer $x, y, u, v\ , w\ e\ n$ natural tem-se.

$$f(n. x, y, u, v, w) = \frac{1}{n}. f(x, y, u, v, w).$$

O teorema seguinte resume os Teoremas 4.1 e 4.2 no caso de uma função de várias variáveis. Para fixar as ideias, serão consideradas apenas as variáveis $x, y, u, v \; e \; w$, mas é claro que vale para qualquer número de variáveis.

Teorema 3.3. Seja $z = f(x, y, u, v, w)$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1) z é diretamente proporcional a x, y e inversamente proporcional a u, v, w;

2) existe uma constante k tal que $z = k \cdot \frac{x.y}{u.v.w}$.

Demonstração: Suponhamos válida a afirmação 1) e ponhamos $k = f(1{,}1{,}1{,}1{,}1) \cdot$ Em virtude dos Teorema 1 e 2, temos:

$$\begin{aligned} z &= f(x, y, u, v, w) \\ &= f(x.1, y, u, v, w) \\ &= x.f(1, y, u, v, w) \\ &= x.y.f(1{,}1, u, v, w) \\ &= \frac{x.y}{u}.f(1{,}1{,}1, v, w) \\ &= \frac{x.y}{u.v}.f(1{,}1{,}1{,}1, w) \\ &= \frac{x.y}{u.v.w}.f(1{,}1{,}1{,}1{,}1) \\ &= k.\frac{x.y}{u.v.w}. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se vale a afirmação 2), então 1) é obviamente verdadeira.

Assim, como consequência desse Teorema (e também da definição) que uma grandeza é diretamente (ou inversamente) proporcional a várias outras se, e somente se, é diretamente (ou inversamente) proporcional ao produto dessas outras.

Por exemplo, a área $A = A(x,y)$ de um retângulo de base x e altura y é diretamente. proporcional a $x\ e\ y$. Verificaremos para x; para y é feito de modo análogo.

Temos, se $x_1 < x_2\ então\ A(x_1,y) < A(x_2,y)$ porque o retângulo de base x_1 e altura y está contido no retângulo de base x_2 e mesma altura y. Além disso, o retângulo de base $n.x$ e altura y se decompõe como reunião de n retângulos justapostos de base n e altura y, logo

$$A(n.x,y) = n.A(x,y)$$

Segue do Teorema 3 que existe uma constante k tal que $A(x,y) = k.x\,.y$, onde $k = A(1,1)$ é a área do retângulo de base e altura iguais a 1, quadrado de lado unitário. mas o quadrado de lado 1 é tomado como unidade de área, logo $A(1,1) = 1$ e portanto $k = 1\ e\ A(x,y) = x.y$.

A chamada “Lei da Gravitação Universal” (de Newton) diz que “a matéria atrai a matéria na razão direta das massas e na razão inversa do quadrado da distância”. Isto quer dizer que um corpo de massa m_1 e outro de massa m_2, situados a uma distância d um do outro, se atraem com uma força de cuja intensidade F é diretamente proporcional $m_1\ e\ m_2$, e inversamente proporcional a d_2. Segue-se do Teorema 3 que:

$$F = k\ .\ \frac{m_1.m_2}{d^2},$$

onde k depende do sistema de unidades adotado.

Aryabhata, um grande matemático hindu, em sua obra Aryabhatiya apresenta numa linguagem simples e inteligente a solução para o problema de encontrar a quarta proporcional: Na regra de três multiplica-se o fruto pelo desejo e divide-se pela medida. O resultado será o fruto do desejo. Posto de outra forma:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$$

onde a é a medida", b o fruto", c o desejo" e x o fruto do desejo".

Por séculos a regra recebeu foi utilizada por mercadores de forma mecânica sem nenhuma prova ou justificação, sendo que seu vínculo com proporção só foi reconhecido no século XIV. Brahmagupta enunciou da seguinte forma: Na regra de três, os nomes dos termos são Argumento, fruto e Requisito. O primeiro e último termos devem ser semelhantes. Requisito multiplicado por Fruto e dividido por Argumento é o Produto". Este é o método mais utilizado na resolução de problemas proporcionais, que resolvem problemas com quatro valores, dos quais três são conhecidos e por meio deles determina-se o valor desconhecido.

3.3 Alguns Problemas

Muitos problemas envolvem, apenas, duas grandezas proporcionais, ai podemos utilizar uma regra de três simples para resolver. Esses problemas de proporcionalidade são resolvidos por uma regra que se baseia nas fórmulas $y = k \cdot x$ e $y = k \cdot \frac{1}{x}$. Logo, basta reconhecer a proporcionalidade (direta ou inversa) e aplicar a fórmula mais adequada.

Então confirmada a proporcionalidade (direta ou inversa) entre as grandezas y e x e sendo conhecido três dos quatro valores x_1, x_2 da grandeza x e os correspondentes valores, y_1 e y_2 da grandeza y, temos, no caso da proporcionalidade direta:

$$y_1 = k \cdot x_1 \quad \text{e} \quad y_2 = k \cdot x_2 \Rightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

Daí vemos que o quarto valor está bem definido, pois se conhecem três destes quatro valores. Observe que não há necessidade de conhecer o valor da constante de proporcionalidade k.

