Universidade Federal do Maranhão Centro de Ciências Exatas e Tecnologia Programa de Pós-Graduação em Física

Josberg Silva Rodrigues

Acoplamentos não mínimos em átomos mesônicos e termos de derivada superior na eletrodinâmica de Maxwell

São Luís, Agosto de 2020

Josberg Silva Rodrigues

Acoplamentos não mínimos em átomos mesônicos e termos de derivada superior na eletrodinâmica de Maxwell

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes

Co-Orientador: Prof. Dr. Frederico Elias Passos dos Santos

São Luís, Agosto de 2020

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a). Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

```
Silva Rodrigues, Josberg.
   Acoplamentos não minímos em átomos mesônicos e termos
de derivada superior na eletrodinâmica de Maxwell/
Josberg Silva Rodrigues. - 2020.
  96 f.
   Coorientador(a): Frederico Elias Passos dos Santos Santos.
   Orientador(a): Rodolfo Alván Casana Sifuentes.
  Tese (Doutorado) - Programa de Pós-graduação em
Física/CCET, Universidade Federal do Maranhão, São Luís -
MA, 2020.
   1. Átomos Mesônicos. 2. Eletrodinâmica com derivada
Superior . 3. Eletrodinâmica Quântica Escalar. 4.
                                                     Quebra
da Simetria de Lorentz. I. Casana Sifuentes, Rodolfo
 Alvan.II. Passos dos Santos Santos, Frederico Elias.
                                                      III. Título.
```

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como um dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Física.

São Luís, Agosto de 2020.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito - UFCG

Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Junior - UFMA

Prof. Dr. Marco Schreck - UFMA

Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante - UFC

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes - UFMA (Orientador)

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais Joaquim Rodrigues e Maria do Socorro, aos meus irmãos e irmãs, ao filho José Guilherme pelo apoio e amor pleno.

Ao Prof. Dr. Rodolfo Alvan Casana Sifuentes pela orientação e pela pacência.

Ao Prof. Dr. Frederico Elias Passos dos Santos, pela coorientação.

Um agradecimento especial vai para Luisa pela paciência na revisão gramatical.

Aos amigos e colegas, Francisco, Johel, Marcos, Luís, Adriano, Roclilson, Fred, David, Giovando e a todos os colegas do grupo de física de partículas e campos.

À Lucimary e Angra, sempre gentis e atenciosas na coordenação.

Aos professores da pós- graduação e do departamento de física pelos ensinamentos, agradeço aos professores da banca examinadora pelas observações e sugestões da tese, ao professor Manoel M. Ferreira Junior sempre combatente na defesa da ciência, educação e democracia do país.

À CAPES pelo apoio financeiro e à Universidade Federal do Maranhão.

Resumo

A tese é dedicada ao estudo dos efeitos da violação da simetria de Lorentz em duas situações: A primeira em átomos mesônicos com o intuito de encontrar limites superiores para os parâmetros da quebra. O segundo estudo teve em vista analisar a estrutura canônica e as relações de dispersão da eletrodinâmica de Maxwell modificada por termos de derivada superior que suportam os efeitos da quebra. O primeiro objetivo foi atingido utilizando a eletrodinâmica quântica escalar (SQED) com acoplamentos não-mínimos aplicada ao sistema próton-méson. Para calcular os limites superiores foram usados os dados experimentais obtidos para os átomos piônico e kaônico. Na segunda proposta investigou-se a estrutura canônica de uma eletrodinâmica CPT-par que é composta pelo termo de Maxwell e um termo com derivadas superiores que contém um tensor (constante) de segunda ordem que quebra a simetria de Lorentz. Esta eletrodinâmica reproduz a de Podolsky quando o tensor for igual a métrica de Minkowski. A análise foi realizada escolhendo algumas configurações convenientes do tensor portador da quebra de Lorentz.

Palavras Chave: Quebra da simetria de Lorentz, eletrodinâmica quântica escalar, átomos mesônicos, eletrodinâmica com derivadas superiores.

Abstract

The thesis is devoted to the study of the effects of the Lorentz symmetry violation in two cases: The first one is realized in mesonic atoms with the aim to find upper-bounds for the Lorentz-violating parameters. The second case the canonical structure and the dispersion relations of Maxwell electrodynamics modified by a higher-derivative term. The first objective is achieved using scalar quantum electrodynamics (SQED) with Lorentz-violating nonminimal couplings applied to the proton-meson system. To find the upper-bounds we use data obtained from measurements in the pionic and/or kaonic atoms. In the second task we investigated the canonical structure of CPT-even electrodynamics composed the Maxwell term and a higherderivative term by a tensor. This electrodynamics recovers the Podolsky electrodynamics when the tensor Minkowski metric. The analysis is performed by choosing some convenient configurations for the Lorentz-violating tensor.

Keywords: Lorentz symmetry violation, scalar quantum electrodynamics, mesonic atoms, higher-derivative electrodynamics.

Sumário

Sι	Sumário				
1	Intr	oduçã	0	1	
2	Campo escalar complexo e átomos mesônicos				
	2.1	Camp	o de Klein-Gordon	8	
		2.1.1	Campo escalar neutro	8	
		2.1.2	Campo escalar complexo	8	
		2.1.3	O limite não relativístico do campo escalar complexo $\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots$	9	
	2.2	O can	npo escalar complexo e o acoplamento mínimo	11	
	2.3	Limite	e não relativístico da SQED	12	
		2.3.1	Aplicação da equação de Klein Gordon: átomos mesônicos	14	
	2.4	Polari	zação do vácuo na SQED	15	
		2.4.1	Polarização do vácuo a 1-loop	17	
3	A SQED com acoplamentos não mínimos: contribuição em átomos mesônicos 2				
	3.1	O mo	delo	20	
	3.2	3.2 O Limite não relativístico e sua contribuição para os átomos mesônicos			
		3.2.1	Contribuição do setor CPT-ímpar	22	
		3.2.2	Contribuição do setor CPT-par	25	
		3.2.3	A contribuição do próton	26	
	3.3	Contri	ibuições a 1- <i>loop</i> para a ação efetiva do fóton	29	
		3.3.1	Polarização do vácuo a 1-loop	30	
		3.3.2	Limite superior para o acoplamento $(g\vec{u}_{(w)})$	31	
		3.3.3	Limite superior para o acoplamento $\left(\tilde{g}l_{(k)}^{\mu\beta\alpha\nu}\right)$	32	
4	Elet	rodiná	àmica de Podolsky	34	
	1 1	Estant	une conômico de eletredinômico de Dedelelur	36	

	4.2 Equações de movimento e condições de fixação de calibre				
		4.2.1 Condições de calibre		40	
		4.2.2 Parênteses de Dirac		42	
	4.3 Amplitude de transição vácuo-vácuo				
		4.3.1 Cálculo da AVV no calibre de Lorenz generalizado		47	
		4.3.2 Cálculo da AVV no calibre de Lorenz		48	
5	A eletrodinâmica CPT-par possuindo termos de derivadas de ordem superior				
	5.1	$0 \operatorname{caso} d_{00} \neq 0 e d_{tr} \neq 0 \dots \dots$		51	
		5.1.1 Amplitude de transição vácuo-vácuo		54	
	5.2	2 O caso $d_{00} \neq 0$ e $d_{tr} = 0$	(60	
		5.2.1 Amplitude de transição vácuo-vácuo	(65	
6	Con	onclusões e perspectivas	(68	
6 A	Con Art	onclusões e perspectivas rtigos publicados ou em fase final de elaboração	6	68 71	
6 A B	Con Arti	onclusões e perspectivas rtigos publicados ou em fase final de elaboração olução angular e radial da equação de Klein-Gordon (2.57	(7 7)	68 71 72	
6 A B	Con Art: Solu B.1	onclusões e perspectivas rtigos publicados ou em fase final de elaboração olução angular e radial da equação de Klein-Gordon (2.57 1 Solução Angular	(7 () ,	68 71 72 75	
6 A B C	Con Art: Solu B.1 Lim	onclusões e perspectivas rtigos publicados ou em fase final de elaboração olução angular e radial da equação de Klein-Gordon (2.57 1 Solução Angular mite não relativístico do termo CPT-ímpar	() () () () () () () () () () () () () (68 71 72 75 76 	
6 A B C D	Con Art: Solu B.1 Lim	onclusões e perspectivas rtigos publicados ou em fase final de elaboração olução angular e radial da equação de Klein-Gordon (2.57 1 Solução Angular mite não relativístico do termo CPT-ímpar mite não relativístico do termo CPT-par	() () () () () () () () () () () () () (68 71 72 75 76 78 	
6 A B C D	Con Art: Solu B.1 Lim Obt	onclusões e perspectivas rtigos publicados ou em fase final de elaboração olução angular e radial da equação de Klein-Gordon (2.57 1 Solução Angular	() () () () () () () () () () () () () (68 71 72 75 76 78 80 	

Capítulo 1

Introdução

A Teoria Quântica de Campos (TQC) é um arcabouço teórico poderoso e elegante com o qual podemos descrever processos físicos atômicos e nucleares, tais como os experimentos de colisões de partículas no Grande Colisor de Hádrons (LHC), cujos resultados são extremamente precisos. Foi somente com o desenvolvimento da TQC, sobretudo no final da década de 70, que a Física de Partículas (FP) obteve uma melhor compreensão dos constituintes da matéria, dando origem aos fundamentos do Modelo Padrão (MP) das partículas elementares. Aliás, em 2012 o MP teve mais um notório êxito, quando a até então predita partícula de Higgs foi comprovada pelo LHC.

Um conceito fundamental utilizado no MP é o de simetria. A invariância ou não de uma teoria perante uma dada simetria é um resultado chave para testar a validade de uma teoria, bem como para propor novos modelos teóricos. Sabe-se que quase todas as simetrias da natureza já foram quebradas, incluindo algumas como conjugação de carga (C), a paridade (P), inversão temporal (T), simetria CP e simetria quiral. Seria então natural existir uma quebra espontânea da simetria de Lorentz? A tentativa de responder a esse questionamento foi feita por Samuel e Kostelecký em 1989 [1], a partir de uma teoria mais fundamnetal, a teoria de cordas que no regime de baixas energias a violação da simetria de Lorentz (do inglês, LV) é manifestada por tensores com valores esperados de vácuo não nulos, os quais são denominados campos tensoriais de fundo. O modelo que inclui a quebra da invariância de Lorentz ao MP recebeu o nome de Modelo Padrão Estendido (MPE). Neste, além de LV, há também a possibilidade da violação da simetria CPT [2]. Assim, os termos que preservam a simetria CPT são designados de termos CPT-pares e os que não a preservam são denominados de termos CPT-ímpares, ou seja, a quebra de CPT é indicada por campos de fundo com números ímpares de índices de Lorentz.

Os setores do MPE podem ser classificados de diversas formas. Quando analisados a par-

tir dos tensores de fundos, temos aqueles operadores que acoplam os campos minimamente, preservando renormalizabilidade por contagem de potência e aqueles operadores de dimensões maiores que 4, considerados não-mínimos. Os modelos de violação de Lorentz, contendo operadores com dimensões superiores a quatro, foram primeiramente considerados na Ref. [3]. Nesta, foram investigados os efeitos dessa modificação na relação de dispersão das partículas, escalares, férmions e fótons por um operador de dimensão cinco. Outras aplicações semelhantes foram realizadas nas Refs. [4]. Esses modelos também exibem algumas características distintas que estão, em sua maioria, catalogadas no MPE não-mínimo, como por exemplo nos setores de fótons e férmions analisados em [5–7]. Outras aplicações são estudadas nas Refs. [8]. O setor não-mínimo se diferencia do setor mínimo também por possuir um número arbitrário de operadores com dimensão de massa maior que 4 [3, 4, 9]. Voltando ao cenário mínimo, temos os setores de calibre CPT-ímpar e CPT-par com tensores campos de fundo de dimensão 3 e 4 [10, 11] já amplamente estudados na literatura. Algumas dessas constantes de acoplamento recebem limites superiores restritivos muito fortes, obtidos a partir dos mais diversos tipos de experimentos [12]. Além disso, estudos sobre o setor fotônico CPT-ímpar foram feitos nas Refs. [13–15] e os efeitos dessa eletrodinâmica CPT-par para o setor fermiônico foram considerados nas bibliografias 16.

A introdução da violação de Lorentz, onde partículas carregadas interagem com o campo eletromagnético, pode ser feita através de acoplamentos não-mínimos, que também introduz operadores de ordem mais alta. Isto pode ser visto em [17–20]. Algumas consequências ou efeitos desses coeficientes não-renormalizáveis foram investigados em vários outros cenários [21–35].

A TQC que descreve a interação entre partículas carregadas sem spin e o campo eletromagnético é conhecida como Eletrodinâmica Quântica Escalar (SQED). A SQED, com termo violador da simetria de Lorentz, não recebeu a mesma atenção que sua versão fermiônica. A razão pode ser o fato de não existir, no Modelo Padrão, uma partícula elementar carregada sem spin, ou então por não ser tão rica fenomenologicamente quanto sua versão fermiônica.

No que tange a esse cenário, o setor de interação CPT-ímpar é munido de um termo do tipo $(D_{\mu}\phi \supset \frac{ie}{2}g(k_{\phi F}^{(5)})^{\nu}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\phi)$, sendo $(gk_{\phi F}^{(5)})^{\nu}$ um operador vetorial de dimensão 5 e dimensão de massa -1. Analogamente, o correspondente termo CPT-par é construído pela adição de uma parcela da forma $(D_{\mu}\phi \supset \frac{ie}{2}\tilde{g}(k_{\phi F}^{(6)})_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial^{\nu}F^{\alpha\beta})\phi)$, em que agora o tensor de fundo (de ordem 4) é $(k_{\phi F}^{(6)})$. Este operador tensorial possui dimensão 6 e de dimensão de massa -2.

No caso das correções quânticas da SQED, um termo renormalizável por contagem de potências CPT-ímpar só é possível nos setores fotônicos e fermiônicos. Em nível clássico, alguns modelos envolvendo violação da simetria de Lorentz da eletrodinâmica escalar foram estudados nos últimos anos. Por exemplo, aspectos como causalidade, unitariedade e quebra de simetria espontânea LV e CPT-ímpar da SQED foram analisados na Ref. [36]. O mecanismo de Higgs, no contexto da SQED LV e CPT-par, foi investigado na Ref. [37].

Ainda em nível clássico, muitos estudos sobre a existência de vórtices BPS na eletrodinâmica escalar LV foram realizados na Ref. [38].

Como um dos resultados deste trabalho [39], analisamos os átomos mesônicos dentro do contexto da quebra de simetria de Lorentz através de um termo CPT-par, usando uma derivada covariante não-mínima. Tomando o limite não relativístico, usando os dados experimentais do deslocamento imposto pela interação forte ao nível de energia do estado fundamental (1S), além dos dados relacionados às transições $4p \rightarrow 3p$ do hidrogênio mesônico, é possível impor limites superiores aos coeficientes de LV. A polarização do vácuo a 1-loop é calculada utilizando as regras de Feynman e usando modificações apropriadas com modelo não-minimamente acoplado.

Na segunda parte da tese, abordaremos a Eletrodinâmica de Maxwell acrescentada de um termo CPT-par de ordem superior $(a^2 d_{\alpha\beta} \partial_\mu F^{\mu\alpha} \partial_\lambda F^{\lambda\beta})$ possuindo um campo de fundo tensorial $(d_{\mu\nu})$. A expressão anterior já engloba o termo de Podolsky somente no caso em que o traço do tensor for diferente de zero, tr $(d_{\alpha\beta}) \neq 0$. Além disso, recuperamos a invariância de Lorentz quando $d_{\mu\nu} \propto \eta_{\mu\nu}$.

A eletrodinâmica desenvolvida pelo russo Boris Podolsky [40–43] foi o primeiro modelo de uma teoria de campos com derivada de ordem superior, sendo uma generalização do campo eletromagnético de Maxwell, cujo objetivo seria livrar-se de infinitos gerados pela auto-energia dos elétrons no limite de $r \rightarrow 0$. Aliás, na eletrodinâmica de Podolsky a lei de Coulomb é modificada por um potencial do tipo $\frac{Q}{4\pi r} \left(1 - e^{-\frac{r}{a}}\right)$, que tem valores finitos em todo r. Nessa teoria, a ação é modificada por uma derivada de segunda ordem nos campos (A_{μ}) , e portanto as equações de movimento resultam sendo equações diferenciais parciais lineares de quarta ordem. [44]. Além de problemas com instabilidade e causalidade, essa eletrodinâmica apresenta algumas dificuldades fundamentais, tal como fantasmas¹ (ghosts, em inglês), estados com norma negativa que não preservam a unitariedade [45].

No final da década de 60, Lee e Wick estudaram uma eletrodinâmica de ordem superior [46], introduzindo uma expressão do tipo $(a^2 F_{\mu\nu} \Box F^{\mu\nu})$, matematicamente equivalente ao termo da eletrodinâmica de Podolsky. Eles propuseram esse novo modelo como uma teoria reguladora e encontraram para o propagador do fóton no regime ultravioleta um comportamento do tipo $1/p^4$, ou seja, livre de divergências quadráticas, assim como removeram divergências geradas pela polarização do vácuo. Somente em 2007, Grinstein, O'Connel e Wise estenderam as ideias de Lee Wick em todos os setores: bósons, férmions e Higgs, exceto a gravidade [47],

¹A nomenclatura dada deve-se ao fato desses campos não serem físicos.

apresentando um modelo padrão massivo com derivadas de ordem superior. O modelo padrão de Lee Wick fornece uma possível solução para o problema de hierarquia de massa das partículas elementares.

Não obstante, as eletrodinâmicas de derivadas superiores contém mais graus de liberdades do que a de Maxwell. Esse fato possibilita a existência de mais vínculos e, consequentemente, mais condições de fixação de gauge, permitindo encontrar os parênteses de Dirac e quantizar a teoria tanto por meio do procedimento canônico ou via formalismo de integração funcional. Nesse sentido, vários trabalhos foram realizados obtendo não só a quantização à temperatura zero via a amplitude de transição vácuo-vácuo (AVV), mas também à temperatura finita via o cálculo da função de partição [48, 49, 51, 52]. Como os modelos usuais, as teorias de campo com derivadas superiores podem ser dotadas de fantasmas, e uma ferramenta poderosa para tratar esses *ghosts* é a transformação de simetria BRST desenvolvida por Becchi, Rouet, Stora [53] e independentemente por Tyutin [54].

O foco principal que examinaremos aqui é ver como a teoria eletromagnética com derivada superior se comporta com a introdução de um campo de fundo tensorial. Os graus de liberdade físicos do sistema são afetados, assim como as relações de dispersão. Para isso faremos, inicialmente, uma revisão da eletrodinâmica de Podolsky, investigando primeiramente como caráter puramente didático a estrutura hamiltoniana segundo o formalismo de Dirac para sistemas vinculados [55]. Após a análise de vínculos estamos aptos em quantizar a teoria à temperatura zero ou à temperatura finita via o cálculo da amplitude vácuo-vácuo (AVV) ou função de partição, respectivamente. Damos ênfase ao cálculo da amplitude de transição vácuo-vácuo (AVV) para obter os graus de liberdade físicos e as respectivas relações de dispersão. Em seguida, investigamos a eletrodinâmica de Maxwell modificada por um termo CPT-par possuindo derivadas de ordem superior. Esse termo de dimensão de massa 6 quebra a simetria de Lorentz via um tensor de segunda ordem. Analisamos a estrutura de vínculos para algumas configurações do tensor $d_{\mu\nu}$ e calculamos a amplitude de transição vácuo-vácuo para definir os possíveis graus de liberdade físicos e as respectivas relações de dispersão.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

Nos capítulos 1 e 2, são feitas, respectivamente, uma introdução e além de uma breve revisão da literatura.

No capítulo 3, computamos as correções de LV em primeira ordem para a propagação do fóton.

No capítulo 4, fazemos uma revisão da teoria da eletrodinâmica de Podolsky, obtendo a estrutura canônica e a AVV.

No capítulo 5, investigamos a eletrodinâmica de Maxwell com um termo CPT-par possuindo

derivadas de ordem superior, analisando a estrutura de vínculos para algumas configurações do tensor $d_{\mu\nu}$ e calculamos a AVV.

Por fim, no capítulo 6, expomos nossas conclusões e perspectivas.

Capítulo 2

Campo escalar complexo e átomos mesônicos

A física nuclear ainda é uma área de pesquisa bastante ativa. Desde a década de 1930 com o méson de Yukawa até os dias atuais se têm buscado a detecção de partículas ou átomos exóticos na natureza, como aconteceu recentemente com a descoberta do hélio piônico utilizando espectroscopia a laser. Estes resultados foram publicados em uma das revistas de maior fator de impacto, [56]. Átomos exóticos têm geralmente um tempo de vida muito curto, mas são excelentes ferramentas para estudar as propriedades de partículas como píon, káon e até mesmo o múon. Também nos permite compreender a física que está além do Modelo Padrão das partículas elementares (MP).

