

Universidade Federal do Maranhão  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de  
Eletricidade

---

*Sintonia do filtro de Kalman para medição  
indireta das variáveis de estado no banho  
eletrolítico*

---

Carlos Augusto Pereira Braga

São Luís  
2008

Universidade Federal do Maranhão  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de  
Eletricidade

---

*Sintonia do filtro de Kalman para medição  
indireta das variáveis de estado no banho  
eletrolítico*

---

**Carlos Augusto Pereira Braga**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da UFMA como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

**São Luís  
2008**

Braga, Carlos Augusto Pereira.

Sintonia do filtro de Kalman para medição indireta das variáveis de estado no banho eletrolítico. / Carlos Augusto Pereira Braga. - 2008. 109f.

Impresso por computador (fotocópia).

Dissertação (Mestrado em Engenharia de Eletricidade) - Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2008.

1. Eletrólise 2. Banho Eletrolítico - alumina 3. Filtro de Kalman.  
I. Título.

CDU 621.357

**Sintonia do filtro de Kalman para medição  
indireta das variáveis de estado no banho  
eletrolítico**

**Carlos Augusto Pereira Braga**

Submetida em 19/02/2008

**BANCA EXAMINADORA**

---

**Prof. João Viana da Fonseca Neto**

Dr. em Engenharia Elétrica

Orientador

---

**Prof. Sebastian Yuri Cavalcanti Catunda**

Dr. em Engenharia Elétrica

Examinador Interno

---

**Prof. Roberto Célio Limão de Oliveira**

Dr. em Engenharia Elétrica

Examinador Externo

À Maria Luíza, Rita, Patrícia e Carlinhos

# Agradecimentos

---

A Deus, presença constante em minha vida, a quem é maravilhoso ter tão pouco a pedir, e muito a agradecer.

A minha esposa Rita e aos meus filhos Patrícia e Carlinhos, pelo amor familiar e pela compreensão nos muitos momentos em que estive ausente.

A minha mãe Maria de Nazaré e a minha avó materna Maria Luíza, pelo amor, pela dedicação e pela minha formação.

Ao Consórcio de Alumínio do Maranhão (ALUMAR), pelos recursos concedidos para que eu pudesse cursar o mestrado.

Ao meu orientador, Prof. Dr. João Viana, pela implantação do Projeto Kalman na ALUMAR, onde mostrou seu grande poder de planejamento e de realização, por sua dedicação, por seu estímulo e por sua orientação segura.

A Nilton Nagem, companheiro de trabalho e de estudo, por sua inestimável colaboração no Projeto Kalman assim como na minha dissertação.

Aos funcionários e aos alunos do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, especialmente aos colegas do Laboratório de Controle, Márcio Mendes, Inácio Moraes e Ivanildo Abreu, pela colaboração, presteza, gentileza e compartilhamento de conhecimentos.

Muito Obrigado!

*“Quando você quer alguma coisa todo o Universo conspira para que você realize o seu desejo.”*

Paulo Coêlho

## RESUMO

O controle da concentração de alumina no banho de cubas eletrolíticas é de vital importância para um rendimento eficiente do processo de produção de alumínio. Este controle tem por objetivo promover, em uma visão macro, um retorno justificável perante ao planejamento global das metas de produção de uma fábrica de alumínio. O desenvolvimento de uma metodologia baseada no ajuste dos ganhos de um filtro tipo *Kalman* Padrão é o principal enfoque científico e tecnológico desta pesquisa. A síntese da metodologia é a implementação do filtro de *Kalman* Padrão e Escalar em um computador que controla a quantidade de alumina no banho eletrolítico. Considera-se as restrições de software e de hardware na implantação do algoritmo de *Kalman* no sistema que executa o controle de processo por computador.

Desenvolve-se um modelo de sintonia do filtro de *Kalman* utilizando-se o princípio da dualidade das matrizes  $Q$  e  $R$ . O objetivo é estabelecer um conjunto de ganhos que representem da melhor forma a quantidade de alumina dentro da cuba. Assim, faz-se uma análise considerando-se mudanças nas matrizes  $Q$  e  $R$ , e apresenta-se os resultados obtidos. Analisa-se a largura de banda do filtro, verificando-se diminuição ou aumento de banda à medida que as matrizes  $Q$  e  $R$  sofrem alterações em seus elementos.

As estratégias de monitoramento são verificadas para diversas situações de operação(dinâmica) da planta, e as variações paramétricas do modelo são levadas em consideração para garantirmos uma operação robusta e estável do filtro. O desempenho do filtro é verificado em paralelo com um sistema de filtragem e de controle historicamente utilizados na estimação do percentual de alumina no banho eletrolítico.

**Palavras-Chave:** Filtro de Kalman, ajuste, cuba, alumina, banho eletrolítico e Princípio da Dualidade QR.



## ABSTRACT

A tuning model for Kalman filter based on QR duality principle is presented to measure the state variables of the electrolytic bath in aluminium production cells. The main goal is to establish a set of filter gains that better represents the percentual of alumina in the bath. The filter bandwidth tuning is performed by increasing or decreasing the filter bandpass from the Q and R variations. The design and analysis of the Q and R covariance matrices are performed to find a pattern of the resistance variations that could be associated with the alumina concentration in the bath. The technical solution encloses on-line evaluation of the Kalman filter in order to prove its capableness of response when used to control real production cells.

The Standard Kalman is coded upon a scalar form to reduce the use of computing resources when the filter is processed. The line current and pot voltage are directly read from the hardware interface and then converted in a third variable, the resistance, which is used to infer the alumina concentration in the bath. Moreover, the filter implementation goes in the direction of practical aspects limits of the indirect measurement system implementations, its robustness is appraised by observability, roundoff and modeling errors.

**Keywords:** Kalman filter, tuning, production cell, alumina, indirect measurement, electrolytic bath and QR duality principle

# Lista de Tabelas

2.1	Intervalo de alimentação ideal para alvos de corrente da linha e eficiência da cuba . . . . .	22
3.1	Identificação da Medição. . . . .	53
3.2	Parâmetros de Tempo. . . . .	53
3.3	Estatísticas das Medições. . . . .	56
3.4	Matrizes de ponderação para variações em $Q$ e mantendo constante $R$ . . . . .	59
3.5	Limites Operacionais dos Ganhos FKP para $Q$ e $R$ - . . . . .	60
3.6	Relação QR para variações em $Q$ e mantendo constante $R$ . . . . .	61
4.1	Parâmetros de Tempo. . . . .	66
4.2	Estatísticas da Resistência, Tensão e Corrente. . . . .	68
4.3	Heurística 1 - Matrizes de ponderação para variações em $Q$ e mantendo constante $R$ . . . . .	70
4.4	Heurística 1 - Ganhos para variações em $Q$ e mantendo constante $R$ . . . . .	71
4.5	Heurística 1 - Relação QR para variações em $Q$ e mantendo constante $R$ . . . . .	71
4.6	Heurística 2 - Matrizes de ponderação para variações em $Q$ e mantendo constante $R$ . . . . .	72
4.7	Heurística 2 - Ganhos para variações em $Q$ e mantendo constante $R$ . . . . .	73
4.8	Heurística 2 - Relação QR para variações em $Q$ e mantendo constante $R$ . . . . .	73
4.9	Heurística 3 - Matrizes de ponderação para variações em $Q$ e mantendo constante $R$ . . . . .	74
4.10	Heurística 3 - Ganhos para variações em $Q$ e mantendo constante $R$ . . . . .	74

---

4.11	Heurística 3 -Relação QR para variações em $Q$ e mantendo constante $R$ . . . . .	75
4.12	Heurística 4 - Ganhos para variações em $Q$ e mantendo constante $R$ . . . . .	75
4.13	Relação QR para variações em $Q$ e mantendo constante $R$ . . . . .	76
5.1	Identificação da Medição. . . . .	79

# Lista de Figuras

2.1	Planta de Sistema Controle para Concentração de Alumina. . . . .	15
2.2	Fluxo de Sinais da Interface de Controle. . . . .	18
2.3	Baixa Concentração de Alumina. . . . .	25
2.4	Região Mínima da Curva de Resistência. . . . .	27
2.5	Variação da Tensão no eletrodo e Tensão Ohmica em Função do Consumo de Alumina. . . . .	28
2.6	Curva Resistência da Cuba X Concentração de Alumina. . . . .	30
2.7	Curva Slope $\times$ Alumina. . . . .	31
2.8	Fases da Alimentação. . . . .	33
3.1	Filtro Adaptativo. . . . .	39
3.2	Diagrama de Blocos de um Observador de Estados. . . . .	42
3.3	Tensão, Corrente e Resistência - 200 ms . . . . .	54
3.4	Status de Operação da Cuba 1050 em segundos. . . . .	55
3.5	Estimativas - Resistência, Slope e Curvatura- 200 ms . . . . .	57
3.6	Ganhos do Filtro de Kalman para 200ms . . . . .	58
3.7	Filtragem da Resistência para 200ms - Casos: Referência e 1,2 e 3	59
3.8	Filtragem da Resistência para 200ms - Casos: Referência e 4,5 e 6.	60
4.1	Medições, Resistência e Condição Operacional da Cuba. . . . .	67
4.2	Histogramas de Corrente, Tensão e Resistência . . . . .	68
4.3	Slope dos filtros FKP on-line, FKP off-line , $\alpha\beta\gamma$ e Parabólico . .	69
4.4	Ajuste QR - Regra 1. . . . .	72
4.5	Heurística 2 - Ajuste QR - Casos de 5-8 - Regra 1 . . . . .	73
4.6	Heurística 4 - Ajuste QR - Casos 9-12 - Regra 3 . . . . .	75
5.1	Medições do computador de processo - Cuba 1050 - 2 horas. . . . .	79

---

5.2	Estimativas Filtradas do FK em Tempo Real. . . . .	80
5.3	Filtros - FK Escalar e Padrão On Line , $\alpha\beta\gamma$ e Parabólico . . . . .	81
5.4	Cuba 2006 Filtro Parabólico . . . . .	82
5.5	Cuba 2058 Filtro $\alpha\beta\gamma$ . . . . .	82
5.6	Cuba 2006 - Comportamento em Tempo Real dos Filtros. . . . .	84
5.7	Cuba 2006 - Progressão do Slope Kalman durante período de sub- alimentação de alumina. . . . .	85
5.8	Cuba 2006 Filtro Parabólico. . . . .	86
5.9	Cuba 2006 Filtro $\alpha\beta\gamma$ . . . . .	86
5.10	Cuba 2058 - Comportamento em Tempo Real dos Filtros. . . . .	87
5.11	Cuba 2058 - Progressão do Slope Kalman durante período de sub- alimentação de alumina. . . . .	88
5.12	Cuba 2058 Slope Parabólico. . . . .	89
5.13	Cuba 2058 Slope $\alpha\beta\gamma$ . . . . .	89

# Lista de Abreviaturas e Siglas

AG	Algoritmo Genético
EAR	Equação Algébrica de Riccati
FK	Filtro de Kalman
K	Ganho do Filtro de Kalman
MIMO	Multiple-Input and Multiple-Output (Múltiplas-Entradas e Múltiplas-Saídas)
SISO	Single-Input and Single-Output (Simples-Entrada e Simples-Saída)
$Q$	Matriz de Covariância da Perturbação no Estado
$R$	Matriz de Covariância do Ruído de Medida

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
1.1	Objetivo . . . . .	10
1.1.1	Objetivo Geral . . . . .	10
1.1.2	Objetivo Específico . . . . .	10
1.2	Motivação . . . . .	11
1.3	Justificativa . . . . .	11
1.4	Organização da Dissertação . . . . .	12
<b>2</b>	<b>O Problema da Concentração de Alumina</b>	<b>14</b>
2.1	O Computador de Controle . . . . .	15
2.2	Planta para Produção de Alumínio . . . . .	16
2.2.1	Parâmetros do Controle . . . . .	16
2.2.2	O Alimentador de Alumina . . . . .	18
2.2.3	Estratégia de Controle . . . . .	19
2.2.4	Variáveis de Saída . . . . .	19
2.2.5	Controle da Alumina . . . . .	20
2.2.6	Intervalo de Alimentação . . . . .	21
2.3	O Problema de controle da alumina . . . . .	23
2.3.1	Altas concentrações de alumina . . . . .	24
2.3.2	Baixas concentrações de alumina . . . . .	24
2.3.3	Concentração ideal de alumina no banho . . . . .	26
2.4	Relação entre a resistência da cuba e a concentração de $Al_2O_3$ . . . . .	27
2.5	Controle Moderno . . . . .	30
2.5.1	Fases de Sub-alimentação e de Super-alimentação . . . . .	32
2.6	Caracterização do Problema de Controle . . . . .	33

---

2.7	Conclusão . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Medição da Concentração de Alumina</b>	<b>35</b>
3.1	Estado da Arte dos Sistemas de Medição de $Al_2O_3$ . . . . .	36
3.2	Filtros Digitais . . . . .	38
3.2.1	Filtro Ótimo . . . . .	38
3.2.2	Filtro Adaptativo . . . . .	38
3.2.3	Filtro Robusto . . . . .	39
3.3	Observadores de Estado . . . . .	40
3.3.1	Comportamento do Observador . . . . .	42
3.3.2	Aspectos Práticos de Implementação . . . . .	44
3.4	Filtro de Kalman Escalar . . . . .	45
3.4.1	Modelo da Cuba . . . . .	47
3.4.2	Equações de Saída Estimada . . . . .	48
3.4.3	Equações do Ganho de Kalman . . . . .	48
3.4.4	Equações de Estado - Filtragem . . . . .	49
3.4.5	Equações de Covariâncias - Filtragem. . . . .	49
3.4.6	Equações de Estado - Predição . . . . .	50
3.4.7	Equações de Covariâncias - Predição . . . . .	51
3.5	Análise Numérica do SKF . . . . .	52
3.5.1	Medições na Cuba . . . . .	52
3.5.2	Momentos Estatísticos . . . . .	55
3.5.3	Estimativa dos Estados . . . . .	56
3.5.4	Limites Operacionais . . . . .	58
3.6	Conclusão . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Ajuste dos Ganhos de Kalman</b>	<b>63</b>
4.1	Formulação do Ajuste do Ganho . . . . .	63
4.1.1	Regras da Dualidade QR . . . . .	65
4.2	Medições na Cuba . . . . .	66
4.3	Sintonia QR do FK Padrão . . . . .	69
4.3.1	Regra 1 de Sintonia QR . . . . .	69
4.4	Conclusão . . . . .	76



---

<b>5</b>	<b>O Filtro de Kalman em Tempo Real</b>	<b>77</b>
5.1	FK e o Computador de Processo . . . . .	78
5.1.1	Resultados Experimentais . . . . .	78
5.1.2	Estimativa dos Estados . . . . .	80
5.1.3	Análise Comparativa . . . . .	81
5.1.4	Momentos Estatísticos . . . . .	81
5.2	Medição e Análise de % $Al_2O_3$ em Laboratório . . . . .	82
5.2.1	Percentual de Alumina X Resistência Elétrica . . . . .	82
5.2.2	Cuba 2006 - Análise de Desempenho . . . . .	83
5.2.3	Cuba 2058 - Análise de Desempenho . . . . .	86
5.3	Conclusão . . . . .	90
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>91</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>93</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>95</b>
<b>A</b>	<b>Planejamento de Amostragem e de Análise</b>	<b>96</b>
<b>B</b>	<b>Leco</b>	<b>100</b>

## CAPÍTULO 1

# Introdução

---

No processo de produção de alumínio o custo do produto(alumínio) é fortemente afetado pela quantidade de alumina adicionada na célula de produção. A avaliação dessa quantidade de alumina pode ser realizada por meio de observações do comportamento eletromagnético o qual é representado por um modelo em termos de grandezas elétricas terminais, isto é, o problema de campo eletromagnético é transformado na abordagem de grandezas terminais de *Kirchoff*. Especificamente, as medições dos valores terminais de tensão e corrente da cuba são utilizados para mapear as variações da quantidade de alumina na cuba. A resistência e suas variações de primeira e de segunda ordens são utilizados para a avaliar o percentual da concentração de alumina no banho, (Fiona 2001).

Os sinais de tensão e de corrente medidos são transformados em valores de resistência medida que é a variável secundária utilizada para caracterizar e modelar o problema da quantificação da concentração de alumina no banho eletrolítico. A variação da resistência é a variável primária utilizada como métrica para avaliar o comportamento da cuba. Em termos práticos, o monitoramento e o controle das variações de alumina no banho são implementados em termos da avaliação da variação resistiva.

A filtragem de *Kalman* Padrão, *Kalman-P*, consiste em aplicar em *stricto sensu* o desenvolvimento seminal teórico proposto por *Kalman* na estimação de vetores de estado,(Brown and Hwang 1992). Os principais resultados da filtragem *Kalman-P* são utilizados para desenvolver um algoritmo de predição e correção para aplicações em tempo real da filtragem *Kalman-P*. Este algoritmo será uti-

lizado como estimador do vetor de estados.

O desempenho do filtro de *Kalman-P* é avaliado em relação as variações do *slope* em duas instâncias. Na primeira instância realiza-se uma análise comparativa em relação ao filtro digital no espaço de estado determinístico e filtro parabólico. Em uma segunda instância, o seu desempenho é comparado com amostras retiradas do banho eletrolítico para diversas condições de operações das cubas que tem como objetivo promover a sintonia do filtro de acordo com as covariâncias dos sinais medidos na cuba.

## 1.1 Objetivo

O objetivo é aplicar o desenvolvimento teórico proposto por *Kalman* na estimação de vetores de estado, ou seja, um filtro no espaço de estado e estocástico.

### 1.1.1 Objetivo Geral

Aborda-se nesse trabalho o problema da determinação do percentual de alumina no banho em cubas eletrolíticas. Estimativas equivocadas do percentual de alumina resultam em decisões de controle equivocadas que podem levar a perda total da célula de produção. Apesar da sua importância no processo de produção de alumínio, atualmente é economicamente inviável ter uma medição direta em tempo real do percentual de alumina no banho.

### 1.1.2 Objetivo Específico

Desenvolver um algoritmo de predição e correção, em tempo real, do percentual de alumina no banho eletrolítico de células produtoras de alumínio, chamadas de cubas. Esse algoritmo será o estimador das variáveis de estado. Os sinais processados pelo filtro são utilizados para inferir, ação de controle, no comportamento das cubas eletrolíticas, como também analisar, ação de monitoramento.

## 1.2 Motivação

Durante o processo de produção de alumínio o excesso de alumina que se deposita no fundo da célula de produção cria resistências à passagem de corrente elétrica. A situação oposta, a falta de alumina, leva a célula a condição de efeito anódico e resulta em alto consumo de energia e a altas taxas de emissão de uma série de gases nocivos ao meio-ambiente. Dessa forma, faz-se jus a implementação de uma nova forma para estimar o principal sinal de monitoramento e controle desse processo.

Ajustar o algoritmo de controle de alimentação encontrando um modelo matemático mais verdadeiro ao que acontece com a concentração da alumina quando a resistência varia é a motivação para essa pesquisa. Os resultados desta pesquisa traz os seguintes benefícios para o controle de processo da cuba:

1. Maior precisão na inferição do percentual de alumina no banho;
2. Redução do número de efeitos anódicos;
3. Menor consumo de energia;
4. Menor emissão de gases na atmosfera;
5. Maior facilidade em ajustar parâmetros de processo;
6. Aumento da eficiência de produção da cuba.

## 1.3 Justificativa

A necessidade de monitorar a quantidade de alumina dissolvida no banho eletrolítico justifica-se pela crescente necessidade em utilizar-se a energia do processo eletrolítico de forma cada vez mais eficiente, eliminando-se perdas que oneram a produção de alumínio. Para tanto é necessário que o controle de processo por computador seja capaz de prover à célula de produção a quantidade exata de alumina à sua taxa de consumo.

Em comparação as formas tradicionais de medição indireta, pretende-se com a utilização desses métodos desenvolver uma predição robusta, via ajuste dos ganhos do filtro de Kalman, que forneça resultados consistentes do percentual

de alumina no banho tanto em células com comportamento normal como em células consideradas problemáticas, com os seguintes ganhos potenciais: aumento da eficiência de produção da cuba, redução do número de efeitos anódicos, menor consumo de energia, menor emissão de gases na atmosfera; maior facilidade em ajustar parâmetros de processo (maior conhecimento).

## 1.4 Organização da Dissertação

A presente dissertação focaliza o problema da medição da concentração de alumina no banho eletrolítico em células produtoras de alumínio. A caracterização desse problema é tratada no Capítulo 2, no qual apresenta-se o propósito do controle de alimentação para a cuba. Ressalta-se a importância de um bom controle digital ser capaz de manter a concentração de alumina em níveis apropriados para a operação da célula de produção, evitando a ocorrência de efeitos anódicos e a formação de lama (excesso de alumina na célula eletrolítica).

No Capítulo 3 apresenta-se o filtro de *Kalman* para estimar o comportamento da célula de produção para fins de controle do percentual de alumina no banho eletrolítico. Discorre-se sobre os conceitos básicos de observador de estado, destacando-se o papel da Teoria de *Kalman* na sintonia dos ganhos do observador. Consideram-se aspectos de estabilidade numérica com o objetivo de minimizar erros de arredondamento que podem conduzir a não-convergência do filtro.

O Capítulo 4 é dedicado ao estudo do ajuste dos ganhos do filtro de *Kalman*. Utilizam-se os procedimentos baseados em inferência Bayesiana para realização de auditorias pós-filtragem afim de verificarmos a precisão do filtro de *Kalman* quando comparado com o mundo real. Os ajustes dos ganhos são feitos via matrizes de covariância  $Q$  e  $R$ , comparando-se os resultados dos testes *off-line* com os demais filtros (filtro  $\alpha\beta\gamma$  e *slope* Parabólico). Os ganhos do filtro de *Kalman* são ajustados para seguir o padrão desses filtros tradicionais, que são historicamente utilizados para a predição das variáveis de estado do banho eletrolítico.

No Capítulo 5 apresentam-se os resultados dos testes *on-line* após a implementação do filtro de *Kalman* no computador de controle de processo. O objetivo é avaliar a capacidade do filtro em prover uma inferência confiável do percentual

de alumina no banho eletrolítico sob condições normais de operação da cuba. Os resultados dos testes *on-line* são comparados com os demais filtros em termos de representatividade estatística.

No Capítulo 6 apresenta-se a conclusão sobre a utilização do filtro de *Kalman* na predição do percentual de alumina no banho eletrolítico. Questões de observabilidade são levantadas assim como as sugestões para melhor sintonia dos ganhos do filtro.

No Apêndice A apresentam-se as características do equipamento utilizado para medição direta do percentual de alumina no banho eletrolítico. Detalhes a respeito do procedimento de amostragem e da regressão linear (avaliação estatística) são apresentadas no Apêndice B. Estes dois Apêndices complementam o Capítulo 5.

## CAPÍTULO 2

# O Problema da Concentração de Alumina

---

De uma maneira geral, o processo da produção de alumínio é apresentado sob o enfoque de uma caracterização do problema da concentração de alumina ( $Al_2O_3$ ) no banho eletrolítico. O problema é apresentado dentro do escopo de modelagem e controle de sistemas dinâmicos, seguindo a metodologia desenvolvida e aplicada por (Barros 2005) para caracterização, formulação e solução de problemas de controle. Os dois primeiros tópicos são amplamente abordados neste capítulo. Em relação a solução, apresentam-se *insights* sobre os requisitos que os métodos devem atender a fim de fornecer alternativas ótimas para o controle da quantidade de alumina.

A caracterização do problema de concentração de alumina segue uma abordagem voltada para o controle da quantidade de alumina adicionada à célula de produção de alumínio. Seguindo essa linha, estabelece-se uma analogia entre os sistemas de cubas do mundo real e uma forma canônica da representação de plantas e de sistemas de controle. Apresenta-se, de forma generalizada, na figura 2.1 a arquitetura funcional do processo de produção de alumínio sob o ponto de vista de sistemas de controle, isto é, implica modelagem da cuba (planta) e estratégias de controle. Esta arquitetura é aplicada na modelagem de um sistema de cubas, especificamente, para fins de monitoramento dos seus estados e implementação de seus controles. O sistema modelado é utilizado para o desenvolvimento, análise e implementação de um filtro de *Kalman* que tem por objetivo estimar o per-

centual de alumina no banho eletrolítico da cuba, levando em consideração as suas restrições operacionais.

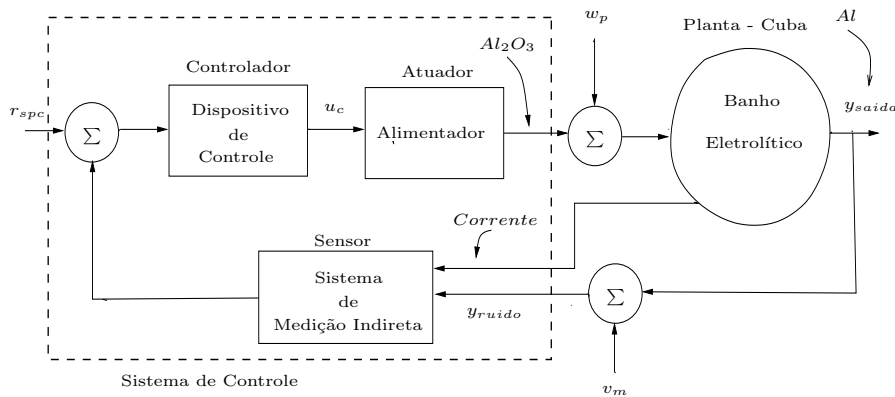


Figura 2.1: Planta de Sistema Controle para Concentração de Alumina.