No caso da Proporcionalidade inversa temos,

$$y_1 = k \cdot \frac{1}{x_1} \quad \text{e} \quad y_2 = k \cdot \frac{1}{x_2} \Rightarrow \quad y_1 \cdot x_1 = y_2 \cdot x_2.$$

Ao aplicar um modelo matemático para resolver problemas de natureza real, devemos mostrar os limites de validez desse modelo no trabalho a ser feito. Em particular, quando se diz que uma grandeza qualquer y é inversamente proporcional a outra grandeza x, devemos mostrar que isto se dá dentro de um certo limite de variação de y e x. Por exemplo, o caso do número de operários e o tempo de construção de uma casa.

Se y é o número de operários necessários para se construir uma casa em x dias, mantendo-se a produtividade constante, observa-se que essas duas grandezas são inversamente proporcionais, pois dobrando o número de operários o tempo corresponde para se construir essa casa ficará reduzido à metade, isto é $2 \cdot y$ operários corresponderá a um tempo de $\frac{x}{2}$, supondo ainda que a produtividade mantenha-se a mesma.

Dobrando o número de operários novamente, teríamos $4 \cdot y$ operários e o tempo de construção da casa estaria reduzido a $\frac{x}{4}$, se procedermos assim continuadamente haveria em certo momento $2^n \cdot y$ operários construindo a casa e portanto o tempo de construção da mesma estaria reduzido a $\frac{x}{2^n}$, n natural. Ora, para o número n suficientemente grande o tempo de construção estaria próximo de zero segundo, na prática tempo inviável para construção de uma casa.

Problema 3.1 Em um supermercado paga-se $R\$ \ 12{,}50$ por 100 gramas de queijo prado. Supondo que não houve variação no preço, quanto se pagaria por 420 gramas?

Resolução: para resolver a questão basta organizar da seguinte forma,

Massa do queijo (em gramas) (↑)	Preço (reais) (↑)
100	$12{,}50$
420	x

Note que: aumentando-se a quantidade de gramas que se vai comprar, mantendo-se o preço do grama constante, paga-se mais. Logo as grandezas são diretamente proporcionais, por exemplo se comprarmos $100g$ pagaremos $R\$ \ 12{,}50$ e se dobrarmos a compra, ou seja, comprarmos $200g$, mantendo o mesmo preço do grama pagaremos o dobro, que é $R\$\ 25{,}00$. Daí como as grandezas são diretamente proporcionais temos,

$$\frac{100}{420} = \frac{12{,}50}{x}$$

$$\Rightarrow 100 \cdot x = 420 \cdot 12{,}50$$

$$\Rightarrow x = 52{,}50.$$

Portanto, pagar-se-ia $R\$\ 52{,}50$ por $420g$ de queijo.

Problema 3.2 um granjeiro tem ração para alimentar 32 galinhas durante 22 dias após 4 dias, resolve comprar mais 4 galinhas quanto tempo durarão as provisões se a reação de cada galinha não for diminuída

Fonte: <https://brainly.com.br/tarefa/3781809>

Resolução: Para resolver o problema devemos verificar que a medida que se tem mais galinhas comendo, a quantidade de ração dura menos dias. Por exemplo: se dobrar o número de galinhas, mantendo a ração constante, a quantidade de dias que a ração vai durar é a metade e assim por diante. Logo as grandezas são inversamente proporcionais. Para organizar os dados devemos entender que as galinhas passaram 4 dias comendo, então a ração restante só dura mais 18 dias. Sabe-se também que foram compradas mais 4 galinhas. Organizando esses dados no esquema abaixo,

Número de galinhas (↑)	Tempo (em dias) (↓)
32	18
36	x

$$\Rightarrow 32 \cdot 18 = 36 \cdot x \Rightarrow x = 16$$

Portanto, a restante durará apenas 16 dias.

Uma outra maneira de resolver os problemas citados é pelo método da redução à unidade, que será abordado agora.

Seja a grandeza y diretamente proporcional a grandeza x. Sabendo que o valor y_1, da grandeza y, corresponde ao valor x_1, da grandeza x. Queremos saber: y_2, da grandeza y, corresponde a qual valor x_2, da grandeza x ? A técnica de redução à unidade consiste em levar x_1 à unidade e logo em seguida levar esse valor unitários ao valor x_2 por meio de sucessivas multiplicações e/ou divisões, e procedendo desse mesmo modo e simultaneamente com seus respectivos valores y_1 e y_2. Observe o esquema abaixo.

Valores para a grandeza x	Valores da grandeza y
x_1	y_1
$\frac{x_1}{x_1}$	$\frac{y_1}{x_1}$
1	$\frac{y_1}{x_1}$
$x_2 \cdot 1$	$\frac{y_1}{x_1} \cdot x_2$
x_2	$\frac{y_1}{x_1} \cdot x_2$

Como ao valor x_1 corresponde-se o valor y_1, segue que $y_2 = \frac{y_1 \cdot x_2}{x_1}$. E como a grandeza y é diretamente proporcional a grandeza x então, pelo Teorema 4.1, existe um número k, tal que $y = k \cdot x$, logo $y_1 = k \cdot x_1$, donde $k = \frac{y_1}{x_1}$. Concluímos assim que, usar a técnica de redução à unidade consiste em encontrar primeiramente o fator de proporcionalidade e só depois encontrar o valor da incógnita.