A primeira teoria sobre força nuclear forte foi proposta por Yukawa, em 1934 [57]. Mais tarde, em 1937, com as pesquisas de Raios Cósmicos, dois grupos experimentais corroboraram a existência de tais partículas de Yukawa, sendo um grupo liderado por Anderson e Neddermeyer [58] e outro grupo liderado por Street e Stevenson [59]. Por muitos anos esses grupos de pesquisa achavam que tinham descoberto o méson- π , mas na realidade tinham descoberto o méson- μ ou múon. O méson- π ou píon (a partícula de Yukawa) foi detectado em 1947 com experiências de raios cósmicos sobre chapas fotográficas no monte Chacaltaya, por César Lattes, então participante do grupo de pesquisa chefiado por Powell [60]. No mesmo ano, com os experimentos de raios cósmicos, foi feita a descoberta do káon. O káon e sua antipartícula (antikáon) sempre são produzidos aos pares, daí receberam o nome de partículas estranhas ou evento tipo S. Em seguida, a investigação sobre híperons veio apenas a partir da década de 1950 (Λ, Σ, Ξ). Todas essas partículas, píons, káons e híperons são representadas por campos escalares.

Temos também a partícula mésonica J/Ψ formada por um quark e um antiquark que foi

descoberta em 1974 por dois grupos de pesquisa independentes, que dividiriam o prêmio nobel dois anos mais tarde em 1976. Um atuou no Stanford Linear Accelerator Center, sob a liderança de Burton Richter e o outro no Brookhaven National Laboratory, liderado por Samuel Ting do Massachusetts Institute of Technology-MIT.

Os trabalhos de Gordon [61], em 1926 e Klein, [62] em 1927, tentavam obter uma versão relativística da equação de Schrödinger, mas acabaram por achar a equação de Klein-Gordon para uma partícula de spin zero. A versão da equação de Schrödinger que considera a interação do spin com o campo eletromagnético foi introduzida por Pauli [63] e sua versão relativística foi obtida por Dirac [64].

Vamos começar com o campo de Klein-Gordon, que descreve uma partícula escalar. Primeiro sem carga e, em seguida, passaremos para o campo escalar complexo, que descreverá partículas carregadas e sua interação com o campo eletromagnético.

A equação de Klein-Gordon (KG) pode ser obtida simplesmente tomando a prescrição operacional na expressão da energia relativística de Einstein tal como se faz na obtenção da equação de Schrödinger

$$-\hbar^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{c^2 \partial t} - \nabla^2 \varphi\right) = m^2 c^2 \varphi.$$
(2.1)

Do ponto de vista do conceito de função de onda, a densidade de probabilidade não é positiva definida devido à equação diferencial ser de segunda ordem no tempo¹.

De forma mais compacta, podemos introduzir o operador D'Alembertiano ($\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$) e reescrever a Eq. (2.1) como

$$\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\varphi = 0.$$
(2.2)

O termo $\left(\frac{mc}{\hbar}\right)$ constante é proporcional ao inverso do comprimento de onda de Compton $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc}$ a menos de um fator multiplicativo 2π . Neste trabalho, usamos a assinatura (1, -1, -1, -1) e vamos utilizar ao longo de todo o texto a convenção de unidades naturais da teoria de campos fazendo $c = \hbar = 1$, de forma que a Eq. (2.2) torna-se

$$\left(\Box + m^2\right)\varphi = 0,\tag{2.3}$$

que corresponde à equação KG no sistema de unidades naturais. Nas próximas seções, φ representará um campo e não mais uma função de onda.

¹Esse problema levaria mais tarde Dirac a formular outra equação, com o objetivo de achar uma equação de primeira ordem e que representasse os elétrons.

2.1 Campo de Klein-Gordon

2.1.1 Campo escalar neutro

O campo escalar neutro sem interações é o mais simples, descrevendo partículas com massa diferente de zero, carga nula e spin-0. Sua densidade de lagrangiana é expressa por

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \varphi \partial^{\mu} \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2, \qquad (2.4)$$

onde m é a massa da partícula.

Podemos obter as equações de campo a partir da equação de Euler-Lagrange (E-L)

$$\partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \varphi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0, \qquad (2.5)$$

em que obtemos a equação de KG (2.3) obtida anteriormente.

A densidade de lagrangiana (2.1) deste campo não possui uma simetria interna contínua à qual poderíamos associar uma carga de Noether conservada. Por isso, o campo escalar neutro não descreve partículas portadoras de carga. Dessa forma, se quisermos descrever partículas carregadas, devemos utilizar um campo escalar complexo.

2.1.2 Campo escalar complexo

O caso da partícula carregada de spin-0 é descrito pelo campo escalar complexo (φ^*). A densidade de lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \partial^{\mu} \varphi^* \partial_{\mu} \varphi - m^2 \varphi^* \varphi. \tag{2.6}$$

Uma propriedade dessa densidade de Lagrangiana é sua invariância perante uma transformação de simetria global U(1):

$$\varphi'(x) = e^{i\Gamma}\varphi, \quad \varphi^{*'}(x) = e^{-i\Gamma}\varphi^{*}(x).$$
 (2.7)

onde Γ é um parâmetro real.

A equação de E-L do campo escalar complexo também resulta na equação de KG

$$\left(\Box + m^2\right)\varphi = 0, \tag{2.8}$$

e para o campo φ^* temos

$$\left(\Box + m^2\right)\varphi^* = 0. \tag{2.9}$$

O campo complexo descreve configurações portadoras de carga elétrica cuja corrente conservada é

$$j^{\mu} = i \left(\varphi^* \partial^{\mu} \varphi - \partial^{\mu} \varphi^* \phi\right), \qquad (2.10)$$

obedecendo, então, a equação de continuidade

$$\frac{\partial j^0}{\partial t} + \partial_k j^k = 0, \qquad (2.11)$$

ou equivalentemente

$$\partial_{\mu}j^{\mu} = 0. \tag{2.12}$$

Verifica-se que a componente j^0 representa uma densidade de carga e não de probabilidade, como veremos quando acoplarmos o campo eletromagnético.

2.1.3 O limite não relativístico do campo escalar complexo

Nesta subseção, verificamos como a equação de Klein Gordon relativística (2.1) se comporta no regime de baixas energias. Para isso, os resultados devem reproduzir as previsões de uma teoria não-relativística em que equação de Klein Gordon deve recair na equação de Schrödinger. A densidade de lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \left(\partial^{\mu}\varphi^{*}\right)\left(\partial_{\mu}\varphi\right) - m^{2}\left|\varphi\right|^{2}.$$
(2.13)

Para desempenharmos esta tarefa, implementamos o seguinte Ansatz

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2m}} \psi \exp\left(-imt\right),\tag{2.14}$$

em que o campo ψ depende das variáveis (x,t) e $(1/\sqrt{2m})$ é um fator de massa normalizada².

Expandindo o termo da derivada do campo da Eq. (2.13) em função das componentes do tensor obtemos

$$\left|\partial_{\mu}\varphi\right|^{2} = \left(\partial_{0}\psi\right)\left(\partial_{0}\psi\right)^{*} - \left(\partial_{j}\psi\right)\left(\partial_{j}\psi\right)^{*}, \qquad (2.15)$$

onde a componente temporal da derivada do campo escalar é

$$\partial_0 \varphi = \frac{1}{\sqrt{2m}} \partial_0 \left(\psi e^{-imt} \right) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\partial_0 \psi - im\psi \right) e^{-imt}.$$
 (2.16)

Já seu complexo conjugado é

$$\left(\partial_0\varphi\right)^* = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\partial_0\psi^* + im\psi^*\right)e^{imt}.$$
(2.17)

$$\int \psi(x)^* \psi(x) \, dx = 1$$

 $^{^2\}mathrm{Cuja}$ condição de normalização é dada por

Fazendo o produto de (2.16) com (2.17), obtemos:

$$(\partial_0\varphi)(\partial_0\varphi)^* = \frac{1}{2m}(\partial_0\psi)(\partial_0\psi^*) + \frac{i}{2}[(\partial_0\psi)\psi^* - (\partial_0\psi^*)\psi] + \frac{1}{2}m\psi\psi^*.$$
 (2.18)

De forma semelhante, para a componente espacial da derivada do campo

$$(\partial_j \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \partial_j \left(\psi e^{-imt} \right) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\partial_j \psi \right) e^{-imt}, \qquad (2.19)$$

e seu conjugado complexo

$$\left(\partial_{j}\varphi\right)^{*} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\partial_{j}\psi\right)^{*} e^{imt}, \qquad (2.20)$$

ao multiplicarmos estes dois termos (2.19) por (2.20), obtemos

$$\left(\partial_{j}\varphi\right)\left(\partial_{j}\varphi\right)^{*} = \frac{1}{2m}\left(\partial_{j}\psi\right)\left(\partial_{j}\psi\right)^{*}.$$
(2.21)

Substituindo (2.18) e (2.21) na densidade de lagrangiana (2.13), chegamos à seguinte expressão

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2m} \left(\partial_0 \psi \right) \left(\partial_0 \psi^* \right) - \frac{1}{2m} \partial_j \psi \left(\partial_j \psi \right)^* + \frac{i}{2} \left[\left(\partial_0 \psi \right) \psi^* - \left(\partial_0^* \psi \right) \psi \right].$$
(2.22)

No limite de baixas energias devemos impor as condições em que a energia cinética é muito pequena comparada à energia relativística de repouso da partícula

$$\left|\partial_0\psi\right| \ll m\left|\psi\right|.\tag{2.23}$$

Assim, a densidade de lagrangiana torna-se

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2m} \partial_j \psi \left(\partial_j \psi\right)^* + \frac{i}{2} \left[\left(\partial_0 \psi\right) \psi^* - \left(\partial_0 \psi^*\right) \psi \right].$$
(2.24)

Integrando por partes o segundo termo da equação anterior, conseguimos

$$\mathcal{L} = i\psi^*\partial_0\psi + \frac{1}{2m}\partial_j\psi^*\partial^j\psi, \qquad (2.25)$$

que ainda podemos escrever como

$$\mathcal{L} = i\psi^* \partial_0 \psi - \frac{1}{2m} \left| \nabla \psi \right|^2.$$
(2.26)

Desenvolvendo a equação de E-L para obtermos as equações de movimento, temos para o campo complexo

$$\partial_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} \psi^*)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = 0.$$
(2.27)

Calculando termo a termo, temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi^*)} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \psi^*)} = \frac{1}{2m} \partial^j \psi, \text{ e } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = i \partial_0 \psi.$$
(2.28)

Substituindo esses resultados na Eq. (2.27), obtemos

$$\frac{1}{2m}\partial_j\partial^j\psi - i\partial_0\psi = 0, \qquad (2.29)$$

que ainda pode ser expresso da seguinte forma:

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi - i\partial_0\psi = 0, \qquad (2.30)$$

correspondendo à equação de Schrödinger do tipo $H\psi = i\partial_0\psi$ para a partícula livre, onde o hamiltoniano H é associado ao termo cinético $H \to -\frac{1}{2m}\nabla^2$.

2.2 O campo escalar complexo e o acoplamento mínimo

Analisaremos nesta seção o caso da partícula de spin-0 descrito pelo campo escalar (φ) carregado com a auto-interação quártica $\lambda (\varphi^* \varphi)^2$, que posteriomente será acoplado ao campo eletromagnético. A densidade de lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \left(\partial^{\mu}\varphi\right)^{*} \left(\partial_{\mu}\varphi\right) - m^{2}\varphi^{*}\varphi - \lambda\left(\varphi^{*}\varphi\right)^{2}.$$
(2.31)

Notamos, aqui, que a densidade de lagrangiana é invariante perante a transformação de simetria global ($\varphi'(x) = e^{i\Gamma}\varphi(x)$, com Γ um parâmetro real). Podemos fazer com que a lagrangiana também seja invariante perante uma transformação local ($\varphi'(x) = e^{i\Gamma(x)}\varphi(x)$, com $\Gamma(x)$ uma função real), substituindo $\partial^{\mu}\varphi$ por uma derivada covariante que acopla minimamente o campo eletromagnético e o campo escalar da seguinte maneira:

$$D_{\mu}\varphi = \partial_{\mu}\varphi - ieA_{\mu}\varphi, \qquad (2.32)$$

em que A^{μ} é o potencial vetor e *e* a carga elementar. Esta equação (2.32) é chamada derivada covariante mínima.

Aplicando a derivada covariante ao campo escalar, temos a seguinte densidade de lagrangiana que será invariante pela transformação de *gauge* local:

$$\mathcal{L} = (\partial^{\mu} + ieA^{\mu}) \varphi^* (\partial_{\mu}\varphi - ieA_{\mu}\varphi) - m^2 \varphi^* \varphi - \lambda (\varphi^* \varphi)^2.$$
(2.33)

Por construção, introduzimos a derivada covariante, de modo que

$$D'_{\mu}\varphi' = e^{i\Gamma}D_{\mu}\varphi. \tag{2.34}$$

Para isto, o campo de calibre deve se transformar da seguinte maneira:

$$A \to A'_{\mu} = A_{\mu} + \frac{1}{e} \partial_{\mu} \Gamma.$$
 (2.35)

Isto implica que D_{μ} transforma-se da seguinte forma

$$D_{\mu} \to D'_{\mu} = e^{+i\Gamma(x)} D_{\mu} e^{-i\Gamma(x)}, \qquad (2.36)$$

portanto, $D_{\mu}\varphi$ transforma-se com um fator de fase geral e deixa a densidade de lagrangiana invariante. Ainda podemos calcular explicitamente o comutador entre as derivadas covariantes

$$[D_{\mu}, D_{\nu}] = [\partial_{\mu} - ieA_{\mu}, \partial_{\nu} - ieA_{\nu}] = -ieF_{\mu\nu}, \qquad (2.37)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}, \qquad (2.38)$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor do campo eletromagnético.

Desta forma, $F_{\mu\nu}$ é invariante de gauge e podemos propor uma densidade de lagrangiana para a chamada eletrodinâmica escalar

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + |D_{\mu}\varphi|^{2} - m^{2}|\varphi|^{2} - \frac{1}{4}\lambda(\varphi^{*}\varphi)^{2}.$$
(2.39)

A densidade de lagrangiana é invariante sob uma transformação de campos

$$\varphi \rightarrow \varphi e^{ie\Gamma(\mathbf{x})},$$
 (2.40)

$$A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \frac{1}{e} \partial_{\mu} \Gamma,$$
 (2.41)

e cuja corrente conservada é

$$J^{\mu} = i \left[\varphi \left(D^{\mu} \varphi \right)^* - \varphi^* D_{\mu} \varphi \right].$$
(2.42)

A equação de movimento do campo eletromagnético é

$$\partial_{\mu}F^{\alpha\beta} = -J^{\beta}. \tag{2.43}$$

Assim, verificamos facilmente que a densidade de corrente, J^{β} , é conservada

$$\partial_{\beta}J^{\beta} = 0. \tag{2.44}$$

2.3 Limite não relativístico da SQED

O procedimento para o cálculo do limite não relativístico é obter uma equação tipo Schrödinger com termos adicionais, considerando a energia de repouso da partícula muito maior que o inverso do comprimento de onda. Assim, derivamos a hamiltoniana no limite não relativístico do modelo que descreve uma partícula escalar de spin zero interagindo com o campo eletromagnético. Primeiramente, escrevemos a densidade de lagrangiana (2.39) como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\varphi} + \mathcal{L}_{I}. \qquad (2.45)$$

O primeiro termo do lado direito da equação anterior é a contribuição do campo eletromagnético, \mathcal{L}_{φ} é a densidade de lagrangiana associada às partículas escalares e \mathcal{L}_{I} a densidade de lagrangiana associada à interação, dadas por,

$$\mathcal{L}_{\varphi} = \partial_{\mu}\varphi \partial^{\mu}\varphi^{*} - m^{2}\varphi^{*}\varphi + \lambda \left(\varphi^{*}\varphi\right)^{2}, \qquad (2.46)$$

$$\mathcal{L}_{I} = -ieA_{\mu} \left[\varphi^{*} \partial_{\mu} \varphi - \varphi \partial_{\mu} \varphi^{*} \right] + \left(eA_{\mu} \right)^{2} \left| \varphi \right|^{2}, \qquad (2.47)$$

respectivamente. Em nossa análise o termo $\lambda \left(\varphi^* \varphi \right)^2$ não será considerado³.

Para obter o limite não relativístico consideramos a seguinte transformação para o campo escalar carregado:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2m}} \psi \exp\left(-imt\right),\tag{2.48}$$

onde $\psi=\psi(\vec{x},t)$ emé a massa da partícula escalar. Com isso, obtemos

$$\mathcal{L}_{\varphi} + \mathcal{L}_{I} = \frac{1}{2m} \left[(D_{0}\psi^{*}) D_{0}\psi - im (D_{0}\psi^{*}) \psi + im\psi^{*}D_{0}\psi \right] + \frac{1}{2m} (D_{j}\psi)^{*} D^{j}\psi.$$
(2.49)

Agora, usamos as seguintes aproximações para os campos ψ e A_0

$$|D_0\psi| \ll m |\psi|, \qquad |eA_0| \ll m,$$
 (2.50)

$$\frac{1}{2} \frac{|D_0 \psi|}{m} |\partial_0 \psi| \ll \frac{1}{2} |\psi| |D_0 \psi|, \qquad (2.51)$$

na densidade Lagrangiana (2.49), que após uma integração por partes, resulta na seguinte expressão:

$$\mathcal{L}_{\varphi} + \mathcal{L}_{I} = i\psi^{*}D_{0}\psi + \frac{1}{2m}\left(D_{j}\psi\right)^{*}D^{j}\psi.$$
(2.52)

A equação de movimento para o campo escalar ψ é

$$\frac{1}{2m}D_j D^j \psi - i D_0 \psi = 0, \qquad (2.53)$$

a qual pode ser expressa da seguinte maneira:

$$i\partial_0\psi = \left[-\frac{1}{2m}\left(\nabla^2 + ie\partial_jA^j + 2ieA^j\partial_j + e^2A_jA^j\right) - eA_0\right]\psi.$$
(2.54)

Isto corresponde à equação de Schrödinger de uma partícula carregada sem spin acoplada ao campo eletromagnético. Assim, identificamos a hamiltoniana

$$H = -\frac{1}{2m} \left(\nabla^2 + ie\partial_j A^j + 2ieA^j\partial_j + e^2A_j A^j \right) - eA_0.$$
(2.55)

 $^{{}^{3}}$ Em nível de árvore, a auto-interação do campo escalar não desempenha papel relevante na descrição do átomo mesônico, mas sim na ordem de 1-loop.

2.3.1 Aplicação da equação de Klein Gordon: átomos mesônicos

Para investigar átomos mesônicos, precisamos de um modelo que descreve o sistema composto de um núcleo positivo entorno do qual circulam as partículas mesônicas (píon ou káon) negativas. Para isso, inicialmente precisamos de um modelo simples que possa ser solucionado analiticamente. Supondo que a interação dominante seja o potencial de Coulomb, podemos aproximar o núcleo por uma carga pontual de magnitude Ze. O píon/káon pode ser aproximado por uma carga pontual de magnitude -e. Trocar o elétron pelo píon/káon nos permite ter um modelo simples para descrever o átomo mesônico. No entanto existem outras interações que levam à mudanças nos níveis de energia da interação Coulombiana, como por exemplo a polarização do vácuo, que será calculada mais adiante. Assim, para os átomos mesônicos, temos que o campo magnético é nulo e temos somente a interação coulombiana atuando no sistema méson-núcleo

$$\mathbf{A} = 0 \ \mathbf{e} \ eA_0 = \frac{Z\alpha}{r},\tag{2.56}$$

onde Z é o número de prótons e α a constante de estrutura fina ($\alpha = 1/137$ em unidades naturais).

Escrevendo a equação de KG em regime estacionário, temos

$$\left[\left(E + \frac{Z\alpha}{r}\right)^2 + \nabla^2 - m^2\right]\varphi = 0.$$
(2.57)

Após algumas operações algébricas⁴ na Eq. (2.57), podemos resolvê-la analiticamente por separação de variáveis, obtendo a seguinte energia

$$E = m \left[1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{\left(n - l - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2} \right) - Z^2 \alpha^2} \right)^2} \right]^{-1/2}, \qquad (2.58)$$

com n = 1, 2, ...A parte angular das autofunções também é dada pelos harmônicos esféricos como mostrado no apêndice B.

No limite não relativístico e assumindo que a energia cinética é muito pequena, ou seja, $p^2 \ll m$ obtemos,

$$E \approx m \left(1 - \frac{1}{2} \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2} \left(1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{l + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) \right) \dots \right),$$
(2.59)

onde o primeiro termo é a energia em repouso do átomo e o segundo termo é energia do átomo de hidrogênio. As outras ordens representam as contribuições relativísticas, o que está de acordo com os cálculos feitos com a teoria de perturbações.

⁴Para maiores detalhes, vide apêndice \mathbf{B} .