O sistema de controle, figura 2.1, é constituído pelo sensor, controlador e atuador. O sensor é modelado como um sistema de medição indireta, pois a partir de sinais de corrente e tensão, e outras informações como *status* de operação da cuba, estimam-se grandezas ou taxas que são utilizadas pelo dispositivo de controle. O sistema de controle processa os sinais e estes são utilizados para tomar decisões que inferem no comportamento do processo. O controle pode promover ações do tipo **PID** para modificar a frequência de atuação do alimentador de  $Al_2O_3$ .

## 2.1 O Computador de Controle

O computador de controle de processo, em geral, para cubas do tipo *pre-baked* ou tipo *Soderberg point-feeder*, controla a alimentação de alumina para as cubas, (Braga *et al.* 2007b). A intenção é manter uma quantidade de alumina dissolvida no banho que garanta a máxima produção de alumínio. Em cubas do tipo *pre-baked* a concentração ótima de alumina no banho fica em torno de 3% no banho eletrolítico, porém, existem grandes variações desta concentração dependendo das operações



efetuadas nas cubas e variações de outros parâmetros de controle,(Silva 1995). Na prática não existe um método para medir diretamente esta quantidade ou concentração de alumina no banho eletrolítico na velocidade que o controle de processo requer,(Silva *et al.* 2002).

O computador de processos controla a quantidade de alumina, isto é, deve atender a demanda de alumina que é adicionada na cuba dentro do intervalo nominal de alimentação. O intervalo de alimentação, definido em segundos, é a janela de tempo em que o computador vai enviar um pulso para o acionamento dos alimentadores de alumina, sendo que esse intervalo varia de cuba para cuba, ou seja, cada célula de produção tem seu intervalo-alvo de alimentação.

## 2.2 Planta para Produção de Alumínio

O sistema para produção de alumínio é modelado em relação a estrutura canônica de sistemas de controle, figura 2.1, para representar a dinâmica da cuba. Utilizando as informações operacionais, classifica-se o processo de produção de alumínio em dois blocos funcionais que são Planta e Sistemas de Controle de Processo.

O principal objetivo desta seção é a caracterização do problema de controle de alimentação de alumina, considerando o comportamento de uma planta do mundo real. Dois parâmetros de grande importância para o sistema de controle são o intervalo nominal de alimentação e a quantidade de alumina consumida.

### 2.2.1 Parâmetros do Controle

Uma dada quantidade de alumina é adicionada a cuba sempre que o computador envia uma ordem de alimentação para os alimentadores. Para adicionar mais ou menos alumina na cuba o computador diminui ou aumenta o intervalo de tempo entre o envio dos pulsos para os alimentadores. A determinação do intervalo de alimentação  $\Delta t_{feed}$  é obtido em função das especificações de projetos, tais como: eficiência de corrente ( $eff_{corrent}$  em %) e da intensidade de corrente ( $I$  em kA), (Silva *et al.* 2002). Outros parâmetros importantes serão citados ao longo do texto. De uma forma geral, as definições paramétricas para determinação do intervalo de atuação são:

$$\Delta t_{feed} = f_{t_{feed}}(\cdot) \quad (2.1)$$

e

$$Al_2O_3^{consum} = f_{Al_2O_3-C}(\cdot) \quad (2.2)$$

sendo  $f_{Al_2O_3}$  a função que mapeia a quantidade de alumina  $Al_2O_3^{consum}$  consumida durante o processo de eletrólise, afim de obter-se um alto rendimento do processo produtivo. Por meio de  $Al_2O_3^{consum}$  determina-se a quantidade de  $Al_2O_3$  que será adicionada pelos alimentadores na cuba, dentro do intervalo de tempo  $\Delta t_{feed}$ , conforme a equação (2.1).

A seguir, descreve-se um método para determinação do ajuste do intervalo de alimentação para um caso típico do mundo real. Este método tem por base a **Lei de Faraday** e os procedimentos de operação e de controle da cuba. Enfocando, claro, o sistema de controle da alimentação de alumina, o objetivo das subseções é discutir as relações entre as principais variáveis que permitem estabelecer a quantidade de alumina que é adicionada na cuba. Em seguida, estipula-se o intervalo de atuação do sistema de controle. O processo de produção de alumínio é visto sob o ponto de vista de um sistema de controle, isto é, os seus elementos básicos estão representados na figura 2.1, cada bloco desta figura está associado a uma funcionalidade do sistema do mundo real que é executada por um equipamento, dispositivo.

Na figura 2.2 mostra-se uma realização dos elementos de controle da figura 2.1 e da planta. Ainda, na referida figura, apresenta-se uma interface de controle de processo em uma fábrica de alumínio. A corrente que alimenta as células de produção de uma linha de cubas é fornecida por uma subestação. A *interface* de *hardware* do controle de processo lê os sinais analógicos de corrente de linha e de tensão individual de cada cuba, os converte e envia a informação para o sistema de controle de processo. Esse sistema, por sua vez, faz uma varredura em todas as cubas da linha verificando se existe a necessidade de correção dos parâmetros-alvo de controle de cuba e age acionando os alimentadores e/ou o barramento anódico naquelas cubas onde for necessário. Ao fim do processamento das rotinas de controle o sistema de controle de processo passa a informação relativa ao somatório das tensões-alvo das cubas para o sistema de controle de carga/demanda.

Esse sistema, por sua vez, atuará nos transformadores reguladores existentes na subestação afim de prover a corrente e a tensão total que a linha de cubas precisa naquele momento, (Silva *et al.* 2002).



Figura 2.2: Fluxo de Sinais da Interface de Controle.

## 2.2.2 O Alimentador de Alumina

Para cubas do tipo ALCOA-697 o valor típico da quantidade de alumina armazenada/dosada por alimentador é de 1.70 Kg. Considerando que uma célula de produção possui em geral 3 alimentadores, e que o computador aciona os 3 alimentadores ao mesmo tempo, teremos que cada vez que os alimentadores são acionados 5.10 Kg de alumina são jogados na cuba, (Braga 2003).

Considerando ainda que o volume total de banho líquido de uma cuba tipo ALCOA-697 pode ser de 5000 Kg de banho líquido, teremos que cada vez que os alimentadores são acionados a concentração de alumina no banho sofre variações e seu valor é mapeado pela relação,

$$\Delta Al_2O_3 = f_{Al_2O_3-D} (Al_2O_3^{qa}, B_{liq}^{qa}) \quad (2.3)$$

Esta função  $f_{Al_2O_3-D} : R^2 \rightarrow R$ , eq. (2.3), mapeia as quantidades  $Al_2O_3^{qa}$  de alumina e banho líquido  $B_{liq}^{qa}$  para aproximar a variação da concentração percentual de alumina no banho  $\Delta Al_2O_3$ ,

$$\begin{aligned} \Delta Al_2O_3 &= \frac{5,1\text{Kg de } Al_2O_3}{5000\text{Kg de banho}} 100 \\ &= 0,102 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Assim, para cubas do tipo ALCOA-A697, e considerando as referidas quantidades de banho e a corrente da linha, sempre que o computador de controle acionar os alimentadores na cuba a concentração de alumina sofrerá variações em torno de 0,102%.

### 2.2.3 Estratégia de Controle

Nesta subseção estabelece-se uma referência e um objetivo para avaliar o desempenho do sistema de controle. A partir desta caracterização pode-se definir estratégias de controle que gravitam em torno de objetivo ótimo. Este objetivo relaciona alta produção de alumínio com baixa concentração de alumina no banho eletrolítico.

Para que a concentração de alumina se mantenha constante no banho é necessário que a quantidade de alumina adicionada seja igual à quantidade que está sendo consumida pelo processo de eletrólise, (Silva *et al.* 2002). O consumo de alumina da cuba depende da corrente elétrica e eficiência da cuba e essa relação é dada pela **Lei de Faraday**, (Braga 2003), conforme abordaremos adiante.

### 2.2.4 Variáveis de Saída

A partir da **Lei de Faraday** é possível estimar a quantidade máxima de alumínio produzida pelo processo de eletrólise. Segundo **Faraday**, a quantidade máxima de alumínio que o processo de eletrólise consegue produzir é de 8,053 Kg de alumínio por kilo-ampere em 24 horas. A partir disso estabelece-se uma relação formal, isto em termos de operadores, para uma identificação caixa branca da quantidade de alumínio produzida,  $Al^{Prod}$ , em função da eficiência de corrente e da intensidade de corrente.

$$Al^{Prod} = f_{Al-P}(eff_{corrent}, I) \quad (2.5)$$

As relações funcionais em nível de operadores entre as variáveis mapeadas pela função  $f_{Al-P} : R^2 \rightarrow R$  são estabelecidas pela **Lei de Faraday**,

$$Al^{Prod} = \frac{eff_{corrent}}{100} 8.053I \quad (2.6)$$

sendo  $eff_{corrent}$  a eficiência de corrente (%) e  $I$  a intensidade de Corrente (kA).

Estabelecida uma relação entre as entradas, equação (2.6), ou variáveis de controle  $eff_{corrent}$  e  $I$ , tem-se uma função que permite mensurar o desempenho da célula de produção a partir do ponto do vista de insumos básicos. Esta situação permite modelar a célula de produção para uma dada situação de operação em que apenas estas duas variáveis estão inferindo ou agindo no processo de eletrólise.

## 2.2.5 Controle da Alumina

O controle de computador para a alumina só será eficiente se a taxa usada como intervalo de alimentação estiver coerente com a corrente elétrica da linha e com a quantidade de banho eletrolítico existente na cuba. A quantidade de banho eletrolítico varia de acordo com o tamanho da cuba. O principal objetivo é manter a concentração de alumina em um nível onde se obtenha a máxima produção de alumínio. Assim, considera-se a relação entre as quantidades em kilograma de alumina necessária para produzir um kilograma de alumínio,

$$Al_2O_3^{consum} = f_{Al_2O_3-C}(fator_{al-Al_2O_3}, eff_{corrent}, I) \quad (2.7)$$

Como vimos, as relações funcionais em nível de operadores para o mapeamento das variáveis de controle pela função  $f_{Al_2O_3-C} : R^3 \rightarrow R$  são estabelecidas pela **Lei de Faraday**. A quantidade de alumina consumida(ou necessária),  $Al_2O_3^{consum}$ , é função do nível da intensidade de corrente elétrica  $I$  fornecida para o processo de eletrólise. Quanto maior a intensidade de corrente maior será o consumo de alumina dentro da célula de produção. É também função do fator de consumo

de alumina,  $fator_{al-Al_2O_3}$ , dado que para produzir 1 Kg de alumínio necessitamos de 1,91 Kg de alumina. O valor 1,91 é conhecido como fator de consumo da alumina, (Silva *et al.* 2002). Por último, é função da eficiência de corrente da linha de cubas  $eff_{corrent}$ , que expressa o percentual da corrente elétrica efetivamente dispendida para a produção do metal, já computadas as perdas elétricas. Assim, podemos calcular a quantidade de alumina consumida através da seguinte relação, (Braga 2003):

$$Al_2O_3^{consum} = 1,91 \frac{eff_{corrent}}{100} 8.053I \quad (2.8)$$

### 2.2.6 Intervalo de Alimentação

O mapeamento das variáveis de projeto, isto é, as especificações de projeto apresentadas em (Braga 2003) são formalizadas em termos de funções. Este mapeamento permite estabelecer o intervalo de controle  $\Delta t_{feed}$ ,

$$\Delta t_{feed} = f_{tfeed}(eff_{corrent}, I) \quad (2.9)$$

Considerando uma cuba operando a 94 % de eficiência para uma corrente de 223 kA, a quantidade de alumina consumida diariamente,

$$Al_2O_3^{consum} = 1,91 \frac{94}{100} 8.053 \quad (2.10)$$

$$= 3224 \text{ Kg de alumina} \quad (2.11)$$

Se os alimentadores em média alimentam 5,1 Kg cada vez que são acionados, significa que para alimentar 3224 Kg eles deverão ser acionados 632 vezes (=3224/5,1) em 24 horas. Logo, o intervalo nominal de alimentação é igual a 86400 s (duração do dia em segundos) dividido pelo número de vezes (632) que os alimentadores precisam ser acionados. Portanto, o intervalo nominal de alimentação é dado por:

$$\begin{aligned} \Delta T_{alim} &= \frac{T_{horiz}}{f_{horiz}} \\ &= 136,7 \text{ segundos} \end{aligned} \quad (2.12)$$

sendo  $T_{horiz}$  o horizonte de tempo especificado para operação da cuba e  $f_{horiz}$  é a quantidade de vezes que os alimentadores precisam ser acionados em  $T_{horiz}$ .

A tabela 2.2.6 contém o valor calculado de intervalos de alimentação para diferentes alvos de corrente e de eficiência.

Tabela 2.1: Intervalo de alimentação ideal para alvos de corrente da linha e eficiência da cuba

Eficiência de Corrente (%)	95	95	90
Intensidade de Corrente (kA)	223	210	223
Intervalo Nominal (s)	135,2	143,6	142,7

A engenharia de processo e as equipes de operação alteram a alimentação base da cuba levando em consideração as seguintes informações: alteração considerável do alvo de corrente; cubas doentes; cubas com problemas de alimentador; cubas com muitos efeitos anódicos; cubas com longo tempo sem efeito anódicos e com alimentação média diária discrepante em relação a alimentação base, e vice-versa. O computador de controle vai controlar o percentual de alumina na cuba alterando a alimentação alvo para mais (menos alumina) ou para menos (mais alumina).

Materiais constituídos de elementos químicos com relações entre átomos que permitem a movimentação de elétrons apresentam baixa resistência a passagem da corrente elétrica. Materiais onde esse movimento é dificultado apresentam alta resistência. Considerando a célula de produção de alumínio, vemos que em particular os anodos, as camadas de banho e a camada de metal impõem resistência a passagem de corrente elétrica. Analisando em detalhe esses três elementos, o banho é o componente de resistência de maior variação visto que seu comportamento frente à corrente elétrica muda drasticamente com a variação da concentração de alumina dissolvida,(Braga 2003).

O computador de controle de processo não consegue distinguir todas as causas das variações de resistência elétrica nas cubas. Ele trata todas as variações de resistência como sendo uma mudança na concentração de alumina no banho, o que claramente é um erro. Como consequência, suas inferições e decisões em relação a quantidade de alumina no banho são muitas vezes imprecisas e até mesmo erradas. Esses erros na inferição levam a situações extremas de *super-alimentação* (lama)

ou de *sub-alimentação* (efeito anódico) nas cubas, com conseqüências drásticas para o controle de processo, para a eficiência de utilização de energia de cada célula de produção e para o meio-ambiente,(Braga 2003).

## 2.3 O Problema de controle da alumina

O propósito do controle de alimentação é manter a concentração de alumina da cuba dentro de uma faixa desejada para evitar efeitos anódicos ou formação de lama. O desenvolvimento a seguir explica porque isso é tão importante para a eficiência da operação da cuba. Estando a concentração de alumina fora dessa faixa causa ineficiência na operação das cubas. Manter a concentração o mais próximo possível do nível apropriado para operação é a chave para otimizar a performance da cuba no que diz respeito a eficiência de corrente.

Nesta seção, estabelece-se conceitos e conhecimento empírico sobre o processo de controle de alumina. Os comentários e conclusões, sobre este problema, conduzem a elaboração de uma visão conceitual do problema de controle, sob ponto de vista de estratégias, seção 2.6.

O enfoque é dado a uma caracterização de um sistema de medição indireta para a estimação/previsão da concentração de alumina no banho, sob o ponto de vista de filtragem. Sob o ponto de vista de controle, desenvolve-se modelos não lineares nebulosos do sistemas para o projeto de controladores robustos, (de Mello Almeida 2005). Especificamente, vislumbra-se o estudo/investigação/pesquisa de controladores do tipo **LQG/LTR** para o acionamento do alimentador ou outros sistemas do tipo **PID**, (Fonseca Neto 2003) e (Ferreira *et al.* 2003).

O objetivo do algoritmo de controle de alimentação é tomar decisões confiáveis que permitam a cuba eletrolítica operar de forma otimizada, aproveitando ao máximo os insumos principais de produção que são a alumina e a energia. Para tanto os modelos matemáticos em que baseia as suas decisões devem estar o mais próximos possíveis da realidade, afim de não causar sérios distúrbios a operação da cuba e a sua eficiência.

Durante a operação normal de uma cuba muitos fenômenos podem influenciar a concentração de alumina no banho sem que se saiba exatamente quando e como a mesma mudou. A única forma que o computador de controle tem de inferir



como está a concentração de alumina no banho é monitorar a resistência da cuba, considerando que existe uma correlação forte entre a variação da concentração da alumina e a variação da resistência na cuba, como será descrito nas seções seguintes.

Essa relação precisa ser melhor explorada pelo algoritmo de controle para que o mesmo tome decisões mais precisas quanto ao percentual de alumina na cuba. O algoritmo deve ser robusto suficiente para tratar situações normais e anormais de controle. O desenvolvimento a seguir explica porque é muito importante manter a concentração de alumina na faixa ideal de controle.

### 2.3.1 Altas concentrações de alumina

Os problemas com altas concentrações de alumina no banho eletrolítico provocam uma precipitação da alumina não dissolvida no catodo da cuba, chamada de lama. Para temperaturas normais de operação, o banho eletrolítico atinge a saturação em alumina em torno de 7%. Uma vez que o banho atinge essa condição a alumina adicionada não consegue mais ser dissolvida, formando depósitos de lama no catodo, (Tarcy *et al.* 2002). Tais depósitos podem alterar o fluxo de corrente vertical desejado na cuba, causando então correntes elétricas horizontais. As correntes horizontais resultam em forças magnéticas no lastro de metal. O movimento resultante do lastro de metal pode adversamente afetar a estabilidade da cuba, levando as perdas de energia e/ou de eficiência de corrente. Normalmente, os depósitos de lama no catodo causam elevação repentina da temperatura da cuba, podendo atingir valores superiores a 1000 °C, (Tarcy *et al.* 2002).

### 2.3.2 Baixas concentrações de alumina

Se a concentração de alumina ficar muito baixa (pobre), ocorre efeito anódico, conforme mostrado na figura 2.3. A teoria mais recente sobre efeito anódico o atribui à falta de íons de oxigênio na superfície anódica. Íons fluoretados ocupam o seu lugar e transformam a superfície anódica em algo parecido com teflon. Esse comportamento significa que o banho não pode mais molhar a superfície anódica, mas as bolhas de gás coagulam nessa região efetivamente formando uma barreira isolante entre o anodo e o banho. A barreira isolante resulta num grande aumento

da tensão da cuba (25 a 40 Volts normalmente) até que a barreira de gás isolante seja quebrada. Tipicamente quebra-se a barreira de gás abaixando os anodos até que eles atinjam o lastro de metal, através da lógica de supressão e recuperação de efeito anódico existente no computador de processo, (Braga *et al.* 2007b).

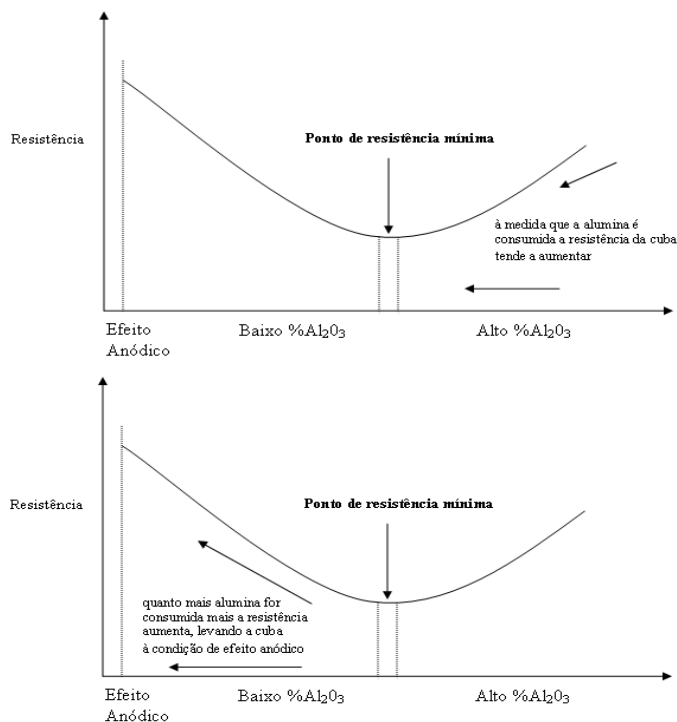


Figura 2.3: Baixa Concentração de Alumina.

A tensão extremamente alta de um efeito anódico causa tanto uma queda na corrente da linha de cubas quanto uma grande adição de calor na cuba em efeito anódico. A queda na corrente resulta também numa queda eletromagnética e na perda em produção pelo resto da linha de cubas. A grande quantidade de calor extra adicionada à cuba durante um efeito anódico pode resultar em um grande distúrbio em seu equilíbrio térmico e num período prolongado de baixa eficiência de corrente. O distúrbio no equilíbrio térmico significa que grande parte, senão toda a aresta da cuba, pode ser fundida. Essa perda de proteção, devido à fusão da aresta, expõe a parede lateral ao ataque do banho e encurta a vida da cuba.

Além disso, compostos fluoretados de carbono ( $CF_4$  e  $C_2F_6$ ), os quais con-

tribuem para o efeito *green house* (destruição da camada de ozônio), são produzidos pelas condições de alta tensão da cuba durante um efeito anódico, (Braga *et al.* 2007b). Por todas essas razões, manter a concentração de alumina acima da concentração em que existe um alto risco de efeito anódico é a grande prioridade do controle de alimentação nas cubas eletrolíticas.

### 2.3.3 Concentração ideal de alumina no banho

A discussão precedente enfatizou que o primeiro objetivo do controle de alimentação é manter limpa a superfície do catodo da cuba (livre de lama) e proteger a cuba de um efeito anódico (EA). Porém, para otimizar a performance da cuba, é necessário uma faixa mais estreita de controle da concentração de alumina. Dois fatores têm maior impacto no controle do nível de concentração de alumina ideal para um tipo particular de cuba. Um fator principal é incentivar a utilização da concentração de alumina que corresponda à região mínima da curva de resistência-concentração de alumina, figura 2.4. Operar nessa faixa de concentração de alumina significa que a resistência através do banho está minimizada. Então, para uma dada tensão da cuba, a distância anodo-catodo(DAC) será maximizada, gerando uma maior estabilidade da mesma.

O outro fator importante para um nível de concentração de alumina ideal vem de numerosos testes de eficiência de corrente. Testes de eficiência de corrente através de diluição de prata permitem medir a eficiência de corrente de uma cuba em um período de um a dois dias. Os resultados de quase todos os testes de eficiência de corrente mostram correlação entre alta eficiência de corrente e concentrações ideais (quase baixas) de alumina,(Tarcy *et al.* 2002). Uma limitação prática ao se diminuir muito a concentração de alumina é o aumento do risco de um efeito anódico.

A combinação desses dois fatores principais (baixa resistência do banho e concentração ideal de alumina) significa que o nível ótimo de concentração de alumina para alta eficiência de corrente das cubas está justamente no lado pobre em alumina da curva resistência-concentração de alumina, figura 2.4. A operação em condições de quase baixa concentração de alumina (pobre) permite operar a cuba sem que haja formação de lama sobre a superfície do catodo.

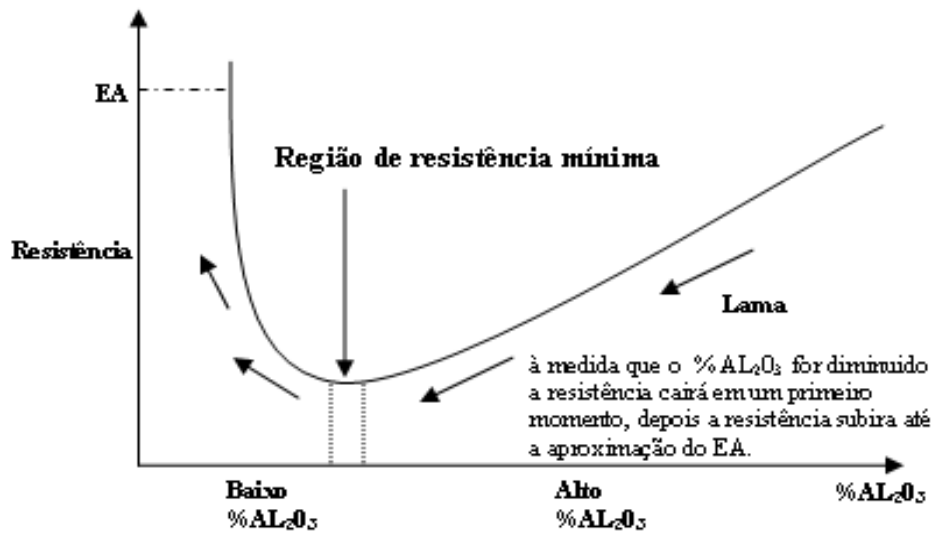


Figura 2.4: Região Mínima da Curva de Resistência.