Resolvendo o problema 4.1 por redução à unidade. O preço a pagar por $100g$ é $R\$\ 12{,}50$, não havendo variação no preço do quilograma de queijo, quanto se pagaria por $420g$ de queijo? As grandezas envolvidas neste problema, como já visto, são diretamente proporcionais. Assim, usando a técnica de redução à unidade e aplicando a Definição temos:

Massa do queijo (em gramas)	Preço (reais)
100	$12{,}50$
$\frac{100}{100}$	$\frac{12{,}50}{100}$
1	$0{,}125$
$420 \cdot 1$	$0{,}125 \cdot 420$
420	$52{,}50$

Ou seja, vai ser pago $R\$\ 52{,}50$ por $420g$ de queijo.

Resolvendo o problema 3.2. por redução à unidade, verificar que a medida que se tem mais galinhas comendo, a quantidade de ração dura menos dias. Por exemplo, se dobrar o número de galinhas, mantendo a ração constante, a quantidade de dias que a ração vai durar é a metade e assim por diante. Logo as grandezas são inversamente proporcionais pelo teorema 3.2.

Para organizar os dados devemos entender que as galinhas passaram 4 dias comendo, então a ração restante só dura mais 18 dias. Sabe-se também que foram compradas mais 4 galinhas. Organizando esses dados no esquema a seguir:

número de galinhas	tempo (em dias)
32	18
$\frac{32}{32}$	$18 \cdot 32$
1	576
$36 \cdot 1$	$\frac{576}{36}$
36	16

Portanto, a ração restante durará 16 dias.

Acabamos de ver regra de três simples, mas não só temos a regra de três simples, temos também a regra de três composta, que ocorre quando uma grandeza se relaciona com outras duas ou mais grandezas, direta ou inversamente proporcionais, a qual abordaremos .a seguir.

3.4 Regra de três e Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Uma outra forma de resolver é pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, encontrando a função. Vejamos:

Resolvendo o problema 4.1 pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade: O preço a pagar por $100g$ é $R\$\ 12{,}50$, não havendo variação no preço do quilograma de queijo, quanto se pagaria por $420g$ de queijo? As grandezas envolvidas neste problema, como já visto, são diretamente proporcionais. Assim,

Chamando de x a quantidade de gramas de queijo e $f(x)$ do preço pago pela quantidade x de gramas compradas de queijo, temos

$$f(x) = k \cdot x \Rightarrow f(100) = k \cdot 100 = 12{,}50 \Rightarrow$$
$$k = 0{,}125\,, então\ f(x) = 0{,}125 \cdot x\,.$$

Daí basta calcular

$$f(420) = 0{,}125 \cdot 420 \Rightarrow f(420) = 52{,}50.$$

Portanto, pagar-se-ia $R\$\ 52{,}50$ por $420g$ de queijo.

Resolvendo o problema 4.2 pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Verifica-se que à medida que se tem mais galinhas comendo, a quantidade de ração dura menos dias. Por exemplo, se dobrar o número de galinhas, mantendo a ração constante, a quantidade de dias que a ração vai durar é a metade e assim por diante. Logo as grandezas são inversamente proporcionais. Para organizar os dados devemos entender que as galinhas passaram 4 dias comendo, então a ração restante só dura mais 18 dias. Sabe-se também que foram compradas mais 4 galinhas. Organizando esses dados no esquema abaixo,

número de galinhas	tempo (em dias)
32	18
36	x

Chamando de xo número de galinhas e de $f(x)$ o número de dias, temos

$$f(x) = \frac{k}{x} \Rightarrow f(32) = \frac{k}{32} = 18$$

$$\Rightarrow k = 576 \text{ .Logo, } f(x) = \frac{576}{x} \quad ,$$

então basta calcular

$$f(36) = \frac{576}{36} = 18.$$

Portanto, a ração restante vai durar 18 dias.

3.5 Regra de três composta

Mostraremos a resolução de problemas de regra de três composta, isto é, problemas de proporcionalidade que envolvem três ou mais grandezas proporcionais, ou diretas ou inversas ou ambas simultaneamente. usando o Teorema 3.3.