No próximo capítulo, no estudo da SQED LV com acoplamentos não mínimo, não consideraremos correções relativísticas para o sistema próton-méson, apenas correções advindas do limite não relativístico e da polarização do vácuo. Desse modo as autofunções e autoenergias que usaremos em nossos cálculos serão as do átomo de hidrogênio não relativístico.

Para comparações com os dados experimentais para o átomo piônico, algumas correções são necessárias:

a) Os cálculos devem ser feitos com a massa reduzida μ em vez de m;

b) Deve-se levar em consideração que o núcleo não é uma carga pontual, tem dimensão nuclear tendo efeitos de dipolo e quadrupolo;

c) Correções devem ser feitas para polarização do vácuo;

d) O raio da órbita de Bohr mais baixo é 300 vezes menor do que o raio de Bohr correspondente ao elétron. A função de onda do píon tem sobreposição significativa com o núcleo, exigindo uma correção para a interação forte píon-núcleo.

2.4 Polarização do vácuo na SQED

Abordamos nesta seção as partículas escalares acopladas minimamente com o campo eletromagnético dado pela Eq. (2.39). Iremos agora levar em consideração a quantização dos campos. A ferramenta para esta quantização será feita usando o formalismo de integração funcional e a análise dos gráficos perturbativos, através dos diagramas de Feynman.

A densidade lagrangiana (2.39) que descreve a eletrodinâmica de uma partícula escalar de massa m e carga elétrica e, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\gamma} + \mathcal{L}_{\varphi} + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_{GF}, \qquad (2.60)$$

em que \mathcal{L}_{γ} corresponde aos fótons, \mathcal{L}_{φ} às partículas escalares, \mathcal{L}_{I} está relacionada à interação quártica e \mathcal{L}_{GF} é o termo de gauge fixing.

As regras de Feynman para os cálculos a 1-*loop* no *gauge* de Feynman da SQED, que usaremos, são descritas a seguir. As linhas internas e vértices correspondem a:

• Propagador do campo escalar dado por

$$D_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon},$$
(2.61)

que é o propagador de Feynman para uma partícula de spin zero;

• Propagador do fóton

$$\sim^q \sim$$

$$D_F^{\mu\nu} = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i(\xi - 1)q_{\mu}q_{\nu}}{q^4}; \qquad (2.62)$$

• Para determinar os tipos de vértices, escreve-se os termos de interação da densidade de lagrangiana na seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{I} = ieA^{\mu} \left[\left(\partial_{\mu} \varphi^{*} \right) \varphi - \varphi^{*} \partial_{\mu} \varphi \right] - m^{2} A^{\mu} A_{\mu} \varphi^{*} \varphi + j \varphi + j^{*} \varphi^{*} + J_{\mu} A^{\mu}, \qquad (2.63)$$

em que j, j^* e J_{μ} são as fontes adicionadas aos seus respectivos campos e devemos, primeiramente, calcular o gerador funcional.



Figura 2.1: Gráfico de Feynman para os vértices de 3 e 4 pernas da SQED.

Os gráficos são escritos da seguinte maneira:

- Representamos por uma linha interna contínua o propagador do escalar. Todas as linhas internas, não conectadas a um ponto externo p, estão associadas a um termo de propagação dado por (2.61);
- 2) Para cada vértice das partículas escalares (φ), multiplicar pelo fator $-i\lambda$;
- 3) Impor a conservação do momento em cada vértice do diagrama;
- 4) Para cada vértice escalar-escalar -fóton ($\varphi \varphi \gamma$), multiplicar pelo fator $ie(p_{\mu} p'_{\mu})$;
- 5) Para cada vértice escalar-escalar -fóton-fóton ($\varphi \varphi \gamma \gamma$), multiplicar pelo fator $2ie^2\eta_{\mu\nu}$;
- 6) Um linha interna contínua e ondulada corresponde ao propagador do fóton sem massa dado por (2.62).

2.4.1 Polarização do vácuo a 1-loop



Figura 2.2: polarização do vácuo.

Usando as regras de Feynman no espaço dos momentos e utilizando a regularização dimensional $(D = 4 - 2\varepsilon)$, a polarização do vácuo para a SQED (2.39) no gauge de Feynman $(\xi = 1)$, em ordem α , é dada pela soma de dois termos (ver figura 2.2)

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = \Pi^{\mu\nu}_{a}(q) + \Pi^{\mu\nu}_{b}(q).$$
(2.64)

O primeiro termo na figura 2.2 é dado por

$$\Pi_{a}^{\mu\nu}(q) = -ie^{2}\mu^{4-D} \int \frac{d^{D}p}{(2\pi)^{D}} \frac{i}{\left[(p-q)^{2} - m^{2} + i\varepsilon\right]} \frac{i}{\left[p^{2} - m^{2} + i\varepsilon\right]} \left(2p^{\mu} - q^{\mu}\right) \left(2p^{\nu} - q^{\nu}\right).$$
(2.65)

O segundo termo na figura 2.2 é representado por

$$\Pi_b^{\mu\nu}(q) = 2ie^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\eta^{\mu\nu}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}.$$
(2.66)

Somando os dois termos, temos

$$i\Pi^{\mu\nu} = e^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{4p^\mu p^\nu - 2p^\mu q^\nu - 2q^\mu p^\nu + q^\mu q^\nu - 2\eta^{\mu\nu} \left((p-q)^2 - m^2\right)}{\left[p^2 - m^2 + i\varepsilon\right] \left[(p-q)^2 - m^2 + i\varepsilon\right]}.$$
 (2.67)

Calculamos a integral usando a parametrização de Feynman

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{\left[Ax + (1-x)B\right]^2}.$$
(2.68)

Podemos deixar de forma quadrática o denominador da seguinte forma:

$$i\Pi^{\mu\nu} = e^2 \mu^{4-D} \int_0^1 dx \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{4p^\mu p^\nu - 2p^\mu q^\nu - 2q^\mu p^\nu + q^\mu q^\nu - 2\eta^{\mu\nu} \left(p^2 - 2p.q + q^2 - m^2\right)}{\left(p^2 - 2xp.q + q^2x - m^2 + i\varepsilon\right)^2}.$$
(2.69)

Fazendo uma translação na variávelr=p-xq,obtemos

$$i\Pi^{\mu\nu} = e^{2}\mu^{4-D} \int_{0}^{1} dx \int \frac{d^{D}r}{(2\pi)^{D}} \frac{4(r+xq)^{\mu}(r+xq)^{\nu} - 2(r+xq)^{\mu}q^{\nu} - 2q^{\mu}(r+xq)^{\nu} + q^{\mu}q^{\nu}}{(r^{2}-\lambda^{2}+i\varepsilon)^{2}} + e^{2}\mu^{4-D} \int_{0}^{1} dx \int \frac{d^{D}r}{(2\pi)^{D}} \frac{-2\eta^{\mu\nu}(r^{2}+2xq.r+x^{2}q^{2}-2(r.q+xq^{2})+q^{2}-m^{2})}{(r^{2}-\lambda^{2}+i\varepsilon)^{2}}.$$
 (2.70)

Termos lineares em r^{ν} são ímpares perante $r \to -r$, enquanto o resto do integrando incluindo a medida, é par. Então esses são nulos por razões de simetria. Conclui-se que a polarização do vácuo simplifica para

$$i\Pi^{\mu\nu} = e^2 \mu^{4-D} \int_0^1 dx \int \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \frac{4r^{\mu}r^{\nu} - 2\eta^{\mu\nu}r^2 + (2x-1)^2 q^{\mu}q^{\nu} - 2\eta^{\mu\nu} (x-1)^2 q^2 + 2\eta^{\mu\nu}m^2}{\left(r^2 - \lambda^2 + i\varepsilon\right)^2},$$
(2.71)

em que fizemos $\lambda^2 = x^2 q^2 - q^2 x + m^2$ e completamos o quadrado no denominador.

Fazendo a prescrição da regularização dimensional $r^{\mu}r^{\nu} \rightarrow \frac{1}{D}r^2\eta^{\mu\nu}$, e observando que podemos escrever a integral em funções de $q^{\mu}q^{\nu}$ e da métrica $\eta^{\mu\nu}$, integrando com respeito a r, temos para a polarização do vácuo

$$i\Pi^{\mu\nu} = e^2 \mu^{4-D} \int_0^1 dx \left(\frac{4}{D} - 2\right) \eta^{\mu\nu} I^{(1)} + \left[(2x-1)^2 q^\mu q^\nu - 2\eta^{\mu\nu} (x-1)^2 q^2 + 2\eta^{\mu\nu} m^2\right] I^{(0)},$$
(2.72)

em que as integrais D dimensionais são tabeladas

$$\mu^{4-D}I^{(0)} = \int \frac{d^{D}r}{(2\pi)^{D}} \frac{1}{\left(r^{2} - \lambda^{2} + i\epsilon\right)^{2}} = \mu^{4-D}\frac{i\left(-1\right)^{\frac{D}{2}}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(2\right)\left(\lambda^{2}\right)^{2-\frac{D}{2}}}$$
$$= \frac{1}{(4\pi)^{2}} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma\right] \left[1 - \epsilon \ln\left(\frac{\lambda^{2}}{4\pi\mu^{2}}\right)\right], \qquad (2.73)$$

е

$$\mu^{4-D}I^{(1)} = \int \frac{d^{D}r}{(2\pi)^{D}} \frac{r^{2}}{(r^{2}-\lambda+i\epsilon)^{2}} = \mu^{4-D} \frac{Di(-1)^{\frac{D}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma\left(1-\frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(2\right)\left(\lambda^{2}\right)^{1-\frac{D}{2}}}$$
$$= \frac{D\lambda^{2}}{2(4\pi)^{2}} \left[\frac{1}{\epsilon}+1-\gamma\right] \left[1-\epsilon\ln\left(\frac{\lambda^{2}}{4\pi\mu^{2}}\right)\right].$$
(2.74)

Com isso, a Eq. (2.71) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = \left(q^{\mu}q^{\nu} - q^{2}\eta^{\mu\nu}\right)\Pi(q), \qquad (2.75)$$

em que o termo $\Pi(q)$ é dado por

$$\Pi(q) = \frac{e^2}{3(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln\frac{4\pi\mu^2}{\lambda^2}\right).$$
(2.76)

O primeiro termo da integral é resolvido e dá uma contribuição da parte divergente ultravioleta da polarização do vácuo, enquanto o segundo termo é a parte finita.

Ainda poderíamos remover divergências usando o processo de renormalização desenvolvida por 't Hooft e Weinberg nos trabalhos [65] e [66], onde os contra termos multiplicativos em cada termo da densidade de lagrangiana são introduzidos a fim de deixar os resultados finitos. Existem, na literatura, diversas abordagens para o programa de renormalização, como o esquema de subtração mínima (MS), esquema de massa, implícita, etc.

Dessa forma, o propagador do fóton no espaço dos momentos é definido como⁵

$$\left\langle \Omega \left| T A^{\mu}(x) A^{\nu}(y) \right| \Omega \right\rangle = \int \frac{d^4 q}{\left(2\pi\right)^4} e^{iq \cdot (x-y)} i D^{\mu\nu}\left(q\right), \qquad (2.77)$$

em que podemos calcular em todas as ordens, definição não-perturbativa do propagador $D^{\mu\nu}$, que às vezes é chamado de propagador "vestido". Na ordem principal, no gauge de Feynman, esse propagador $G^{\mu\nu}$ reduz-se ao propagador livre

$$iD^{\mu\nu}\left(q\right) = \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon}.$$
(2.78)

Incluindo a correção a 1-loop encontrada na Eq. (2.75), o propagador é

$$iG^{\mu\nu}(q) = -i\frac{\eta^{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-i\eta^{\mu\alpha}}{q^2}\Pi_{\alpha\beta}\frac{-i\eta^{\beta\nu}}{q^2} + \mathcal{O}(e^4).$$

$$= \frac{-i}{q^2}\frac{\left(\eta^{\mu\nu} - \frac{q^{\mu}q^{\nu}}{q^2}\right)}{(1 - \Pi(q^2))}$$
(2.79)

O resultado acima mostra o propagador do fóton tendo um polo em $q^2 = 0$, o que caracteriza uma partícula sem massa.

A próxima etapa será um dos cernes deste trabalho: a teoria da SQED com acoplamento não mínimo (portador da quebra da invariância de Lorentz) entre o campo escalar carregado e o campo eletromagnético.

⁵O propagador é definido no formalismo de integração funcional como o valor esperado no autoestado ($|\Omega\rangle$) do produto ordenado dos operadores de campo. No caso do vácuo temos ($|\Omega\rangle$)=($|0\rangle$).

Capítulo 3

A SQED com acoplamentos não mínimos: contribuição em átomos mesônicos

Neste capítulo, analisamos a eletrodinâmica escalar com o termo de quebra da simetria de Lorentz e CPT, em que os campos de *gauge* e escalar interagem através de um derivada covariante não-mínima. A derivada covariante não-mínima representa um termo de ordem superior que não está incluso no modelo padrão estendido mínimo. A Ref. [9] analisou o caso do acoplamento LV não-mínimo para uma partícula eletricamente neutra e sua conexão com a fase Aharonov-Casher na função de onda do elétron. As Refs. [17–20] analisaram, nesse contexto, a influência de um termo violador da simetria de Lorentz na equação de Dirac. Os resultados desse capítulo foram publicados na Ref. [39].

3.1 O modelo

A densidade de lagrangiana que representa o modelo é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_{\mu}A^{\mu})^{2} + |\mathcal{D}_{\mu}\phi|^{2} - m^{2}\phi^{\dagger}\phi - U(|\phi|), \qquad (3.1)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$, é o tensor do campo eletromagnético A_{μ} e ϕ é o campo escalar complexo. No nosso modelo efetivo, o campo escalar representa um méson carregado, que é um estado ligado formado por dois quarks. O termo $\mathcal{D}_{\mu}\phi$ é a derivada covariante LV não-mínimo, expressa por

$$\mathcal{D}_{\mu}\phi = D_{\mu}\phi - \frac{ie}{2}g(k_{\phi F}^{(5)})^{\nu}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\phi - \frac{ie}{2}\tilde{g}(k_{\phi F}^{(6)})_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial^{\nu}F^{\alpha\beta})\phi.$$
(3.2)

O vetor $g(k_{\phi F}^{(5)})^{\nu}$ é um campo de fundo CPT-ímpar de dimensão 5 e $\tilde{g}(k_{\phi F}^{(6)})$ é o tensor campo de fundo CPT-par de ordem 4 e dimensão 6, com duplo traço nulo e com as mesmas simetrias do tensor de Riemann. A constante de acoplamento g CPT-ímpar tem dimensão de massa -1 e a CPT-par, um g com dimensão de massa igual a -2. Apontamos o acoplamento não-mínimo CPT-ímpar definido na Eq. (3.2), que já foi usado em um modelo LV acoplando férmions com campo de gauge [9].

As contribuições explícitas da LV de primeira ordem para a densidade lagrangiana (3.1), que estão incluídas no termo $|\mathcal{D}_{\mu}\phi|^2$, são dadas por

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}_{\mu}\phi|^{2} &= (D_{\mu}\phi)^{\dagger} D^{\mu}\phi + \frac{ieg}{2} (k_{\phi F}^{(5)})^{\mu} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \left[(D^{\nu}\phi)^{\dagger} \phi - \phi^{\dagger} D^{\nu}\phi \right] \\ &- i \frac{e\tilde{g}}{2} (k_{\phi F}^{(6)})_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^{\nu} F^{\alpha\beta} \left[(D^{\mu}\phi)^{\dagger} \phi - \phi^{\dagger} D^{\mu}\phi \right] \\ &+ termos \ de \ sequnda \ ordem. \end{aligned}$$
(3.3)

Na ausência da auto-interação escalar $\lambda |\phi|^4$, os resultados da equação de movimento é a equação de Klein-Gordon modificada, descrevendo partículas carregadas de spin-zero interagindo nãominimamente com o campo eletromagnético. Tais interações produzem uma mudança nos níveis de energia dos átomos mesônicos, por exemplo, hidrogênio piônico ou kaônico.

Nesse contexto podemos, através de um modelo efetivo, calcular as contribuições da polarização do vácuo, assim como o limite não relativístico da teoria. Também não levamos em consideração as contribuições de segunda ordem em LV. Outra condição, aqui, é considerar que o potencial de Coulomb desempenha um papel dominante nas interações.

Devido à grande massa do méson, a interação não-mínima pode ser tratada como uma perturbação adicional ao Hamitoniano de Breit-Pauli no modelo do hidrogênio piônico [67].

Feito isso, a lagrangiana (3.1) também será usada para derivar as regras de Feynman da SQED-LV e, em seguida, para calcularmos a polarização do vácuo, assim como os limites superiores para as constantes de acoplamento LV não-mínimo $g(k_{\phi F}^{(5)})^{\mu} \in \tilde{g}(k_{\phi F}^{(6)})_{\mu\nu\alpha\beta}$ introduzidas na Eq. (3.2) e dos novos termos gerados.

3.2 O Limite não relativístico e sua contribuição para os átomos mesônicos

O hidrogênio piônico é um sistema no qual podemos substituir o elétron por um píon. Enquanto o hidrogênio padrão, incluindo efeitos relativísticos e o spin, pode ser descrito pela equação de Dirac, o hidrogênio piônico pode ser estudado no contexto da equação de Klein-Gordon, dado que o píon tem spin nulo. A diferença crucial é o fato do píon ser uma partícula instável composta por um par quark-antiquark, com tempo de vida aproximada de $3.95 \times 10^7 \,\mathrm{eV^{-1}}$.

Muitas propriedades do hidrogênio piônico foram parcialmente estudadas na Ref. [67], considerando somente efeitos da QED. No entanto, há contribuições da cromodinâmica quântica (QCD) para as energias de ligação e nível de larguras atômicas, cujo efeito mais notório é apresentado pelo estado 1S. Tais efeitos são medidos por meio das transições de raios X e comparados com o estado ligado puramente eletromagnético.

No contexto da quebra de simetria de Lorentz e CPT, alguns aspectos de baixa energia na QCD são analisados na Ref. [68] e para píons e núcleons na Ref. [69].

Ambas as referências realizam suas análises no contexto do formalismo da teoria da perturbação quiral [70], uma teoria quântica de campos efetiva usada para descrever alguns aspectos de baixa energia da QCD. Além disso, devido à sua grande massa, ainda podemos considerar o hidrogênio mesônico como um sistema não relativístico e os coeficientes de LV como pequenas perturbações sobre ele. Os dados experimentais, tanto da transição $2P \rightarrow 1S$ quanto da $4P \rightarrow 3P$, são usados para impor alguns limites superiores restritivos para as constantes de acoplamentos LV $g(k_{\phi F}^{(5)})^{\mu} \in \tilde{g}(k_{\phi F}^{(6)})_{\mu\nu\alpha\beta}$ introduzidas na Eq. (3.2).

3.2.1 Contribuição do setor CPT-ímpar

Estudamos a contribuição do limite não relativístico do termo LV e CPT-ímpar, presente na equação (3.3), à energia do átomo mesônico. A parte relevante, na análise a seguir, está contida na contribuição

$$\frac{i}{2} e g w_{\mu} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \left[\left(D_{\nu} \phi \right)^{\dagger} \phi - \phi^{\dagger} \left(D_{\nu} \phi \right) \right].$$
(3.4)

onde utilizamos $(k_{\phi F}^{(5)})_{\mu} = w_{\mu}$. O limite não relativístico (vide Apêndice C) contribui para o hamiltoniano com a seguinte correção

$$\Delta H = -eg\vec{w} \cdot \vec{B}.\tag{3.5}$$

Tal interação não é prevista pela eletrodinâmica quântica usual. Então, podemos impor um limite superior para o acoplamento $g\vec{w}$. O acoplamento $g\vec{w}$ está desempenhando um papel de momento magnético para o píon, permitindo estudá-lo como uma interação *"background-*órbita". Assim, a correção correspondente ao hidrogênio piônico gera um hamiltoniano dado por

$$\Delta H = -\frac{e^2 g}{4\pi\mu r^3} \vec{w} \cdot \vec{L},\tag{3.6}$$

onde μ é a massa reduzida do sistema próton-píon e \vec{B} o campo magnético efetivo na Eq. (3.5) dado por

$$\vec{B} = \frac{e\vec{L}}{4\pi\mu r^3},\tag{3.7}$$

com o mesmo formato que aparece no caso spin-órbita.

Por conveniência, tomamos o campo de fundo \vec{w} ao longo do eixo- z. A correspondente variação de energia para o hidrogênio piônico é dada por

$$\Delta E = \langle \Delta H \rangle = -\frac{e^2 g w_z}{4\pi\mu} \left\langle \frac{L_z}{r^3} \right\rangle.$$
(3.8)

Somente estados com a projeção de momento angular não nulos recebem correções LV na energia enquanto a energia do estado 1S permanece inalterada. Todos os outros estados ganham a seguinte correção de energia:

$$\Delta E = -egw_z \frac{\mu^2 e^7}{(4\pi)^4} \frac{m_\ell}{n^3 \left(\ell + 1\right) \left(\ell + 1/2\right) \ell},\tag{3.9}$$

onde n = 1,2,3,4... e l = 0,1,2,3,4...(n-1). Observa-se que os estados com valores baixos de n e ℓ recebem correções mais significativas advindas da violação de Lorentz. Consequentemente, o estado 2P é o mais afetado, pois o estado 1S não recebe correção da LV.