## 2.4 Relação entre a resistência da cuba e a concentração de $Al_2O_3$

Infelizmente, não há, atualmente, nenhuma tecnologia para medição direta e contínua da concentração de alumina no banho, (Silva *et al.* 2002). O algoritmo de controle de alimentação deve deduzir a concentração de alumina no banho através de algum outro sinal. Há uma relação entre a resistência da cuba e a concentração de alumina no banho baseada na física (estrutura) e na química de uma cuba eletrolítica. A lógica do controle de alimentação objetiva explorar essa relação constantemente para inferir a concentração de alumina.

A tensão da cuba pode ser dividida em três componentes:

1. A *componente bateria*, que é simplesmente o potencial de decomposição associado à reação eletrolítica para produzir alumínio metálico.
2. A *componente eletrodo*, que inclui os efeitos eletroquímicos no anodo e no catodo, necessários para sustentar a reação eletrolítica numa taxa aceitável. Isto também inclui a perda de tensão causada pelas bolhas de gás.

3. A *componente tensão elétrica (ou ohmica)*, que resulta da corrente que atravessa a resistência elétrica do banho entre anodo e catodo.

A tensão do efeito bateria, chamada BEMF ou força contra-eletromotriz, é essencialmente constante em relação à corrente da cuba, com valores típicos entre 1.60 a 1.70 volts, para todos os tipos de cuba.

A força contra-eletromotriz ou BEMF pode ser removida da tensão total, usada para controlar a cuba. As outras duas componentes de tensão são mostradas na figura 2.5. A componente eletrodo não varia linearmente com a concentração de alumina, apresentando uma rápida elevação quando a concentração de alumina diminui para a concentração de efeito anódico. A componente tensão ohmica é essencialmente linear com a concentração de alumina no banho, refletindo no aumento da resistividade do banho em concentrações de alumina mais altas.

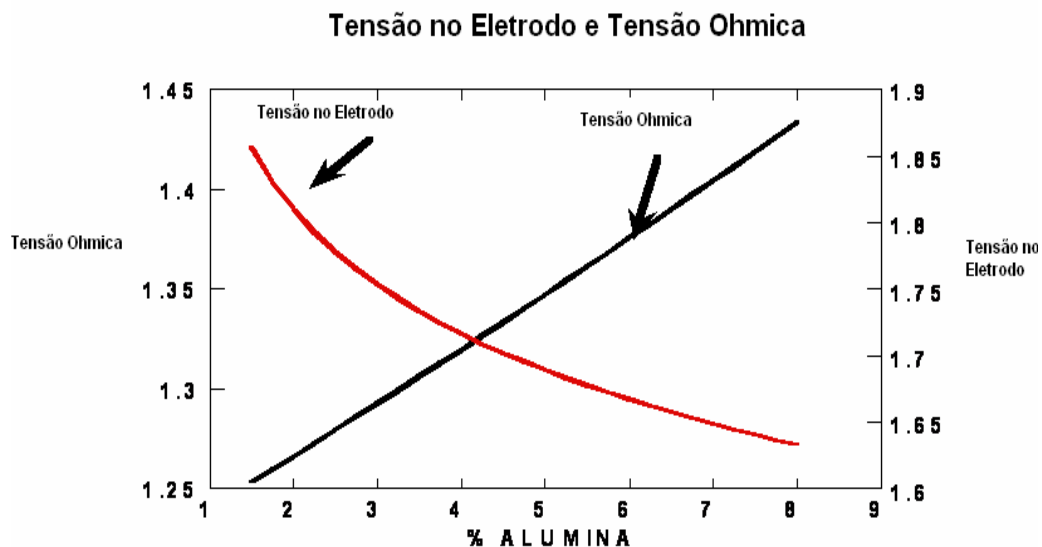


Figura 2.5: Variação da Tensão no eletrodo e Tensão Ohmica em Função do Consumo de Alumina.

Somando essas duas componentes têm-se a tensão total do banho da cuba (entre o anodo e o catodo) menos o valor do BEMF. A soma representa a variação da

tensão do banho quando a concentração de alumina varia. As outras componentes da tensão da cuba (externas, perda anódica, perda de tensão catódica, etc) são essencialmente constantes no que diz respeito às mudanças na concentração de alumina.

A tensão do efeito bateria independente da corrente. Uma variável melhor a ser usada para controle de cuba é a resistência, dada por:

$$R_{cuba} = \frac{V_{cuba} - BEMF}{I_{cuba}} \quad (2.13)$$

sendo  $V_{cuba}$  a tensão da cuba em Volts (V) e  $I_{cuba}$  a corrente da cuba em kilo Àmpere (kA).

Com essa fórmula, os efeitos típicos de flutuações de corrente podem ser eliminados, o que permite que a resistência da cuba possa ser usada para controlar a concentração de alumina e a distância AC(anodo-catodo) explorando as relações mostradas na figura 2.4. (As contribuições de resistência externa, anódica e catodódica, permanecem constantes apesar das mudanças de corrente).

Transformando linearmente a curva que representa a soma de tensão na figura 2.5 em resistência, através da equação 2.13, resulta na curva mostrada na figura 2.6. Essa curva, a qual descreve a relação entre a resistência da cuba e a concentração de alumina no banho, é conhecida como curva resistência-concentração de alumina.

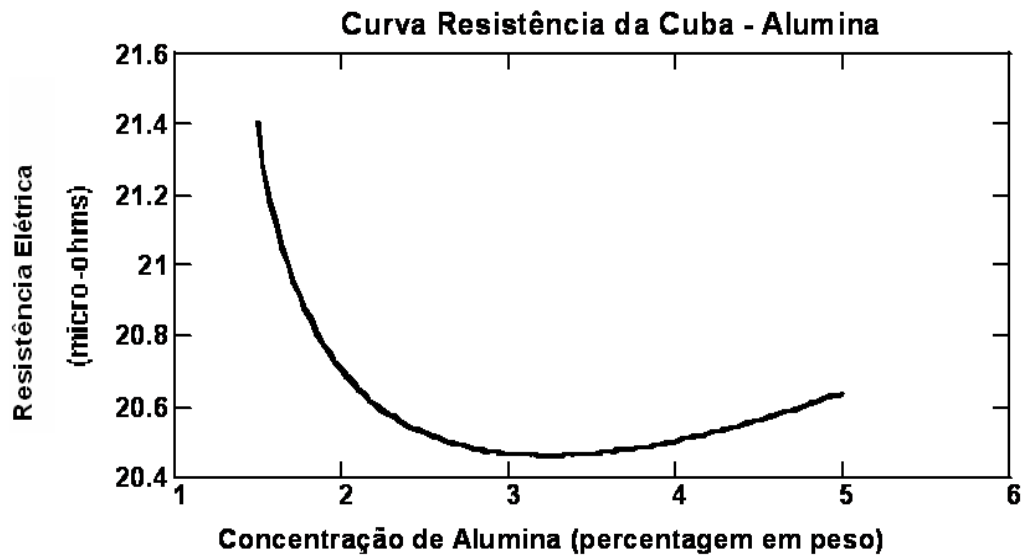


Figura 2.6: Curva Resistência da Cuba X Concentração de Alumina.

Por inúmeras razões, essa curva não é usada diretamente para o controle de alimentação de alumina. Primeiro, a maioria dos valores de resistência correspondem a duas possíveis concentrações de alumina, o que levaria à ambigüidade no controle. Segundo, a posição da curva pode mudar verticalmente dependendo das propriedades do banho, tais como temperatura ou *ratio*, que podem mudar dependendo dos horários em que são medidos. Felizmente a forma da curva resistência-concentração de alumina permanece essencialmente fixa (só altera a sua posição) quando essas propriedades do banho mudam.

## 2.5 Controle Moderno

Os dois fenômenos acima podem ser contornados quando se utiliza o *slope* (inclinação ou tangente) da curva resistência-concentração de alumina versus a concentração de alumina. O computador na verdade utiliza os valores negativos da inclinação. A resultante *slope* da resistência - concentração de alumina é mostrada na figura 2.7. Para evitar ambigüidades ao relacionar concentrações de alumina

com valores de resistência da cuba, o controle de alimentação procura uma mudança na resistência enquanto a concentração de alumina é mudada numa direção conhecida (a alimentação de alumina é reduzida, e portanto a concentração de alumina irá cair).

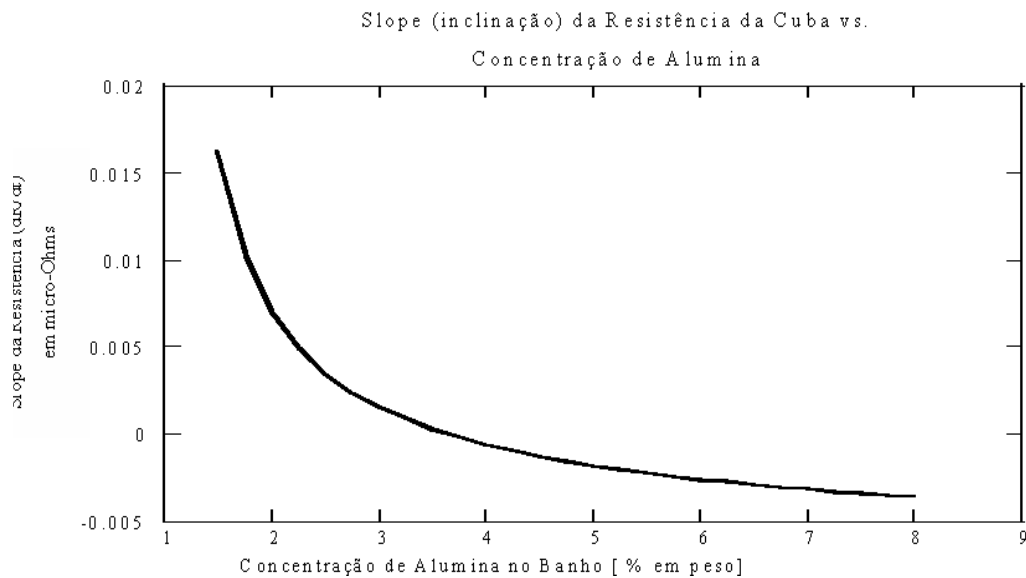


Figura 2.7: Curva Slope  $\times$  Alumina.

Os modernos sistemas de controle de processo por computador utilizam a técnica de sub-alimentar a cuba (menos alumina) para poder ter uma melhor inferência do percentual de alumina no banho eletrolítico. Isto consiste em estabelecer por um tempo determinado uma quantidade constante de alumina muito menor que a taxa de consumo normal da cuba, (Silva *et al.* 2002). Isso é sempre uma premissa segura de que a concentração de alumina diminuirá e a tensão da cuba aumentará, pois ao longo do tempo o percentual de alumina vai diminuindo à medida que o alumínio vai sendo produzido, (Burkin 1987).



### 2.5.1 Fases de Sub-alimentação e de Super-alimentação

Em sistemas modernos de controle de processo o coração do controle de alimentação é a fase de *sub-alimentação*, quando a cuba é alimentada com uma taxa de alimentação constante menor que a taxa de consumo de alumina da cuba. Isso assegura que a concentração de alumina no banho diminuirá durante a fase de *sub-alimentação*, porque ao longo do tempo a concentração de alumina no banho vai baixando à medida que o alumínio vai sendo produzido, gerando um aumento na tensão(e resistência) da cuba, como mostrado na figura 2.6. Essa taxa constante é a diferença entre a taxa de consumo de alumina e a taxa de suprimento da fase de *sub-alimentação*. (Tarcy *et al.* 2002).

Portanto, a taxa de variação da resistência em relação ao tempo é diretamente proporcional (com um sinal negativo) à taxa de variação da resistência em relação à concentração de alumina. Essa relação permite ao computador de controle de processo usar a inclinação da resistência(*slope*) durante a fase de *sub-alimentação* como um indicador da concentração de alumina no banho,(Silva *et al.* 2002). Observa-se que durante a fase de *sub-alimentação* a mudança na resistência em relação ao seu valor mínimo também pode ser usada como um indicador de concentração de alumina, conforme mostrado na figura 2.8.

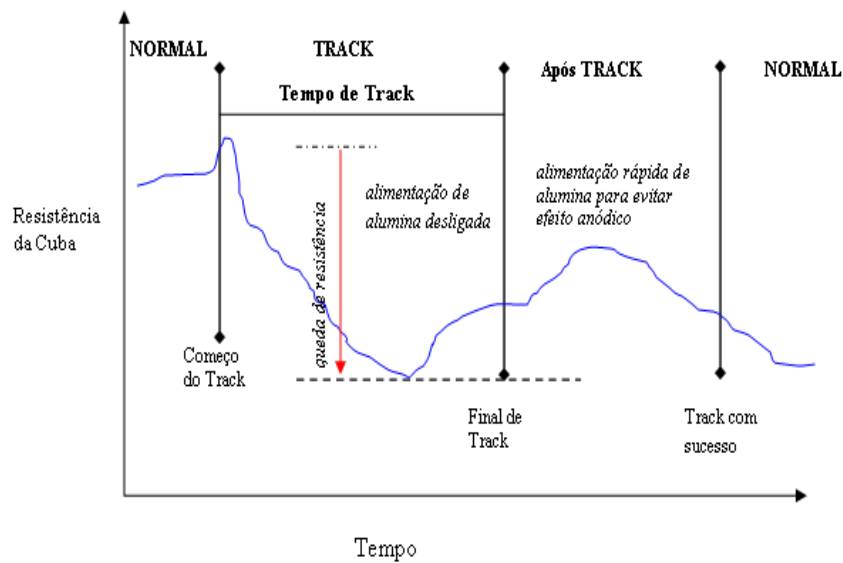


Figura 2.8: Fases da Alimentação.

Esse controle permite ainda utilizar várias combinações entre essas duas medidas (*slope* e  $\Delta R$ ), para definir os valores-limite a serem usados como critério para terminar a fase de *sub-alimentação*. Os valores-limite são selecionados de tal forma que a cuba alcance uma concentração de alumina baixa, dita ideal, mas não tão baixa a ponto de correr o risco de um efeito anódico.

## 2.6 Caracterização do Problema de Controle

A grande maioria das fábricas de alumínio que possuem sistema automático de controle de alimentação usam o *slope* (inclinação) da resistência como indicador da concentração de alumina no banho, (Silva *et al.* 2002). O objetivo desejado com essa estratégia é que o *slope* consiga reproduzir o modelo da curva de caracterização da resistência versus alumina, que tem uma forma parabólica, como na figura 2.6.

Com os filtro tradicionais a forma real da curva do *slope* aponta para uma relação entre a resistência da cuba e a concentração de alumina mais linear do

que realmente é, causando muita imprecisão na tomada de decisão no fim da fase de sub-alimentação, (Batista 2002). Essa opção de filtro não tem apresentado um comportamento consistente e suficientemente próximo ao que realmente acontece em termos de concentração de alumina no banho eletrolítico.

Como consequência desse erro de predição muitas cubas permanecem com alumina não dissolvida no fundo do catodo, causando maior resistência a passagem da corrente elétrica e afetando negativamente a eficiência da produção de alumínio. O ponto fraco dessa estratégia de *slope* ficou evidente após testes de representatividade do filtro quando constatou-se que em várias cubas o *slope* não tinha uma boa correlação estatística com a quantidade de alumina, sendo um equívoco o seu uso para o controle de alimentação, (Batista 2002).

## 2.7 Conclusão

Neste capítulo apresentou-se a problemática central do controle da quantidade de alumina no banho eletrolítico. A importância do controle de alimentação para que a cuba opere de maneira eficiente ficou evidente por ser a alumina a principal matéria-prima para a produção do alumínio. O seu consumo ao longo do processo produtivo precisa ser controlado com o intuito de diminuir os custos do produto final e de aumentar a eficiência e a vida útil da célula produtora. O problema da inexistência de sensores de tempo real que meçam continuamente a quantidade de alumina durante o processo de eletrólise deve ser superado pelo uso de algoritmos de controle que sejam capazes de fornecer uma inferência confiável e robusta do percentual de alumina do banho eletrolítico.

## CAPÍTULO 3

# Medição da Concentração de Alumina

---

A medição indireta é a maneira de medir o valor de uma grandeza por meio do seu impacto/relações com outras grandezas que compõem o processo dinâmico, no caso, o banho eletrolítico. Este tipo de método ou técnica para avaliação de grandezas físicas vem sendo utilizado ao longo dos milênios pelo homem, *Thales* utilizou medição indireta para determinar a altura de uma pirâmide. Neste capítulo apresenta-se uma abordagem da medição da concentração de alumina, contudo, enfatiza-se a medição indireta.

Antes de entrarmos no tópico, definimos a nosso contexto de medição indireta como processo de avaliar a quantidade de alumina por meio de taxas de variações de resistência na cuba. No caso da avaliação da concentração de alumina por meio de testes químicos pode-se dizer que estamos medindo de forma direta. Evoluindo na sistematização do nosso pensamento, em termos de realização, a medição proposta é constituída da medição direta de tensão e corrente, pelo computador de processo, e pelo observador de estado. Estes três elementos formam o dispositivo de medição indireta.

Na seção 3.1 apresenta-se o estado da arte da medição da concentração de alumina no banho eletrolítico e dos sistemas de medição indireta, no intuito de termos uma referência para o desenvolvimento científico e tecnológico dos sistemas de medição direta de  $Al_2O_3$ , assim como os recentes avanços em medição indireta.

Os filtros digitais são discutidos na seção 3.2. Apresenta-se de forma conceitual

as abordagens que definem a estrutura algébrica dos filtros ótimo, adaptativo e robusto.

Na seção 3.3 apresenta-se os conceitos básicos de observador de estado, mostra-se que o ganho pode ser calculado de forma estocástica ou determinística. Salienta-se o papel da teoria de *Kalman* no cálculo do ganhos do observador. O comportamento das cubas é representado por um modelo resistivo no espaço de estados. Discute-se a modelagem do sistema no espaço de estado e suas principais propriedades, considerando um modelo que reflete as variações de tensão da cuba e corrente da linha.

Na seção 3.4 apresenta-se o desenvolvimento do filtro de *Kalman* escalar de terceira ordem.

A análise do comportamento do filtro é realizada na seção 3.5. Analisa-se o desempenho para uma aplicação em particular, em nível de estrutura algébricas, tal como: a matriz de observabilidade, e analisa-se a convergência assintótica do filtro em termos dos autovalores para valores de ganho.

### 3.1 Estado da Arte dos Sistemas de Medição de $Al_2O_3$

Uma das maiores dificuldades da operação e do controle de processo das fábricas de alumínio é medir a quantidade de alumina dissolvida no banho eletrolítico das cubas. A medição de alumina é importante não somente pelo ponto de vista do aumento da produtividade da cuba, mas também sob a ótica de preservação do meio-ambiente porque viabiliza maior controle sobre a ocorrência de efeitos anódicos durante a produção. Os parágrafos a seguir apresentam comentários sobre algumas patentes relativas à medição da concentração de alumina. Objetiva-se salientar os avanços tecnológicos na medição da quantidade de alumina no banho nas células produtoras de alumínio.

Métodos diretos (equipamentos) e indiretos de determinação da quantidade de alumina no banho vêm sendo desenvolvidos para superar o problema da medição do percentual de alumina. Métodos indiretos incluem a patente americana N° 4.814. 050 (Estimação e Controle da Concentração de Alumina nas Células de Produção). Os métodos diretos incluem a patente americana N° 4.935.107

(Processo para medição eletroquímica da concentração de óxido de íons no banho eletrolítico), (Haverkamp and Welch 2000).

O método indireto usa um estimador que emprega dois conjuntos de equações, a saber, um algoritmo de atualização das variáveis no tempo que contém um modelo dinâmico do balanceamento de massa da alumina na cuba e fornece uma estimativa da concentração de alumina, e um algoritmo de medição que usa uma variável-resposta do processo de eletrólise para modificar a estimativa feita, (Haverkamp and Welch 2000).

O conceito atual de medição indireta segue uma linha que incorpora modelos dos sistemas dinâmicos como parte do sistema de medição. Uma tendência atual é o desenvolvimento de uma abordagem baseada em modelos que incorporam a teoria de *Kalman* para determinar o ganho do observador/filtro. Em *A New Approach for Designing Model-Based Indirect Sensors*, (Boillereaux and Flaus 2000), verifica-se o desenvolvimento de um sistema de medição indireta baseado em modelo que utiliza um filtro de *Kalman* estendido.

A segunda patente, também americana, N° 5.025.219, trata de um método de medição direta da concentração de alumina, e refere-se a um aparelho que mede a impedância a baixa corrente e a sobre tensão, entre um eletrodo e sua referência. O valor da impedância é determinado para duas frequências, uma frequência baixa( $Z_r$ ), de 15 a 20 Hz, e uma frequência alta( $Z_b$ ), até 100 Hz. O valor inverso da concentração de alumina é uma função linear entre  $Z_r$  e  $Z_b$ . Esse método tem um alto nível de precisão para concentrações de alumina muito baixas. (*Process for electrochemical measurement of the concentration of oxide ions in a bath based on molten halides*, United States Patent 4935107).

Apesar da medição direta da quantidade de alumina no banho representar um aspecto muito importante do controle ainda é muito caro, e em alguns casos inviável economicamente, a utilização de sensores diretos para realizar a medição. Uma desvantagem dos sistemas diretos é que eles não respondem bem quando usados de forma contínua, em tempo real, devido a grande variação de temperatura dentro da cuba, quando o banho eletrolítico pode chegar a 1100° C em casos de efeitos anódicos. Um outro motivo para usar métodos indiretos de medição é que estes requerem um custo muito menor que os métodos diretos. É prática cada vez mais comum substituir sensores por medidores indiretos baseados em

um observador, (Smith *et al.* 2006).

## 3.2 Filtros Digitais

O intuito é contextualizar o núcleo do filtro de *Kalman* como um estimador que promove o ajuste dos ganhos de filtro digitais ótimo e estocásticos. Enfoca-se as estruturas algébricas estabelecidas, tal como *Gauss-Legendre*, que é citada em (Sorenson 2000), mostrando que esta mesma estrutura é utilizada no ajuste de parâmetros de filtro recursivos dos mínimos quadrados, (Astrom and Wittenmark 1989). O principal objetivo desta seção é discutir os conceitos básicos de otimalidade, adaptabilidade e robustez de filtros digitais que são ou que podem ser aplicados ao modelo de filtragem no espaço de estado e estocástico proposto por *Kalman*, (Brown and Hwang 1992) e (Bozic 1984).

### 3.2.1 Filtro Ótimo

O filtro de *Kalman* é formulado matematicamente em termos de variáveis de estado, e sua solução é computada recursivamente, ou seja, cada estado estimado atualizado é computado a partir de valores anteriores e dos novos dados, porém, só sendo necessário armazenar o valor estimado anterior. Mas, o filtro de *Kalman* precisa do conhecimento dos parâmetros da planta e dos valores das matrizes de covariância do ruído do sistema e da medida. Para formulação do filtro a partir de um sistema dinâmico e estocástico é preciso conhecer as matrizes de covariância dos ruídos de observação e do sistema,  $Q$  e  $R$ , respectivamente. Se um filtro está baseado em um conhecimento completo dessas matrizes, é chamado de filtro ótimo.

### 3.2.2 Filtro Adaptativo

Um filtro adaptativo tem como entrada o sinal desejado contaminado com ruído aditivo, figura 3.1. Em determinado instante  $i$  o filtro produz a saída  $o(i)$ . Esta é usada como estimativa da resposta desejada  $d(i)$ . Sendo os dois sinais concretizações de processos estocásticos, a estimativa produz o sinal de erro  $e(i)$ , com características estatísticas próprias. O objetivo é minimizar o erro de estimativa

segundo algum critério estatístico.