Consideraremos que a grandeza z seja diretamente proporcional às grandezas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, e inversamente proporcional às grandezas $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$. Considere que z' Esteja bem definido para os valores $x_1', x_2', x_3, \dots, x_n'$ e $y'_1, y'_2, y'_3, \dots, y'_m$ desejamos conhecer o valor de $z"$ quando ocorrer $x"_1, x"_2, x"_3, \dots, x"_n$ e $y"_1, y"_2, y"_3, \dots, y"_n$. pelo teorema 3.3. Temos que:

$$z' = k \cdot \frac{x'_1 \cdot x'_2 \cdot x'_3 \cdot \ldots \cdot x'_n}{y'_1 \cdot y'_2 \cdot y'_3 \cdot \ldots \cdot y'_m} \quad \text{e} \quad z" = k \cdot \frac{x"_1 \cdot x"_2 \cdot x"_3 \cdot \ldots \cdot x"_n}{y"_1 \cdot y"_2 \cdot y"_3 \cdot \ldots \cdot y"_m}$$

então basta dividir z' por $z"$

$$\frac{z'}{z"} = \frac{k \cdot (x'_1 \cdot x'_2 \cdot x'_3 \cdot \ldots \cdot x'_n)/(y'_1 \cdot y'_2 \cdot y'_3 \cdot \ldots \cdot y'_m)}{k \cdot (x"_1 \cdot x"_2 \cdot x"_3 \cdot \ldots \cdot x"_n)/(y"_1 \cdot y"_2 \cdot y"_3 \cdot \ldots \cdot y"_m)} \Rightarrow$$

$$\frac{z'}{z"} = \frac{x'_1}{x"_1} \cdot \frac{x'_2}{x"_2} \cdot \frac{x'_3}{x"_3} \cdot \ldots \cdot \frac{x'_n}{x"_n} \cdot \frac{y'_1}{y"_1} \cdot \frac{y'_2}{y"_2} \cdot \frac{y'_3}{y"_3} \cdot \ldots \cdot \frac{y'_m}{y"_m}$$

, observe que todas as frações formadas pelas grandezas diretamente proporcionais a z ficam na mesma ordem de $\frac{z'}{z"}$, já as frações formadas por grandezas inversamente proporcionais a z ficam na ordem inversa a $\frac{z'}{z"}$. Daí basta fazer produto dos meios pelos extremos, estando z' bem definido, que encontraremos $z"$. Observe que esse método é bem simples, classifica-se as grandezas em diretas e/ou inversas, e basta seguir o esquema acima.

Vale lembrar que esse método permite que se escolha qualquer uma das grandezas envolvida no problema, e dependendo de qual grandeza é escolhida para fazer a comparação, a classificação e montagem do problema ficam bem simples e razoavelmente fácil de fazer os cálculos e encontrar a resposta do problema. Um recurso didático muito útil é o uso de flechas para saber se as grandezas são diretas ou inversas.

Funciona da seguinte maneira, colocamos uma seta na grandeza que se deseja comparar em qualquer sentido, de cima para baixo (↓) ou de baixo para cima (↑). Agora basta fazer as relações entre cada grandeza e a grandeza escolhida para fazer a comparação, mas somente entre esta e as outras, duas a duas. Ao fazer uma comparação suponha que os valores das demais estão fixados.

Deve-se colocar as setas colocadas nas outras grandezas de acordo com o tipo de relação entre a grandeza incógnita e ela. Se as setas têm mesmo sentido, as grandezas são diretamente proporcionais e caso tenham sentido contrário indicam que as grandezas se relacionam de forma inversamente proporcional. Nos exemplos abaixo mostraremos como fazer de forma mais simples a escolha da grandeza que se relacionará com as outras, deixando o método mais simples e prático. Assim como a colocação das setas.

Exemplo de regra de três composta: https://brainly.com.br/tarefa/25739608
Em uma oficina de artesanato, 4 artesãs produzem 20 bonecas de pano em 4 dias. Se 8 artesãs trabalharem por 6 dias, quantas bonecas serão produzidas?

Artesãs(↑)	dias(↑)	bonecas(↑)
4	4	20
8	6	x

Observe: como tem mais artesãs trabalhando, serão feitas mais bonecas e como irão trabalhar mais dias farão mais bonecas. Logo o número de bonecas é diretamente proporcional ao número de artesãs e de dias, como indicam as setas; deste modo temos:

$$\frac{20}{x} = \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{6} \quad \Rightarrow$$

$$16 \cdot x \ = 20 \cdot 8 \cdot 6 \ \ \Rightarrow \ x = 60 \ bonecas$$

Podemos também resolver o problema pelo Teorema 3.3, vejamos a seguir:

Exemplo de regra de três composta: https://brainly.com.br/tarefa/25739608
Em uma oficina de artesanato, 4 artesãs produzem 20 bonecas de pano em 4 dias. Se 8 artesãs trabalharem por 6 dias, quantas bonecas serão produzidas?

Chamando de n o número de artesãs, m o número de dias e $f(n,m)$ a quantidade de bonecas, então pelo Teorema 3.3 existe uma constante k real tal que $f(n,m) = k \cdot n \cdot m$. Daí, temos

$$f(n,m) = k \cdot n \cdot m \Rightarrow$$

$$f(4,4) = k \cdot 4 \cdot 4 = 20 \Rightarrow$$

$$k = \frac{20}{16},$$

então calculando

$$f(8,6) = \frac{20}{16} \cdot 8 \cdot 6 = 60$$

Portanto, serão produzidas 60 bonecas.

3.6 Alguns outros Problemas

Exemplo 3.2 Imagine essa situação: você tem $R\$\ 18{,}00$ e eu tenho $R\$\ 6{,}00$. Podemos comparar essas quantias com uma divisão $18:6 = 3$.