Figura 3.1: diagrama representando a LV com estados l > 0 afetados e estados 2p separados em 2. A correção da força forte para o estado fundamental é de, aproximadamente, 7 eV para π H e ~ 283 eV para KH.

No estudo do hidrogênio piônico, as transições dos estados excitados 4P, $3P \in 2P$ para o estado fundamental 1S, são usadas para medir os efeitos das correções fortes. A diferença entre as predições da QED e os dados experimentais são usados para calcular o *shift* de energia do estado 1S contendo efeitos de QCD, como mostrado na Fig. (3.1). Na Ref. [71] O valor experimental da energia de transição do estado 1S é

$$\varepsilon_{1S} \approx (7.086 \pm 0.007(stat) \pm 0.006(sys)) \,\mathrm{eV}.$$
 (3.10)

3.2.1.1 Cálculo dos bounds para as constantes de acoplamento LV CPT-ímpar

a) Píon

Nosso objetivo é considerar essa mudança de energia supondo que as correções de LV sejam menores que o erro de correções advindo da interação nuclear forte. Assim, obtemos o seguinte limite superior muito restritivo para a constante de acoplamento.

O erro experimental é dado pela soma dos erros estatístico e sistemático: $(\Delta a = 0.007 + 0.006 = 0.013 = 1.3 \times 10^{-2} eV)$ e fazendo n = 2, temos

$$-egw\frac{\mu_p^2 e^7}{\left(4\pi\right)^4}\frac{1}{24} < \Delta a_{QCD} = 1.3 \times 10^{-2} \tag{3.11}$$

$$|eg_{\pi}w_{z}| < 24. \ (4\pi)^{4} \frac{\Delta a}{\mu_{p}^{2}e^{7}} = 24 \times (4\pi)^{4} \frac{1.3 \times 10^{-2}}{(1.21 \times 10^{8})^{2} (0.303)^{7}}$$
$$|eg_{\pi}w_{z}| < 2.3 \times 10^{-9} \,\mathrm{eV}^{-1}, \tag{3.12}$$

em que usamos a massa reduzida do sistema píon-próton $(1.21 \times 10^8 \text{eV})^1$ [72].

Alternativamente, podemos considerar a transição $4P \rightarrow 3P$ para o hidrogênio piônico, que corresponde à contribuição da QED pura. A partir da tabela 5 da referência [71] é possível estimar a diferença entre a predição da QED para transição $4P \rightarrow 3P$ e a medida experimental. Essa diferença é

$$\left| E_{4p->3p}^{EXP} - E_{4p->3p}^{QED} \right| \approx 0.22 \,\mathrm{eV}.$$
 (3.13)

Substituindo (3.13) em Eq. (3.9), para n = 4 e n = 3 (subnível P), obtemos a contribuição da QED e chegamos ao seguinte limite superior para a constante de acoplamento LV:

$$|eg_{\pi}w_z| \le 1 \times 10^{-7} \text{eV}^{-1},$$
(3.14)

que está próximo dos resultados anteriores obtidos quando consideramos as mudanças de correções provenientes da interação nuclear forte.

b) Káon

¹Enfatizamos, novamente, que estamos trabalhando no sistema natural de unidades em que $c = \hbar = 1$, a carga elétrica é adimensional e possui valor 0,303 e a constante de estrutura fina $\alpha = 1/137$.

Um procedimento similar pode ser usado com o hidrogênio kaônico, cuja energia do estado 1S advindo da força nuclear forte [73] é

$$\varepsilon_{1S} \approx 283 \pm 36(stat) \pm 6(sys) \,\mathrm{eV},$$
(3.15)

fazendo n = 2 e $\Delta a = 36 + 6 = 42 \,\text{eV}$, obtemos para a constante de acoplamento o seguinte valor restritivo

$$|eg_K w_z| < 24 (4\pi)^4 \frac{\Delta a}{\mu^2 e^7} = 24 \times (4\pi)^4 \frac{42}{(323, 49 \times 10^6)^2 (0.303)^7},$$
$$|eg_K w_z| < 1.02 \times 10^{-6} \,\mathrm{eV}^{-1}, \qquad (3.16)$$

a massa reduzida do sistema próton+káon usada foi de 323.49MeV [73].

3.2.2 Contribuição do setor CPT-par

Consideramos somente as contribuições advindas de $K_{\mu\nu\alpha\beta}$. O termo relevante para nossa análise está contido na parte da derivada covariante não-mínima (3.3), no qual o termo LV e CPT-par é

$$-i\frac{e\tilde{g}}{2}(k_{\phi F}^{(6)})_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^{\nu}F^{\alpha\beta}\left(\left(D^{\mu}\phi\right)^{\dagger}\phi-\phi^{\dagger}D^{\mu}\phi\right).$$
(3.17)

O limite não relativístico (vide Apêndice D) contribui com a seguinte correção à hamiltoniana do átomo mesônico,

$$\Delta H = -\frac{e\tilde{g}}{2} \left(\kappa_{DE}\right)_{ij} \partial^{i} E^{j} - \frac{e\tilde{g}}{2} \left(\kappa_{DB}\right)_{ij} \partial^{i} B^{l}.$$
(3.18)

O segundo termo de (3.18) não contribui em primeira ordem devido suas propriedades de simetria com respeito à simetria de paridade (\mathcal{P}): $\mathcal{P}^{-1}(\kappa_{DB})_{ij}\partial^i B^l \mathcal{P} = -(\kappa_{DB})_{ij}\partial^i B^l$. Por outro lado, $(\kappa_{DE})_{ij}\partial^i E^j$ contribui para os estados 2p, $3p \in 4p$, porém não contribui para o estado 1s. A contribuição não nula relevante é²:

$$\Delta E_n = -\frac{e\tilde{g}\alpha^{7/2}\mu^3\left(\kappa^{(DE)}\right)}{60\sqrt{\pi}n^3},\tag{3.19}$$

onde introduzimos a quantidade LV $\kappa^{(DE)}$

$$\kappa^{(DE)} = (\kappa_{DE})_{xx} + (\kappa_{DE})_{yy} - 2(\kappa_{DE})_{zz}.$$
(3.20)

²Vide apêndice **E**.

3.2.2.1 Cálculo dos bounds para as constantes de acoplamento LV CPT-par

Diferentemente do caso CPT-ímpar, este não separa os níveis de energia em duas partes, mas é também possível estimar um limite superior restritivo para o acoplamento $k_{\mu\nu\alpha\beta}$.

a) Píon

Da mesma forma, a Eqs. (3.10) pode ser usada para fornecer os limites superiores, assim temos

$$\left| e \tilde{g}_{\pi} \kappa^{(DE)} \right| < 1.9 \times 10^{-16} eV^{-2},$$
 (3.21)

Considerando a transição $4P \rightarrow 3P$ no hidrogênio piônico e o dado na Eq. (3.13), é possível estimar um limite superior para o caso CPT-par através de interações puramente eletromagnéticas, cuja expressão é a seguinte:

$$\left| e \tilde{g}_{\pi} \kappa^{(DE)} \right| < 1.8 \times 10^{-14} eV^{-2},$$
 (3.22)

isto é maior duas ordens de grandeza que o resultado obtido anteriormente, quando consideramos apenas interação nuclear forte.

b) Káon

Para o káon, usamos o dado expresso na equação (3.15), assim temos o seguinte limite superior

$$\left| e \tilde{g}_K \kappa^{(DE)} \right| < 3.3 \times 10^{-14} eV^{-2}.$$
 (3.23)

3.2.3 A contribuição do próton

No caso do átomo de hidrogênio usual, devido à massa do próton ser muito maior que a massa do elétron, é razoável usar a abordagem padrão que considera a dinâmica da partícula de menor massa em presença de um campo externo produzido pela partícula de maior massa. Não obstante, no hidrogênio mesônico, tal diferença de massa não é tão grande, mas é possível implementar a mesma técnica considerando os efeitos de recuo de forma perturbativa. Os efeitos mistos de LV e qualquer outra contribuição perturbativa serão tratados como de segunda ordem ou superior ou mesmo serão negligenciados. Nesse ínterim, o próton pode ser considerado uma fonte pontual.

Para nossa análise, consideramos a contribuição do próton representada pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left(\gamma^{\mu} i \mathcal{D}^{(p)}_{\mu} - M \right) \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \qquad (3.24)$$

em que M é a massa do próton e $\mathcal{D}^{(p)}_{\mu}\psi$ é a derivada covariante não mínima, incluindo os termos

de campos de fundo CPT-ímpar e CPT-par dada por

$$\mathcal{D}_{\mu}^{(p)}\psi = \partial_{\mu}\psi + ieA_{\mu}\psi + \frac{ieg^{(p)}}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(k_{\phi F}^{(5)})^{(p)\nu}F^{\alpha\beta}\psi + \frac{ie\tilde{g}^{(p)}}{2}(k_{\phi F}^{(6)})^{(p)}_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial^{\nu}F^{\alpha\beta})\psi.$$
(3.25)

Da mesma forma que fizemos na seção anterior, usaremos uma notação mais compacta $(k_{\phi F}^{(5)})^{(p)\nu} \rightarrow w^{(p)\nu}$ e $(k_{\phi F}^{(6)})^{(p)}_{\mu\nu\alpha\beta} \rightarrow (k)^{(p)}_{\mu\nu\alpha\beta}$.

Obtendo a equação de movimento do campo eletromagnético produzido pelo férmion via Euler-Lagrange, temos a parcela em relação a A_μ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\gamma}} = -e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\eta_{\lambda\mu}\psi, \qquad (3.26)$$

enquanto a parcela do termo CPT-ímpar é dada por

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{CPT_impar}}{\partial (\partial_{\theta} A_{\gamma})} = -\bar{\psi}\gamma^{\mu} \frac{eg^{(p)}}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} w^{(p)\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\theta} A_{\gamma})} \left(\partial^{\alpha} A^{\beta} - \partial^{\beta} A^{\alpha}\right) \psi$$

$$= -\bar{\psi}\gamma^{\mu} \frac{eg^{(p)}}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} w^{(p)\nu} \left(\delta^{\theta}_{\alpha} \delta^{\gamma}_{\beta} - \delta^{\theta}_{\beta} \delta^{\gamma}_{\alpha}\right) \psi$$

$$= -\bar{\psi}\gamma^{\mu} eg^{(p)} \left(\epsilon_{\mu\nu\theta\gamma} w^{(p)\nu}\right) \psi, \qquad (3.27)$$

e a parcela do termo CPT-par é dada por

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{CPT\text{-}par}}{\partial (\partial_{\theta} A_{\gamma})} = -\bar{\psi}\gamma^{\mu} \frac{ie\tilde{g}^{(p)}}{2} (k)^{(p)}_{\mu} {}^{\nu\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial (\partial_{\theta} A_{\gamma})} (\partial_{\nu} (F_{\alpha\beta}\psi) - (F_{\alpha\beta}\partial_{\nu}\psi)
= \bar{\psi}\gamma^{\mu} \frac{ie\tilde{g}^{(p)}}{2} (k)^{(p)}_{\mu} {}^{\nu\alpha\beta} ((\delta^{\theta}_{\alpha}\delta^{\gamma}_{\beta} - \delta^{\theta}_{\beta}\delta^{\gamma}_{\alpha}) \partial_{\nu}\psi)
= \bar{\psi}\gamma^{\mu} ie\tilde{g}^{(p)} ((k)^{(p)}_{\mu\nu\theta\gamma} \partial^{\nu}\psi)$$
(3.28)

Somando as Eqs. (3.27), (3.28) e o termo de Maxwell, temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{odd_even+Maxwell}}{\partial \left(\partial_{\theta} A_{\gamma}\right)} = -\bar{\psi}\gamma^{\mu}eg^{(p)}\left(\epsilon_{\mu\nu\theta\gamma}w^{(p)\nu}\right)\psi + F_{\gamma\theta} + \bar{\psi}\gamma^{\mu}ie\tilde{g}^{(p)}\left(\left(k\right)^{(p)}_{\mu\nu\theta\gamma}\partial^{\nu}\psi\right)$$
(3.29)

e substituindo (3.26) e (3.29) na equação de Euler-Lagrange, ficamos com

$$\partial^{\mu}F_{\mu\beta} = e\mathcal{J}_{\beta},\tag{3.30}$$

onde

$$\mathcal{J}_{\beta} = \left(\eta_{\mu\beta} - g^{(p)}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}w^{(p)\nu}\partial^{\alpha} + \tilde{g}^{(p)}(k)^{(p)}_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^{\nu}\partial^{\alpha}\right)j^{\mu},\tag{3.31}$$

com $j^{\mu} = \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi$ sendo a corrente eletromagnética padrão. Sem perda de generalidade, desconsideramos a translação do próton e supomos que sua densidade de carga seja uma distribuição
localizada. Sob tais circunstâncias e considerando o próton como uma fonte pontual, podemos fazer a densidade de carga $j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \delta(\mathbf{r})$ e a densidade de corrente $j^i = \bar{\psi}\gamma^i\psi = 0$, tal que a equação do campo de calibre (3.30) fornecem

$$-\nabla^2 A_0 = e \left(1 - \tilde{g}^{(p)} k^{(p)}_{0i0j} \partial^i \partial^j \right) \delta\left(\mathbf{r}\right), \qquad (3.32)$$

$$-\nabla^2 A_i = e \left(g^{(p)} \epsilon_{0ijk} w^{(p)j} \partial^k + \tilde{g}^{(p)} k^{(p)}_{ijl0} \partial^j \partial^l \right) \delta\left(\mathbf{r}\right), \qquad (3.33)$$

As soluções para $A_0 \in A_i$ serão obtidas usando o método de Green. Escrevendo o campo de gauge $A_{\mu} \in \delta^3(\vec{r})$ como transformadas de Fourier, temos

$$A_{\mu}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^{3}\mathbf{p}}{\left(2\pi\right)^{3}} \tilde{A}_{\mu}(\mathbf{p}) \exp\left(-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right), \qquad (3.34)$$

$$\delta^{3}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{3}} \int d^{3}\mathbf{p} \exp\left(-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right).$$
(3.35)

que nos fornece às seguintes soluções para os campos:

$$A_{0} = \frac{e}{4\pi r} - \frac{e}{4\pi} \tilde{g}^{(p)} k_{0i0j}^{(p)} \partial^{i} \partial^{j} \left(\frac{1}{r}\right), \qquad (3.36)$$

$$A^{i} = -\frac{e}{4\pi}g^{(p)}\epsilon^{ijk}w^{(p)j}\frac{x^{k}}{r^{3}} - \frac{e}{4\pi}\tilde{g}^{(p)}(k)^{(p)}_{ijk0}\partial^{j}\partial^{k}\left(\frac{1}{r}\right).$$
(3.37)

Assim, para a Eq.(3.24) vamos obter o hamiltoniano não relativístico da contribuição LV decorrente do hidrogênio piônico fazendo a substituição dos campos (3.36), (3.37) na Eq. (2.55), temos

$$\Delta H = \frac{1}{\mu} e A^{i} p^{i} - e A_{0}$$

$$= \frac{1}{\mu} e \left(-\frac{e}{4\pi} g^{(p)ijk} w^{(p)j} \frac{x^{k}}{r^{3}} p^{i} - \frac{e}{4\pi} \tilde{g}^{(p)}(k)^{(p)}_{ijk0} \partial^{j} \partial^{k} \left(\frac{1}{r} p^{i} \right) \right)$$

$$+ \frac{e^{2}}{4\pi} \tilde{g}^{(p)} k^{(p)}_{0i0j} \partial^{i} \partial^{j} \left(\frac{1}{r} \right).$$
(3.38)

Somando os termos, ficamos com a contribuição ao hidrogênio piônico com a seguinte forma

$$\Delta H = -\frac{e^2}{4\pi\mu}g^{(p)}\frac{\vec{w}^{(p)}\cdot\vec{L}}{r^3} + \frac{e^2}{4\pi}\tilde{g}^{(p)}k^{(p)}_{0i0j}\partial^i\partial^j\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{e^2}{4\pi\mu}\tilde{g}^{(p)}(k)^{(p)}_{0kij}\partial^j\partial^k\left(\frac{1}{r}p^i\right).$$
 (3.39)

Estes coeficientes têm a mesma estrutura que os considerados anteriormente em (3.2.1) e (3.2.2), consequentemente, eles podem ser tratados de maneira similar. Para calcular os limites superiores dos coeficientes de LV em (3.39), podemos usar os dados da espectroscopia piônica e/ou

kaônica, mas eles não fornecem os melhores limites superiores restritivos. Os melhores para $g^{(p)}\vec{w}^{(p)} \in \tilde{g}^{(p)}k_{0i0j}^{(p)}$ são obtidos quando usamos o resultados da espectroscopia de hidrogênio. Os limites superiores são

$$\left| eg^{(p)} w_z^{(p)} \right| < 5.1 \times 10^{-16} \,\mathrm{eV}^{-1},$$
(3.40)

е

$$\left| e \tilde{g}^{(p)} \kappa^{(p)}_{(DE)} \right| < 5.1 \times 10^{-18} \,\mathrm{eV}^{-2},$$

respectivamente.

3.3 Contribuições a 1-loop para a ação efetiva do fóton

Ao longo desta seção, calcularemos as correções a 1-*loop* do modelo (3.1) produzidas em primeira ordem pelos vetores campos de fundo introduzido na derivada covariante não-mínima (3.2). Tais correções modificam a interação de Coulomb. Na sequência, estudaremos suas contribuições para o espectro de energia dos átomos de hidrogênio padrão e hidrogênio mesônico.

As regras de Feynman para os cálculos a 1-*loop*, no *gauge* de Feynman, que usaremos, são descritas abaixo:

• Propagador do campo escalar dado por

$$\begin{array}{c}
p \\
i\Delta\left(p\right) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon};
\end{array}$$
(3.41)

• Propagador do fóton

• A função de vértice a nível de árvore para a função de três pontos para o campo escalar



que corresponde ao resultado

$$i\Gamma_{\mu}\left(p',p\right) = ieo_{\mu\alpha}\left(p'-p\right)\left(p+p'\right)^{\alpha}; \qquad (3.43)$$

• A função de vértice a nível de árvore da função de quatro pontos para o campo escalar é dada por



Isto pode ser escrito como

$$i\Gamma_{\mu\nu}(p', p, q) = ie^2 o_{\alpha\mu}(q) \, o^{\alpha}{}_{\nu}(p - p' - q) \,. \tag{3.44}$$

Nas Eqs. (3.43) e (3.44) introduzimos o tensor $o_{\mu\beta}(q)$, o qual é dado por:

$$o_{\mu\beta}(q) = \eta_{\mu\beta} - ig\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(k^{(5)}_{\phi F})^{\nu}q^{\alpha} - \tilde{g}(k^{(6)}_{\phi F})_{\mu\nu\alpha\beta}q^{\nu}q^{\alpha}, \qquad (3.45)$$

onde $o_{\mu\beta}(q)$ carrega a informação dos setores CPT par e ímpar.

3.3.1 Polarização do vácuo a 1-loop

As correções radiativas a 1- *loop* de interesse são aquelas que contêm apenas contribuições em primeira ordem no *background* da violação de Lorentz $g(k_{\phi F}^{(5)})^{\mu}$ e $\tilde{g}(k_{\phi F}^{(6)})_{\mu\nu\alpha\beta}$. Os gráficos relevantes de Feynman que contribuem no cálculo das correções radiativas para o tensor de polarização do vácuo são mostrados na figura a seguir:



Figura 3.2: correções a 1-loop do propagador.