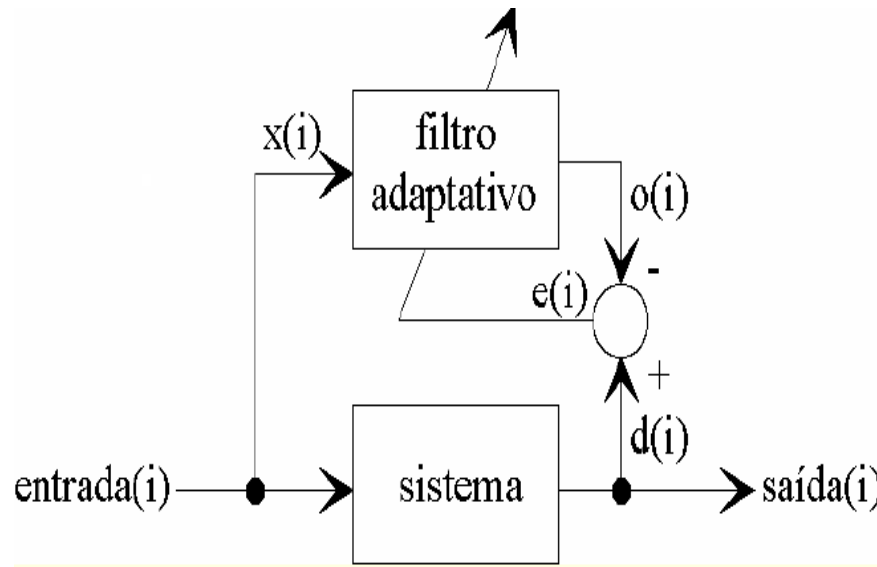


Figura 3.1: Filtro Adaptativo.

### 3.2.3 Filtro Robusto

O filtro de *Kalman* é capaz de produzir a melhor estimativa linear relativa a variância mínima de uma estimação de erro, dado um ruído branco e gaussiano, (Sorenson 2000). Contudo, a otimização e a estabilidade somente serão garantidas quando o modelo do sistema for perfeito e a suposição do ruído branco for válida. O problema é que na maioria dos sistemas físicos obtém-se somente um modelo aproximado do mundo real, com incerteza paramétrica e entrada externa desconhecida. Além disso, encontramos muitos mais processos e ruídos coloridos polarizados do que processos e ruídos brancos não polarizados. Embora a otimização matemática não seja mais mantida em aplicações práticas, o filtro de *Kalman* realmente consegue trabalhar bem em muitos casos onde a suposição de existência de ruído branco não é aceita. Isso porque fundamentalmente o processo de resposta ao erro (inovação) no filtro de *Kalman* leva o erro de estimação para um valor pequeno, assim como ocorre com outros observadores de estado deter-



minísticos,(Bozic 1984).

O processo de inovação em um processo de filtragem é um tipo de controle proporcional para a estimação do erro. Sob ponto de vista do controle, portanto, a resposta à inovação sozinha não será suficiente para obter-se um desempenho satisfatório da estimação,(Brown and Hwang 1992). Como um exemplo, o filtro de *Kalman* produzirá uma estimativa tendenciosa quando o ruído do processo for tendencioso. Especificamente, quando o modelo do sistema não for bem definido e um forte distúrbio externo ocorrer com o sistema de filtragem, durante o processamento *on-line*, a resposta do filtro não será confiável. Nesse caso, é aconselhável empregar uma função adicional no filtro que possa compensar efetivamente a incerteza.

O fato é que ruídos não-brancos, como polarização aleatória, são apropriadamente contornados pelos filtros convencionais usando-se a técnica de aumento de estado que utiliza função de branqueamento do ruído ou filtro adaptável,(Yeh 1990). Entretanto, em uma estimação baseada em modelo, como a de *Kalman*, o desempenho da filtragem (estimação) é inevitavelmente muito dependente de quão bem as propriedades físicas são refletidas no modelo estocástico da planta. É natural que estimativas mais precisas sejam esperadas à medida que o modelo se aproxima mais do mundo real. Em relação a essa questão, um número de filtros robustos de *Kalman* para endereçar as incertezas estão sendo usados,(Yeh 1990). Esses trabalhos podem ser classificados em filtros que garantem estimação limitada do erro para: ruídos multiplicativos, incertezas paramétricas estocásticas, e para atraso contínuo. Esses filtros robustos assumem formas diferentes dependendo dos tipos de incertezas que são consideradas. Todavia, será uma grande dificuldade encontrar o modelo de incerteza apropriado para um problema específico onde somente uma parcela da incerteza do sistema é conhecida.

### 3.3 Observadores de Estado

Sabendo-se que o ganho dos estimadores de estado podem ser calculados de forma determinística ou de forma estocástica, apresenta-se o filtro de *Kalman* dentro um contexto maior que é a estimação de estado. Um método por alocação de pólos é apresentado para fins de comparações conceituais com a abordagem de *Kalman*.

Nesta seção o problema do filtro de *Kalman* é caracterizado como uma solução para o problema de estimador de estado, mostra-se que o foco do problema é o cálculo do ganho  $L_{estim}$ . Para a nossa aplicação o ganho  $K_{Kalman}$  é o ganho  $L_{estim}$ .

Os fundamentos teóricos que alicerçam o processo de filtragem e de previsão são de grande importância para a compreensão do comportamento do banho eletrolítico em relação a intervalos constantes de alimentação e posição do anodo. Os sinais utilizados para realizar o controle são provenientes de medições de tensão de cuba e de corrente da linha, que são mapeados no comportamento dinâmico da cuba em face a referidas restrições.

A utilização de observadores pode ser vista sob o ponto de vista de eventos do mundo real está fundamentada nas seguintes ocorrências:

**A** - Grandezas ruidosas;

**B** - Acesso a sensores  $\rightarrow$  localização - instalação;

**C** - Custo com sensores muito elevado.

Assim, às vezes necessita-se estimar certas variáveis para que se possa implementar um sistema de controle. Essa estimação de variáveis de estado é chamada de *observação*. Um dispositivo ou algoritmo que estima ou observa estas variáveis de estado é chamado de estimador ou observador, (Gene F Franklin and Emami-Naeini 1994).

Realimentando-se com a diferença entre as saídas medidas e estimadas, corrige-se o estado estimado. A dinâmica de um observador de estado de ordem completa pode ser assim descrita:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L_{estim}(y - C\hat{x}) \quad (3.1)$$

sendo  $L_{estim}^{n \times m}$  um ganho proporcional constituído pelas constantes de ganho  $l_1, l_2 \dots l_n$  e definido como

$$L_{estim} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{bmatrix}^T \quad (3.2)$$

e escolhido para obter características de erro satisfatórias. A figura 3.2 mostra o diagrama de blocos que representa todo o sistema, descrevendo uma cuba e o observador de estados que descreve o comportamento da cuba.

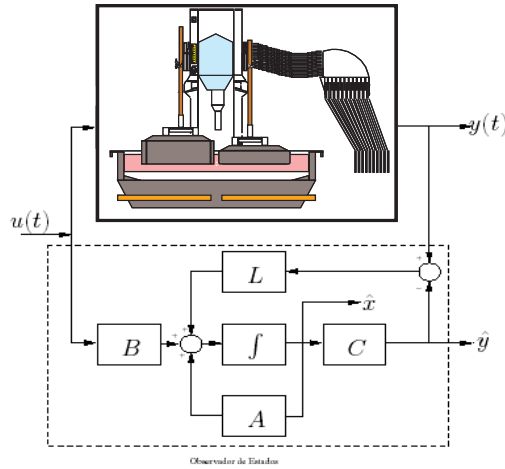


Figura 3.2: Diagrama de Blocos de um Observador de Estados.

O projeto dos ganhos do estimador pode ser implementado por métodos determinísticos ou estocásticos. O nosso projeto aplica a teoria de *Kalman*, e o ganho é determinado considerando modelos estocásticos da planta no espaço de estados e da medição do sistema. Outra maneira de calcular o ganho, mas de forma determinística, é por alocação especificada dos pólos de erro do estimador, (Ferreira and Fonseca Neto 2003),

$$s_i = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \quad (3.3)$$

A equação característica do estimador:

$$\alpha_e(s) \triangleq (s - \beta_1)(s - \beta_2) \dots (s - \beta_n) \quad (3.4)$$

Pode-se determinar  $L_{estim}$  por comparação dos coeficientes do polinômio característico do modelo da planta, considerando um estimador  $L_0$ , e o novo estimador para  $\det[sI - (A - L_{estim}C)] = 0$ .

### 3.3.1 Comportamento do Observador

A teoria apresentada nesta seção é utilizada para verificar a estabilidade do observador em função do ganho de *Kalman*. As análises dos autovalores do sistema

e do observador de estado fornecem as informações para estabelecer e garantir os limites de estabilidade dos ganhos de *Kalman*.

O comportamento do observador é analisado sob o ponto de vista do erro entre o valor verdadeiro e o valor estimado. A equação (3.5) define o erro de estimação como também a diferença entre os vetores  $x$  e  $\hat{x}$ , e é dada por:

$$\tilde{x} \triangleq x - \hat{x} \quad (3.5)$$

Para estudo da dinâmica deste estimador, obtém-se a equação do erro de estimação subtraindo-se a equação (3.1) daquela do modelo da planta na descrição em espaço de estado ( $\dot{x} = Ax + Bu$ ),

$$\begin{aligned} \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= (\Phi - (K_{kalman}H)(x - \hat{x})) \\ \dot{\tilde{x}} &= (\Phi - K_{kalman}H)\tilde{x} \end{aligned} \quad (3.6)$$

A equação (3.6) aponta para um conjunto de diretrizes para a escolha dos ganhos de *Kalman*. Se a matriz  $(\Phi - K_{kalman}H)$  for uma matriz estável, o vetor-erro convergirá para zero independentemente do valor inicial do vetor-erro. A forma de concretizar esta análise de convergência é por meio dos autovalores. Se os autovalores de  $(\Phi - K_{kalman}H)$  forem escolhidos de tal forma que o comportamento dinâmico do vetor-erro seja assintoticamente estável e adequadamente rápido, então qualquer vetor-erro tenderá para zero com uma velocidade adequada e assim permanecerá, independentemente do seu efeito no estado  $x(t)$  e sem considerar a condição inicial  $\tilde{x}(0)$ . A equação característica do erro:

$$\det[sI - (\Phi - K_{kalman}H)] = 0 \quad (3.7)$$

A equação (3.6) considera que as matrizes  $\Phi$  e  $H$  são idênticas na planta física e na implementação do estimador. Se não for disponibilizado um modelo exato da planta, a dinâmica do erro não é mais governada pela equação (3.6), (Ferreira and Fonseca Neto 2003). De qualquer forma, ainda pode-se escolher  $K_{kalman}$ , só que o sistema de erro continua estável e o erro permanece aceitavelmente pequeno, mesmo com pequenos erros de modelagem e entradas com distúrbio.

Considerando a falta de informação a respeito de  $x(0)$ , o estimador será satisfatório se for possível obter a condição inicial  $x(0)$  e colocá-la igual a  $\hat{x}(0)$ , além do

que o estado estimado deve traçar o estado verdadeiro de forma exata, (Brown and Hwang 1992). Logo, se não for obtido um estimador satisfatório para a condição inicial, o erro de estimação do estado será crescente ou tenderá a zero muito lentamente. Pequenos erros no conhecimento do sistema, também contribuem para divergência do estado estimado.

### 3.3.2 Aspectos Práticos de Implementação

Nesta seção aborda-se os problemas de convergência numérica do filtro de *Kalman* quando este estiver sendo utilizado em um laço infinito de intervalos de amostragem  $\Delta t$ . Os principais problemas abordados são os erros de arredondamento, erros de modelamento e de observabilidade que são erros de natureza numérica. Os erros de arredondamento estão relacionados com a quantidade de passos do algoritmo, os erros de modelamento estão relacionados com a falta de exatidão e os erros de observabilidade são decorrentes da perda das propriedades de observabilidade, em que certas variáveis de estado estão escondidas sob o ponto de vista do observador, (Goodwin 1997) e (Brown and Hwang 1992).

#### Erros de Arredondamento

Abordam-se os erros de arredondamento que são classificados em relação a sua fonte e uma solução, a seguir apresenta-se as fontes de erros,

- 1 - Aritmética de alta-precisão,
- 2 - Intervalo de amostragem, para pequenos passos entre medições,
- 3 - Matriz  $P$  definida,
- 4 - Simetria da Matriz  $P$ ,
- 5 - Fatoração  $U - D$ .

A utilização da aritmética de alta-precisão evita erros de conversão numérica. A opção de uma mantissa de 16 dígitos é o suficiente.

A matriz  $P$  durante o processo de estimação torna-se semi-definida à medida que aumenta-se o número de passos. Pequenos erros podem conduzir a matriz  $P$

à condição semi-definida positiva, levando a não convergência do processo. Uma solução é adicionar pequenos valores positivos aos elementos da diagonal da matriz  $Q$ , que por sua vez conduz a certo grau de sub-otimalidade.

A simetria da matriz  $P$  pode ser perdida devido aos erros de arredondamento. Uma solução é a simetrização a cada passo de integração. Durante a programação das equações do filtro, considera-se que os coeficientes são simétricos, utilizando-se a parte triangular superior ou inferior da matriz de estados.

A fatoração  $U - D$  é utilizada para situações em que o filtro não é reinicializado por longos períodos de tempo. O algoritmo para fatoração  $U - D$  é matematicamente equivalente ao algoritmo padrão e alternativo do filtro de *Kalman*, contudo os elementos de  $P$  são propagados a cada passo.

### Erros de Modelagem

A falta de precisão do modelo devido a dinâmicas não modeladas pode provocar a não convergência.

### Erros de Observabilidade

Os erros de observabilidade são definidos neste texto como sendo a ausência de reconstrução dos estados do sistema, conduzindo à divergência do filtro. Isso equivale a dizer que existem variáveis que não são mapeadas pelas medições.

A existência de erros de estimação instáveis são refletidos nos valores ilimitados da diagonal da matriz  $P$ . Se este problema ocorrer e adotar-se as precauções para evitar erros de arredondamento conclui-se que existe um problema de observabilidade. A solução para este problema é a melhoria das condições de observabilidade pela inclusão de medições que torne o sistema completamente observável.

## 3.4 Filtro de Kalman Escalar

Uma das primeiras referências filtro de *Kalman* escalar é encontrada em (Bozic 1984), nesta época a potência computacional era bastante reduzida em termos de processamento e memória. As técnicas para tratamento de esparsidade de matrizes estavam em pleno desenvolvimento.

O FK escalar consiste em realizar o processo de estimação dos estados de forma não matricial, ou seja, cada estado é representado na sua estrutura algébrica escalar em contraposição a forma vetorial.

Como dito anteriormente, o projeto do observador de estados desenvolvido para a estimação do *slope* resistivo da cuba tem por base a teoria do filtro de *Kalman*. O observador de estado proposto, conforme a figura 3.2, é visto como um dispositivo de controle digital baseado em um modelo discreto e ajuste probabilístico dos ganhos por meio da teoria do filtro *Kalman*.

A base do filtro de *Kalman* é o modelo do sistema dinâmico, no caso a cuba de redução de alumina. No nosso caso, o modelo da cuba é descrito no espaço de estado que tem a representação canônica dada por:

$$x_{k+1} = Ax_k + \Gamma v_k \quad (3.8)$$

$$y_k = Cx_k + w_k; \quad (3.9)$$

sendo  $x_k \in R^n$  a resistência, *slope* e curvatura. A saída  $y_k \in R^q$  representa o sinal medido ou observação.  $A \in R^{n \times n}$  representa a dinâmica do sistema,  $\Gamma \in R^{n \times n}$  é o modelo do ruído da planta.  $v_k \in R^n$  e  $w_k \in R^q$  são sequências de ruído branco com média zero e variâncias  $Q$  e  $R$  conhecidas, respectivamente.

A partir do sistema de equações (3.8), das médias e das variâncias deduz-se as equações básicas do filtro, (Brown and Hwang 1992), que são dadas por:

$$P^P = AP^F A^T + BQB^T \quad (3.10)$$

$$K_K = P^P C^T (CP^P C^T + R)^{-1} \quad (3.11)$$

$$\hat{x}_{k+1}^P = Ax_k^P \quad (3.12)$$

$$\hat{x}_{k+1}^F = x_{k+1}^P + K_K (y_m - Cx_{k+1}^P) \quad (3.13)$$

$$P^F = P^P - K_K CP^P \quad (3.14)$$

sendo  $P^P$  a matriz de covariância do estado na fase de predição,  $P^F$  a matriz na fase de filtragem,  $K_K$  a matriz de ganhos de *Kalman*,  $\hat{x}_{k+1}^P$  representa a predição do estado,  $\hat{x}_{k+1}^F$  a predição do estado estimado,  $Q$  a matriz de covariância do ruído do processo e  $R$  a matriz de covariância do ruído da medida.

A seção está organizada em tópicos que mostram desde o modelo de terceira ordem da cuba, subseção 3.4.1, até as estruturas algébricas escalares e matriciais das variáveis de estado. O desenvolvimento do filtro de *Kalman* escalar é apresentado na forma das cinco equações canônicas que compõem o algoritmo do filtro padrão, (Braga *et al.* 2007a). Obviamente, inúmeras publicações, seja em livros e/ou artigos, salientam o desenvolvimento e as aplicações do filtro de *Kalman* em suas mais variadas modalidades ou tipos, tais como: estendido, escalar e em tempo real, (Brown and Hwang 1992), (Bozic 1984) e (Chui 1991).

Nas subseções 3.4.2-3.4.7, o objetivo é apresentar o desenvolvimento das equações de estado para predição e filtragem de estados e das suas respectivas covariâncias, bem como as equações do ganho de *Kalman* para o modelo de terceira ordem.

### 3.4.1 Modelo da Cuba

O modelo da cuba é um modelo de terceira ordem na forma de impedância resistiva. As três variáveis de estado relacionadas com a dinâmica da cuba são descritas na forma de variáveis de estado,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 1.00 & 1.000 & 0.000 \\ 0.00 & 1.000 & 1.000 \\ 0.00 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^R \\ x_k^{slope} \\ x_k^{curv} \end{bmatrix} + \zeta \\ y &= \begin{bmatrix} 1.00 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^R \\ x_k^{slope} \\ x_k^{curv} \end{bmatrix} + \nu \end{aligned} \quad (3.15)$$

sendo  $\begin{bmatrix} x_k^R & x_k^{slope} & x_k^{curv} \end{bmatrix}$  as variáveis de estado que representam a resistência filtrada, as variações da resistência ou *slope* e a curvatura, respectivamente.

Os autovalores do modelo estão no contorno do círculo unitário. Significa que possuem um comportamento oscilatório em termos de respostas de sistemas contínuos. O posto da matriz de observabilidade é três. Este valor garante a reconstrução dos estados a partir das medições de tensão e de corrente na cuba.



### 3.4.2 Equações de Saída Estimada

A equação (3.16) de saída estimada do sistema  $\hat{y}$  pode ser escrita na forma,

$$\hat{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^m \\ x_2^m \\ x_3^m \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Esta equação, para fins de implementação em nossa versão escalar, é o estado que representa a resistência da cuba,

$$\hat{y} = x_1^m \quad (3.17)$$

### 3.4.3 Equações do Ganho de Kalman

O ganho  $K_{kalman}$  do observador de estado do tipo *Kalman*, por simplificação de notação é denotado por  $K_K$ . Ele é um mapeamento das matrizes de covariância dos ruídos  $R$  da medida e do estado  $P^m$ . O vetor ganho possui três componentes que representam as ponderações da resistência, do *slope* e da curvatura. O ganho na sua forma matricial,

$$K_K = P^m H' (H P^m H' + R)^{-1} \quad (3.18)$$

Considerando  $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Resolvendo a equação (3.18), o produto  $P^m H'$ ,

$$P H' = \begin{bmatrix} p_{11}^m & p_{12}^m & p_{13}^m \\ p_{21}^m & p_{22}^m & p_{23}^m \\ p_{31}^m & p_{32}^m & p_{33}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Assim,

$$P H' = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Resolvendo o argumento  $HP^m H' + R$  do termo inverso da equação (3.18),

$$HP^m H' + R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11}^m & p_{12}^m & p_{13}^m \\ p_{21}^m & p_{22}^m & p_{23}^m \\ p_{31}^m & p_{32}^m & p_{33}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r_{11} \quad (3.21)$$

As manipulações algébricas mostram que o argumento do termo inverso é um escalar que depende das covariâncias da média do estado, do ruído da medida:

$$HP^m H' + R = p_{11}^m + r_{11} \quad (3.22)$$

substituindo as equações (3.20) e (3.22) em (3.18), tem-se as equações do ganho de *Kalman*:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{p_{11}^m}{p_{11}^m + r_{11}} \\ k_2 &= \frac{p_{21}^m}{p_{11}^m + r_{11}} \\ k_3 &= \frac{p_{31}^m}{p_{11}^m + r_{11}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Observa-se que os ganhos dependem das covariâncias  $p_{ij}$  de acoplamento da predição do estado com as outras variáveis, e de  $r_{11}$  que é a covariância da medida.

### 3.4.4 Equações de Estado - Filtragem

As equações  $x^f$  de filtragem realizam uma atualização  $x^m$  dos estados em função dos ganhos, da medida  $y^m$  e da estimação da medida  $\hat{y}$ ,

$$\begin{aligned} x_1^f &= x_1^m + k_1(y_m - \hat{y}) \\ x_2^f &= x_2^m + k_2(y_m - \hat{y}) \\ x_3^f &= x_3^m + k_3(y_m - \hat{y}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

### 3.4.5 Equações de Covariâncias - Filtragem.

O valor do ganho de *Kalman*, a matriz de saída e a covariância do estado no estágio de predição atualizam a matriz  $P^f$  do estado após a filtragem,

$$P^f = P^m - K_K H P^m \quad (3.25)$$

As equações que implementam a forma escalar é constituída pelos elementos das matrizes de covariância, em função dos ganhos  $K_K$  de *Kalman* e da matriz  $H$  de medição da covariância para a predição  $P^m$  do estado,

$$p_k^f = \begin{bmatrix} p_{11}^m & p_{12}^m & p_{13}^m \\ p_{21}^m & p_{22}^m & p_{23}^m \\ p_{31}^m & p_{32}^m & p_{33}^m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11}^m & p_{12}^m & p_{13}^m \\ p_{21}^m & p_{22}^m & p_{23}^m \\ p_{31}^m & p_{32}^m & p_{33}^m \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

sendo  $p_k^f = [p_{ij}^f]$ ,  $i, j = 1, \dots, 3$ . Fazendo-se as operações na equação (3.26) encontra-se a forma escalar  $P^f$ ,

$$\begin{aligned} p_{11}^f &= p_{11}^m - k_1 p_{11}^m \\ p_{12}^f &= p_{12}^m - k_1 p_{12}^m \\ p_{13}^f &= p_{13}^m - k_1 p_{13}^m \\ p_{21}^f &= p_{21}^m - k_2 p_{11}^m \\ p_{22}^f &= p_{22}^m - k_2 p_{12}^m \\ p_{23}^f &= p_{23}^m - k_2 p_{13}^m \\ p_{31}^f &= p_{31}^m - k_3 p_{11}^m \\ p_{32}^f &= p_{32}^m - k_3 p_{12}^m \\ p_{33}^f &= p_{33}^m - k_3 p_{13}^m \end{aligned} \quad (3.27)$$

### 3.4.6 Equações de Estado - Predição

As equações da predição são as médias dos estados que são calculadas pela teoria de *Kalman*,

$$x^m = \Phi x^f \quad (3.28)$$

substituindo as matrizes do sistema,

$$\begin{pmatrix} x_1^m \\ x_2^m \\ x_3^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^f \\ x_2^f \\ x_3^f \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

As equações de predição na sua forma escalar,

$$x_1^m = x_1^f + x_2^f \quad (3.30)$$

$$x_2^m = x_2^f + x_3^f \quad (3.31)$$

$$x_3^m = x_3^f \quad (3.32)$$

### 3.4.7 Equações de Covariâncias - Predição

A equação de atualização da matriz de covariância da predição é função da covariância do estado no estágio de filtragem, assim como da matriz que representa a dinâmica do sistema e também da matriz de covariância do estado,

$$P^m = \Phi P_f \Phi' + Q \quad (3.33)$$

substituindo as matrizes  $\Phi$ ,  $P_f$  e  $Q$ ,

$$p^m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11}^f & p_{12}^f & p_{13}^f \\ p_{21}^f & p_{22}^f & p_{23}^f \\ p_{31}^f & p_{32}^f & p_{33}^f \end{pmatrix} \phi' + Q \quad (3.34)$$

Fazendo-se as devidas multiplicações, encontra-se a forma escalar para  $P^m$ ,

$$\begin{aligned}
p_{11}^m &= p_{11}^f + p_{21}^f + p_{12}^f + p_{22}^f + q_{11} \\
p_{21}^m &= p_{21}^f + p_{31}^f + p_{22}^f + p_{32}^f \\
p_{31}^m &= p_{31}^f + p_{32}^f \\
p_{12}^m &= p_{12}^f + p_{22}^f + p_{13}^f + p_{23}^f \\
p_{22}^m &= p_{22}^f + p_{32}^f + p_{23}^f + p_{33}^f + q_{22} \\
p_{32}^m &= p_{32}^f + p_{33}^f \\
p_{13}^m &= p_{13}^f + p_{23}^f \\
p_{23}^m &= p_{23}^f + p_{33}^f \\
p_{33}^m &= p_{33}^f + q_{33}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

## 3.5 Análise Numérica do SKF

O principal enfoque desta seção é avaliar o desempenho do filtro, em termos de estabilidade numérica e convergência dos ganhos. Apresentam-se os resultados da estimação para a cuba 1050, escolhida por ser uma cuba operacionalmente estável, considerando um intervalo de amostragem de 200 milissegundos.