Dizemos que você tem o triplo do que eu tenho ou, então, que a razão entre os $R\$\ 18{,}00$ que você tem e os $R\$\ 18{,}00$ que eu tenho é igual a 3. Isso significa que para cada $R\$\ 3{,}00$ seus, eu tenho $R\$\ 1{,}00$.

Então, vamos mudar os números desse exemplo. Você tem $R\$\ 70{,}00$ e eu tenho $R\$\ 175{,}00$. Podemos comparar essas quantias assim.

$$70:175 = \frac{70}{175} = \frac{2}{5}$$

Dizemos então que a razão entre os $R\$\ 70{,}00$ que você tem e os $R\$\ 175{,}00$ que eu tenho é igual a $\frac{2}{5}$, ou, então, que essa é uma razão de 2 para 5. Isso significa que para cada $R\$\ 2{,}00$ seus, eu tenho $R\$\ 2{,}00$ reais.

Assim, por exemplo, se em uma festa compareceram 20 homens e 30 mulheres, dizemos que:

I. a razão entre o número de homens e o de mulheres na festa é:

$$\frac{\text{nº de homens}}{\text{N de mulheres}} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$ (lê-se: 2 para 3)

Isso significa que para cada 2 homens existem 3 mulheres.

II. A razão entre o número de mulheres e o total de pessoas na festa é:

$$\frac{\text{nº de mulheres}}{\text{nº total de pessoas}} = \frac{30}{30+20} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$ (lê-se: 3 para 5)

Isso nos diz que para cada 5 pessoas na festa, 3 são mulheres

Exemplo 3.3, qual é o automóvel mais econômico: o de Carlos, que consome 24 litros de gasolina para percorrer $240km$ ou o de Fabíola, que percorre $180km$ com 20 litros de gasolina?

Quantos por cento mais econômico?

Dividindo-se o número de quilômetros percorridos pela respectiva quantidade de gasolina consumida, temos:

I. Para o automóvel de Carlos:

$$\frac{\text{N de km}}{\text{N de litros}} = \frac{240km}{24} = 10km/l$$ (dez quilômetros por litro).

II. Para o automóvel de Fabíola:

$\frac{\text{N de km}}{\text{N de litros}} = \frac{180km}{20l} = 9km/l$ (dez quilômetros por litro).

Isso significa que, em média, o automóvel de Fabíola percorre $9km$ para cada litro de combustível consumido.

O automóvel mais econômico é o que gasta menos combustível para percorrer uma mesma distância. Observando que $mmc(10, 9) = 90$, consideremos a distância de $90km$. Como o automóvel de Carlos gasta, em média, 1 litro para percorrer $10km$, então, para percorrer $90km$ ele gastaria apenas $90 : 10 = 9$ litros, enquanto o automóvel de Fabíola gastaria $90 : 10 = 9$ litros. Assim, o automóvel do Carlos é o mais econômico, economizando $10 - 9 = 1$ litro de gasolina para cada 10 litros consumidos pelo carro de Fabíola. Matematicamente, temos:

$\frac{\text{Economia de Carlos}}{\text{Consu} \quad \text{de Fabíola}} = \frac{1l}{10l} = 10\%$ ("1 para 10" ou "10 para 100" ou "dez por cento").

Isso nos diz que para cada 100 litros de gasolina consumidos pelo carro de Fabíola, o automóvel de Carlos gastaria 10 litros a menos para fazer o mesmo percurso. Se o amigo leitor teve dificuldade para compreender alguma passagem nesses questionamentos, não se preocupe. Leia com atenção os tópicos a seguir e, depois, volte e reveja-as.

Exemplo 3.4 por exemplo: em um grupo de 100 estudantes, 13 falam inglês fluentemente, isto é, 13% (lê-se: 13% por cento) do grupo fala inglês. Note:

$\frac{falam\ ingês}{total} = \frac{13}{100} = 13\%$(lê-se: 13 por cento)

Quando escrevemos $\frac{falam\ inglês}{total} = 13\%$, estamos dizendo que os que falam inglês equivalem a 13% do total, ou seja: falam inglês = 13% (total).

Exemplo 3.5 Se em uma cidade, cuja média populacional no ano de 2001 era 50000 habitantes, nasceram no referido ano,1400 crianças, dizemos que a taxa de natalidade dessa cidade em 2001 foi de 28 nascimentos/mil habitantes (lê-se: 28 nascimentos por mil habitantes). Veja:

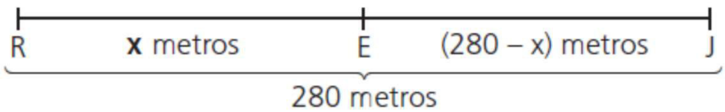
$$\frac{\text{nascimentos}}{\text{população}} = \frac{1400 nascimentos}{50000 habitantes} = \frac{20 nascimentos}{mil\ habitantes}$$

É a razão entre a distância percorrida (ΔS) por um móvel e o tempo (Δt) gasto para percorrê-la.

Suponha, por exemplo, que Romeu encontra-se a $280\ m$ de Julieta, quando partem um ao encontro do outro. Romeu desenvolve uma velocidade média de $40\ m/min$ e Julieta, $30\ m/min$. A que distância, do seu ponto de partida, Romeu abraçará Julieta?