De onde escrevemos a amplitude associada como

$$-i\pi_{\mu\nu}(q) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} i\Gamma_{\mu\nu}(p, p, -q) \, i\Delta(p) + \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} i\Gamma_{\mu}(p+q, p) \, i\Gamma_{\nu}(p, p+q) \, i\Delta(p+q) \, i\Delta(p), \qquad (3.46)$$

que pode ser expressa na seguinte forma:

$$-i\pi_{\mu\nu}(q) = o_{\mu}{}^{\alpha}(q) \left[-i\pi^{SQED}_{\alpha\beta}(q) \right] o^{\beta}{}_{\nu}(q), \qquad (3.47)$$

onde $\pi_{\alpha\beta}^{SQED}(q)$ é o tensor de polarização da SQED usual, cuja parte divergente (calculada a partir da técnica de regularização dimensional $D \to 4 - 2\epsilon$) é dada pela equação

$$-i\pi^{SQED}_{\alpha\beta}(q) = \frac{-ie^2}{48\pi^2\epsilon}(q^2\eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) + termos\ finitos\ UV.$$
(3.48)

Ao considerar apenas contribuições LV em primeira ordem na Eq. (3.47), obtemos

$$\pi_{\mu\nu}(q) = \frac{e^2}{48\pi^2\epsilon} \left(q^2\eta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu\right) - i\frac{e^2g}{24\pi^2\epsilon}\epsilon_{\mu\beta\alpha\nu}w^\beta q^\alpha q^2 - \frac{e^2\tilde{g}}{24\pi^2\epsilon}k_{\mu\beta\alpha\nu}q^\beta q^\alpha q^2.$$
(3.49)

Este resultado nos dá a contribuição proveniente da função de Green do fóton usual, além da contribuição advinda do termo LV. O surgimento do último termo (3.49) requer um termo adicional no setor de *gauge*. Para fins de renormalização, concluímos que este termo deve ser

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{g}{4} \epsilon_{\mu\beta\alpha\nu} u^{\beta}_{(w)} A^{\mu} \Box F^{\alpha\nu} + \frac{\tilde{g}}{4} l^{\mu\beta\alpha\nu}_{(k)} F_{\mu\beta} \Box F_{\alpha\nu}.$$
(3.50)

Ambos os termos estão contidos no setor dos fótons do MPE não-mínimo: o caso CPT-ímpar produz um operador de dimensão-5, o qual é similar com a versão do termo de Carroll-Field-Jackiw de ordem superior [74], enquanto que o caso CPT- par produz um operador de dimensão 6, parecendo com a versão dos termos de fótons LV e CPT mínimo de ordem superior. Obviamente, essas contribuições produzirão mudanças na estrutura original do propagador do fóton e, consequentemente, no comportamento da interação coulombiana. Vale a pena mencionar que o termo CPT-ímpar também foi gerado radiativamente como uma correção UV-finita em [75].

3.3.2 Limite superior para o acoplamento $(g\vec{u}_{(w)})$

Primeiramente, analisamos as modificações da interação coulombiana advinda do termo CPT-ímpar da Eq.(3.50), considerando a seguinte densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\text{odd}}^{(5)} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{g}{4} \epsilon_{\mu\beta\alpha\nu} u^{\beta}_{(w)} A^{\mu} \Box F^{\alpha\nu} - J_{\mu} A^{\mu}.$$
(3.51)

A equação de movimento no calibre de Lorenz $(\partial \cdot A = 0)$ é dada por

$$\Box A_{\mu} + g\epsilon_{\mu\beta\alpha\nu} u^{\beta}_{(w)} \Box \partial^{\alpha} A^{\nu} = J_{\mu}.$$
(3.52)

Para nossos propósitos, no regime estacionário e em primeira ordem de LV, podemos fazer $J_0 = q\delta(\vec{r}) \in J_i = 0$. A equação do campo de gauge (3.52) fornece as componentes

$$-\nabla^2 A_0 = q\delta(\vec{r}), \qquad (3.53)$$

$$-\nabla^2 \vec{A} = -qg\vec{u}_{(w)} \times \nabla\delta(\vec{r}), \qquad (3.54)$$

cujas soluções são

$$A_0 = \frac{q}{4\pi r},\tag{3.55}$$

$$\vec{A} = g \vec{u}_{(w)} \times \frac{q}{4\pi r^3} \vec{r},$$
 (3.56)

respectivamente.

Observamos que o termo CPT-ímpar não modifica o potencial escalar, mas introduz um potencial vetor não nulo que está ausente na situação invariante de Lorentz. Assim, a respectiva contribuição LV para o hamiltoniano do hidrogênio mesônico é

$$\Delta H = \frac{ge^2}{4\pi\mu r^3} \vec{u}_{(w)} \cdot \vec{L},\tag{3.57}$$

cujo termo é similar ao obtido na Eq. (3.6). Portanto, os limites superiores esperados para a constante de acoplamento não-mínimo $g\vec{u}_{(w)}$ são os mesmos dados nas equações Eqs. (3.12), (3.16) e (3.40) para hidrogênio piônico, hidrogênio kaônico e átomos de hidrogênio ordinário, respectivamente.

3.3.3 Limite superior para o acoplamento $\left(\tilde{g}l_{(k)}^{\mu\beta\alpha\nu}\right)$

Examinamos, aqui, as contribuições induzidas na interação de Coulomb pelo termo CPT-par apresentado na Eq. (3.50), considerando a densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\text{par}}^{(6)} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{\tilde{g}}{4} l^{\mu\beta\alpha\nu}_{(k)} F_{\mu\beta} \Box F_{\alpha\nu} - J_{\mu} A^{\mu}.$$
(3.58)

Usando o calibre de Lorenz ($\partial \cdot A = 0$), a equação de movimento para o campo A pode ser escrita como

$$\Box A^{\nu} - \tilde{g} l^{\mu\beta\alpha\nu}_{(k)} \partial_{\alpha} \Box F_{\mu\beta} = J^{\nu}.$$
(3.59)

É importante destacar que a solução da equação do campo (3.59) segue a mesma abordagem usada no caso anterior em que consideramos novamente a fonte eletromagnética como uma partícula pontual carregada. Assim, obtemos os seguintes potenciais escalares e vetoriais:

$$A^{0} = \frac{q}{4\pi r} + \frac{q}{2\pi} \tilde{g} l^{i0j0}_{(k)} \partial_{j} \partial_{i} \left(\frac{1}{r}\right), \qquad (3.60)$$

$$A^{i} = \frac{q}{2\pi} \tilde{g} l^{j0ki}_{(k)} \partial_{k} \partial_{j} \left(\frac{1}{r}\right), \qquad (3.61)$$

e também contribuição correspondente para o hamiltoniano do hidrogênio mesônico como sendo

$$\Delta H = -\frac{2\tilde{g}e^2}{4\pi} l^{i0j0}_{(k)} \partial_j \partial_i \left(\frac{1}{r}\right) + \frac{2\tilde{g}e^2}{4\pi\mu} l^{j0ki}_{(k)} \partial_k \partial_j \left(\frac{1}{r}p^i\right).$$
(3.62)

Essa contribuição tem a mesma estrutura LV como as obtidas anteriormente nas Eqs. (3.18) e (3.39). É importante notar que, da mesma forma, o segundo termo em (3.62) não é invariante sob paridade e, portanto, não contribui em primeira ordem.

Ao contrário do acoplamento não-mínimo (3.2), os termos em (3.50) pertencem ao setor do MPE fotônico não-mínimo. Por esta razão, eles contribuirão não apenas para o hidrogênio usual, mas também para um número muito grande de outros fenômenos ou processos. Consequentemente, existem muitas maneiras diferentes de impor limites, como é mostrado nas Tabelas D15 e D16 da referência [12].

Capítulo 4

Eletrodinâmica de Podolsky

Neste capítulo, ilustramos, no contexto da TQC, a existência de uma eletrodinâmica alternativa à teoria do eletromagnetismo de Maxwell, que levanta outras possibilidades de fenômenos e foi proposta por Boris Podolsky, na década de 40 [40–43]. Essa eletrodinâmica se destaca por ser de derivada superior, manter a invariância de calibre (gauge) e de Lorentz, e também apresentar dois modos: um sem massa e outro massivo. A referência [45] estudou a estabilidade, causalidade e o propagador deste modelo com a quebra da invariância de Lorentz.

A densidade de lagrangiana que representa a eletrodinâmica de Podolsky é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2m^2}\partial_{\mu}F^{\mu\nu}\partial_{\zeta}F^{\zeta}{}_{\nu}, \qquad (4.1)$$

o parâmetro m possui dimensão de massa 1.

A equação de Euler-Lagrange para o campo de calibre é calculada via a fórmula

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu}} - \partial_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} A_{\mu})} + \partial_{\alpha} \partial_{\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} \partial_{\beta} A_{\mu})} = 0.$$
(4.2)

Calculando as derivadas, obtemos

$$\partial_{\alpha}\partial_{\beta}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\alpha}\partial_{\beta}A_{\mu}\right)} = \frac{1}{m^{2}}\Box\partial_{\beta}F^{\beta\mu} , \quad \partial_{\alpha}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\alpha}A_{\mu}\right)} = -F^{\alpha\mu} , \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\mu}} = 0 , \quad (4.3)$$

onde usamos o D'alembertiano definido por $\Box = \partial_{\alpha} \partial^{\alpha}$. Substituindo (4.3) em (4.2) obtemos

$$\left(1 + \frac{1}{m^2}\Box\right)\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = 0.$$
(4.4)

A identidade de Bianchi para o campo de calibre é

$$\partial_{\mu}\tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \qquad (4.5)$$

a mesma da eletrodinâmica de Maxwell.

A equação (4.4), proporciona relações de dispersão representando uma partícula massiva (campo de Proca) e uma sem massa (campo de Maxwell) [52].

Agora, escrevemos explicitamente as quatro equações que descrevem os aspectos clássicos da eletrodinâmica de Podolsky. Da Eq. (4.4) obtemos a lei de Gauss do modelo

$$\left(1+m^{-2}\Box\right)\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0,\tag{4.6}$$

e a respectiva lei de Ampère-Maxwell

$$\left(1+m^{-2}\Box\right)\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}-\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=\vec{0}.$$
(4.7)

Outras duas equações são obtidas a partir da identidade de Bianchi. A primeira é dada por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{4.8}$$

que estabelece a ausência de monopolos magnéticos e a segunda resulta na lei de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \tag{4.9}$$

No caso da presença de uma fonte j^{μ} acoplada linearmente ao campo de calibre $(A_{\mu}j^{\mu})$, a equação de movimento resulta ser

$$\left(1 + \frac{1}{m^2}\Box\right)\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = j^{\nu}.$$
(4.10)

É fácil verificar que a densidade de corrente j^{μ} satisfaz a condição $\partial_{\mu}j^{\mu} = 0$, assim, ela é conservada.

Por outro lado, substituindo $F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}$ na Eq. (4.10), ficamos com

$$\left(1 + \frac{1}{m^2}\Box\right)\left(\eta^{\mu\nu}\Box - \partial^{\nu}\partial^{\mu}\right)A_{\mu} = j^{\nu}.$$
(4.11)

O operador $(m^2 + \Box) (\eta^{\mu\nu} \Box - \partial^{\nu} \partial^{\mu})$ não possui inversa, consequentemente, não podemos obter uma função de Green [52]. Esse problema é contornado utilizando uma condição de Lorenz generalizada [49]

$$(m^2 + \Box) \partial_\mu A^\mu = 0, \qquad (4.12)$$

a qual permite escrever a Eq. (4.11) na forma

$$\left(m^2 + \Box\right) \Box A^{\mu} = m^2 j^{\nu}, \tag{4.13}$$

que é a equação do campo eletromagnético de Podolsky na presença de uma fonte com calibre de Lorenz generalizado.

4.1 Estrutura canônica da eletrodinâmica de Podolsky

Estudamos a estrutura canônica da eletrodinâmica de Podolsky seguindo o procedimento proposto por Dirac [55], que permite definir corretamente a hamiltoniana que governa a dinâmica do sistema. A partir desta análise, calculamos a amplitude vácuo-vácuo no formalismo da integração funcional que proporciona as relações de dispersão e os graus de liberdade físicos do modelo.

Definimos as variáveis independentes $A_{\mu} \in \bar{A}_{\mu} = \partial_0 A_{\mu}$, cujos momentos canônicos conjugados $\pi^{\mu} \in \bar{\pi}^{\mu}$ são expressos por

$$\pi^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 A_{\mu}} - \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \partial_0 A_{\mu})} - \partial_k \left[\frac{\partial}{\partial (\partial_0 \partial_k A_{\mu})} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k \partial_0 A_{\mu})} \right], \tag{4.14}$$

е

$$\bar{\pi}^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_0 \partial_0 A_{\mu}\right)},\tag{4.15}$$

respectivamente.

Assim, o momento canônico $\bar{\pi}^{\mu}$ escrito explicitamente é

$$\bar{\pi}^{\mu} = \frac{1}{m^2} \left(\eta^{\mu 0} \partial_{\lambda} F^{0\lambda} - \partial_{\lambda} F^{\mu \lambda} \right).$$
(4.16)

De imediato, observamos que a componente $\bar{\pi}^0 = 0$, gera um vínculo primário definido como

$$\varphi_1 = \bar{\pi}^0 \approx 0. \tag{4.17}$$

Na terminologia de Dirac, o símbolo (\approx) representa uma igualdade fraca no espaço de fase reduzido.

Por outro lado, a componente $\bar{\pi}^k$ dada por

$$\bar{\pi}^{k} = -\frac{1}{m^{2}}\partial_{\lambda}F^{k\lambda} = \frac{1}{m^{2}}\partial_{0}F^{0k} - \frac{1}{m^{2}}\partial_{j}F^{kj}, \qquad (4.18)$$

representa uma variável dinâmica, pois permite expressar a variável $\partial_0 \bar{A}_k = \dot{\bar{A}}_k$ em termos das variáveis canônicas

$$\partial_0 \bar{A}^k = m^2 \bar{\pi}^k + \partial_i F^{ki} + \partial^k \bar{A}_0. \tag{4.19}$$

O momento canônico π^{μ} é expresso como

$$\pi^{\mu} = F^{\mu 0} - \frac{1}{m^2} \left(\eta^{\mu j} \partial_j \partial_\lambda F^{0\lambda} - \partial_0 \partial_\lambda F^{\mu \lambda} \right), \qquad (4.20)$$

cujas componentes temporal π^0 e espacial π^i são

$$\pi^0 = \frac{1}{m^2} \partial_0 \partial_k F^{0k}, \tag{4.21}$$

$$\pi^{k} = F^{k0} - \frac{1}{m^{2}} \left(\partial^{k} \partial_{\lambda} F^{0\lambda} - \partial_{0} \partial_{\lambda} F^{k\lambda} \right), \qquad (4.22)$$

respectivamente, não acarretando vínculos primários.

Os parênteses de Poisson (PB) fundamentais para os pares de variáveis canônicas são

$$\{A_{\mu}(x), \pi^{\nu}(y)\} = \delta^{\nu}_{\mu} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \qquad (4.23)$$

$$\{\bar{A}_{\mu}(x), \bar{\pi}^{\nu}(y)\} = \delta^{\nu}_{\mu} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \qquad (4.24)$$

com as outras combinações nulas.

A densidade hamiltoniana canônica definida via a transformação de Legendre

$$\mathcal{H} = \pi^{\alpha} \dot{A}_{\alpha} + \bar{\pi}^{\alpha} \dot{\bar{A}}_{\alpha} - \mathcal{L}$$
(4.25)

é escrita a seguir:

$$\mathcal{H} = (\pi^{0}\bar{A}_{0} + \pi^{j}\bar{A}_{j} + \frac{1}{2}m^{2}\bar{\pi}^{k}\pi_{k} + \bar{\pi}^{k}\left(\partial_{k}\bar{A}_{0} - \partial_{l}F_{kl}\right) - \frac{1}{2m^{2}}\left(\partial_{k}\bar{A}_{k} - \partial_{k}\partial_{k}A_{0}\right)^{2} + \frac{1}{2}\left(\bar{A}_{k} - \partial_{k}A_{0}\right)^{2} + \frac{1}{4}F_{jk}F_{jk}, \qquad (4.26)$$

em função dos momentos $\pi^{\mu}, \bar{\pi}_{\mu}$ e das variáveis dinâmicas A^{μ} e \bar{A}^{μ} . A hamiltoniana canônica do modelo é

$$H_{C} = \int d^{3}\vec{x} \mathcal{H},$$

$$= \int d^{3}\vec{x} \left[\left(\pi^{0}\bar{A}_{0} + \pi^{j}\bar{A}_{j} + \frac{1}{2}m^{2}\bar{\pi}^{k}\pi_{k} + \bar{\pi}^{k} \left(\partial_{k}\bar{A}_{0} - \partial_{l}F_{kl} \right) - \frac{1}{2m^{2}} \left(\partial_{k}\bar{A}_{k} - \partial_{k}\partial_{k}A_{0} \right)^{2} + \frac{1}{2} \left(\bar{A}_{k} - \partial_{k}A_{0} \right)^{2} + \frac{1}{4}F_{jk}F_{jk} \right].$$
(4.27)

A seguir, estudaremos a estrutura canônica da eletrodinâmica de Podolsky utilizando o algoritmo construído por Dirac para sistemas vinculados.

O primeiro passo é definir a hamiltoniana primária dada pela soma da hamiltoniana canônica com todos os vínculos primários da teoria, ou seja, escrevemos

$$H_P = H_C + \int d^3 \vec{x} \,\zeta_1 \varphi_1, \tag{4.28}$$

onde ζ_1 é um multiplicador de Lagrange.

Com a hamiltoniana primária calculamos a evolução temporal do vinculo primário ou relação de consistência do vínculo φ_1 . Assim, temos

$$\dot{\varphi}_{1}(x) = \{\varphi_{1}(x), H_{P}\} \approx 0$$

$$= \{\varphi_{1}(x), H_{C}\} = \{\bar{\pi}^{0}(x), H_{C}\}$$

$$\dot{\varphi}_{1}(x) = -\pi^{0} + \partial_{k}\bar{\pi}^{k} \approx 0.$$
(4.29)
(4.29)
(4.29)

Portanto, a evolução temporal de φ_1 gera um vínculo secundário que é definido como

$$\varphi_2 = \pi^0 - \partial_k \bar{\pi}^k \approx 0. \tag{4.31}$$

Este vínculo já poderia ter sido identificado como um vínculo primário combinando as equações (4.18) e (4.21). Segundo alguns autores, a diferenciação entre vínculos primários e secundários é irrelevante, sendo relevante apenas a classificação em vínculos de primeira e de segunda classe.

Continuamos o nosso estudo reescrevendo a hamiltoniana primária incluindo o vínculo secundário

$$H_P^{(2)} = H_C + \int d^3 \vec{x} \left(\zeta_1 \varphi_1 + \zeta_2 \varphi_2\right),$$
(4.32)

e a relação de consistência para $\dot{\varphi}_{2}(x) = \left\{ \varphi_{2}(x), H_{P}^{(2)} \right\} \approx 0$ é

$$\dot{\varphi}_{2}(x) = \{\varphi_{2}(x), H_{C}\} = \{\pi^{0}(x), H_{C}\} - \{\partial_{k}\bar{\pi}^{k}(x), H_{C}\}.$$
(4.33)

Calculando separadamente cada parêntese de Poisson, temos para o primeiro termo do lado direito da Eq. (4.33)

$$\left\{\pi^{0}\left(x\right),H_{C}\right\} = -\frac{1}{m^{2}}\partial_{k}\partial^{k}\partial_{k}\left(\bar{A}_{k}-\partial^{k}A_{0}\right) - \partial_{k}\left(\bar{A}_{k}-\partial_{k}A_{0}\right),\qquad(4.34)$$

e para o segundo termo, segue

$$\left\{\partial_k \bar{\pi}^k, H_P\right\} = -\partial_k \pi^k - \frac{1}{m^2} \partial_k \partial^k \left(\partial_k^k \bar{A} - \partial_k \partial^k A_0\right) - \partial_k \left(\bar{A}_k - \partial_k A_0\right)$$
(4.35)

e substituindo esses parênteses na Eq. (4.33), obtemos

$$\dot{\varphi}_2 = \partial_k \pi^k \approx 0, \tag{4.36}$$

que será um novo vínculo, agora denominado de vínculo terciário, definido como

$$\varphi_3 = \partial_k \pi^k \approx 0. \tag{4.37}$$

A análise continua. Para isso, adicionamos à hamiltoniana primária (4.32) o vínculo terciário

$$H_P^{(3)} = H_C + \int d^3 \vec{x} \left(\zeta_1 \varphi_1 + \zeta_2 \varphi_2 + \zeta_3 \varphi_3 \right),$$
(4.38)

e calculamos sua evolução temporal $\dot{\varphi}_3 = \left\{\varphi_3(x), H_P^{(3)}\right\} = 0$, que resulta ser identicamente nula, portanto, não existe mais vínculos na teoria.

O próximo passo dentro do algoritmo da quantização à *la Dirac* é a classificação dos vínculos do modelo. Esse procedimento consiste em calcular todos os parênteses de Poisson entre os

vínculos encontrados anteriormente, assim, aqueles que tiverem todos seus PB nulos são denominados de vínculos de primeira classe e, os outros que não cumprem essa condição são chamados de vínculos de segunda classe. A presença dos vínculos de primeira classe é o reflexo da simetria de calibre local presente no modelo de Podolsky.

Então, resumindo, a eletrodinâmica de Podolsky possui três vínculos

$$\varphi_1 \equiv \bar{\pi}^0 \approx 0, \tag{4.39}$$

$$\varphi_2 \equiv \pi^0 - \partial_k \bar{\pi}^k \approx 0, \tag{4.40}$$

$$\varphi_3 \equiv \partial_k \pi^k \approx 0, \tag{4.41}$$

cujos parênteses de Poisson entre eles são todos nulos,

$$\{\varphi_1, \varphi_2\} = 0, \ \{\varphi_1, \varphi_3\} = 0, \ \{\varphi_2, \varphi_3\} = 0,$$
 (4.42)

portanto, estes vínculos são de primeira classe.