A medições de tensão e corrente da cuba são analisadas em termos do seu comportamento no tempo e médias estatísticas de 1ª e 2ª ordem.

### 3.5.1 Medições na Cuba

Apresenta-se os sinais de entrada e cálculo da resistência da cuba 1050, que representam as observações do filtro de *Kalman*. As medições de tensão e corrente foram realizadas em uma cuba do tipo *pre-baked*, conforme identificada na tabela 3.1.

Tabela 3.1: Identificação da Medição.

Identificação da Medição	
Cuba	1050
Data	06/09/2006
Hora inicial	15:37:10
final	17:37:10

Na tabela 3.2 apresenta-se os parâmetros de tempo da medição. Observa-se que a medição é de 2 horas e o intervalo de aquisição é de 200m segundos.

Tabela 3.2: Parâmetros de Tempo.

Parâmetros de Tempo	
Tempo de Medição	4807 s 2:00:00 h:m:s
Intervalo de Amostragem	1 s
Quantidade de Pontos	7200

Na figura 3.3 apresenta-se o comportamento da tensão, corrente e resistência para intervalo de amostragem de 200 ms. As oscilações destas grandezas são associadas com o percentual da concentração de alumina na cuba.

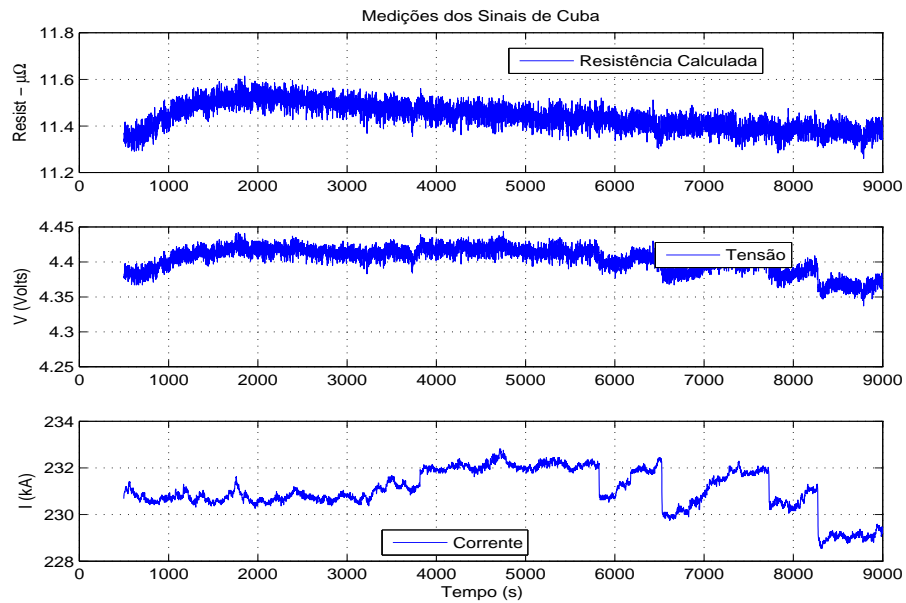


Figura 3.3: Tensão, Corrente e Resistência - 200 ms

A figura 3.4 representa o *status* de operação da cuba que está associado com o comportamento da tensão e resistência da cuba para medir indiretamente a concentração de alumina. Quanto a corrente, considera-se constante, levando em conta que a operação consegue mantê-la nos limites de controle.

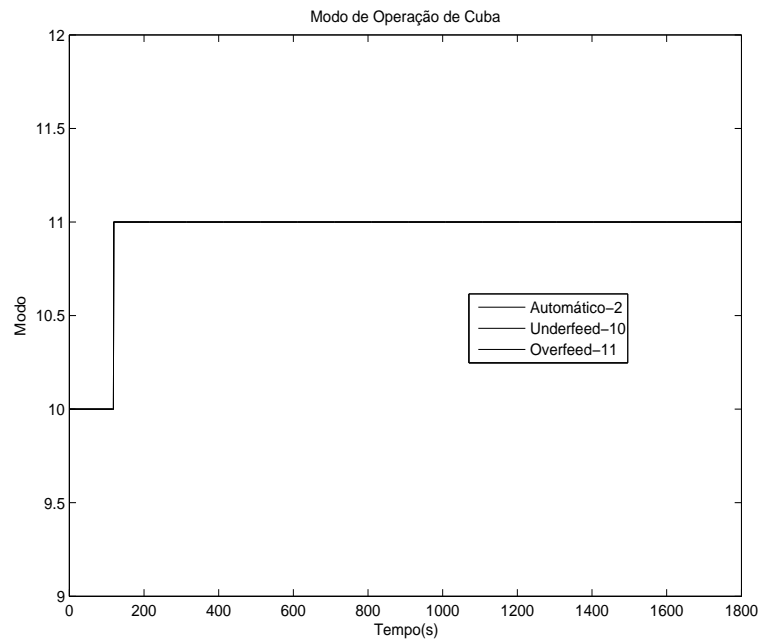


Figura 3.4: Status de Operação da Cuba 1050 em segundos.

### 3.5.2 Momentos Estatísticos

Neste item discute-se a respeito da incertezas dos sinais sob o ponto de vista de médias e das covariâncias estatísticas, tendo como referência os valores operacionais da cuba. Na tabela 3.3 apresenta-se as médias dos sinais de tensão, de corrente e da resistência da cuba que estão relacionados com as medições da figura 3.3, e que são utilizados para avaliar as condições operacionais.



Tabela 3.3: Estatísticas das Medições.

Estatísticas	Medidas		
	Resistências	Tensão	Corrente
	$\mu\Omega$	V	kA
Média	11.4421	4.3687	227.991
Máximo	11.627	4.4230	233.5420
Mínimo	11.159	4.2730	220.677
Desvio	0.083	0.0248	1.279
Covariância	0.007	0.0006	1.637

O comportamento da tensão e da corrente, figura 3.3, representa uma faixa de operação entre *super-alimentação* e *sub-alimentação* que podem ser comparadas com o mudança o *status* dos modos de operação da cuba, figura 3.4. Desta forma, com auxílio da tabela identifica-se um padrão de comportamento para a cuba operando sob as condições especificadas pelo controle do computador de processo.

### 3.5.3 Estimativa dos Estados

As estimativas do *slope* e da curvatura, figura 3.5, representam o comportamento dinâmico da cuba para intervalos de 200 ms. Observa-se a convergência dos ganhos para um valor assintótico. A velocidade desta convergência assintótica é verificada por meio da equação (3.6), isto é, por meio dos seus autovalores.

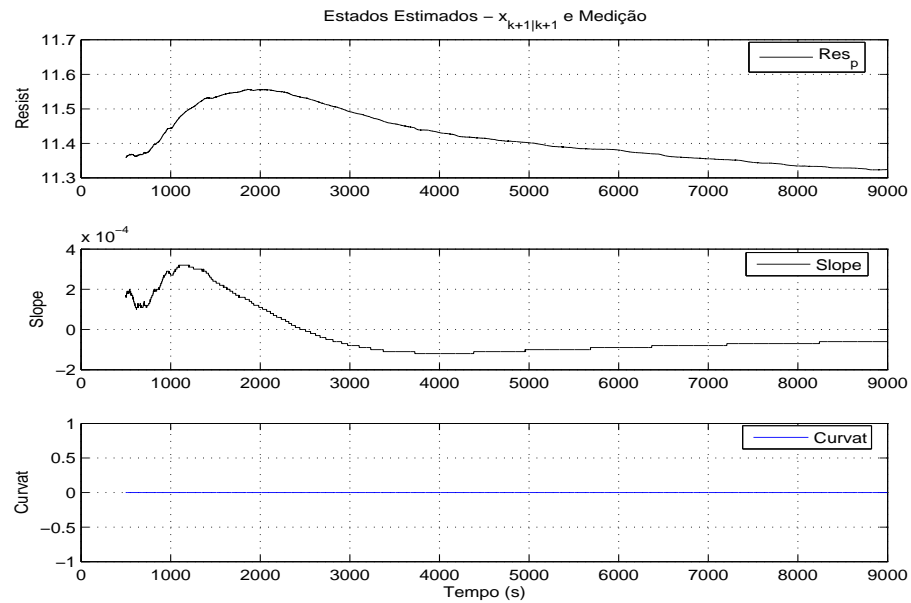


Figura 3.5: Estimativas - Resistência, Slope e Curvatura- 200 ms

As estimativas da figura 3.5 estão associadas com os ganhos da figura 3.6. Esta associação mostra que as variações dos estados estão acompanhando a convergência do ganho para um valor assintótico, o que está de acordo com o *status* da curva de operação. O transitório da alimentação está passando e a tensão na cuba tende a se estabilizar devido a ocorrência deste evento.

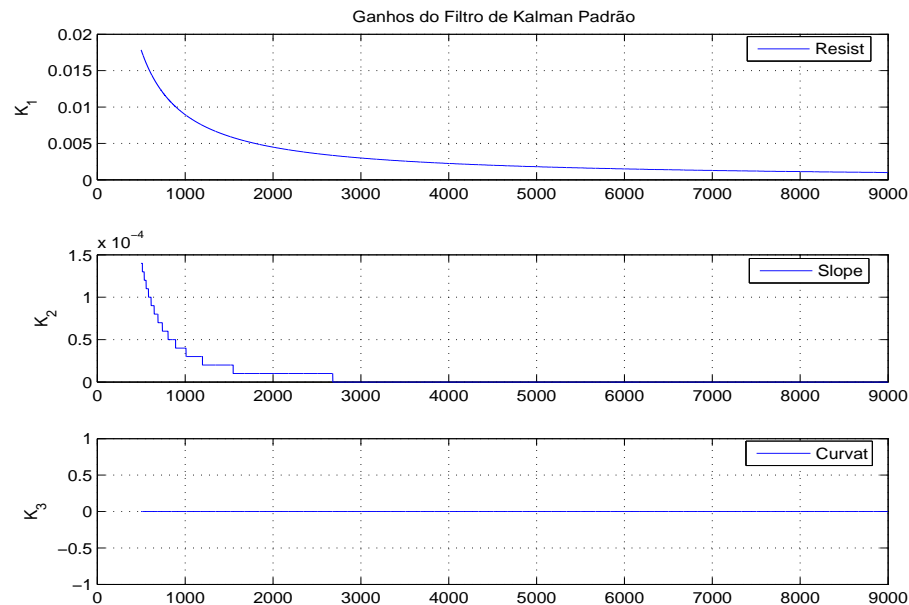


Figura 3.6: Ganhos do Filtro de Kalman para 200ms

### 3.5.4 Limites Operacionais

Os estabelecimento do espaço de matrizes de covariância que estabelecem limites para realização do observador é o principal assunto deste item. Procura-se mostrar a relação que existe entre estrutura algébrica do filtro e modelo da cuba.

Os limites operacionais são estabelecidos pela avaliação máxima e mínima dos ganhos de *Kalman* que podem provocar perturbações de ordem numérica e conduzir à instabilidade ou à divergência do filtro; como também, detectar conjuntos de matrizes  $Q$  e  $R$  que provocam a saturação numérica do ganho.

Na tabela 3.4 são apresentados os elementos das matrizes de ponderação que são utilizados para determinar os limites operacionais do filtro. Estas variações tem como referência as matrizes identidade. Verifica-se que os valores de  $R$  são mantidos constantes e os elementos da matriz  $Q$  sofrem variações na ordem de 10 (dez).

Na figura 3.7 apresenta-se o comportamento da filtragem da resistência para 200 ms para quatro situações dos valores dos elementos das matrizes de co-

Tabela 3.4: Matrizes de ponderação para variações em  $Q$  e mantendo constante  $R$ .

Component $QR$	Elementos das Matrizes			
	$r_{11}$	$q_{11}$	$q_{22}$	$q_{33}$
1	1.0	$1.010^{00}$	$1.010^{00}$	$1.010^{00}$
2	1.0	$1.010^{-10}$	$1.010^{-10}$	$1.010^{-10}$
3	1.0	$1.010^{-12}$	$1.010^{-12}$	$1.010^{-12}$
4	1.0	$1.010^{-16}$	$1.010^{-14}$	$1.010^{-16}$
5	1.0	$1.010^{-25}$	$1.010^{-25}$	$1.010^{-25}$
6	1.0	$1.010^{-40}$	$1.010^{-40}$	$1.010^{-40}$

variância, que chamamos de casos-referência 1,2 e 3. Chamamos de caso-referência quando as matrizes de covariância possuem os seus elementos igual a unidade.

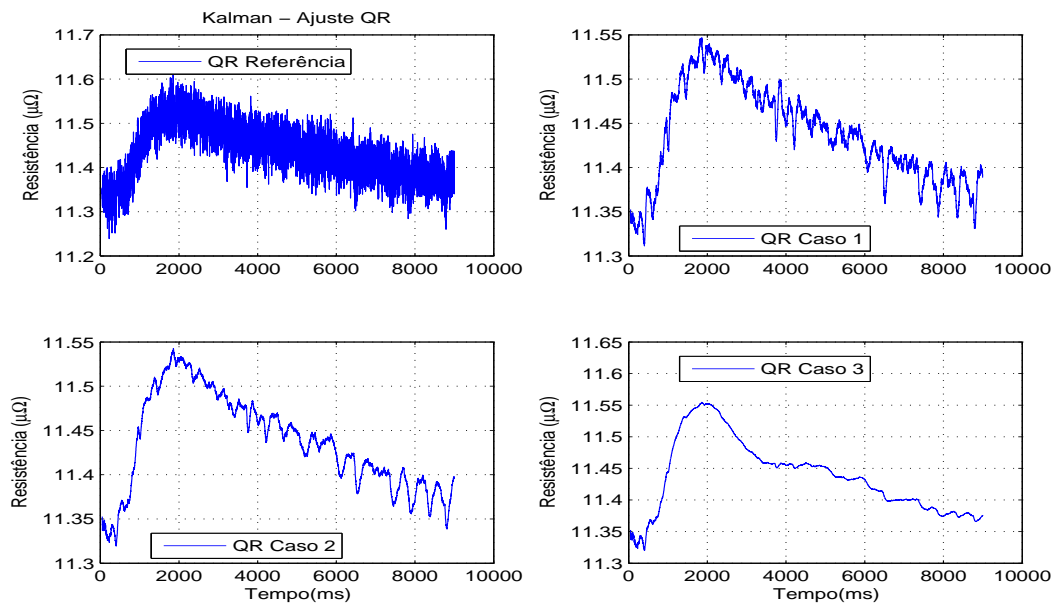


Figura 3.7: Filtragem da Resistência para 200ms - Casos: Referência e 1,2 e 3

Os ganhos para variações nos elementos de  $Q$  e mantendo os elementos de  $R$

fixos são apresentados na tabela 3.5. Na figura 3.8 apresenta-se o comportamento

Tabela 3.5: Limites Operacionais dos Ganhos FKP para  $Q$  e  $R$  - .

Component $QR$	Ganhos do Filtro FKP		
	$k_{11}$	$k_{12}$	$k_{13}$
1	$9.1 \times 10^{-1}$	$9.6 \times 10^{-1}$	$3.0 \times 10^{-1}$
2	$4.2 \times 10^{-2}$	$9.1 \times 10^{-4}$	$9.8 \times 10^{-6}$
3	$2.0 \times 10^{-2}$	$2.0 \times 10^{-4}$	$9.9 \times 10^{-7}$
4	$4.3 \times 10^{-3}$	$9.3 \times 10^{-6}$	$1.0 \times 10^{-8}$
5	$1.0 \times 10^{-3}$	$4.4 \times 10^{-7}$	$8.2 \times 10^{-11}$
6	$1.0 \times 10^{-3}$	$4.4 \times 10^{-7}$	$8.2 \times 10^{-11}$

da filtragem da resistência para 200 milissegundos, para os casos-referência 4,5 e 6, isto é, para valores menores das matrizes. Estes valores demonstram que ocorre o problema de saturação numérica dos ganhos, tabela 3.6. Variações de  $Q$  e  $R$  indicam um limitante estabelecido pelas relações de  $Q$  e  $R$  da tabela 3.6.

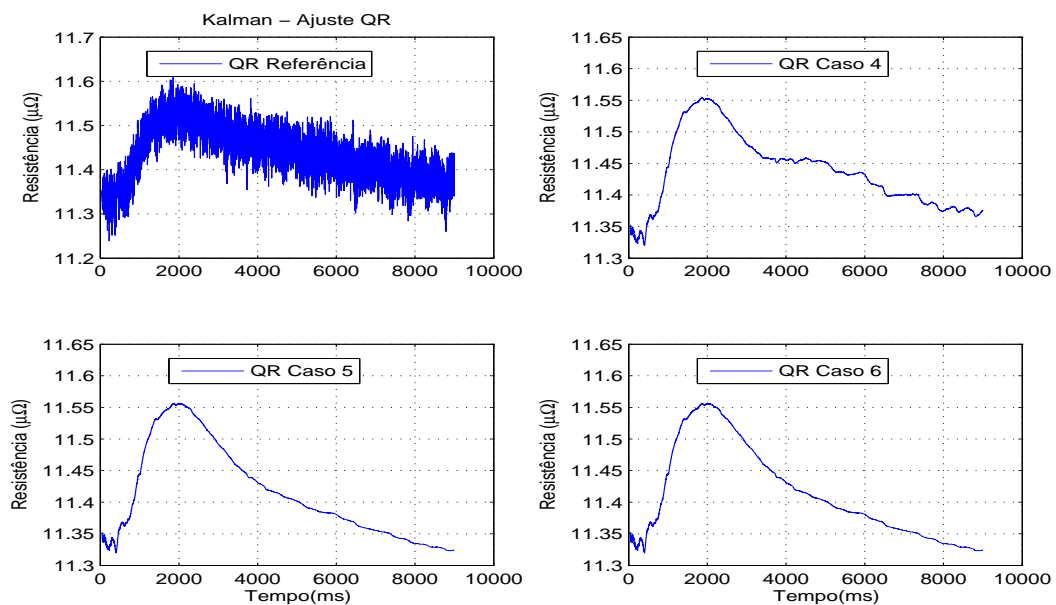


Figura 3.8: Filtragem da Resistência para 200ms - Casos: Referência e 4,5 e 6.

As relações QR apresentadas na Tabela 3.6 correspondem as variações das matrizes de covariâncias da Tabela 3.4. Estes valores são utilizados para estabelecer os limites operacionais dos valores de ganhos. Verifica-se que as variações da matrizes representadas pelos casos provocam saturação nos ganhos do filtro.

Tabela 3.6: Relação QR para variações em  $Q$  e mantendo constante  $R$ .

Component $QR$	Relação do Filtro FKP		
	$RQR_1$	$RQR_2$	$RQR_3$
1	1.0	1.0	1.0
2	$1.0 \times 10^{-10}$	$1.0 \times 10^{-10}$	$1.0 \times 10^{-10}$
3	$1.0 \times 10^{-12}$	$1.0 \times 10^{-12}$	$1.0 \times 10^{-12}$
4	$1.0 \times 10^{-16}$	$1.0 \times 10^{-14}$	$1.0 \times 10^{-16}$
5	$1.0 \times 10^{-25}$	$1.0 \times 10^{-25}$	$1.0 \times 10^{-25}$
6	$1.0 \times 10^{-40}$	$1.0 \times 10^{-40}$	$1.0 \times 10^{-40}$

As variações no ganho de Kalman estão relacionadas com as variações das matrizes de covariância. Para o estudo em questão concebe-se que a incerteza na dinâmica do sistema é caracterizada pela matriz de covariância do processo, a matriz  $Q$ . Valores altos de  $Q$  indicam uma incerteza alta ou que o modelo é inadequado. Para valores pequenos de  $Q$  obteve-se valores pequenos de  $P^P$ , indicando que o modelo é adequado. Quando  $Q$  aumenta o ganho de Kalman aumentará à medida que a largura da banda aumenta, e o desempenho de transição do filtro passa a ser rápido, com menor tempo de rastreamento. Tendo em mente que procura-se um padrão que represente bem o comportamento do percentual de alumina no banho eletrolítico verifica-se, em última instância, nas relações QR apresentadas na tabela acima, que as variações dos elementos das matrizes de covariância são representativas para valores até o quarto caso, depois a tendência é a saturação dos valores dos ganhos. Isso vai ao encontro com o que foi observado nos testes, e que será mais discutido adiante.

## 3.6 Conclusão

O processo de medição indireta da concentração de alumina foi apresentado como um mapeamento estocástico, baseado em modelo dinâmico da cuba no espaço de estado, que é fortemente dependente das medições direta dos valores de tensão e corrente. Estas observações são coletadas diretamente em cubas elerolíticas. A dedução de um filtro de *Kalman* de terceira ordem para estimação da variação de  $Al_2O_3$  foi apresentado em detalhes da sua estrutura algébrica.

A análise numérica do FK padrão de terceira ordem utilizando medições de tensão e corrente de uma cuba do tipo *pre-baked* foi realizada para verificar a observabilidade e estabilidade do processo de filtragem da resistência da cuba e predição da variação de  $Al_2O_3$ .

A fim de verificarmos o desempenho, em termos de estabilidade numérica, realizou-se testes com maiores durações. Uma análise, considerando um período de 12 horas, foi realizada *on-line* em outras cubas.

# Ajuste dos Ganhos de Kalman

---

O desenvolvimento e aplicação de um método baseado no princípio da dualidade e heurísticas para o ajuste dos ganhos de *Kalman* é o principal enfoque deste capítulo. O método para sintonia do FKP é dedicado a estimação do valor das resistências e suas variações em cubas eletrolíticas. A formulação do ajuste do ganho do filtro de *Kalman* padrão tem por base o princípio da dualidade  $QR$ , (Yeh 1990). Em termos práticos, mostramos a habilidade do filtro em reproduzir o comportamento dos filtros já implementados para medição indireta e controle da concentração de alumina, por meio de observações dos valores de resistência da cuba.

A formulação de regras que compõem o método são apresentadas na seção 4.1, as regras definem as estruturas fixas de variação e as heurísticas estabelecem o *modus operandi* destas variações, a complexidade das heurísticas estão associadas com a ordem do sistema. Leva-se em consideração as observações citadas em *Bar-Shalom-2001* e (Pasupathy 1997).

Na seção 4.2 apresenta-se os sinais de tensão e corrente das medições na cuba que são utilizados para o ajuste dos ganhos do filtro de *Kalman*, por meio das variações nas matrizes  $Q$  e  $R$ .

## 4.1 Formulação do Ajuste do Ganho

Considerando-se que o modelo do processo no espaço de estados é representado pelas equações básicas do filtro, equação (3.10-3.14), que são o núcleo do algoritmo



do *Kalman* padrão. Verifica-se nestas equações que a entrada para definir ou dimensionar o ajuste dos ganhos do filtro são as matrizes  $Q$  e  $R$ . A seguir, explica-se o princípio da dualidade em termos das equações que compõem o algoritmo do FK-Padrão.

As equações (3.10-3.14) são agrupadas em duas classes para fins da aplicação do mecanismo de ajuste do filtro. A equação (3.13) representa a estimativa ótima do estado baseada na seqüência de medidas.

As equações (3.10) e (3.12) são denominadas de equações do estágio de predição e as equações (3.13) e (4.1) representam o estágio de correção ou filtragem. Observa-se que a fase de predição pode ser caracterizada pelas relações funcionais,

$$P^P = f_1(P^F, A, B, Q) \quad (4.1)$$

$$K_K = f_2(P^P, C, R) \quad (4.2)$$

$$\hat{x}^P = f_3(A, x^F) \quad (4.3)$$

A precisão do modelo é avaliada em termos da matriz de covariância da planta, isto é, em termos da sua influência na covariância do estado durante a fase de predição. Observa-se que por meio da equação (3.10) que a incerteza do modelo é caracterizada pela matriz  $Q$ . Valores grandes de  $Q$  implicam em valores grandes de  $P^P$ . Como conseqüência, temos um indicativo de incertezas ou o modelo do sistema dinâmico é inadequado. Caso contrário, pequenos valores de  $P^P$  indicam uma boa representação do modelo.

A equação do ganho pode ser representada na forma que mostra explicitamente a relação entre as matrizes  $Q$  e  $R$ , por meio da substituição da equação (3.10) em (3.11).

$$K_K = (APA^T + BQB^T)C^T(CPC^T + R)^{-1} \quad (4.4)$$

Considerando,

$$BQB^T \gg APA^T \quad (4.5)$$

$$R \gg CPC^T \quad (4.6)$$

ainda  $C \equiv I$  e  $B = I$ .