Isso é fácil de encontrar. Veja:

Considere R e J os respectivos pontos de partida, E o ponto de encontro, $RE\ =\ x$ metros e y minutos o tempo que eles gastarão para se encontrar. Observando que a velocidade média = $\frac{distãncia}{tempo}$, temos:



I. Para Romeu:

distância $=\ x\ m$

velocidade $= 40 m/min$

tempo = $y\ min$

Como velocidade média = $\frac{distãncia}{tempo}$, temos $\frac{x}{y} = 40$; y= $\frac{x}{40}$

I. Para Julieta:

distância $=\ (280 - x)\ m$

velocidade $= 30m/min$

tempo = $y\ min$

Daí, temos que velocidade média = $\frac{distância}{tempo}$, temos $\frac{280-x}{y} = 30$; y = $\frac{280-x}{30}$

Então,

$$\frac{x}{40} = \frac{280-}{30}$$

$$\Rightarrow 3x = 1120 - 4x$$

$$\Rightarrow 3x + 4x = 1120$$

$$\Rightarrow 7x = 1120$$

$$\Rightarrow x = 160m.$$

O encontro se dará a 160 metros do ponto de partida de Romeu e gastarão $\frac{160}{40}$= $4min$.

A escala cartográfica é fundamental para entendermos a proporção entre o espaço real e a sua representação no mapa. A escala cartográfica é um importante elemento presente nos mapas, sendo utilizada para representar a relação de proporção entre a área real e a sua representação. É a escala que indica o quanto um determinado espaço geográfico foi reduzido para “caber” no local em que ele foi confeccionado em forma de material gráfico.

Sabemos que os mapas são reproduções reduzidas de uma determinada área. Mas essa redução não ocorre de forma aleatória, e sim de maneira proporcional, ou seja, resguardando uma relação entre as medidas originais e suas representações. É a razão entre um comprimento no desenho (d) e o seu correspondente comprimento no tamanho real (D), medidos em uma mesma unidade.

Suponha, por exemplo, uma fotografia aérea na qual um trecho retilíneo de uma estrada que mede $12{,}5\ km$ aparece medindo $5cm$. Nessas condições, a fotografia está na escala:

$$E = \frac{5cm}{12{,}5km} = \frac{5cm}{1250000cm},$$

ou seja, $E = \frac{1}{250000}$

ou $E = 1{:}250000$.

Essa escala nos diz que $1\ cm$ na fotografia corresponde a $250000\ cm\ (2{,}5\ km)$, na realidade.

Outro quesito a ser destacado é sobre proporção, vejamos:

Exemplo 3.6 Suponhamos que tenhamos pago $R\$\ 30{,}00$ por $2\ kg$ de filé de frango. Perguntamos: Qual o preço que pagaremos por $3{,}5\ kg$ de filé de frango, sendo que o preço por kg não foi alterado?

Solução: basta calcular o preço de um kg de filé de frango (p) que é dado pela razão entre o valor total pago (VT) e a massa total comprada (M), isto é, $p = \frac{VT}{M}$ assim,

$p = \frac{R\$30{,}00}{2kg} = R\$15{,}00$ por kg, ou seja, pagaremos $R\$\ 15{,}00$ por quilograma.

Assim, como o preço por quilograma de filé de frango não foi alterado, pagaremos pelos $3{,}5\ kg$, $(3{,}5\ kg) \cdot (R\$\ 15,00) = R\$\ 52{,}50$, ou seja, pagaremos $R\$\ 52{,}50$ por $3{,}5\ kg$ de filé de frango.

Vamos resolver o exemplo (3.6) usando proporção.

Como o preço a pagar por quilograma de filé de frango é constante e como as razões $\frac{R\$30{,}00}{2kg}$ e $\frac{x}{3{,}5kg}$, onde x representa o valor a pagar por 3,5kg de filé de frango suprimindo as unidades de medidas, obtemos a igualdade entre duas frações

$$\frac{30}{2} = \frac{x}{3{,}5}$$
$$\Rightarrow 2x = 30 \cdot 3{,}5$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2x = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 30 \cdot 3{,}5$$
$$\Rightarrow\ X = 52{,}50$$

Ou seja, pagaremos $\$\ 52{,}50$ por $R\ 3{,}5kg$ de filé de frango.

Como vimos, podemos entender que a razão é uma ferramenta poderosa que estabelece uma comparação entre as grandezas, com a finalidade de tomar decisões. Por exemplo, podemos calcular a velocidade média, encontrando a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto no percurso, que é muito útil no trânsito.

Também a densidade demográfica de uma região, que é a razão entre o número de habitantes e a área dessa região.

Por exemplo, se a região tiver uma grande densidade, a região é boa para investir em um supermercado. Calcular o índice de massa corporal (IMC), que é razão entre a massa do corpo e o quadrado da altura, e como auxílio do educador físico e outros dados, pôde-se tomar a decisão de emagrecer ou não.

Imagine essa situação: você tem $R\$\ 18{,}00$ e eu tenho $R\$\ 6{,}00$. Podemos comparar essas quantias com uma divisão $18: 6 = 3$.