4.2 Equações de movimento e condições de fixação de calibre

Agora, para estudar a dinâmica (ou evolução temporal) do sistema no formalismo de Dirac define-se o hamiltoniano estendido (H_E) adicionando todos os vínculos de primeira classe ao hamiltoniano canônico, assim,

$$H_E = H_C + \int d^3 \vec{x} \,\lambda_a(x)\varphi_a(x), \qquad (4.43)$$

onde λ_a (a = 1, 2, 3) são multiplicadores de Lagrange.

Num modelo com vínculos de primeira classe, essas arbitrariedades são inconsistentes com as equações de movimento como veremos, a continuação, ao estudarmos a evolução temporal das variáveis canônicas do sistema.

A evolução temporal do campo A_{μ} produz as seguintes equações de movimento:

$$\dot{A}_0(x) = \{A_0(x), H_E\} = \bar{A}_0(x) + \lambda_2(x), \qquad (4.44)$$

$$\dot{A}_k(x) = \{A_k(x), H_E\} = \bar{A}_k(x) + \partial_k \lambda_3(x).$$

$$(4.45)$$

Estes resultados, (4.44) e (4.45), permitem dizer que a evolução temporal do campo de calibre não são bem definidas, pois, λ_2 e λ_3 não o são.

Similarmente, a evolução temporal da variável \bar{A}_0

$$\dot{\bar{A}}_0(x) = \left\{ \bar{A}_0(x), H_E \right\} = \left\{ \bar{A}_0(x), H_C \right\} + \int d^3 \vec{y} \,\lambda_1(y) \left\{ \bar{A}_0(x), \bar{\pi}^0(y) \right\} = \lambda_1, \tag{4.46}$$

informa que sua dinâmica é arbitrária devido à presença do multiplicador λ_1 .

Por outro lado, a evolução temporal para A_k ,

$$\dot{\bar{A}}_{k}(x) = \{\bar{A}_{k}(x), H_{E}\} = \{\bar{A}_{k}(x), H_{C}\} - \int d^{3}\vec{y} \,\lambda_{2}(y) \{\bar{A}_{k}(x), \partial_{j}^{y}\bar{\pi}^{j}(y)\},$$

$$= m^{2}\bar{\pi}_{k} + \partial_{k}\bar{A}_{0} + \partial_{l}F_{kl},$$
(4.47)

é bem definida (ou seja, é independente dos multiplicadores de Lagrange) e resulta a mesma equação expressa na relação dinâmica (4.19).

De modo similar, a evolução temporal dos momentos canônicos π_k e $\bar{\pi}_k$ é bem definida, como mostrado a continuação,

$$\dot{\pi}_k(x) = \{\bar{\pi}_k(x), H_E\} = \{\bar{\pi}_k(x), H_C\} = -\pi_k - \frac{1}{m^2} \partial_k \partial_m F_{0m} - F_{0k}, \qquad (4.48)$$

$$\dot{\pi}_k(x) = \{\pi_k(x), H_E\} = \{\pi_k(x), H_C\} = \partial_k \partial_j \bar{\pi}^j(x) - \nabla^2 \bar{\pi}^k(x) + \partial_j F_{jk}.$$
(4.49)

O próximo passo na obtenção de uma hamiltoniana bem definida, que descreva corretamente a evolução do sistema, é fixar os multiplicadores de Lagrange λ_1 , λ_2 e λ_3 , que aparecem na evolução temporal dos campos \bar{A}_0 , A_0 e A_k , respectivamente.

4.2.1 Condições de calibre

As arbitrariedades geradas pela presença dos vínculos de primeira classe serão fixadas impondo um número igual de vínculos adicionais, chamadas de condições de calibre (ou condições de *gauge*). As condições de calibre devem ser escolhidas de tal forma que sejam compatíveis com as equações de movimento e que o conjunto total de vínculos (primeira classe mais condições de calibre) seja um sistema de vínculos de segunda classe. Desse modo, na eletrodinâmica de Podolsky será necessária a imposição de três condições de calibre devido a presença de três vínculos de primeira classe.

Um ponto de partida na escolha de condições de calibre é a lei de Gauss modificada obtida a partir da equação de movimento (4.4),

$$\left(1+\frac{1}{m^2}\Box\right)\partial_j F^{j0} = \left(1+\frac{1}{m^2}\Box\right)\partial_j \left(\partial_0 A_j - \partial_j A_0\right) = 0, \tag{4.50}$$

ou, em termos das variáveis canônicas

$$\left(1 - \frac{1}{m^2}\nabla^2\right)\nabla^2 A_0 - \partial_0 \left[\left(1 - \frac{1}{m^2}\nabla^2\right) \partial_i A_i + \partial_i \bar{\pi}_i\right] = 0.$$
(4.51)

A expressão acima leva naturalmente a escolher o segundo termo como uma condição de calibre, assim, impomos

$$\left(1 - \frac{1}{m^2} \nabla^2\right) \partial_i A_i + \partial_i \bar{\pi}_i \approx 0, \qquad (4.52)$$

que permite a escolha da uma segunda condição de calibre dada por

$$A_0 \approx 0. \tag{4.53}$$

Agora analisamos a relação de consistência (ou seja, a evolução temporal deve ser nula, $\{\cdot, H_E\} \approx 0$) das duas condições de calibre já impostas. Assim, a relação de consistência da condição (4.52) proporciona a seguinte equação,

$$\left(1 - \frac{1}{m^2} \nabla^2\right) \nabla^2 \lambda_3 + \partial_i \pi^i \approx 0, \qquad (4.54)$$

cuja solução permite expressar λ_3 em termos do momento canônico π^k .

Logo, a relação de consistência da condição (4.53) resulta na equação

$$\dot{A}_0(x) = \{A_0(x), H_E\} = \bar{A}_0(x) + \lambda_2(x) \approx 0,$$
(4.55)

que se impormos $\lambda_2(x) = 0$ gera uma nova condição de calibre compatível com a definição da variável $\bar{A}_0 = \partial_0 A_0$. Portanto, a última condição de calibre é escolhida como

$$\bar{A}_0 \approx 0, \tag{4.56}$$

cuja relação de consistência é dada por

$$\bar{A}_0(x) = \left\{ \bar{A}_0(x), H_E \right\} = \lambda_1 \approx 0,$$
(4.57)

e permite impor $\lambda_1(x) = 0$.

O conjunto de condições de calibre escolhidas acima tem determinado todas as arbitrariedades introduzidas pelos multiplicadores de Lagrange, assim, listamos elas da seguinte maneira,

$$\psi_1 = A_0 \approx 0,\tag{4.58}$$

$$\psi_2 = \bar{A}_0 \approx 0, \tag{4.59}$$

$$\psi_3 = \left(1 - \frac{1}{m^2} \nabla^2\right) \partial_i A^i + \partial_i \bar{\pi}^i \approx 0.$$
(4.60)

Para verificar que o conjunto de vínculos formado pelos vínculos de primeira classe e pelas condições de gauge $\Sigma_a = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ é de segunda classe, calculamos a matriz

formada pelos seus parênteses de Poisson e verificamos que seja não singular. Assim, temos

$$M_{ab}(x,y) = \{ \Sigma_{a}(x), \Sigma_{b}(y) \}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1 - \frac{1}{m^{2}} \nabla^{2}) \nabla^{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \frac{1}{m^{2}} \nabla^{2}) \nabla^{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$
(4.61)

é uma matriz não-singular, cuja inversa é

$$M_{ab}^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
(4.62)

onde $G(\vec{x}, \vec{y})$ é a função de Green para a seguinte equação,

$$\left(1 - \frac{1}{m^2} \nabla^2\right) \nabla^2 G\left(\vec{x} - \vec{y}\right) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}),\tag{4.63}$$

cuja solução é

$$G(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} \left(1 - e^{-M|\vec{x} - \vec{y}|}\right).$$
(4.64)

O determinante da matriz de vínculos $M_{ab}(x, y)$ é

det
$$M_{ab}(x,y) = \left(1 + \frac{1}{m^2}\nabla^2\right)^2 \nabla^4.$$
 (4.65)

A função delta desaparece devido expressarmos na representação de fourier e depois voltarmos o resultado do determinante para o espaço de configurações.

4.2.2 Parênteses de Dirac

Uma vez que as arbitrariedades do modelo foram fixadas, os parênteses de Poisson precisam ser substituídos pelos parênteses de Dirac que são definidos como

$$\{A(x), B(y)\}_{D} = \{A(x), B(y)\} - \int d\mathbf{u} \int d\mathbf{v} \{A(x), \Sigma_{c}(u)\} [M^{-1}(u, v)]_{cd} \{\Sigma_{d}(v), B(y)\}, \qquad (4.66)$$

onde $\Sigma_c = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ é o conjunto de vínculos e $M^{-1}(x, y)$ a matriz inversa da eletrodinâmica de Podolsky definida na equação (4.62).

Assim, os parênteses de Dirac não nulos dão a seguinte álgebra para os campos da teoria:

$$\left\{A_i(x), \pi^j(y)\right\}_D = \left(\delta_i^j + \frac{\partial_i \partial^j}{\nabla^2}\right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}),\tag{4.67}$$

$$\left\{A_i(\mathbf{x}), \bar{A}_j(\mathbf{y})\right\}_D = \frac{-\partial_i \partial_j}{\left(1 - m^{-2} \nabla^2\right) \nabla^2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \tag{4.68}$$

$$\left\{\bar{A}_i(x), \bar{\pi}^j(y)\right\}_D = \delta_i^j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$
(4.69)

Os parênteses de Dirac via o princípio de correspondência se transformam nas relações de comutação que servem de base para a quantização canônica do modelo. Por outro lado, dado que temos toda a estrutura hamiltoniana bem definida, procederemos com a quantização da teoria utilizando o formalismo funcional.

4.3 Amplitude de transição vácuo-vácuo

A amplitude de transição vácuo-vácuo (AVV) $Z = \langle 0|0 \rangle$ no formalismo da integração funcional é definida da seguinte forma:

$$Z = \int \mathcal{D}A_{\mu}\mathcal{D}\pi^{\mu}\mathcal{D}\bar{A}_{\mu}\mathcal{D}\bar{\pi}^{\mu} \left|\det M_{ab}(x,y)\right|^{1/2} \prod_{a} \delta\left(\Sigma_{a}\right) \exp\left\{i \int dx(\pi^{\mu}\dot{A}_{\mu} + \bar{\pi}^{\mu}\dot{A}_{\mu} - \mathcal{H}_{C})\right\},\tag{4.70}$$

onde \mathcal{H}_C é a hamiltoniana canônico (4.26), $\Sigma_a = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ definido anterioremente é o conjunto formado pelos vínculos de primeira classe e as condições de calibre. A matriz $M_{ab}(x,y) = \{\Sigma_a(x), \Sigma_b(y)\}$ é a matriz dos vínculos dada em (4.61), cujo determinante é dado pela Eq. (4.65).

A seguir reescrevemos a hamiltoniana canônica

$$\mathcal{H}_{C} = \left(\pi^{0} - \partial_{k}\bar{\pi}^{k}\right)\bar{A}_{0} + \pi^{k}\bar{A}_{k} + \frac{1}{2}m^{2}\bar{\pi}^{k}\bar{\pi}_{k} - \bar{\pi}_{k}\partial_{j}F^{jk} - \frac{1}{2}\left(\bar{A}_{k} - \partial_{k}A_{0}\right)^{2} - \frac{1}{2m^{2}}\left(\partial_{k}\bar{A}_{k} - \partial_{k}\partial_{k}A_{0}\right)^{2} + \frac{1}{4}F_{jk}F_{jk}, \qquad (4.71)$$

e o conjunto de vínculos

$$\Sigma_{1} = \bar{\pi}^{0} , \quad \Sigma_{2} = \pi^{0} - \partial_{k} \bar{\pi}^{k} , \quad \Sigma_{3} = \partial_{k} \pi^{k} ,$$

$$\Sigma_{4} = A_{0} , \quad \Sigma_{5} = \bar{A}_{0} , \quad \Sigma_{6} = \left(1 - \frac{1}{m^{2}} \nabla^{2}\right) \partial_{i} A^{i} + \partial_{i} \bar{\pi}^{i} .$$

$$(4.72)$$

Além disso, também reescrevemos a AVV como

$$Z = \det \left| \left(1 - \frac{\nabla^2}{m^2} \right) \nabla^2 \right| Z^{(1)}, \qquad (4.73)$$

onde definimos $Z^{(1)}$ por

$$Z^{(1)} = \int \mathcal{D}A_{\mu}\mathcal{D}\pi^{\mu}\mathcal{D}\bar{A}_{\mu}\mathcal{D}\bar{\pi}^{\mu} \,\,\delta\left(\bar{\pi}^{0}\right)\delta\left(\pi^{0}-\partial_{k}\bar{\pi}^{k}\right)\delta\left(\partial_{k}\pi^{k}\right)$$
$$\times\,\delta\left(A_{0}\right)\delta\left(\bar{A}_{0}\right)\,\,\delta\left(\Sigma_{6}\right)\exp\left(i\int dx\,\,\mathcal{L}^{(1)}\right) \tag{4.74}$$

e introduzimos a quantidade $\mathcal{L}^{(1)}$, dada explicitamente por

$$\mathcal{L}^{(1)} = \pi^{\mu} \dot{A}_{\mu} + \bar{\pi}^{\mu} \dot{\bar{A}}_{\mu} - \mathcal{H}_{C}$$

$$= \pi^{0} \dot{A}_{0} + \pi^{k} \left(\dot{A}_{k} - \bar{A}_{k} \right) + \bar{\pi}^{0} \dot{\bar{A}}_{0} + \bar{\pi}^{k} \dot{\bar{A}}_{k} - \left(\pi^{0} - \partial_{k} \bar{\pi}^{k} \right) \bar{A}_{0} - \frac{1}{2} m^{2} \bar{\pi}^{k} \bar{\pi}_{k} + \bar{\pi}_{k} \partial_{j} F^{jk}$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\bar{A}_{k} - \partial_{k} A_{0} \right)^{2} + \frac{1}{2m^{2}} \left(\partial_{k} \bar{A}_{k} - \partial_{k} \partial_{k} A_{0} \right)^{2} - \frac{1}{4} F_{jk} F_{jk}.$$
(4.75)

As integrações em $A_0,\,\bar{A}_0$ e $\bar{\pi}^0$ resultam em

$$Z^{(1)} = \int \mathcal{D}A_k \mathcal{D}\pi^\mu \mathcal{D}\bar{A}_k \mathcal{D}\bar{\pi}^k \,\,\delta\left(\pi^0 - \partial_k \bar{\pi}^k\right) \,\,\delta\left(\partial_k \pi^k\right) \,\,\delta\left(\Sigma_6\right) \exp\left(i \int dx \,\,\mathcal{L}^{(2)}\right), \tag{4.76}$$

onde

$$\mathcal{L}^{(2)} = \pi^{k} \left(\partial_{0} A_{k} - \bar{A}_{k} \right) - \frac{1}{2} m^{2} \bar{\pi}^{k} \bar{\pi}_{k} + \bar{\pi}^{k} \left(\partial_{0} \bar{A}_{k} - \partial_{j} F^{jk} \right) + \frac{1}{2} \left(\bar{A}_{k} \right)^{2} + \frac{1}{2m^{2}} \left(\partial_{k} \bar{A}_{k} \right)^{2} - \frac{1}{4} F_{jk} F_{jk}.$$
(4.77)

Para realizar a integração no momento π^k , primeiro expressamos $\delta(\partial_k \pi^k)$ na representação de Fourier. Assim,

$$\delta\left(\partial_k \pi^k\right) = \int \mathcal{D}\Lambda \, \exp\left(i \int dx \, \Lambda \partial_k \pi^k\right) = \int \mathcal{D}\Lambda \, \exp\left(i \int dx \, \left(-\pi^k \partial_k \Lambda\right)\right) \tag{4.78}$$

e com isso, a AVV fica expressa como

$$Z^{(1)} = \int \mathcal{D}A_k \mathcal{D}\pi^\mu \mathcal{D}\bar{A}_k \mathcal{D}\bar{\pi}^k \mathcal{D}\Lambda \ \delta\left(\pi^0 - \partial_k \bar{\pi}^k\right) \ \delta\left(\Sigma_6\right) \exp\left(i \int dx \ \mathcal{L}^{(3)}\right), \tag{4.79}$$

com a densidade de lagrangeana

$$\mathcal{L}^{(3)} = \pi^{k} \left(\partial_{0} A_{k} - \partial_{k} \Lambda - \bar{A}_{k} \right) - \frac{1}{2} m^{2} \bar{\pi}^{k} \bar{\pi}_{k} + \bar{\pi}^{k} \left(\partial_{0} \bar{A}_{k} - \partial_{j} F^{jk} \right) + \frac{1}{2} \left(\bar{A}_{k} \right)^{2} + \frac{1}{2m^{2}} \left(\partial_{k} \bar{A}_{k} \right)^{2} - \frac{1}{4} F_{jk} F_{jk}.$$
(4.80)

A integração em π^k é facilmente obtida, sendo o resultado

$$I_{\pi^k} = \int \mathcal{D}\pi^k \, \exp\left[i \int dx \, \pi^k \left(\partial_0 A_k - \partial_k \Lambda - \bar{A}_k\right)\right] = \delta\left(\partial_0 A_k - \partial_k \Lambda - \bar{A}_k\right). \tag{4.81}$$

Neste ponto redefinimos $\Lambda \equiv A_0,$ de forma que $Z^{(1)}$ torna-se

$$Z^{(1)} = \int \mathcal{D}A_{\mu} \mathcal{D}\pi^{0} \mathcal{D}\bar{A}_{k} \mathcal{D}\bar{\pi}^{k} \,\,\delta\left(\pi^{0} - \partial_{k}\bar{\pi}^{k}\right) \,\,\delta\left(F_{0k} - \bar{A}_{k}\right) \,\,\delta\left(\Sigma_{6}\right) \exp\left(i \int dx \,\,\mathcal{L}^{(4)}\right), \quad (4.82)$$

onde

$$\mathcal{L}^{(4)} = -\frac{1}{2}m^2 \bar{\pi}^k \bar{\pi}_k + \bar{\pi}^k \left(\partial_0 \bar{A}_k - \partial_j F^{jk}\right) + \frac{1}{2} \left(\bar{A}_k\right)^2 + \frac{1}{2m^2} \left(\partial_k \bar{A}_k\right)^2 - \frac{1}{4} F_{jk} F_{jk}.$$
 (4.83)

Continuamos com a integração do campo $\bar{A}_k.$ Assim, obtemos

$$Z^{(1)} = \int \mathcal{D}A_{\mu} \mathcal{D}\pi^{0} \mathcal{D}\bar{\pi}^{k} \,\delta\left(\pi^{0} - \partial_{k}\bar{\pi}^{k}\right) \,\delta\left(\Sigma_{6}\right) \,\exp\left\{i\int dx \,\mathcal{L}^{(5)}\right\},\tag{4.84}$$

com $\mathcal{L}^{(5)}$ dado por

$$\mathcal{L}^{(5)} = \frac{1}{2}m^2 \left(\bar{\pi}_k - \frac{1}{m^2}\partial^{\mu}F_{\mu k}\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2m^2}\partial_{\mu}F^{\mu\rho}\partial^{\nu}F_{\nu\rho}.$$
(4.85)

Para integrar em π^0 , fazemos a seguinte translação $\pi^0 \to \pi^0 + \partial_k \bar{\pi}^k$, $\mathcal{D}\pi^0 \to \mathcal{D}\pi^0$, tal que

$$\int \mathcal{D}\pi^0 \,\delta\left(\pi^0\right) = 1,\tag{4.86}$$

e a AVV resulta em

$$Z^{(1)} = \int \mathcal{D}A_{\mu}\mathcal{D}\bar{\pi}^{k} \,\,\delta\left[\left(1 - \frac{1}{m^{2}}\nabla^{2}\right)\partial_{i}A^{i} + \partial_{i}\bar{\pi}^{i}\right]\exp\left(i\int dx \,\,\mathcal{L}^{(5)}\right). \tag{4.87}$$

Neste ponto, introduzindo o ansatz de Faddeev-Popov [76],

$$\int \mathcal{D}\omega \,\,\delta\left(G\left[A_{\mu}^{\omega}\right]\right) \det \left|\frac{\partial G\left[A_{\mu}^{\omega}\right]}{\partial\omega}\right|_{\omega=0} = 1,\tag{4.88}$$

onde $A^{\omega}_{\mu} = A_{\mu} + \partial_{\mu}\omega$, $G[A_{\mu}]$ é alguma condição de calibre (preferentemente covariante) e

$$\det \left| \frac{\partial G\left[A_{\mu}^{\omega} \right]}{\partial \omega} \right|_{\omega=0}, \tag{4.89}$$

chamado de determinante de Faddeev-Popov, que é uma quantidade invariante de calibre, ou seja, independente de ω .