Então, temos a seguinte aproximação para o ganho dada por:

$$K_K \approx \frac{Q}{R} \quad (4.7)$$

sendo  $Q$  e  $R$  as matrizes de covariância dos ruídos da planta e da medida, respectivamente. As equações do estágio de predição são representadas em termos das funcionalidades dos seus parâmetros.

$$x^F = f_4(x^P, K_K, y_M, C) \quad (4.8)$$

$$P = f_5(P^F, K_K, C) \quad (4.9)$$

As formas funcionais (4.8) e (4.9) são utilizadas para representar os efeitos da variação do ganho, quando interpretados sob o ponto de vista de largura de banda. O filtro de *Kalman* é considerado como filtro determinístico com a largura de banda variante no tempo  $[x]$ . Esta largura de banda (**BW**) é determinada pelo ganho de *Kalman*, (Brown and Hwang 1992). A análise tem como ponto de partida a equação (3.13) que representa o estado filtrado,

$$x_{k+1}^F = [I - K_K C] x_{k+1}^P + K_K y_k^M \quad (4.10)$$

A análise é realizada em termos do tempo de rastreamento da variação de alumina até a estimativa da saída acompanhar as variações de alumina no banho, e em termos do desempenho transitório. O crescimento da largura de banda está associado com o aumento das covariâncias em  $Q$ .

#### 4.1.1 Regras da Dualidade QR

Os procedimentos para sintonia do filtro de *Kalman* são estabelecidos em termos do princípio da dualidade das matrizes  $Q$  e  $R$ , seguindo as orientações sugeridas em (Yeh 1990). A seguir apresentamos os três tipos de variações das matrizes  $Q$  e  $R$  que podem ser estabelecidas para o ajuste do ganho:

$$K_n \rightarrow f(Q_n, R) \quad (4.11)$$

$$K_n \rightarrow f(Q, R_n) \quad (4.12)$$

$$K_n \rightarrow f(Q_n, R_n) \quad (4.13)$$

A partir das três situações possíveis para ajuste do ganho pelo ajuste  $QR$  das matrizes de covariância, caracterizadas pelas relações (4.11-4.13), escolhemos a primeira situação para formularmos heurísticas para a sintonia do filtro.

## 4.2 Medições na Cuba

As variações da concentração de alumina estão relacionadas diretamente com as variações da tensão e as de corrente e outros fenômenos intrínsecos são caracterizados como perturbações no processo de eletrólise. A caracterização da ocorrência deste fenômeno é de grande importância para estabelecer o ponto de operação da cuba sob a ótica da relação custo/benefício.

Neste seção apresentamos tópicos relacionados com análise dos sinais de entrada e cálculo da resistência da Cuba 1050. Especificamente, realiza-se uma análise estatística dos sinais por meio dos momentos de primeira e segunda ordem, estabelece-se uma relação sinal-ruído e avalia-se o comportamento dos sinais de tensão e de corrente.

Na tabela 4.1 apresenta-se os parâmetros de tempo da medição. Observa-se que a medição é de aproximadamente 30 minutos e o intervalo de aquisição é de 1 segundo.

Tabela 4.1: Parâmetros de Tempo.

Parâmetros de Tempo	
Tempo de Medição	1800 s 0:30:00 h:m:s
Intervalo de Amostragem	1 s
Quantidade de Pontos	1800

Na figura 4.1 apresenta-se a corrente, tensão, resistência observada, e *status* da alimentação. Estes valores representam, ao longo do tempo, o comportamento dinâmico da cuba. Duas premissas são consideradas para estabelecer um padrão de reconhecimento para variações de concentração de alumina no banho.

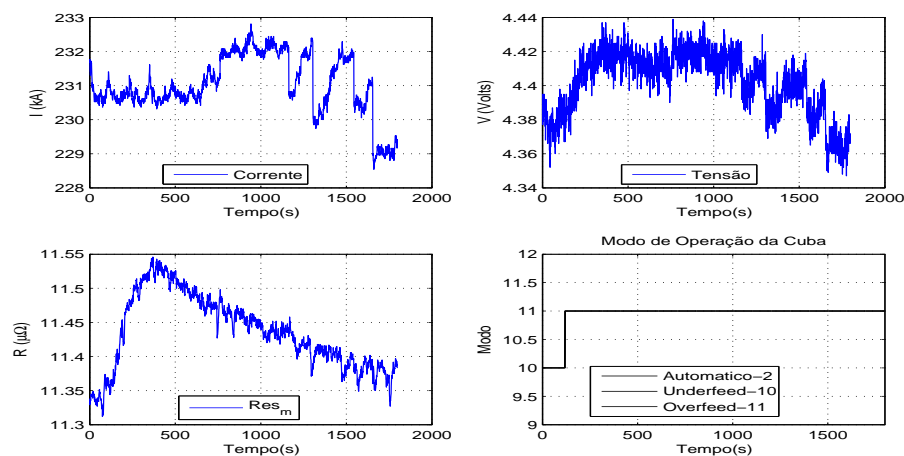


Figura 4.1: Medições, Resistência e Condição Operacional da Cuba.

Primeiro deve-se observar, figura 4.1, que a origem das variações da resistência está relacionada com as variações de corrente ou de tensão da cuba, e que as mesmas não devem ser confundidas com as variações da concentração de alumina. Em segundo lugar, outras grandezas inerentes ao processo de produção, como a formação de bolhas embaixo do anodo, são oriundas da química do banho eletrolítico e, embora estejam envolvidas no processo, estes fenômenos são considerados como fontes de sinais espúrios.

As médias e variâncias dos sinais de tensão e corrente são apresentadas na tabela 4.2, como também os valores de resistências. Esta tabela é associada com os histogramas da figura 4.2. A associação da referida tabela com o histograma mostra que as variações de corrente em torno de valor estão dentro da faixa de operação estabelecida para a planta. O importante é relacionar as variações da resistência com as variações reais do percentual de alumina no banho.

A distribuição dos valores de resistência em torno do valor-alvo é apresentada na figura 4.2. Os histogramas, relacionados com os momentos estatísticos de primeira e segunda ordem apresentados na tabela 4.2, são utilizados para determinação da faixa de operação do filtro.

Tabela 4.2: Estatísticas da Resistência, Tensão e Corrente.

Estatísticas	Sinais Medidos			
	Resistências		Cuba	
	Filtrada	Não Filtrada	Tensão	Corrente
	$\Omega\mu$	$\Omega\mu$	V	kA
Média	11.4363	11.4359	4.4022	231.033
Máximo R	11.603	11.5460	4.4390	232.813
Mínimo	11.237	11.3120	4.3470	228.542
Desvio	0.061	0.0544	0.0185	0.874
Covariância	0.004	0.0030	0.0003	0.763

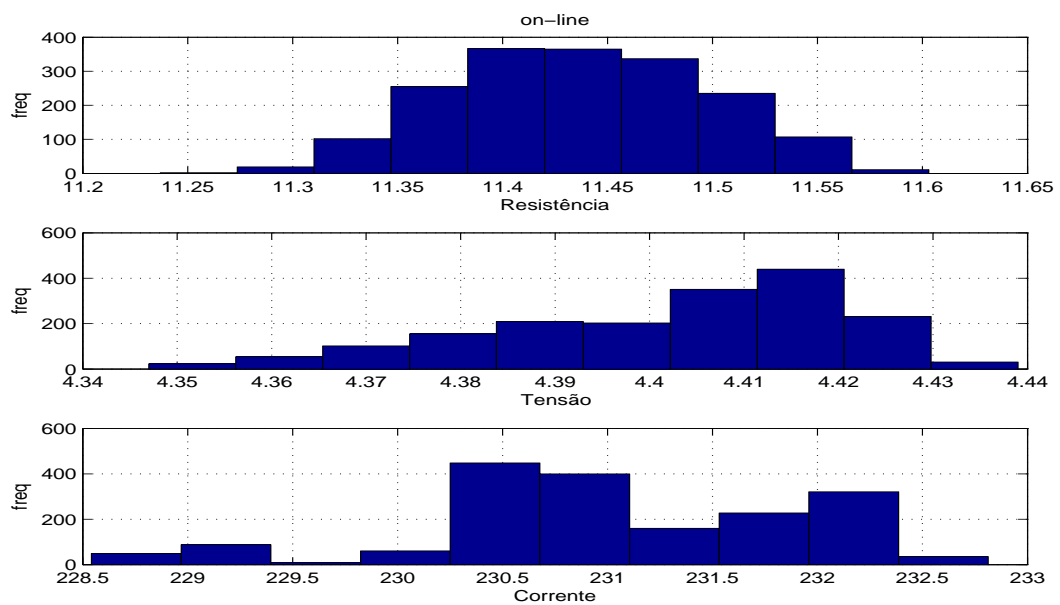


Figura 4.2: Histogramas de Corrente, Tensão e Resistência

### 4.3 Sintonia QR do FK Padrão

Nesta seção apresenta-se a aplicação do procedimento para a sintonia do filtro de *Kalman*, tendo por base a regra 1, equação (4.11), do princípio da dualidade *QR*. Os resultados apresentados na figura 4.3 são utilizados para ilustrar a flexibilidade do filtro de *Kalman* em realizar a observação dos fenômenos em uma dada faixa de frequência.

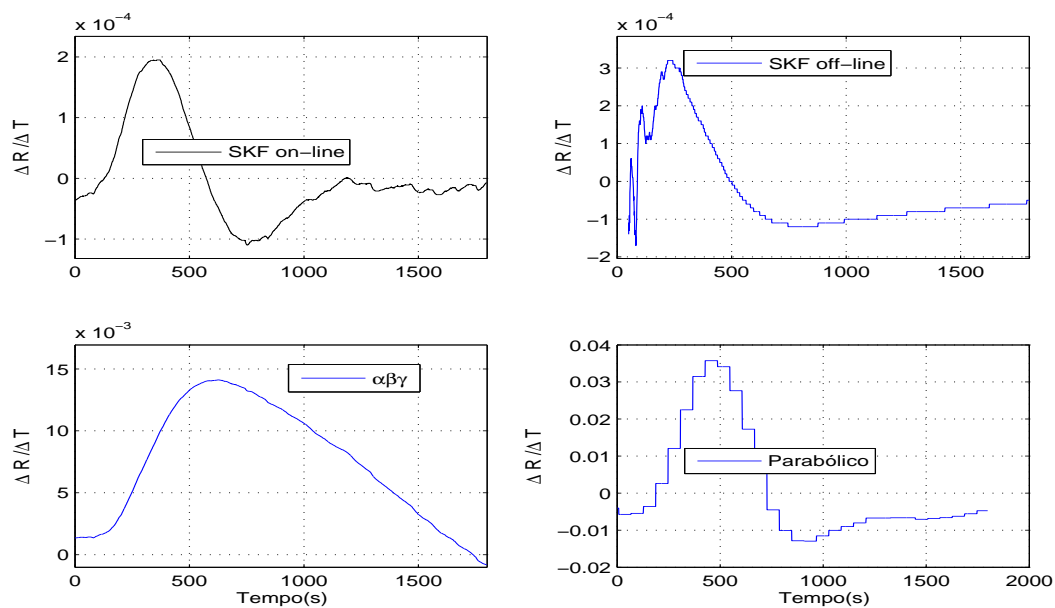


Figura 4.3: Slope dos filtros FKP on-line, FKP off-line ,  $\alpha\beta\gamma$  e Parábólico

As variações das matrizes *QR* seguem regras baseadas em heurísticas que estão fundamentadas na relação *QR*, equação (4.7). As observações, figura 4.1, são utilizadas para estimar as variações da concentração de alumina por meio de filtragem digital estocástica. Considera-se que a processo de produção do alumínio é sensível as variações da quantidade de alumina na cuba, e que tais variações afetam a tensão geral da cuba em uma determinada faixa de frequência.

#### 4.3.1 Regra 1 de Sintonia QR

A sintonia do filtro consiste em ajustar os seus parâmetros no sentido de permitir a passagem de faixas de frequências que representam variações no percentual

de alumina, e que são refletidas na tensão da cuba. A heurística do processo de ajuste é estabelecido na forma de quatro heurísticas que estão fundamentadas pelo princípio da dualidade  $QR$ , sob a equação (4.11), e que seguem uma referência estabelecida pelo projetista.

### Heurística 1

As variações das matrizes de ponderação, orientadas pela regra estabelecida pelo mapeamento (4.11), e que seguem a heurística 1, são apresentadas na tabela 4.3. As variações relativas dos elementos são utilizados para verificar a ordem de grandeza dos ganhos para uma determinada faixa de frequência e determinar o padrão que melhor representa as variações de  $Al_2O_3$  no banho.

Os ganhos associados com esta heurística são apresentados na tabela 4.4.

Tabela 4.3: Heurística 1 - Matrizes de ponderação para variações em  $Q$  e mantendo constante  $R$ .

$(Q_n, R)$	Elementos das Matrizes			
	$r_{11}$	$q_{11}$	$q_{22}$	$q_{33}$
1	$2.0 \times 10^2$	$1.0 \times 10^{-6}$	$1.0 \times 10^{-6}$	$1.0 \times 10^{-6}$
2	$2.0 \times 10^2$	$1.0 \times 10^{-7}$	$1.0 \times 10^{-7}$	$1.0 \times 10^{-7}$
3	$2.0 \times 10^2$	$1.0 \times 10^{-9}$	$1.0 \times 10^{-9}$	$1.0 \times 10^{-9}$
4	$2.0 \times 10^2$	$1.0 \times 10^{-14}$	$1.0 \times 10^{-14}$	$1.0 \times 10^{-14}$
5	$2.0 \times 10^2$	$1.0 \times 10^{-16}$	$1.0 \times 10^{-16}$	$1.0 \times 10^{-16}$
6	$2.0 \times 10^2$	$1.0 \times 10^{-18}$	$1.0 \times 10^{-18}$	$1.0 \times 10^{-18}$

Os ganhos de *Kalman* para variações nos elementos de  $Q$ , e mantendo o elemento de  $R$  fixo, são apresentados na tabela 4.4. Observa-se que os valores dos ganhos são reduzidos, obedecendo a relação (4.7), e satisfazendo as condições (4.5-4.6). As variações estão direcionadas no sentido de capturar um determinado padrão. Seguindo esta linha, as variações das matrizes de covariâncias são classificadas em grupos de acordo com o impacto de suas variações na captura do padrão que representa o comportamento da concentração de alumina.

Os valores das relações  $QR$  para os casos 1 até 6 são iguais para os elementos das matrizes  $Q$  e  $R$ , que são estabelecidas pelo projetista com sendo:  $q_{11}/r_{11}$ ,  $q_{22}/r_{11}$  e  $q_{33}/r_{11}$ , e os seus valores correspondentes estão na ordem de  $10^{-9}$ .

Tabela 4.4: Heurística 1 - Ganhos para variações em  $Q$  e mantendo constante  $R$ .

$(Q_n, R)$ $K_n$	Ganhos do Filtro FKP		
	$k_{11}$	$k_{12}$	$k_{13}$
1	$7.9 \times 10^{-2}$	$3.3 \times 10^{-3}$	$6.8 \times 10^{-5}$
2	$5.5 \times 10^{-2}$	$1.6 \times 10^{-3}$	$2.2 \times 10^{-5}$
3	$2.6 \times 10^{-2}$	$3.4 \times 10^{-4}$	$2.2 \times 10^{-6}$
4	$3.8 \times 10^{-3}$	$7.4 \times 10^{-6}$	$7.1 \times 10^{-9}$
5	$1.8 \times 10^{-3}$	$1.6 \times 10^{-6}$	$7.1 \times 10^{-10}$
6	$1.0 \times 10^{-3}$	$4.8 \times 10^{-7}$	$1.0 \times 10^{-10}$

Tabela 4.5: Heurística 1 - Relação QR para variações em  $Q$  e mantendo constante  $R$ .

$(Q_n, R)$ $RQR_n$	Relação do Filtro FKP		
	$RQR_1$	$RQR_2$	$RQR_3$
1	$5.0 \times 10^{-9}$	$5.0 \times 10^{-9}$	$5.0 \times 10^{-9}$
2	$5.0 \times 10^{-10}$	$5.0 \times 10^{-10}$	$5.0 \times 10^{-10}$
3	$5.0 \times 10^{-12}$	$5.0 \times 10^{-12}$	$5.0 \times 10^{-12}$
4	$5.0 \times 10^{-17}$	$5.0 \times 10^{-17}$	$5.0 \times 10^{-17}$
5	$5.0 \times 10^{-19}$	$5.0 \times 10^{-19}$	$5.0 \times 10^{-19}$
6	$5.0 \times 10^{-21}$	$5.0 \times 10^{-21}$	$5.0 \times 10^{-21}$

O efeitos da heurística 1, polarizadas pela regra 1, são as variações observadas na figura 4.4.



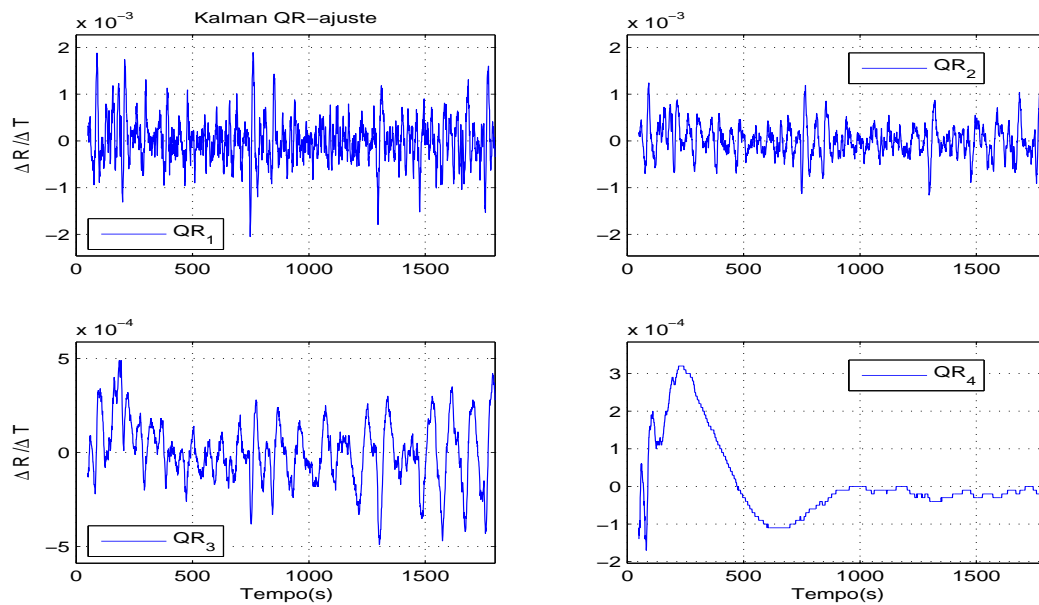


Figura 4.4: Ajuste QR - Regra 1.

### Heurística 2

Os casos 7-8, tabela 4.6, mostram o comportamento das variações de alumina ao longo do tempo para variações no elemento  $q_{33}/r_{11}$ , fixando os elementos  $q_{11}/r_{11}$  e  $q_{22}/r_{11}$ . Nesta situação as variações da ordem de grandeza são dadas por  $q_{11}/r_{11} = 5 \cdot 10^{-21}$ ,  $q_{22}/r_{11} = 5 \cdot 10^{-21}$ , e  $q_{33}/r_{11} = 5 \cdot 10^{-23}$  para o caso 7, e  $q_{33}/r_{11} = 5 \cdot 10^{-33}$ .

Tabela 4.6: Heurística 2 - Matrizes de ponderação para variações em  $Q$  e mantendo constante  $R$ .

$(Q_n, R)$	Elementos das Matrizes			
	$r_{11}$	$q_{11}$	$q_{22}$	$q_{33}$
7	$2.0 \times 10^2$	$1.0 \times 10^{-18}$	$1.0 \times 10^{-18}$	$1.0 \times 10^{-20}$
8	$2.0 \times 10^2$	$1.0 \times 10^{-18}$	$1.0 \times 10^{-18}$	$1.0 \times 10^{-30}$

Na figura 4.5 apresenta-se os efeitos nos ganhos de *Kalman* relativos ao ajuste desta ordem de grandeza. Observa-se que a banda passante está sendo reduzida.

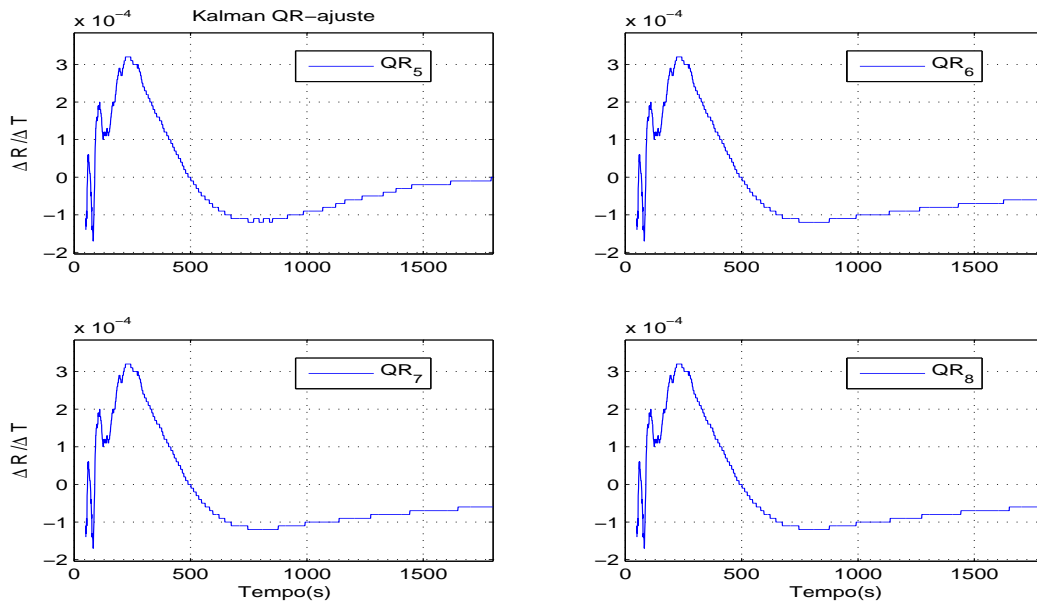


Figura 4.5: Heurística 2 - Ajuste QR - Casos de 5-8 - Regra 1

Tabela 4.7: Heurística 2 - Ganhos para variações em  $Q$  e mantendo constante  $R$ .

$(Q_n, R)$	Ganhos do Filtro FKP		
	$k_{11}$	$k_{12}$	$k_{13}$
7	$1.0 \times 10^{-3}$	$4.4 \times 10^{-7}$	$8.2 \times 10^{-11}$
8	$1.0 \times 10^{-3}$	$4.4 \times 10^{-7}$	$8.2 \times 10^{-11}$

Tabela 4.8: Heurística 2 - Relação QR para variações em  $Q$  e mantendo constante  $R$ .

$(Q_n, R)$	Relação do Filtro FKP		
	$RQR_1$	$RQR_2$	$RQR_3$
7	$5.0 \times 10^{-21}$	$5.0 \times 10^{-21}$	$5.0 \times 10^{-23}$
8	$5.0 \times 10^{-21}$	$5.0 \times 10^{-21}$	$5.0 \times 10^{-33}$

**Heurística 3**

Confrontando-se os casos 9 e 10, tabelas 4.9, verifica-se a particularidade de valores de ganhos iguais para diferentes valores dos elementos  $q_{11}$ , fixando-se os elementos  $q_{22}$  e  $q_{33}$ . Os valores das relações  $QR$  são da ordem  $q_{11}/r_{11} = 10^{-21}, 10^{-13}$ , e os elementos fixos são  $q_{22}/r_{11} = 10^{-13}$ , tendo  $q_{33}/r_{11} = 510^{-33}$  como valor fixo.

Tabela 4.9: Heurística 3 - Matrizes de ponderação para variações em  $Q$  e mantendo constante  $R$ .

$(Q_n, R)$	Elementos das Matrizes			
	$r_{11}$	$q_{11}$	$q_{22}$	$q_{33}$
9	$2.0 \times 10^2$	$1.0 \times 10^{-18}$	$1.0 \times 10^{-10}$	$1.0 \times 10^{-30}$
10	$2.0 \times 10^2$	$1.0 \times 10^{-6}$	$1.0 \times 10^{-10}$	$1.0 \times 10^{-20}$

Estas observações podem ser confrontadas com os valores dos ganhos, tabela 4.10, e com os valores que estão associados com as variações das matrizes. As equações 3.23 e 3.35 do filtro escalar apontam para a explicação dos valores de ganho.

Tabela 4.10: Heurística 3 - Ganhos para variações em  $Q$  e mantendo constante  $R$ .

$(Q_n, R)$	Ganhos do Filtro FKP		
	$k_{11}$	$k_{12}$	$k_{13}$
9	$1.4 \times 10^{-3}$	$9.2 \times 10^{-7}$	$1.3 \times 10^{-10}$
10	$1.4 \times 10^{-3}$	$9.2 \times 10^{-7}$	$1.3 \times 10^{-10}$

**Heurística 4**

Nos casos 11 e 12 fixa-se os valores dos elementos  $q_{22}$  e implementa-se variações no sentido contrário, tabela 4.13, para os elementos  $q_{11}$  e  $q_{22}$ , respectivamente. Os valores das relações  $QR$  são  $q_{11}/r_{11} = 510^{-9}, 510^{-4}$  e  $q_{33}/r_{11} = 510^{-18}, 510^{-23}$ , tendo  $q_{22}/r_{11} = 510^{-21}$  como valor fixo. A atuação do filtro para as relações dos caso 9-12 são apresentadas na Fig. 4.6.