Dizemos que você tem o triplo do que eu tenho ou, então, que a razão entre os $R\$\ 18{,}00$ que você tem e os $R\$\ 6{,}00$ que eu tenho é igual a 3. Isso significa que para cada $R\$\ 3{,}00$ seus, eu tenho $R\$\ 1{,}00$.

Então, vamos mudar os números desse exemplo. Você tem $R\$\ 70{,}00$ e eu tenho $R\$\ 175{,}00$. Podemos comparar essas quantias assim.

$$70: 175 = \frac{70}{175} = \frac{2}{5}$$

Dizemos então que a razão entre os $R\$\ 70{,}00$ que você tem e os $R\$\ 175{,}00$ que eu tenho é igual a $\frac{2}{5}$, ou, então, que essa é uma razão de 2 para 5. Isso significa que para cada $R\$\ 2{,}00$ seus, eu tenho $R\$\ 5{,}00$.

Exemplo 3.7 Uma partida de 15 dúzias de canetas deve ser repartida por 3 seções, proporcionalmente ao número de seus funcionários. Na primeira seção há 20 funcionários; na segunda há $3/4$ do número de funcionários da primeira e na terceira $2/3$ do número de funcionários da segunda. A seção de maior número de funcionários recebe um total de:

Resolução: Tomando como A, B e C o número de funcionários da primeira, segunda e terceira seção respectivamente, temos:

$$A = 20; B = \frac{3}{4}.20 => B = 15 \; e \; C = \frac{2}{3}.15 => C = 10.$$

E como o número de canetas é $15.12 = 180$ canetas, e o número de canetas que deve ser dado para cada seção é diretamente proporcional ao número de funcionários. Temos:

$$A + B + C = 180$$
$$\frac{A}{20} = \frac{B}{15} = \frac{C}{10}$$
$$=> \frac{A}{20} = \frac{B}{15} = \frac{C}{10} = \frac{A + B + C}{20 + 15 + 10}$$
$$=> \frac{A}{20} = \frac{B}{15} = \frac{C}{10} = \frac{180}{45}$$
$$\frac{A}{20} = \frac{B}{15} = \frac{C}{10} = 4, logo$$
$$\frac{A}{20} = 4 => A = 80\ canetas$$
$$\frac{B}{15} = 4 => B = 60\ canetas$$
$$\frac{C}{10} = 4 => C = 40\ canetas$$

Portanto, a seção A deve receber 80 canetas.

Exemplo 3.8 Pedro, Raul e Sérgio receberam uma herança em partes inversamente proporcionais ao respectivo grau de parentesco, respectivamente, terceiro, quarto e quinto. Pedro recebeu $R\$\ 8.960{,}00$ a mais que Sérgio. Quanto cada um recebeu?

Resolução: As quantias que Pedro, Raul e Sérgio receberam são inversamente proporcionais a 3,4 e 5. Então temos:

$\frac{P}{\frac{1}{3}} = \frac{R}{\frac{1}{4}} = \frac{S}{\frac{1}{5}}$, tirando o $mmc(3,4,5)$ => $\frac{P}{\frac{24}{60}} = \frac{R}{\frac{15}{60}} = \frac{S}{\frac{12}{60}}$;

simplificando por 60, temos

$\frac{P}{20} = \frac{R}{15} = \frac{S}{12}$ e como $P - S = 8960 => \frac{P}{20} = \frac{R}{15} = \frac{S}{12} = \frac{P-S}{20} = \frac{8960}{8} => \frac{P}{20} = \frac{R}{15} = \frac{S}{12} = 1120$

$$=> \frac{P}{20} = 1120 => P = 22400$$
$$\frac{R}{15} = 1120 => R = 16800$$
$$\frac{S}{12} = 1120 => S = 13440$$

Portanto, Pedro recebeu $R\$\ 8.960{,}00$, Raul $R\$\ 8.960{,}00$ e Sérgio $R\$\ 13440{,}00$. Observe que o mínimo múltiplo comum (mmc) pode ser usado para transformar o inverso em direto, facilitando muito os cálculos. Por exemplo: se as quantias são inversamente proporcionais a 3, 4 e 5 podemos tirar o $mmc\ (3, 4\ e\ 5)$ e dividir por 3, 4 e 5, então obteremos uma divisão proporcional a $20, 15$ e 12 que é muito mais simples de ser feita, como mostrado acima.