Desse modo, a AVV $Z^{(1)}$ é reescrita da seguinte maneira:

$$Z^{(1)} = \int \mathcal{D}A_{\mu}\mathcal{D}\bar{\pi}^{k} \mathcal{D}\omega \,\delta\left(G\left[A_{\mu}^{\omega}\right]\right) \det \left|\frac{\partial G\left[A_{\mu}^{\omega}\right]}{\partial\omega}\right|_{\omega=0} \\ \times \,\delta\left[\left(1 - \frac{1}{m^{2}}\nabla^{2}\right)\partial_{i}A^{i} + \partial_{i}\bar{\pi}^{i}\right] \exp\left(i\int dx \,\mathcal{L}^{(5)}\right). \tag{4.90}$$

Prosseguindo o cálculo, fazemos a transformação de calibre $A_{\mu} \to A_{\mu} - \partial_{\mu} \omega$ e obtemos

$$Z^{(1)} = \int \mathcal{D}A_{\mu} \mathcal{D}\bar{\pi}^{k} \ \mathcal{D}\omega \ \delta \left(G\left[A_{\mu}\right] \right) \det \left| \frac{\partial G\left[A_{\mu}^{\omega}\right]}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} \\ \times \delta \left[\left(1 - \frac{1}{m^{2}} \nabla^{2} \right) \partial_{i} A^{i} + \left(1 - \frac{1}{m^{2}} \nabla^{2} \right) \nabla^{2} \omega + \partial_{i} \bar{\pi}^{i} \right] \exp \left(i \int dx \ \mathcal{L}^{(5)} \right), \tag{4.91}$$

onde $\mathcal{L}^{(5)}$ também é invariante de calibre. Agora, podemos calcular a integração em ω

$$I_{\omega} = \int \mathcal{D}\omega \,\,\delta\left[\left(1 - \frac{1}{m^2}\nabla^2\right)\partial_i A^i + \left(1 - \frac{1}{m^2}\nabla^2\right)\nabla^2\omega + \partial_i\bar{\pi}^i\right]$$
$$= \det\left|\left(1 - \frac{1}{m^2}\nabla^2\right)\nabla^2\right|^{-1}.$$
(4.92)

Assim, temos

$$Z^{(1)} = \det \left| \left(1 - \frac{1}{m^2} \nabla^2 \right) \nabla^2 \right|^{-1} \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\pi}^k \,\,\delta\left(G\left[A_\mu\right]\right) \det \left| \frac{\partial G\left[A_\mu^\omega\right]}{\partial\omega} \right|_{\omega=0} \exp\left(i \int dx \,\,\mathcal{L}^{(5)}\right).$$

$$\tag{4.93}$$

Com isso, a integração em $\bar{\pi}^k$ é facilmente computada

$$I_{\bar{\pi}^k} = \int \mathcal{D}\bar{\pi}^k \exp\left\{i \int dx \; \frac{1}{2}m^2 \left(\bar{\pi}_k - \frac{1}{m^2}\partial^\mu F_{\mu k}\right)^2\right\} = N = cte, \tag{4.94}$$

e a AVV (4.93) pode ser reescrita como

$$Z^{(1)} = N \det \left| \left(1 - \frac{1}{m^2} \nabla^2 \right) \nabla^2 \right|^{-1} \int \mathcal{D}A_\mu \, \delta \left(G \left[A_\mu \right] \right) \det \left| \frac{\partial G \left[A_\mu^\omega \right]}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} \exp \left(i \int dx \, \mathcal{L}_P \right),$$
(4.95)

onde \mathcal{L}_P é a densidade lagrangiana de Podolsky (4.1)

$$\mathcal{L}_{P} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2m^{2}}\partial_{\mu}F^{\mu\rho}\partial^{\nu}F_{\nu\rho}.$$
(4.96)

Desta forma, a amplitude vácuo-vácuo (4.73) se reduz à seguinte expressão:

$$Z = N \int \mathcal{D}A_{\mu} \,\delta\left(G\left[A_{\mu}\right]\right) \det \left| \frac{\partial G\left[A_{\mu}^{\omega}\right]}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} \exp\left(i \int dx \,\mathcal{L}_{P}\right). \tag{4.97}$$

O passo final no cálculo da AVV é impor uma condição de calibre $G[A_{\mu}]$.

A amplitude vácuo-vácuo é uma quantidade invariante de calibre, ou seja, é independente da condição de calibre escolhida em (4.97). Assim, com o propósito de ilustrar o cálculo usaremos duas condições de calibre diferentes.

4.3.1 Cálculo da AVV no calibre de Lorenz generalizado

A primeira condição que usaremos é o chamado calibre de Lorenz generalizado

$$G[A_{\mu}] = \xi^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{m^2} \Box \right) \partial_{\mu} A^{\mu} - f, \qquad (4.98)$$

onde ξ é o parâmetro de calibre e f = f(x) uma função arbitrária, porém, bem comportada. Para calcular o determinante de Faddeev-Popov, fazemos a seguinte transformação de calibre $A^{\omega}_{\mu} = A_{\mu} + \partial_{\mu}\omega$:

$$G\left[A_{\mu}^{\omega}\right] = \xi^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{m^2}\Box\right) \partial_{\mu}A^{\mu} + \xi^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{m^2}\Box\right)\Box\omega - f$$
(4.99)

e obtemos

$$\det \left| \frac{\partial G\left[A_{\mu}^{\omega} \right]}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} = \det \left| \xi^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{m^2} \Box \right) \Box \right|.$$
(4.100)

Inserindo (4.100) na amplitude vácuo-vácuo (4.97), obtemos

$$Z = N \det \left| \xi^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{m^2} \Box \right) \Box \right| \int \mathcal{D}A_\mu \, \delta \left[\xi^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{m^2} \Box \right) \partial_\mu A^\mu - f \right] \exp \left(i \int dx \, \mathcal{L}_P \right).$$
(4.101)

Como a amplitude de transição deve ser independente de f integra-se usando o seguinte peso $\exp\left(-\frac{i}{2}\int dx f^2\right)$. Assim, expressamos a amplitude de transição vácuo-vácuo no calibre de Lorenz generalizado

$$Z = \det \left| \xi^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{m^2} \Box \right) \Box \right| \int \mathcal{D}A_{\mu} e^{iS_{eff}}, \qquad (4.102)$$

onde

$$S_{eff} = \int dx \left\{ -\frac{1}{2\xi} \left[\left(1 + \frac{1}{m^2} \Box \right) \partial_\mu A^\mu \right]^2 + \mathcal{L}_P \right\}, \qquad (4.103)$$

ou

$$S_{eff} = \int dx \frac{1}{2} A^{\mu} \left[\left(1 + \frac{\Box}{m^2} \right) \Box T_{\mu\nu} + \frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{\Box}{m^4} \right)^2 \Box \Omega_{\mu\nu} \right] A^{\nu}, \qquad (4.104)$$

com

$$T_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_{\mu}\partial_{\nu}}{\Box} \in \Omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_{\mu}\partial_{\nu}}{\Box}.$$
 (4.105)

Portanto, a integral em (4.102) produz os seguintes determinantes funcionais:

$$\int \mathcal{D}A_{\mu}e^{iS_{eff}} = \det \left| \left(1 + \frac{1}{m^2} \Box \right) \right|^{-5/2} \det \left| \frac{1}{\sqrt{\xi}} \Box^2 \right|^{-1}$$
(4.106)

E, assim, a amplitude vácuo-vácuo para o modelo de Podolsky toma a seguinte forma:

$$Z = \det \left| \left(1 + \frac{1}{m^2} \Box \right) \right|^{-3/2} \det |\Box|^{-1}.$$
(4.107)

O primeiro determinante corresponde à relação de dispersão de uma partícula de massa *m* contendo três graus de liberdade e o segundo descreve a relação de dispersão de uma partícula vetorial sem massa com dois graus de liberdade.

4.3.2 Cálculo da AVV no calibre de Lorenz

Uma observação a ser feita sobre a técnica de Faddeev- Popov é que, para chegarmos no resultado da amplitude de transição vácuo- vácuo (4.107), utilizamos o calibre de Lorenz generalizado (4.98). Obteríamos o mesmo resultado utilizando simplesmente o calibre de Lorenz $(\partial_{\mu}A^{\mu} = 0)$. Assim, ilustramos o cálculo no chamado calibre de Lorentz,

$$G[A_{\mu}] = \xi^{-1/2} \partial_{\mu} A^{\mu} - f, \qquad (4.108)$$

onde ξ é o parâmetro de calibre e f = f(x) é definido da mesma forma que antes. Para calcular o determinante de Faddeev-Popov, fazemos a seguinte transformação de calibre $A^{\omega}_{\mu} = A_{\mu} + \partial_{\mu}\omega$

$$G[A^{\omega}_{\mu}] = \xi^{-1/2} \partial_{\mu} A^{\mu} + \xi^{-1/2} \Box \omega - f$$
(4.109)

que resulta em

$$\det \left| \frac{\partial G\left[A_{\mu}^{\omega} \right]}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} = \det \left| \xi^{-1/2} \Box \right|.$$
(4.110)

Ao inserirmos (4.100) na amplitude vácuo-vácuo (4.97), obtemos

$$Z = N \det \left| \xi^{-1/2} \Box \right| \int \mathcal{D}A_{\mu} \, \delta \left(\xi^{-1/2} \partial_{\mu} A^{\mu} - f \right) \exp \left(i \int dx \, \mathcal{L}_{P} \right), \tag{4.111}$$

que deve ser independente de f. Integra-se usando o seguinte peso $\exp\left(-\frac{i}{2}\int dx f^2\right)$. Assim, expressamos a amplitude de transição vácuo-vácuo no calibre de Lorenz generalizado

$$Z = \det \left| \xi^{-1/2} \Box \right| \int \mathcal{D}A_{\mu} e^{iS_{eff}}, \qquad (4.112)$$

onde

$$S_{eff} = \int dx \left\{ -\frac{1}{2\xi} \left(\partial_{\mu} A^{\mu} \right)^2 + \mathcal{L}_P \right\}, \qquad (4.113)$$

ou

$$S_{eff} = \int dx \frac{1}{2} A^{\mu} \left[\left(1 + \frac{\Box}{m^2} \right) \Box T_{\mu\nu} + \frac{1}{\xi} \Box \Omega_{\mu\nu} \right] A^{\nu}, \qquad (4.114)$$

com

$$T_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_{\mu}\partial_{\nu}}{\Box} \in \Omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_{\mu}\partial_{\nu}}{\Box}.$$
(4.115)

Portanto, a integral em (4.102) produz os seguintes determinantes funcionais

$$\int \mathcal{D}A_{\mu}e^{iS_{eff}} = \det\left|\left(1 + \frac{1}{m^2}\Box\right)\right|^{-3/2} \det\left|\frac{1}{\sqrt{\xi}}\Box^2\right|^{-1},\qquad(4.116)$$

e, assim, a amplitude vácuo-vácuo para o modelo de Podolsky é dada por

$$Z = \det \left| \left(1 + \frac{1}{m^2} \Box \right) \right|^{-3/2} \det |\Box|^{-1}, \qquad (4.117)$$

que é exatamente a forma (4.107) calculada no calibre generalizado de Lorenz. Observamos que no calibre de Lorenz o cálculo da amplitude vácuo-vácuo resulta um pouco mais fácil. Desse modo, no capítulo seguinte usaremos este calibre.

Capítulo 5

A eletrodinâmica CPT-par possuindo termos de derivadas de ordem superior

Neste capítulo estudamos a eletrodinâmica de Maxwell complementada com um termo CPTpar que quebra a simetria de Lorentz e possui derivadas de ordem superior. Primeiramente, estudamos a estrutura de vínculos do modelo seguindo o procedimento criado por Dirac [55] com o intuito de obter uma hamiltoniana bem definida e construir a amplitude de transição vácuo-vácuo. Esta última permite encontrar as relações de dispersão e os graus de liberdade físicos do modelo.

A eletrodinâmica com termos de altas derivadas na presença da quebra de Lorentz foi introduzida por Kostelecký e Mewes [5]. Aqui estudaremos o termo de dimensão 6 contido nesse modelo, assim a densidade lagrangiana da eletrodinâmica de Maxwell modificada se expressa como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}a^2 d_{\alpha\beta}\partial_{\mu}F^{\mu\alpha}\partial_{\lambda}F^{\lambda\beta}, \qquad (5.1)$$

onde o parâmetro *a* possui dimensão de massa -1 e o tensor $d_{\alpha\beta}$, simétrico e adimensional, carrega a informação da quebra da simetria de Lorentz. Um modelo similar foi proposto na Ref. [45]. O foco do estudo foi calcular o propagador e analisar as relações de dispersão para algumas configurações do tensor $d_{\alpha\beta}$. A densidade de Lagrangiana (5.1) contém o termo de Podolsky no caso que o traço do tensor for diferente de zero, tr $(d_{\alpha\beta}) \neq 0$, enquanto que, se o traço for nulo, tr $(d_{\alpha\beta}) = 0$, a densidade de lagrangiana de ordem superior não contempla o termo de Podolsky.

A equação de movimento para o campo de calibre é

$$\partial_{\beta}F^{\beta\chi} + a^2 d^{\chi\beta} \Box \partial^{\lambda}F_{\lambda\beta} - a^2 d^{\kappa\beta} \partial_{\kappa} \partial^{\chi} \partial^{\lambda}F_{\lambda\beta} = 0.$$
(5.2)

Observa-se que se $d_{\kappa\beta} = g_{\kappa\beta}$ recaímos na equação de movimento de Podolsky (4.10).

Os momentos canônicos conjugados aos campos $A_{\mu} \in \bar{A}_{\mu}$, definidos segundo as expressões (4.14) e (4.15), são

$$\pi^{\chi} = -F^{0\chi} - a^2 d_{\alpha}{}^{\chi} \partial^0 \partial_{\mu} F^{\mu\alpha} + a^2 d_{\alpha}{}^0 \partial^{\chi} \partial_{\mu} F^{\mu\alpha} + a^2 d_{\alpha}{}^i g^{\chi 0} \partial_i \partial_{\mu} F^{\mu\alpha}, \tag{5.3}$$

е

$$\bar{\pi}^{\chi} = a^2 \left(d_{\alpha}{}^{\chi} g^{00} - d_{\alpha}{}^{0} g^{0\chi} \right) \partial_{\mu} F^{\mu\alpha}, \qquad (5.4)$$

respectivamente. Vê-se claramente que a estrutura do tensor $d_{\mu\nu}$ definirá a presença ou não de vínculos primários no modelo. Para nossa análise, escolheremos algumas configurações particulares de $d_{\mu\nu}$ com o intuito de entender como o campo de fundo modifica os graus de liberdade e as relações de dispersão.

Com o intuito de estudar as contribuições do tensor $d_{\mu\nu}$ na eletrodinâmica de Maxwell, primeiramente, escolhemos a forma mais simples para o tensor de fundo, a forma diagonal,

$$d_{\mu\nu} = \text{diag}\left(d_{00}, d_{11}, d_{22}, d_{33}\right).$$
(5.5)

Em particular, vamos estudar dois casos relevantes nesta parametrização:

(i) A primeira dada por

$$d_{\mu\nu} = \text{diag}\left(d_{00}, -\frac{d_{tr}}{3}, -\frac{d_{tr}}{3}, -\frac{d_{tr}}{3}\right),$$
(5.6)

com $d_{00} \neq 0$ e $d_{tr} \neq 0$. O caso invariante de Lorentz é recuperado se $d_{00} = \frac{d_{tr}}{3}$, ou seja, o tensor $d_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}$. Nesse caso recuperamos a eletrodinâmica de Podolsky.

(ii) O segundo caso consiste em escolher $d_{00} \neq 0$ e $d_{tr} = 0$ na parametrização acima,

$$d_{\mu\nu} = \text{diag}\left(d_{00}, 0, 0, 0\right). \tag{5.7}$$

Em ambos os casos podemos comparar os resultados com os obtidos no trabalho da Ref. [45].

5.1 O caso $d_{00} \neq 0$ e $d_{tr} \neq 0$

Seguindo com o formalismo de Dirac para sistemas vinculados, primeiro encontramos os momentos canônicos do campos $A_{\mu} \in \bar{A}_{\mu}$. A partir da expressão (5.3) obtemos

$$\pi^0 = \frac{d_{tr}}{3} a^2 \partial_i \partial_0 F^{0i}, \tag{5.8}$$

$$\pi^{i} = -F^{0i} - a^{2} \frac{d_{tr}}{3} \partial^{0} \partial_{\mu} F^{\mu i} + a^{2} d_{00} \partial^{i} \partial_{\mu} F^{\mu \alpha}, \qquad (5.9)$$

as componentes do momento canônico π^{μ} que expressam relações dinâmicas.

A equação (5.4) provê as componentes do momento canônico $\bar{\pi}^{\mu}$. A componente temporal,

$$\bar{\pi}^0 \approx 0, \tag{5.10}$$

constitui um vínculo primário, enquanto que a componente espacial

$$\bar{\pi}^i = \frac{d_{tr}}{3} a^2 \partial_\mu F^{\mu i},\tag{5.11}$$

é uma relação dinâmica.

Um segundo vínculo é obtido combinando as expressões (5.8) e (5.11) da seguinte maneira:

$$\pi_0 - \partial_i \bar{\pi}^i = 0. \tag{5.12}$$

Assim, temos dois vínculos que consideramos primários, e denotamos por

$$\phi_1 = \pi_0 - \partial_i \bar{\pi}^i \approx 0, \tag{5.13}$$

е

$$\phi_2 = \bar{\pi}^0 \approx 0. \tag{5.14}$$

A densidade hamiltoniana canônica é obtida através da transformação de Legendre (4.25). Assim, para o caso em estudo, ela resulta ser

$$\mathcal{H}_{C} = \pi^{i}\bar{A}_{i} - \bar{\pi}_{i}\partial_{j}F^{ji} + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}a^{2}d_{00}\partial_{i}F^{0i}\partial_{j}F^{0j} + \frac{3}{2}\frac{\bar{\pi}_{i}\bar{\pi}^{i}}{a^{2}d_{tr}}.$$
(5.15)

Os parênteses fundamentais de Poisson entre as variáveis canônicas são os mesmos definidos nas equações (4.23) e (4.24).

Seguindo o algoritmo de Dirac-Bergmann precisamos introduzir a hamiltoniana primária, no qual consiste na adição de todos os vínculos primários à hamiltoniana canônica

$$H_P = H_C + \sum_{I=1}^2 \int d^3 \mathbf{x} \ C_I \phi_I,$$
 (5.16)

onde C_I são multiplicadores de Lagrange.

A condição de consistência (evolução temporal nula) de todos os vínculos primários pode gerar novos vínculos ou fixar algum multiplicador de Lagrange.

Assim, a relação de consistência do vínculo ϕ_1 ,

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi_1, H_P\} = \partial_i \pi^i, \tag{5.17}$$

gera um novo vínculo secundário, que nomeamos como

$$\phi_3 = \partial_i \pi^i \approx 0. \tag{5.18}$$

A evolução temporal desse novo vínculo dá um resultado exatamente nulo.

A relação de consistência do vínculo ϕ_2 também dá um resultado identicamente nulo.

Desse modo, o modelo possui somente 3 vínculos e facilmente podemos ver que os parênteses de Poisson desses 3 vínculos são nulos,

$$\{\phi_I(x), \phi_J(y)\} = 0. \tag{5.19}$$

Isso, diz que o conjunto de vínculos é de primeira classe.

Continuando com o método de Dirac, a existência de 3 vínculos de primeira classe exige a escolha de três condições de calibre, as quais devem ser compatíveis com as equações de Euler-Lagrange.

A lei de Gauss obtida a partir da Eq. (5.2) possibilita a seguinte escolha para as condições de calibre:

$$\psi_1 = \left(1 - a^2 d_{00} \nabla^2\right) \partial_i A^i + \partial_i \bar{\pi}^i \approx 0, \qquad (5.20)$$

$$\psi_2 = \bar{A}^0 \approx 0, \tag{5.21}$$

$$\psi_3 = A^0 \approx 0. \tag{5.22}$$

O conjunto dos vínculos, juntamente com as condições de calibre $\sum_{I} = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3\}$, formam um conjunto de segunda classe. Isto é verificado quando a matriz de vínculos, $M_{IJ}(x, y) = \{\sum_{I}(x), \sum_{J}(y)\}$, é não singular. Escrevendo explicitamente, temos

$$M_{IJ}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1 - a^2 d_{00} \nabla^2) \nabla^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - a^2 d_{00} \nabla^2) \nabla^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(x-y), \quad (5.23)$$

cuja inversa é dada por

$$M_{IJ}^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1-a^2d_{00}\nabla^2)\nabla^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{(1-a^2d_{00}\nabla^2)\nabla^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(x-y), \quad (5.24)$$

de onde temos que $G(\vec{x}, \vec{y})$ é a função de Green para a seguinte equação:

$$(1 - a^2 d_{00} \nabla^2) \nabla^2 G(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}).$$
(5.25)

Aqui requeremos $d_{00} \ge 0$ para o operador ser positivo definido.