Tabela 4.11: Heurística 3 -Relação QR para variações em  $Q$  e mantendo constante  $R$ .

$(Q_n, R)$	Relação do Filtro FKP		
	$RQR_1$	$RQR_2$	$RQR_3$
9	$5.0 \times 10^{-21}$	$5.0 \times 10^{-13}$	$5.0 \times 10^{-33}$
10	$5.0 \times 10^{-9}$	$5.0 \times 10^{-13}$	$5.0 \times 10^{-23}$

Tabela 4.12: Heurística 4 - Ganhos para variações em  $Q$  e mantendo constante  $R$ .

$(Q_n, R)$	Ganhos do Filtro FKP		
	$k_{11}$	$k_{12}$	$k_{13}$
11	$2.6 \times 10^{-3}$	$3.5 \times 10^{-6}$	$2.2 \times 10^{-9}$
12	$2.3 \times 10^{-2}$	$1.0 \times 10^{-5}$	$1.7 \times 10^{-9}$

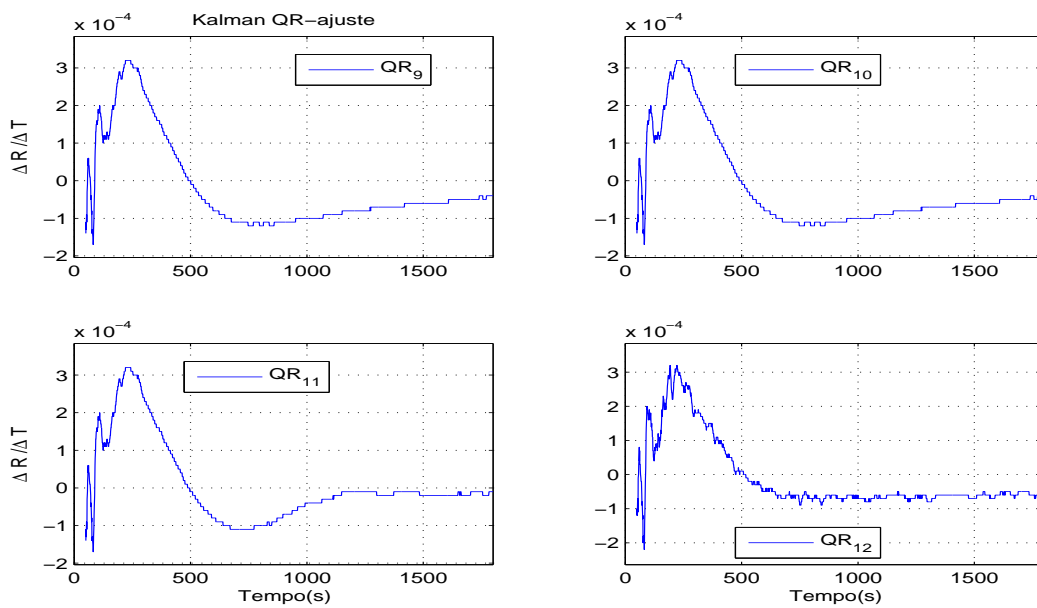


Figura 4.6: Heurística 4 - Ajuste QR - Casos 9-12 - Regra 3

Tabela 4.13: Relação QR para variações em  $Q$  e mantendo constante  $R$ .

$(Q_n, R)$ $RQR_n$	Relação do Filtro FKP		
	$RQR_1$	$RQR_2$	$RQR_3$
11	$5.0 \times 10^{-9}$	$5.0 \times 10^{-13}$	$5.0 \times 10^{-18}$
12	$5.0 \times 10^{-4}$	$5.0 \times 10^{-13}$	$5.0 \times 10^{-23}$

## 4.4 Conclusão

Apresentou-se a sintonia e ajuste dos ganhos do filtro de *Kalman* padrão aplicado na filtragem para avaliação da concentração de alumina no banho eletrolítico. Foi feita uma análise dos doze casos estudados em que o filtro apresentou comportamentos distintos para as variações das matrizes  $Q$  e  $R$ . A largura da banda do *FK-Padrão* também foi analisada sob o ponto de vista das variações nas matrizes de covariância, em que pode-se verificar a mudança no comportamento na banda de passagem do filtro, diminuindo ou aumentando, à medida em que a ordem de grandeza dos elementos das matrizes  $Q$  e  $R$  era modificada.

## CAPÍTULO 5

# O Filtro de Kalman em Tempo Real

---

A avaliação do algoritmo do filtro de *Kalman* Escalar, Capítulo 3, e o seu mecanismo de ajuste de ganhos, capítulo 4, é realizada em tempo real para fins de comparações com os filtros  $\alpha\beta\gamma$  e parabólico. As avaliações são realizadas em duas etapas distintas: implementação no computador de processos e teste laboratoriais.

Em uma primeira etapa, uma codificação em linguagem *C++* foi implantada no sistema de controle de processos, no intuito comparar o desempenho do filtro de *Kalman on line* com os filtros  $\alpha\beta\gamma$  e parabólico. Em uma segunda etapa, realizou-se testes químicos para apoiar a sintonia do filtro de *Kalman*. Estes testes são utilizados de forma regular na indústria de alumínio para avaliar a quantidade de  $Al_2O_3$  no banho eletrolítico e desta forma aferir os ganhos dos dispositivos destinados a avaliar grandezas do processo.

As etapas anteriores fazem parte dos aspectos práticos de uma implementação do filtro de *Kalman* em tempo real na indústria de alumínio. Os resultados destas etapas são apresentados e discutidos neste capítulo. Os comentários e conclusões estão fundamentadas na experiência de outros pesquisadores, tais como: (Chui 1991) e (Brown and Hwang 1992), que informam a respeito dos últimos desenvolvimentos teóricos relevantes e aplicações do filtro de *Kalman* em tempo real.

Na seção 5.1 apresenta-se o filtro de *Kalman* como um elemento do sistema de controle de alumina que está implementado em um computador de processo.

Em termos práticos, o objetivo é avaliar o ajuste do filtro de *Kalman* baseado na dualidade das matrizes  $Q$  e  $R$ . Estudar o comportamento do filtro de *Kalman* para estimação das variações da resistência no banho eletrolítico para fins de aferição numérica e uma análise comparativa com os filtros parabólicos e de estado  $\alpha\beta\gamma$ . Os resultados laboratoriais dos testes químicos, apresentados na seção 5.2, são utilizados para avaliar o desempenho das técnicas para concentração de  $Al_2O_3$ .

## 5.1 FK e o Computador de Processo

Para avaliar a robustez a perturbações interna e externa do filtro de *Kalman* implementou-se o algoritmo no computador de controle de processo das cubas eletrolíticas.

Entende-se por perturbações externas os problemas advindos dos processamentos dos sinais de tensão da cuba e alterações bruscas em parâmetros da planta que podem refletir na precisão do modelo. Por perturbações internas entende-se a concepção de regras para detecção de falhas e rotinas para o seu tratamento. Testes de desempenho foram implementados e a dinâmica do sistema foi avaliada para diversas condições de operação das células de produção. Objetivou-se verificar se o filtro de *Kalman*, sob condições normais de operação da célula produtora de alumínio sempre sujeita a perturbações e ruídos na medição, seria capaz de encontrar a melhor estimativa baseada na correção de cada medida individual.

Na subseção 5.1.1 apresenta-se os resultados e uma análise para um intervalo de amostragem de 1 segundo. Estes testes têm por objetivo estabelecer uma relação entre as variáveis do processo e a melhor constante de tempo para aquisição das medidas de tensão e de corrente. Os resultados são provenientes de uma implementação escalar em linguagem de programação C++ no computador de processo.

### 5.1.1 Resultados Experimentais

A metodologia de análise é constituída de três passos. No primeiro passo, um modelo no espaço de estado é construído para compor o estágio de predição da resistência, do *slope* e da curvatura. No nosso caso específico estamos interessados em um modelo que represente a dinâmica do sistema para condições normais de

operação e tenha a habilidade de prever um passo a frente. Após a predição, as variáveis de estado são corrigidas por uma ponderação aditiva dos valores medidos e suas estimativas, o ganho de *Kalman* executa está ponderação.

Os resultados foram obtidos a partir das medições na cuba 1050, para um período de 2 horas. Inicialmente apresenta-se a estimativa dos estados,

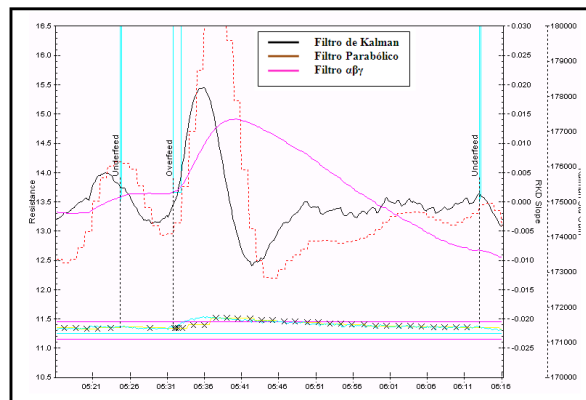


Figura 5.1: Medições do computador de processo - Cuba 1050 - 2 horas.

Na tabela 5.1 apresentação um histórico da da medição.

Tabela 5.1: Identificação da Medição.

Identificação da Medição	
Cuba	1050
Data	06/09/2006
Hora inicial	15:37:10
final	17:37:10

Este tipo de operação impõe um desempenho transitório rápido e um pequeno tempo de rastreamento. O crescimento de  $R$  implica um decréscimo da largura de banda, significa que o filtro possui um desempenho transitório lento e um tempo de rastreamento longo. A justificativa para normalização está fundamentada na relação entre as grandezas tensão e corrente que possuem uma variação em torno de  $10^{-5}$ .

$$R = \frac{V \times 10^0}{I \times 10^4} = \frac{V}{R} = 10^{-4}$$



Devemos ter no mínimo quatro dígitos para observarmos as variações na relação se quisermos garantir melhor precisão.

### 5.1.2 Estimativa dos Estados

As estimativas da resistência, do *slope* e da curvatura, figura 5.2, representam o comportamento dinâmico da cuba para intervalos de 1 segundo. Duas premissas são consideradas para estabelecer um padrão de reconhecimento para variações de concentração de alumina no banho. Primeiro, deve-se observar se a origem das variações da resistência estão relacionadas com as variações de corrente ou de tensão que devem ser associadas com as variações da concentração de alumina. Segundo, outras grandezas inerentes ao processo (bolhas, etc), que estão relacionadas com a estabilidade do banho, também estão envolvidas no processo, e estes fenômenos são considerados como fontes de sinais espúrios. Os ganhos Kalman associados como a estimativas da resistência, *slope* e curvatura são  $K_1 = 2.93110^{-3}$ ,  $K_2 = 4.010^{-6}$  e  $K_3 \approx 0$ , respectivamente.

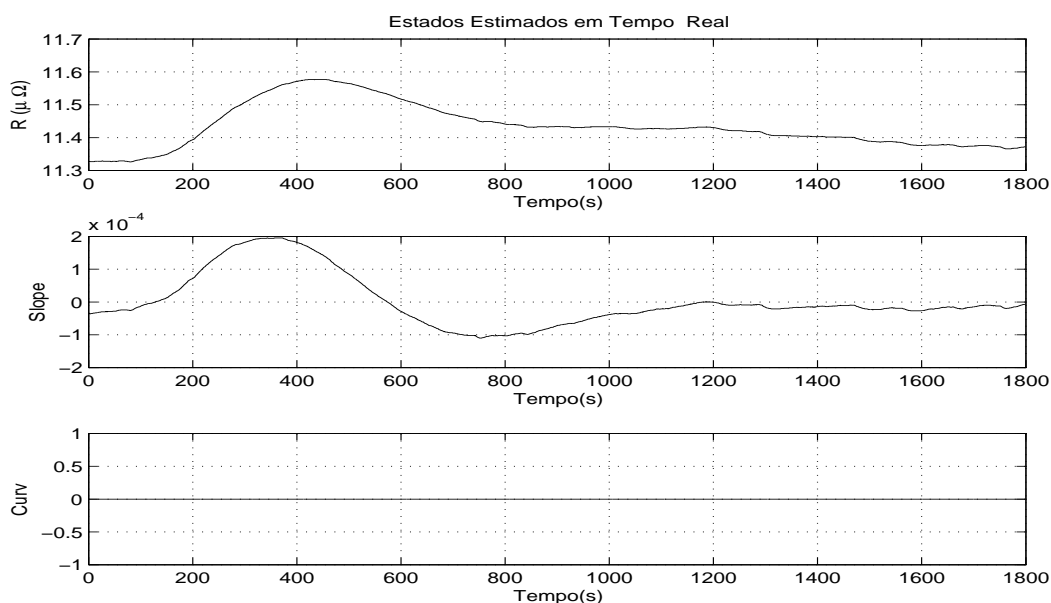


Figura 5.2: Estimativas Filtradas do FK em Tempo Real.

### 5.1.3 Análise Comparativa

Os parâmetros de sintonia dos testes *off-line* são implementados para um intervalo de tempo. Conseqüentemente, estima-se no computador de processos as variáveis de estado para três filtros parabólico,  $\alpha\beta\gamma$  e *Kalman* padrão. As estimativas são comparadas com os valores estimados em tempo real pelo computador de processos, em sincronia com o intervalo de amostragem, conforme mostra-se na figura 5.3.

As frequências das faixas selecionadas devem representar a quantidade de alumina no banho. Nos próximos parágrafos apresenta-se uma avaliação destas matrizes no sentido de encontrar um procedimento de ajuste fundamentado no princípio da dualidade do ganho, equação (4.7), e no processamento *off-line* do FKP com o processamento realizado *on line* por filtros do tipo  $\alpha\beta\gamma$  e parabólico.

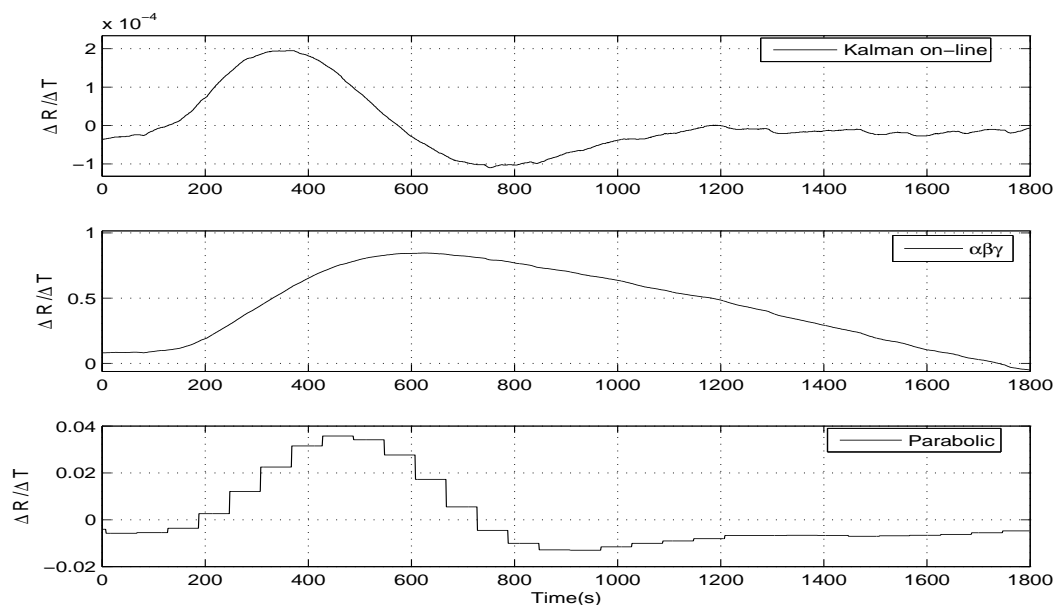


Figura 5.3: Filtros - FK Escalar e Padrão On Line , $\alpha\beta\gamma$  e Parabólico

### 5.1.4 Momentos Estatísticos

O comportamento das medições em torno *target* são apresentadas na figura 4.2, e estão relacionadas com os momentos estatísticos de primeira e de segunda ordem.

## 5.2 Medição e Análise de $\%Al_2O_3$ em Laboratório

Esta seção é dedicada a apresentação e comentários dos testes realizados para avaliar a quantidade de  $Al_2O_3$  no banho por meio de testes em laboratório. Este testes foram realizados com o equipamento *LECO*, e as características técnicas deste equipamento encontra-se no Apêndice A.

Os ítems seguintes apresentam uma comparação entre as concentrações de alumina medidas e as concentrações estimadas de forma indireta, isto é, pelos filtros implantados no computador de processos. Para a análise estatística usaremos a análise de regressão. O propósito de utilizar-se a análise de regressão é prever o comportamento de uma variável dependente, no caso *slope* resistivo *Kalman*, em relação a uma variável resposta, no caso a variação do percentual da alumina no banho; em outras palavras, com a análise de regressão mede-se a força de associação entre essas duas variáveis. Maiores detalhes sobre o planejamento experimental da pesquisa é referenciado no Apêndice B.

### 5.2.1 Percentual de Alumina X Resistência Elétrica

As cubas 2006 e 2058 mostraram a dependência entre a quantidade de alumina no banho e a resistência elétrica da cuba, figuras 5.4 e 5.5, provando, como esperado, que a menor quantidade de alumina no banho tende a aumentar a tensão da cuba e conseqüentemente a resistência elétrica.

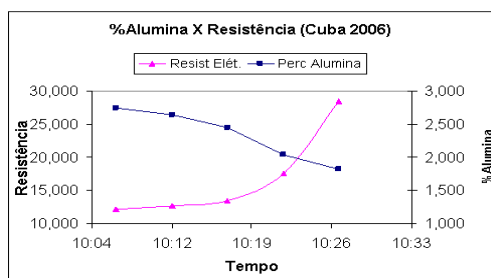


Figura 5.4: Cuba 2006  
Filtro Parabólico

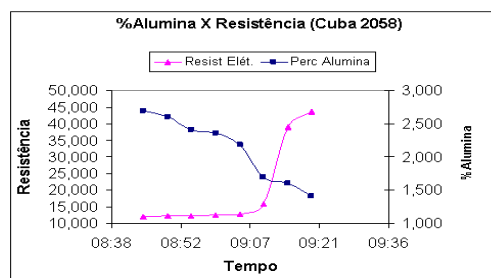


Figura 5.5: Cuba 2058  
Filtro  $\alpha\beta\gamma$

Como a alimentação de alumina foi mantida desligada durante todo o período de amostragem constatamos sempre uma relação indiretamente proporcional entre a quantidade de alumina no banho e a resistência elétrica da cuba. Essa relação é indireta porque à medida que a quantidade de alumina no banho diminui tem-se uma menor quantidade de alumina para realizar o processo de eletrólise (produção de alumínio). Pouca quantidade de alumina se traduz em pouca quantidade de oxigênio, resultando em pouca quantidade gerada de gás CO<sub>2</sub>. O processo passa então a reagir com o fluor do banho eletrolítico o que leva a criação de uma camada de gás CF<sub>4</sub> na superfície anódica(entre o anodo e o banho) dificultando a passagem de corrente elétrica e aumentando a tensão (resistência) da cuba.

Na cubas escolhidas para teste (2006 e 2058) o valor do *slope* resistivo *Kalman* apresentou boa correlação com o percentual de alumina no banho. Ao longo do tempo de amostragem de alumina do banho eletrolítico houve períodos de variação considerável na corrente da linha mas apesar disso o *slope* não sofreu alterações abruptas, permanecendo dentro da faixa de variação esperada, isto é, as saídas estimadas em nenhum momento foram afetadas pelas flutuações de corrente. A técnica de subalimentar a cuba até o atingimento do efeito anódico permitiu que a representatividade do filtro fosse comprovada para situações de elevação extrema da tensão da célula de produção.

### 5.2.2 Cuba 2006 - Análise de Desempenho

Na cuba 2006, o comportamento do *slope* resistivo *Kalman*, figura 5.6, representou muito bem a variação esperada da resistência quando a alimentação de alumina foi desligada. As variações no *slope* acompanharam o aumento da resistência, e essas variações foram causadas pela diminuição do percentual de alumina no banho eletrolítico.

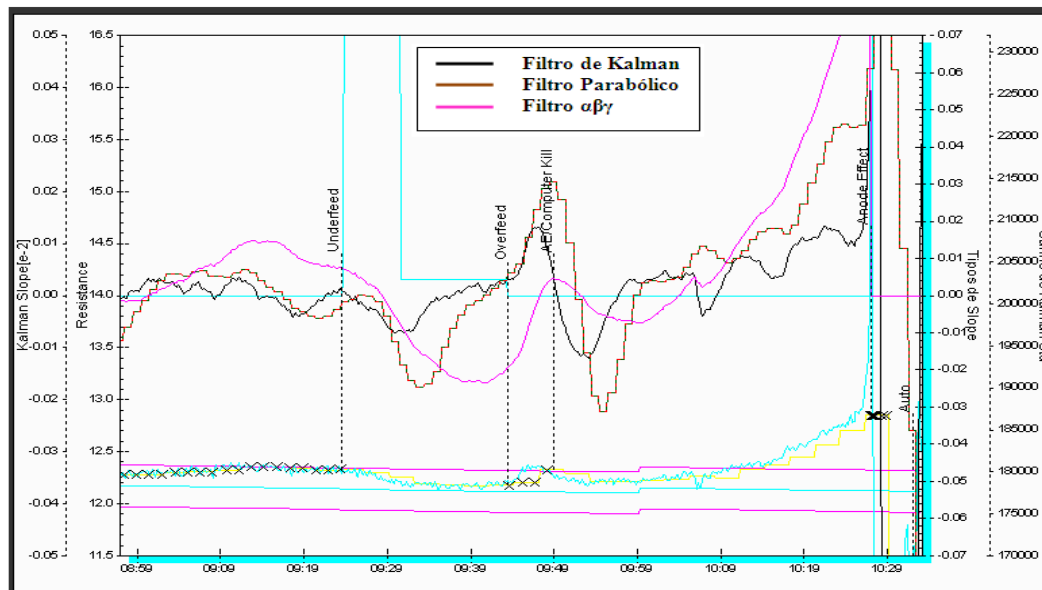


Figura 5.6: Cuba 2006 - Comportamento em Tempo Real dos Filtros.

A análise estatística da cuba 2006, figura 5.7, mostrou excelente correlação (95,64%) entre a concentração de alumina e o *slope Kalman*. Foram feitas cinco amostras de alumina durante o teste, com um intervalo de amostragem de cinco minutos, até a ocorrência de efeito anódico. O comportamento da curva é bastante similar ao que vimos na figura 2.4 do Capítulo 2.

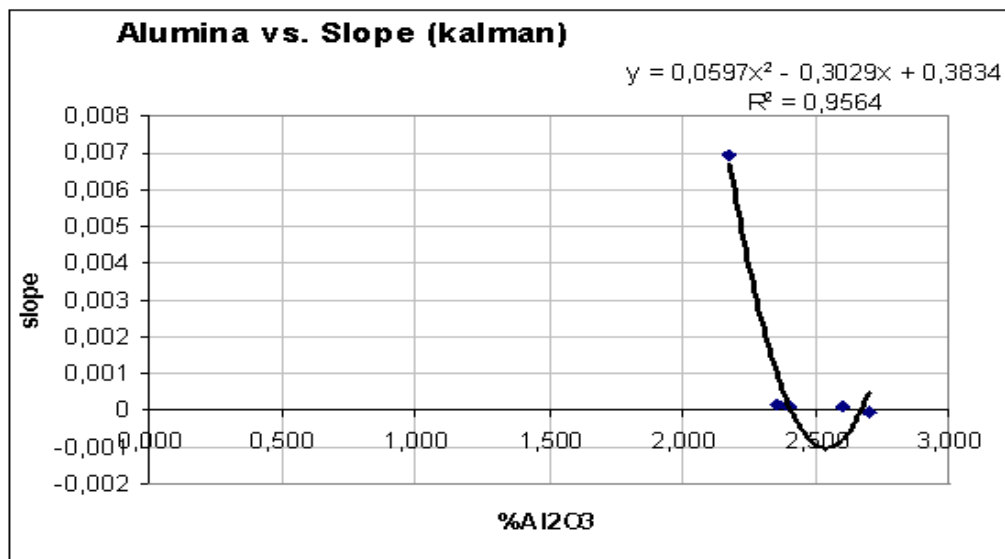


Figura 5.7: Cuba 2006 - Progressão do Slope Kalman durante período de subalimentação de alumina.

Por sua vez o *slope* do filtro Parabólico, figura 5.8, e o *slope* do filtro  $\alpha\beta\gamma$ , figura 5.9, obtiveram uma correlação com o percentual de alumina de 89,64% e 91,21%, respectivamente, portanto, menores que a correlação conseguida pelo filtro de *Kalman*.