Exemplo 3.9 de divisão mista: Divide-se 315 em três partes A, B e C que são ao mesmo tempo diretamente proporcionais a $3, 2$ e 5 e inversamente proporcionais a $5, 3$ e 6, respectivamente. O maior valor dessas partes é:

Resolução: Montando a proporção: $\frac{A}{\frac{3}{5}} = \frac{B}{\frac{2}{3}} = \frac{C}{\frac{5}{6}}$; calculando o $mmc(5, 3\ e\ 6)$, temos 30, então:

$$\frac{A}{\frac{18}{30}} = \frac{B}{\frac{20}{30}} = \frac{C}{\frac{25}{30}} => \frac{A}{18} = \frac{B}{20} = \frac{C}{25} mas\ A + B + C = 315, daí$$
$$\frac{A}{18} = \frac{B}{20} = \frac{C}{25} = \frac{A + B + C}{18 + 20 + 25}$$
$$=> \frac{A}{18} = \frac{B}{20} = \frac{C}{25} = \frac{315}{63} = 5$$
$$=> \frac{A}{18} = 5 => A = 90$$
$$\frac{B}{20} = 5 => B = 100$$
$$\frac{C}{25} = 5 => C = 125$$

Portanto, os valores de $A, B\ e\ C$ são, respectivamente $90, 100\ e\ 125$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do exposto no desenvolvimento deste trabalho, esperamos a realização das nossas finalidades, dentre elas, destacamos o conceito de razão e proporcionalidade, bem como uma abordagem mais simples e didática de fazer divisão proporcional direta, inversa e mista. Também abordamos uma forma didática de utilizar o Teorema Fundamental da Proporcionalidade em exercícios do Ensino Médio, e isso foi fundamental para que entendêssemos o que está por traz das operações que nos são ensinadas no Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Também apresentamos o conceito de proporcionalidade em civilizações antigas, como Babilônica, Egípcia, Grega, no intuito de conhecer de que maneira este conceito era empregado pelos povos antigos, além de conhecer alguns problemas em que o mesmo estava presente no procedimento de resolução de problemas.

Tomando como ponto de partida a importância desse conceito já referenciada por vários estudos, chamamos a atenção para a questão da compreensão adequada e uma visão não limitada, por parte dos professores de matemática, gerando assim impacto diretamente na educação básica, tendo em vista que a temática objeto deste trabalho é amplamente trabalhada tanto no ensino fundamental como no ensino médio.

Nesta perspectiva, os educadores precisam desenvolver uma compreensão conceitual adequada da proporcionalidade, evitando a visão simplista e errônea de que este conceito se trata de um tópico do currículo da matemática que precisa ser ensinado para o aluno, onde o procedimento algorítmico, a exemplo da regra de três, é o cerne do processo de aprendizagem. Apresentamos uma abordagem desse conhecimento com diversas possibilidades para o trabalho em sala de aula, auxiliando o discente na construção de seu aprendizado.

Contudo, no cotidiano escolar, a Matemática pode representar uma grande dificuldade para o aluno. A partir do 6º Ano (primeira série dos Anos Finais do Ensino Fundamental) as dificuldades se acentuam, pois o aprendizado passa a ir além das quatro operações básicas, abordando conceitos mais complexos e abstrações. Visto isto, procurou-se fazer de forma mais simples e didática as divisões proporcionais e regra de três. A qual será abordada de duas maneiras: por classificação de grandezas diretas e inversas (método direto e inverso) e pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

REFERÊNCIAS

AMARAL, Antônio C.: **GRANDEZAS PROPORCIONAIS**: um estudo aprofundado para uma melhor compreensão da fórmula f(x) = ax como modelo matemático para os problemas de proporcionalidade direta. In: Universidade Federal do Piauí (2014)

BNCC: **Base Nacional Comum Curricular**. 2017. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/imagens/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf

Blog do Maffei. **Alguns mapas da Grécia antiga**. Disponível em: http://radiomaffei.blogspot.com/2013/02/alguns-mapas-da-grecia-antiga.html. Acesso em: 15/03/2021

BOYER, Carl B.: **História da matemática**. Tradução Eva F. Gomide. Universidade de São Paulo: Editora da Unicamp, 1974

EVES, Howard: **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp 5a Edição., 2011

FLORIANI, Edson F.: **Resolução de problemas de proporcionalidade**: um estudo com alunos do ensino fundamental e médio. In: Universidade do Itajaí (2014)

LIMA, Elon L.: **Meu professor de matemática e outras histórias**. 2012

MORGADO, Augusto C.: **matemática básica**: teoria e mais 750 questões. 2006

MUNDO MATEMÁTICO DO CALDAS. **Papiro de Rhind**. Disponível em: http://mundomatematicodocaldas.blogspot.com/2013/10/papiro-de-rhind.html. Acesso em: 15/03/2021

OLIVEIRA, Sandro F.: **Preparando o aluno de ensino fundamental para o aprendizado de razões e proporções**. In: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (2017)

RPM05: **Revista do professor de matemática** 05. 2010. – URL <https://www.mat.ufrgs.br/~backes/AnexosPDF/IntRC-2018/RPM05\%20Grandezas\%20incomensuraveis\%20e\%20numeros\%20irracionais.pdf>

RPM07: **Revista do professor de matemática** 07. 2010. – URL <https://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/avila/rpm7.pdf>

SILVA, Davidson Moura L.: **Uma análise do ensino de proporcionalidade no ensino fundamental**: realidade e perspectiva. In: Universidade Federal de São Carlos (2015)

SILVA, Diana Paula C.: **Alguns marcos históricos relativos a um conceito matemático elementar**: um estudo sobre proporções. In: Universidade de Minho (2012)

SANTOS, Lisandra M. dos.: **RAZÃO ÁUREA:** abordagem histórica, aplicações e sua relação com Fibonacci. In: Universidade Federal do Ceará (2020).