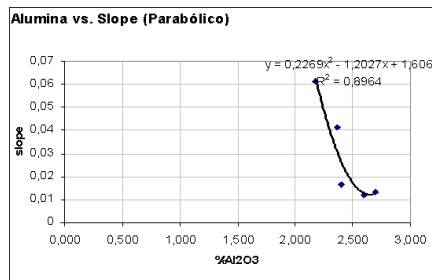


Figura 5.8: Cuba 2006  
Filtro Parabólico.

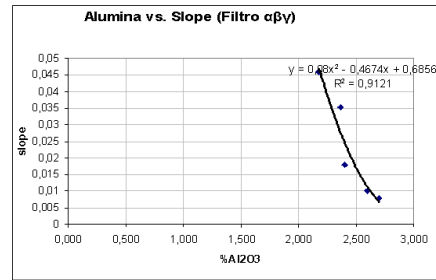


Figura 5.9: Cuba 2006  
Filtro  $\alpha\beta\gamma$ .

### 5.2.3 Cuba 2058 - Análise de Desempenho

Na cuba 2058, a progressão do *slope* resistivo *Kalman* teve o mesmo comportamento que os demais *slopes* de comparação, figura 5.10, com a mesma tendência de subida durante a fase de pouca alumina (*sub-alimentação*).

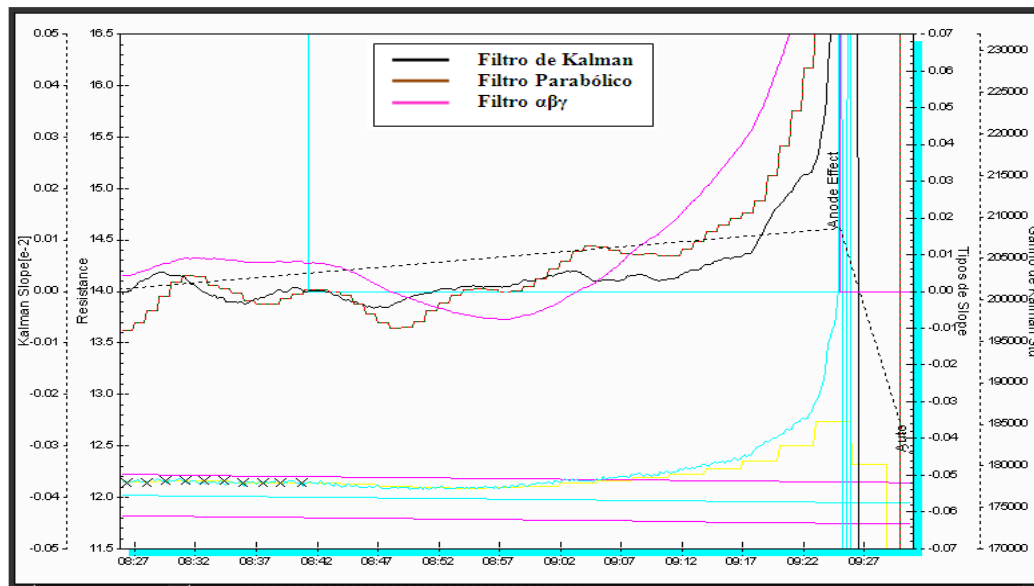


Figura 5.10: Cuba 2058 - Comportamento em Tempo Real dos Filtros.

Para a cuba 2058 foram retiradas oito amostras de alumina, com intervalo de amostragem de cinco minutos, até que a cuba entrasse na condição de efeito anódico. Na figura 5.11, o *slope* de *Kalman* obteve uma correlação com o percentual de alumina de 76,54%.



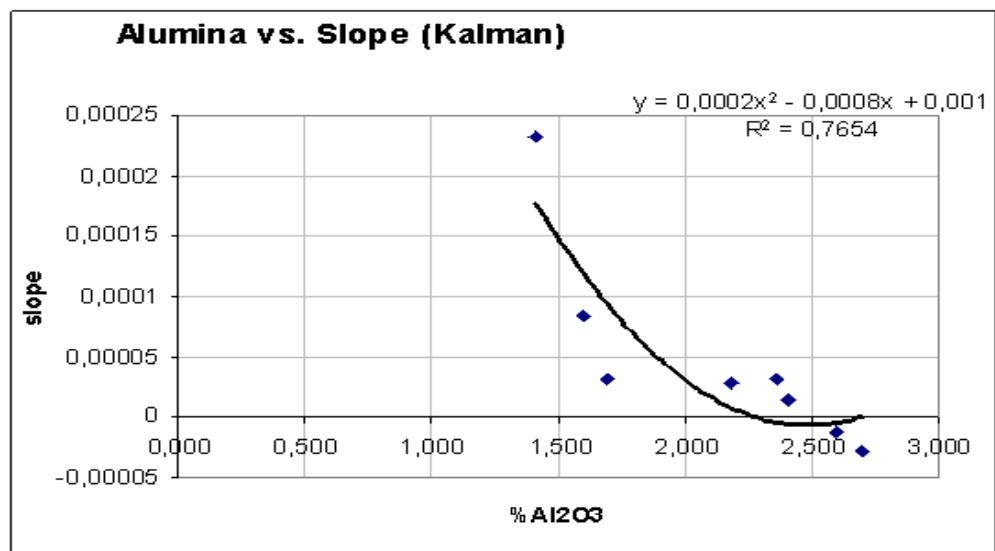


Figura 5.11: Cuba 2058 - Progressão do Slope Kalman durante período de subalimentação de alumina.

Em comparação com o *slope* do filtro Parabólico que obteve uma correlação de 82%, figura 5.12, e com o *slope* do filtro  $\alpha\beta\gamma$ , cuja correlação foi de 96,18%, figura 5.13, podemos afirmar que os referidos filtros representaram melhor o percentual de alumina no banho que o *slope* do filtro *Kalman*.

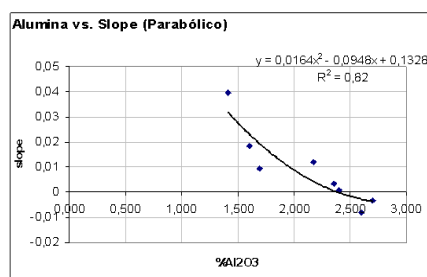


Figura 5.12: Cuba 2058  
Slope Parabólico.

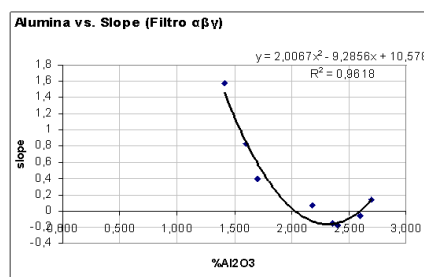


Figura 5.13: Cuba 2058  
Slope  $\alpha\beta\gamma$ .

A diferença na representatividade nas duas cubas de testes podem estar relacionadas à individualidade de cada cuba. Embora sejam células de produção estáveis e, portanto, elegíveis para o controle automático do computador de processo, essas cubas possuem particularidades importantes entre elas: níveis de líquidos diferentes, temperatura do banho eletrolítico, tensão-alvo diferentes, taxas de alimentação de alumina diferentes. Esses parâmetros impactam diretamente na dissolução da alumina no banho. Por outro lado, os algoritmos dos filtros de *Kalman*,  $\alpha\beta\gamma$  e Parabólico, não mapeiam essas diferenças, dando o mesmo tratamento para todas as cubas.

O algoritmo dos filtros de comparação (*slope*,  $\alpha\beta\gamma$  e Parabólico) já se encontram ajustados em relação ao *slope Kalman* pois já incorporam uma série de casos (tais como reset do algoritmo de controle após movimentação do barramento anódico e após variação grande na corrente da linha) nos quais as variáveis desses filtro são reinicializadas. O *slope* resistivo *Kalman* é padrão e não incorporou-se nenhum tipo de tratamento (reset do filtro) para suas variáveis. O objetivo do teste foi verificar a representatividade do *slope Kalman* padrão em relação ao percentual de alumina no banho.

Considerando as duas cubas de teste, acerto médio do filtro *Kalman* foi de 86,09%, considerado muito bom para processos industriais. A nível de controle de processo podemos afirmar, com base nos resultados das duas cubas de teste, que o *slope Kalman*, mesmo sem incorporar nenhum tratamento específico, é capaz

de processar o ajuste da alimentação de alumina até que esta atinja o seu nível ótimo, em torno de 3% no banho eletrolítico. Contudo, ele se fará mais eficaz e eficiente naquelas cubas onde os parâmetros não controláveis pelo computador de processo estejam menos sujeitos a variações no tempo.

### 5.3 Conclusão

A realização de testes on-line em duas células de produção mostrou que o filtro de *Kalman* é muito representativo para o percentual de alumina no banho. O nível de representatividade do filtro, comprovada nos testes indica que a utilização do filtro para controle do percentual de alumina no banho é capaz de deixar a cuba limpa, operando com a taxa ideal de alumina de 3%. Os testes estatísticos mostraram que o filtro de *Kalman* Padrão pode ser usado na ação de controle, que está relacionada com decisão de deixar a cuba mais rica ou mais pobre em alumina, seguindo a estratégia desejada pelo pessoal de operação e de controle de processo em deixar a cuba mais ou menos tempo na fase de *sub-alimentação* e na fase de *super-alimentação*. O tempo que a cuba passa na fase de *sub-alimentação* pode ser usado para que o pessoal de operação ajuste a taxa base de alimentação da cuba. Cubas que ficam na fase de *sub-alimentação* por pouco tempo indicam que o processo de eletrólise está precisando de alumina e, portanto, que existe um alto risco de ocorrência de efeito-anódico, devendo a taxa base de alimentação ser ajustada para que o computador adicione mais alumina na cuba. Analogamente, cubas que permanecem longo tempo na fase de *sub-alimentação* indicam que o banho eletrolítico está saturado de alumina e que, portanto, precisa-se que a taxa base de alimentação seja ajustada para evitar adicionar mais alumina no banho eletrolítico afim de evitar a formação de lama na base do catodo.

Da mesma forma o uso on-line do filtro no controle propicia a ação de monitoramento, que está relacionada a sinalizações (sem outra ação do computador) para a equipe de controle processo e de operação a respeito da quantidade de alumina na célula de produção. O nível de representatividade do filtro poderá ser aumentado via aumento da observabilidade de certas variáveis de estado que estão escondidas sob o ponto de vista do observador.

## CAPÍTULO 6

# Conclusão

---

Apresentamos um método de sintonia para filtro de *Kalman*, baseado no princípio da dualidade  $QR$  e heurísticas, para a detecção da variação da alumina no banho eletrolítico em células produtoras de alumínio. A principal idéia em utilizar o conceito de observadores de estado foi substituir medidores convencionais de alumina por um algoritmo de controle baseado em hardware e software, como também deixar em aberto a estimação dos estados e a entrada para futuras aplicações de controle ótimo.

A partir de algumas opções possíveis de ajuste das referidas matrizes formulou-se heurísticas baseadas em procedimentos operacionais, já consolidados para a sintonia de filtros  $\alpha\beta\gamma$  e parabólico. O objetivo da estratégia de ajuste dos ganhos, via manipulação das matrizes  $Q$  e  $R$ , foi observar, em última análise, os seus efeitos na resistência estimada, testando assim a sensibilidade do filtro *Kalman* em relação a variação do percentual de alumina no banho. Nesse sentido, os valores da matriz  $R$  foram mantidos constantes e variou-se os valores da matriz de covariância  $Q$ . As variações foram associadas com a largura de banda do filtro de *Kalman* e sua estabilidade.

O desempenho do filtro de *Kalman* escalar quando comparado com os filtros já amplamente utilizados, do tipo ( $\alpha\beta\gamma$  e Parabólico), mostrou algumas vantagens, a saber: o filtro de *Kalman* mostrou ter um tempo de resposta muito menor que os demais filtros. Essa peculiaridade permite que o computador de controle de processo possa atuar mais rapidamente na célula de produção afim de evitar situações críticas como a ocorrência de efeito anódico. De maneira análoga, a

menor rapidez na resposta pode evitar que a cuba permaneça maior tempo em fase de *super-alimentação*, o que causaria precipitação de quantidade de alumina não dissolvida no fundo da cuba.

Situações de efeito anódico(falta de alumina) e de *super-alimentação* são bastante prejudiciais para a eficiência de corrente da cuba. O propósito do sistema de controle é manter o percentual da cuba o mais baixo possível, mantendo a cuba limpa, sem excessos de alumina mas longe da possibilidade de ocorrência de efeitos anódico. Nesse sentido, a resposta mais rápida do filtro de *Kalman* em relação aos demais filtros proporciona ao engenheiro de processo e ao pessoal de operação ajustar os parâmetros de controle (como taxa de alimentação base da cuba) de forma adequada.

O filtro de *Kalman* mostrou-se muito mais robusto quando na ocorrência de variações de corrente da linha de cubas. Os valores de *slope*, de resistência predita e curvatura não sofreram alterações bruscas. Em algumas situações o *slope* Parabólico apresentou *outliers* que levariam o computador de processo a tomar decisões erradas em relação a alimentação de alumina na célula produtora.

Particularmente, no controle de processo de produção de alumínio muitas outras variáveis de estado podem ser consideradas no modelo de filtro para predição do percentual de alumina no banho, tais como, granulometria e qualidade da alumina, *ratio* do banho, temperatura da cuba, nível dos líquidos dentro da cuba, distância anodo-catodo, entre outros. Portanto, é muito difícil encontrar um modelo ideal para inferir o percentual de alumina no banho sem que se mapeie todas essas incertezas (variáveis). Vale ainda ressaltar que diferença entre as saídas medidas e estimadas, ou seja, o ganho de *Kalman*, é uma estimacão do erro. Sob ponto de vista de controle, portanto, a inovacão calculada através do ganho não é por si só suficiente para garantir uma estimacão robusta quando a dinâmica do sistema está sujeita a variações incertas, como as descritas acima. O resultado disso é que o filtro de *Kalman* padrão poderá produzir saídas tendenciosas.

Para aumentar a robustez da predição algumas melhorias podem ser aplicadas. Um melhor ajuste das matrizes Q e R poderá ser obtido através da inclusão de algoritmos genéticos, assim como pela utilização de redes neurais para resolver a equação de *Riccati* quando temos múltiplas variáveis estocásticas de estado.

# Referências Bibliográficas

- Astrom, J. and B. Wittenmark (1989). *Adaptive Control*. Addison Wesley.
- Barros, Jonas de Jesus (2005). State space estimation of the sonda rockets impact points. (estimação no espaço de estado do ponto de impacto de foguetes. Master thesis in portuguese- dissertação de mestrado. Universidade Federal do Maranhão. São Luís-MA-Brasil.
- Batista, Eliézer Santos (2002). Statistic model to determine the best alumina feed control for alumar's reduction cell. Post graduation thesis in portuguese- pós-graduação. Universidade Estadual do Maranhão. São Luís-MA-Brasil.
- Boillereaux, Lionel and Jean-Marie Flaus (2000). A new approach for designing model-based indirect sensors. *IEEE* pp. 601–608.
- Bozic, Svetovar Mile (1984). *Digital and Kalman Filtering*. 1st ed.. Edward Arnold. London.
- Braga, Carlos A (2003). Processo de controle de alumina no banho. Technical report. UFMA. Av dos Portugueses - São Luís -MA.
- Braga, Carlos A., João V. da Fonseca Neto and Nilton Nagem Freixo (2007a). Bandwidth adjustment of digital kalman filter for indirect measurement of electrolytic bath state variables. *2nd International Conference on Sensing Technology*.
- Braga, Carlos, Nilton Freixo Nagem, Ari Silva, Mark Verlihay, Stephen Martin and Christopher Ritter (2007b). Faster anode effect kill. *TMS - The Minerals, Metals & Materials Society*.

- Brown, Robert Grover and Patrick Y.C. Hwang (1992). *Introduction to Random Signal and Applied Kalman Filtering*. 2nd ed.. John Willey and Sons. USA.
- Burkin, A.R. (1987). *Production of Aluminium and Alumina*. Society of Chemical Industry. London-England.
- Chui, Guanrong Chen; Charles K. (1991). A modified adaptative kalman filter for real-time applications. IEEE 06. IEEE.
- de Mello Almeida, Felipe (2005). Identificação multivariável de um processo de incineração de resíduos líquidos utilizando modelos nebulosos taka-gi-sugeno.. Master's thesis. Orientador: Gilmar Barreto. UNICAMP - Depto. Máquinas Componentes e Sistemas Inteligentes.
- Ferreira, Carlos C. T. and J. V. Fonseca Neto (2003). Projeto do Filtro de Kalman via Alocação de Autoestrutura e Algoritmo Genético. *VI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*.
- Ferreira, Carlos C. T., João. V. Fonseca Neto and F. A. Torrico (2003). Alocação de autoestrutura via controle lqg/ltr e computação evolutiva. *VI Simpósio brasileiro de Automação Inteligente*.
- Fiona, Stevens McFaden; Geoffrey P. Bearne, Paul C. Austin Barry J. Welch (2001). Application of advanced process control to aluminium reduction cell - a review. p. 1233.
- Fonseca Neto, João Viana da (2003). *An Inequalities Method for Multivariable System's Eigenstructure Assignment via Genetic Multi-Objective Optimization*. 2003 American Control Conference. Denver-Colorado.
- Gene F Franklin, J. David Powell and Abbas Emami-Naeini (1994). *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley Publishing Company. Menlo Park, California.
- Goodwin, Maria M.Seron; Julio H. Braslavsky; Graham C. (1997). *Fundamental Limitations in Filtering and Control*. first ed.. Springer Verlag. USA. PDF version, february 2,2004.

- Haverkamp, Richard Gerard and Barry John Welch (2000). Measurement of alumina in reduction pots - us patent issued on january 4 - 2000. *Assignee - Auckland Uniservices Limited. US-Patent - No. 29653 filed on 1998-04-14.*
- Pasupathy, Geraldo Noriega; Subbarayan (1997). Adaptative estimation of noise covariance matrices in real-time preprocessing of geophysical data. *IEEE* 05. *IEEE*.
- Silva, Ari (1995). Alumina feed control system of line 1 and line 2 potrooms at alumar. *ABAL - Associação Brasileira de Alumínio.*
- Silva, Ari, Carlos Braga and Eliezer Batista (2002). Smelter personnel technical training on aluminum production. *ALUMAR - Consórcio de Alumínio do Maranhão.*
- Smith, Anton, Antonello Monti and Ferdinanda Ponci (2006). Indirect measurements via a polynomial chaos observer. *IEEE* pp. 601–608.
- Sorenson (2000). Kalman filtering from gauss to kalman. *IEEE* pp. 000–000.
- Tarcy, Gary, Jerry Stepheson and Stephen Martin (2002). *QLC User's Manual*. 2002 Alcoa Publication. Pittsburg-Pensilvania.
- Yeh, Hen-Geul (1990). Real-time implementation of a narrow-band kalman filter with a floating-point processor dsp-32. *IEEE Transaction on Industrial Electronics* **31**(9), 13–18.



## APÊNDICE A

# Planejamento de Amostragem e de Análise

---

### MATERIAIS E MÉTODOS

Para a análise estatística usaremos a análise de regressão. O planejamento experimental consiste em:

- a) Seleccionadas duas cubas eletrolíticas aleatórias (cubas 2006 e 2058).
- b) A alimentação das cubas foram desligadas via computador de processo.
- c) A coleta dos dados de tensão da cuba, corrente da linha, resistência ôhmica e slope foram realizados automaticamente no computador de processo, com frequência amostral de 200 milisegundos.
- d) Coleta manual de dados de alumina: estabelecidos os critérios para amostragem do banho eletrolítico para análise do percentual de alumina, a qual foi feita através do equipamento Leco para Oxigênio. O momento para início da amostragem é quando a alimentação da cuba é desligada. O intervalo de amostragem do banho foi de 5 minutos, até atingimento da condição de EA.
- e) Uma única pessoa foi utilizada para coletar e analisar as amostras de banho eletrolítico, a qual seguiu os procedimentos padrões do equipamento.
- f) As análises estatísticas foram executadas através do Microsoft Excell.

## ANÁLISE DE REGRESSÃO

A análise de regressão é utilizada principalmente com o objetivo de previsão. O propósito é o desenvolvimento de um modelo estatístico que possa ser utilizado para prever os valores de uma variável dependente ou variável de resposta, com base nos valores de pelo menos uma variável independente ou explicativa. O objetivo de qualquer modelo é tentar explicar a natureza de um fenômeno, ou de um processo. O que a análise de regressão faz é tentar obter um modelo quantitativo que possa prever a resposta de um processo quando se alteram as entradas. Desta forma, a regressão pode ser simples ou múltipla. Chama-se simples quando se utiliza apenas uma variável independente e múltipla quando é usado mais de uma.

Na análise de regressão é fundamental medir a força de associação entre as variáveis, a qual é feita através da análise de correlação. De maneira geral, a análise de regressão pode ser utilizada com vários objetivos, dentre os quais é possível destacar:

- *descrição*: em muitas situações será desejável utilizar uma equação para sumarizar ou descrever um conjunto de dados. A análise de regressão pode ser empregada para ajustar uma equação deste tipo;
- *predição*: muitas aplicações da análise de regressão envolvem a predição de valores da variável de interesse. Com as informações obtidas pode-se alterar planejamento e o rumo de ações;
- *controle*: A análise de regressão também é muito utilizada com o objetivo de controlar a variável de interesse em faixas de valores pré-fixados. Com a equação pode-se determinar a natureza dos ajustes a serem realizados, para que o controle não seja perdido;
- *estimação*: A análise de regressão algumas vezes também é utilizada para estimar parâmetros desconhecidos de equações teóricas que representam o relacionamento entre variáveis de interesse.

Em grande parte das situações encontradas na prática, a análise de regressão é utilizada para atender simultaneamente a mais de um dos objetivos citados acima.

## REGRESSÃO LINEAR SIMPLES

Dado um conjunto de valores observados de  $X$  e  $Y$ , construir um modelo de regressão consiste em obter, a partir desses valores, uma reta que melhor represente a relação verdadeira entre essas variáveis.

Este é o caso mais simples da regressão, pois envolve apenas duas variáveis (uma dependente e outra independente). Este modelo pode ser expresso pela equação A.1 como sendo :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \quad (\text{A.1})$$

Onde:

$\beta_0$ : interseção de  $Y$  para a população;

$\beta_1$ : inclinação para a população;

$\varepsilon_i$ : erro aleatório em  $Y$  para a observação  $i$ .

Neste modelo, a inclinação da linha 1 representa a variação esperada em  $Y$  (positiva ou negativamente) para uma determinada variação unitária em  $X$ . A interseção de  $Y$  0 representa o valor médio de  $Y$  quando  $X$  é igual a 0. O último componente do modelo  $i$ , representa o erro aleatório em  $Y$ , para cada observação  $i$  que ocorra.

Como os parâmetros  $\beta_0$  e  $\beta_1$  são desconhecidos, será necessário estimá-los por meio do emprego de dados amostrais. Para que seja possível obter boas estimativas para eles e também dar uma interpretação prática a estes parâmetros, usualmente são associadas algumas suposições ao modelo de regressão linear simples apresentado na equação. Tais suposições estão descritas abaixo:

- a) Os erros têm média zero e a mesma variância desconhecida  $\sigma^2$ .
- b) Os erros são não correlacionados, ou seja, o valor de um erro não depende de qualquer outro erro.
- c) A variável explicativa  $x$  é controlada pelo experimentador e é medida com erro desprezível (erro não significativo do ponto de vista prático), ou seja, não é uma variável aleatória.
- d) Os erros têm distribuição normal.

Com relação ao que foi dito acima algumas observações devem ser feitas: Do ponto de vista prático, apenas em raras situações a suposição (c) citada acima é completamente verdadeira. No entanto, iremos assumir que esta suposição é válida naqueles casos em que qualquer variação aleatória na variável preditora é tão pequena em relação à faixa de valores que esta ela pode assumir no estudo considerado, que a variação aleatória pode ser ignorada. É importante destacar que a variação aleatória na variável preditora pode ser provocada, dentre outras causas, por erros de medida e pela influência de outras variáveis que afetam o processo de interesse. Como exemplo, considere que a variável preditora seja a temperatura de um forno elétrico, a qual variará no experimento na faixa de 300 a 600°C. Suponha também que, em determinado ensaio, seja fixada a temperatura de 400°C. Na prática a temperatura não ficará exatamente neste valor devido a pequenas variações na voltagem da energia elétrica fornecida ao forno e a possíveis problemas na regulação do termostato do forno. No entanto, se as variações na temperatura provocadas por estes fatores forem da ordem de 5°C, por exemplo, estas variações poderão ser desprezadas, já que elas são muito pequenas em relação à faixa de valores que a temperatura pode assumir no experimento, que neste caso é igual a 300°C. Mas é claro que avaliações deste tipo irão depender das características do estudo que está sendo realizado.

Como a variável resposta  $y$  é função do erro  $\varepsilon$ , que é a única variável aleatória na expressão  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ ,  $y$  também será uma variável aleatória. Isto é, existe uma distribuição de probabilidades para  $y$  em cada valor fixado de  $x$ .

## APÊNDICE B

### **Leco**

---