Para garantir que os vínculos e as condições de fixação de calibre sejam satisfeitas ao longo do tempo, temos que os parênteses de Poisson são substituídos pelos parênteses de Dirac, definidos como em (4.66). Dessa forma, para o caso isotrópico representado na matriz (5.6), os parênteses de Dirac dão a seguinte álgebra para as variáveis canônicas:

$$\left\{A_{i}\left(\mathbf{x}\right),\pi^{j}\left(\mathbf{y}\right)\right\}_{D} = \left(\delta_{i}^{j} + \frac{\partial_{i}\partial^{j}}{\nabla^{2}}\right)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\tag{5.26}$$

$$\left\{A_i(\mathbf{x}), \bar{A}_j(\mathbf{y})\right\}_D = \frac{-\partial_i \partial_j}{\left(1 - a^2 d_{00} \nabla^2\right) \nabla^2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \tag{5.27}$$

$$\left\{\bar{A}_i(\mathbf{x}), \bar{\pi}^j(\mathbf{y})\right\}_D = \delta_i^j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$
(5.28)

Os outros parênteses de Dirac são nulos. Observa-se que o primeiro (5.26) e terceiro (5.27) parênteses de Dirac são exatamente iguais ao caso da eletrodinâmica de Podolsky apresentados nas equações (4.67) e (4.69). Assim, a diferença na estrutura canônica, ou seja, o efeito da quebra de Lorentz está no segundo parêntese de Dirac (5.27).

O caso de $d_{00} \neq 0$ e $d_{tr} = 0$, será analisado separadamente por apresentar uma estrutura Hamiltoniana muito diferente.

5.1.1 Amplitude de transição vácuo-vácuo

Definimos a amplitude de transição vácuo-vácuo da seguinte forma:

$$Z = \int \mathcal{D}A_{\mu} \mathcal{D}\pi^{\mu} \mathcal{D}\bar{A}_{\mu} \mathcal{D}\bar{\pi}^{\mu} \left|\det M\right|^{1/2} \prod_{I=1}^{6} \delta\left(\Sigma_{I}\right) \exp\left[i \int d^{4}x \left(\pi^{\mu}\bar{A}_{\mu} + \bar{\pi}^{\mu}\dot{\bar{A}}_{\mu} - \mathcal{H}_{C}\right)\right], \quad (5.29)$$

onde det M é o determinante funcional da matriz de vínculos

det
$$M = \det \{ \Sigma_I(x), \Sigma_J(y) \} = (1 - a^2 d_{00} \nabla^2)^2 \nabla^4,$$
 (5.30)

onde o símbolo Σ_I representa o conjunto de vínculos $\varphi_a(x)$ e as condições de calibre $\psi_b(y)$ dados em (5.13) e (5.14), respectivamente,

$$\Sigma_1 = \pi_0 - \partial_i \bar{\pi}^i, \ \Sigma_2 = \bar{\pi}^0, \ \Sigma_3 = \partial_i \pi^i, \tag{5.31}$$

$$\Sigma_4 = (1 - a^2 d_{00} \nabla^2) \,\partial_i A^i + \partial_i \bar{\pi}^i, \ \Sigma_5 = \bar{A}^0, \ \Sigma_6 = A^0.$$
(5.32)

A densidade hamiltoniana \mathcal{H}_C é expressa pela equação (5.15)

$$\mathcal{H}_{C} = \pi^{i}\bar{A}_{i} - \bar{\pi}_{i}\partial_{j}F^{ji} - \frac{1}{2}\left(\bar{A}_{i} - \partial_{i}A_{0}\right)^{2} - \frac{1}{2}a^{2}d_{00}\left(\partial_{i}\bar{A}_{i} - \partial_{i}\partial_{i}A_{0}\right)^{2} + \frac{3\bar{\pi}_{i}\bar{\pi}^{i}}{2a^{2}d_{tr}} + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}.$$
 (5.33)

Por conveniência definimos

$$\mathcal{L}^{(1)} = \pi^{\mu} \dot{A}_{\mu} + \bar{\pi}^{\mu} \dot{\bar{A}}_{\mu} - \mathcal{H}_{C}$$

$$= \pi^{0} \dot{A}_{0} + \pi^{i} \left(\dot{A}_{i} - \bar{A}_{i} \right) + \bar{\pi}^{0} \dot{\bar{A}}_{0} + \bar{\pi}^{i} \left(\dot{\bar{A}}_{i} - \partial_{j} F^{ji} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\bar{A}_{i} - \partial_{i} A_{0} \right)^{2} + \frac{1}{2} a^{2} d_{00} \left(\partial_{i} \bar{A}_{i} - \partial_{i} \partial_{i} A_{0} \right)^{2} - \frac{3}{2a^{2} d_{tr}} \bar{\pi}_{i} \bar{\pi}^{i} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij}. \quad (5.34)$$

Após integrar nas variáveis $\bar{\pi}^0$, $A_0 \in \bar{A}_0$, a amplitude de transição torna-se

$$Z = \det \left| \left(1 - d_{00} a^2 \nabla^2 \right) \nabla^2 \right| Z^{(1)},$$
(5.35)

onde definimos

$$Z^{(1)} = \int \mathcal{D}A_k \mathcal{D}\pi^\mu \mathcal{D}\bar{A}_k \mathcal{D}\bar{\pi}^k \,\,\delta\left(\pi_0 - \partial_i \bar{\pi}^i\right) \,\,\delta\left(\partial_i \pi^i\right) \,\,\delta\left(\Sigma_4\right) \exp\left(i \int dx \,\,\mathcal{L}^{(2)}\right) \tag{5.36}$$

e também a quantidade

$$\mathcal{L}^{(2)} = \pi^{i} \left(\partial_{0} A_{i} - \bar{A}_{i} \right) + \bar{\pi}^{i} \left(\partial_{0} \bar{A}_{i} - \partial_{j} F^{ji} \right) + \frac{1}{2} \left(\bar{A}_{i} \right)^{2} + \frac{1}{2} a^{2} d_{00} \left(\partial_{i} \bar{A}_{i} \right)^{2} - \frac{3}{2a^{2} d_{tr}} \bar{\pi}_{i} \bar{\pi}^{i} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij}.$$
(5.37)

Neste ponto, a integral em π^0 é similar à calculada em (4.86) e é igual a 1. Logo, para calcular a integral em π^i , primeiro usamos a representação de Fourier (4.78) para $\delta(\partial^i \pi_i)$, de tal modo que a AVV (5.36) fica expressa como

$$Z^{(1)} = \int \mathcal{D}A_k \mathcal{D}\Lambda \mathcal{D}\pi^k \mathcal{D}\bar{A}_k \mathcal{D}\bar{\pi}^k \ \delta\left(\Sigma_4\right) \exp\left(i \int dx \ \mathcal{L}^{(3)}\right), \tag{5.38}$$

com

$$\mathcal{L}^{(3)} = \pi^{i} \left(\partial_{0} A_{i} - \partial_{i} \Lambda - \bar{A}_{i} \right) + \bar{\pi}^{i} \left(\partial_{0} \bar{A}_{i} - \partial_{j} F^{ji} \right) + \frac{1}{2} \left(\bar{A}_{i} \right)^{2} + \frac{1}{2} a^{2} d_{00} \left(\partial_{i} \bar{A}_{i} \right)^{2} - \frac{3}{2a^{2} d_{tr}} \bar{\pi}_{i} \bar{\pi}^{i} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij}.$$
(5.39)

A integração em π^i é similar à realizada em (4.81), assim, temos

$$Z^{(1)} = \int \mathcal{D}A_k \mathcal{D}\Lambda \mathcal{D}\bar{A}_k \mathcal{D}\bar{\pi}^k \,\,\delta\left(\Sigma_4\right) \delta\left(\partial_0 A_i - \partial_i \Lambda - \bar{A}_i\right) \exp\left(i \int dx \,\,\mathcal{L}^{(4)}\right),\tag{5.40}$$

 com

$$\mathcal{L}^{(4)} = \bar{\pi}^{i} \left(\partial_{0} \bar{A}_{i} - \partial_{j} F^{ji} \right) + \frac{1}{2} \left(\bar{A}_{i} \right)^{2} + \frac{1}{2} a^{2} d_{00} \left(\partial_{i} \bar{A}_{i} \right)^{2} - \frac{3}{2a^{2} d_{tr}} \bar{\pi}_{i} \bar{\pi}^{i} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij}.$$
(5.41)

Agora, identificamos $\Lambda \equiv A_0$ de tal modo que $\partial_0 A_i - \partial_i \Lambda \equiv F_{0i}$. Assim, a integração em \bar{A}_i proporciona

$$Z^{(1)} = \int \mathcal{D}A_{\mu} \mathcal{D}\bar{\pi}^{k} \,\delta\left(\left(1 - a^{2} d_{00} \nabla^{2}\right) \partial_{i} A^{i} + \partial_{i} \bar{\pi}^{i}\right) \exp\left(i \int dx \,\mathcal{L}^{(5)}\right), \qquad (5.42)$$

onde

$$\mathcal{L}^{(5)} = \frac{3}{2a^2 d_{tr}} \left(\bar{\pi}^i - \frac{a^2 d_{tr}}{3} \partial_\nu F^{\nu i} \right)^2 + \frac{1}{2} a^2 d_{\alpha\beta} \partial_\mu F^{\mu\alpha} \partial_\lambda F^{\lambda\beta} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$
(5.43)

com $d_{\alpha\beta}$ dado pela Eq.(5.6).

Neste ponto, usamos o ansatz de Faddeev-Popov definido em (4.88) e (4.89) e, desse modo, a amplitude de transição vácuo-vácuo $Z^{(1)}$ fica expressa como

$$Z^{(1)} = \int \mathcal{D}A_{\mu}\mathcal{D}\bar{\pi}^{k}\mathcal{D}\omega \ \delta\left(G\left[A_{\mu}^{\omega}\right]\right) \det \left|\frac{\partial G\left[A_{\mu}^{\omega}\right]}{\partial\omega}\right|_{\omega=0}$$
$$\delta\left[\left(1 - a^{2}d_{00}\nabla^{2}\right)\partial_{i}A^{i} + \partial_{i}\bar{\pi}^{i}\right]\exp\left(i\int dx \ \mathcal{L}^{(5)}\right). \tag{5.44}$$

Agora, fazemos a transformação de calibre $A_{\mu} \to A_{\mu} - \partial_{\mu} \omega$ e obtemos

$$Z^{(1)} = \int \mathcal{D}A_{\mu} \mathcal{D}\bar{\pi}^{k} \ \mathcal{D}\omega \ \delta \left(G\left[A_{\mu}\right] \right) \det \left| \frac{\partial G\left[A_{\mu}^{\omega}\right]}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} \\ \times \delta \left[\left(1 - a^{2}d_{00}\nabla^{2} \right) \nabla^{2}\omega + \left(1 - a^{2}d_{00}\nabla^{2} \right) \partial_{i}A^{i} + \partial_{i}\bar{\pi}^{i} \right] \exp \left(i \int dx \ \mathcal{L}^{(5)} \right), \tag{5.45}$$

onde lembramos que $\mathcal{L}^{(5)}$ é invariante de calibre. A integração em ω já foi calculada em (4.92), assim, a AVV se lê

$$Z^{(1)} = \det \left| \left(1 - a^2 d_{00} \nabla^2 \right) \nabla^2 \right|^{-1} \int \mathcal{D}A_{\mu} \mathcal{D}\bar{\pi}^k \,\,\delta\left(G\left[A_{\mu}\right]\right) \det \left| \frac{\partial G\left[A_{\mu}^{\omega}\right]}{\partial\omega} \right|_{\omega=0} \exp\left(i \int dx \,\,\mathcal{L}^{(5)}\right).$$
(5.46)

Também, a integração em $\bar{\pi}^k$ é muito similar à já computada em (4.94), com isso, a amplitude $Z^{(1)}$ é escrita como

$$Z^{(1)} = N \det \left| \left(1 - a^2 d_{00} \nabla^2 \right) \nabla^2 \right|^{-1} \int \mathcal{D}A_\mu \, \delta \left(G \left[A_\mu \right] \right) \det \left| \frac{\partial G \left[A_\mu^\omega \right]}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} \exp \left(i \int dx \, \mathcal{L}_P^{(LV)} \right), \tag{5.47}$$

onde $\mathcal{L}_{P}^{(LV)}$ é a densidade Laggrangeana (5.1)

$$\mathcal{L}_{P}^{(LV)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}a^{2}d_{\alpha\beta}\partial_{\mu}F^{\mu\alpha}\partial_{\lambda}F^{\lambda\beta}, \qquad (5.48)$$

com $d_{\mu\nu}$ dado por

$$d_{\alpha\beta} = \left(d_{00}, -\frac{d_{tr}}{3}, -\frac{d_{tr}}{3}, -\frac{d_{tr}}{3}\right).$$
(5.49)

Por fim, após todo esse processo prévio, a amplitude de transição vácuo-vácuo Z dado em (5.35) resulta expressa como

$$Z = N \int \mathcal{D}A_{\mu} \,\delta\left(G\left[A_{\mu}\right]\right) \det \left| \frac{\partial G\left[A_{\mu}^{\omega}\right]}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} \exp\left(i \int dx \,\mathcal{L}_{P}^{(LV)}\right).$$
(5.50)

Para continuar, escolhemos o calibre de Lorentz, já definido anteriormente em (4.108), assim, a AVV se lê

$$Z = N \det \left| \xi^{-1/2} \Box \right| \int \mathcal{D}A_{\mu} \, \delta \left(\xi^{-1/2} \partial_{\mu} A^{\mu} - f \right) \exp \left(i \int dx \, \mathcal{L}_{P}^{(LV)} \right). \tag{5.51}$$

Como a amplitude de transição deve ser independente de f integra-se usando o seguinte peso $\exp\left(-\frac{i}{2}\int dx f^2\right)$. Assim, temos

$$Z = N \det \left| \xi^{-1/2} \Box \right| \int \mathcal{D}A_{\mu} e^{iS_{eff}}, \qquad (5.52)$$

onde S_{eff} é dada por

$$S_{eff} = \int dx \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} a^2 d_{\alpha\beta} \partial_\mu F^{\mu\alpha} \partial_\lambda F^{\lambda\beta} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right]$$
$$= \int dx \frac{1}{2} A^\mu S_{\mu\nu} A^\nu, \qquad (5.53)$$

onde o operador $S_{\mu\nu}$ é dado por

$$S_{\mu\nu} = \Box \eta_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) \partial_{\mu}\partial_{\nu} + a^{2}d_{\mu\nu}\Box^{2} - a^{2}d_{\mu\beta}\partial_{\nu}\partial^{\beta}\Box -a^{2}d_{\nu\beta}\partial_{\mu}\partial^{\beta}\Box + a^{2}d_{\alpha\beta}\partial^{\alpha}\partial^{\beta}\partial_{\mu}\partial_{\nu},$$
(5.54)

com $d_{\mu\nu} = \text{diag}\left(d_{00}, -\frac{d_{tr}}{3}, -\frac{d_{tr}}{3}, -\frac{d_{tr}}{3}\right)$. Assim, as componentes de $S_{\mu\nu}$ são

$$S_{00} = -\left(1 - a^2 d_{00} \nabla^2\right) \nabla^2 - a^2 \frac{d_{tr}}{3} \nabla^2 \partial_0 \partial_0 + \frac{1}{\xi} \partial_0 \partial_0, \qquad (5.55)$$

$$S_{0k} = \left(\frac{1}{\xi} - 1 + a^2 d_{00} \nabla^2 - a^2 \frac{d_{tr}}{3} \partial_0 \partial_0\right) \partial_0 \partial_k, \qquad (5.56)$$

$$S_{jk} = \Box g_{jk} + \left(\frac{1}{\xi} - 1 + a^2 d_{00} \partial_0 \partial_0\right) \partial_j \partial_k + a^2 \frac{d_{tr}}{3} \left(g_{jk} \Box^2 - 2\Box \partial_k \partial_j - \nabla^2 \partial_j \partial_k\right).$$
(5.57)

A integração do campo de calibre resulta

$$\int \mathcal{D}A_{\mu}e^{iS_{eff}} = \det |S_{\mu\nu}|^{1/2}$$

$$= \det \left|\xi^{-1/2}\Box^{2}\right|^{-1} \det \left|a^{2}\frac{d_{tr}}{3}\Box + 1\right|^{-1}$$

$$\times \det \left|a^{2}\frac{d_{tr}}{3}\Box + a^{2}\left(\frac{d_{tr}}{3} - d_{00}\right)\nabla^{2} + 1\right|^{-1/2}.$$
(5.58)

Finalmente, a amplitude de transição vácuo-vácuo é dada por

$$Z = \det |\Box|^{-1} \det \left| a^2 \frac{d_{tr}}{3} \Box + 1 \right|^{-1} \det \left| a^2 \frac{d_{tr}}{3} \Box + a^2 \left(\frac{d_{tr}}{3} - d_{00} \right) \nabla^2 + 1 \right|^{-\frac{1}{2}}.$$
 (5.59)

A partir da AVV, considerando que sempre $d_{00} \ge 0$ e $d_{tr} \ne 0$, podemos fazer algumas análises:

- A) Se $d_{tr} > 0$, esse resultado indica que o modelo possui 5 graus de liberdade físicos com relações de dispersão bem definidas:
 - \star O primeiro determinante det $|\Box|^{-1}$ descreve 2 graus de liberdade bosônicos de massa nula com relação de dispersão

$$(p_0)^2 = |\vec{p}|^2 \,. \tag{5.60}$$

Ele seria o equivalente ao fóton de Maxwell.

 \star O segundo determinante descreve 2 graus de liberdade bosônicos de massa $\frac{3}{a^2 d_{tr}}$ com relação de dispersão

$$(p_0)^2 = |\vec{p}|^2 + \frac{3}{a^2 d_{tr}}.$$
(5.61)

 ★ O terceiro determinante representa 1 grau de liberdade bosônico massivo com relação de dispersão modificada,

$$(p_0)^2 = \frac{3d_{00}}{d_{tr}} \left| \vec{p} \right|^2 + \frac{3}{a^2 d_{tr}}.$$
(5.62)

- B) Para $d_{tr} < 0$, a amplitude vácuo-vácuo (5.59) descreve um fóton (2 graus de liberdade) sem massa e 2 graus de liberdade taquiônicos. O terceiro determinante proporciona uma relação de dispersão sem interpretação de partícula.
- C) A partir da AVV (5.59), podemos analisar o caso tr $(d_{\mu\nu}) = 0$, que equivale a fazer $d_{tr} = -d_{00} < 0$,

$$Z = \det |\Box|^{-1} \det \left| -a^2 \frac{d_{00}}{3} \Box + 1 \right|^{-1} \det \left| -a^2 \frac{d_{00}}{3} \Box - a^2 \frac{4d_{00}}{3} \nabla^2 + 1 \right|^{-\frac{1}{2}}.$$
 (5.63)

 \star O primeiro determinante de
t $|\Box|^{-1}$ descreve 2 graus de liberdade bosônicos de massa nula com relação de dispersão

$$(p_0)^2 = |\vec{p}|^2.$$
 (5.64)

Ele seria o equivalente ao fóton de Maxwell.

- \star O segundo determinante descreve 2 graus de liberdade taquiônicos.
- * O terceiro determinante proporciona uma relação de dispersão sem interpretação de partícula.
- D) A partir da AVV (5.59), podemos analisar o caso $d_{00} = 0$ e $d_{tr} \neq 0$

$$Z = \det |\Box|^{-1} \det \left| a^2 \frac{d_{tr}}{3} \Box + 1 \right|^{-1} \det \left| a^2 \frac{d_{tr}}{3} \Box + a^2 \frac{d_{tr}}{3} \nabla^2 + 1 \right|^{-\frac{1}{2}}.$$
 (5.65)

 \star O primeiro determinante de
t $|\Box|^{-1}$ descreve 2 graus de liberdade bosônicos de massa nula com relação de dispersão

$$(p_0)^2 = |\vec{p}|^2. \tag{5.66}$$

Ele seria o equivalente ao fóton de Maxwell.

* Se $d_{tr} > 0$, o segundo determinante descreve 2 graus de liberdade bosônicos de massa $\frac{3}{a^2 d_{tr}}$ com relação de dispersão

$$(p_0)^2 = |\vec{p}|^2 + \frac{3}{a^2 d_{tr}}.$$
(5.67)

Ele representa 2 graus de liberdade tipo Proca. Se $d_{tr} < 0,$ eles representam táquions.

★ O terceiro determinante representa 1 grau de liberdade bosônico com relação de dispersão não física para $d_{tr} \neq 0$,

$$(p_0)^2 = \frac{3}{a^2 d_{tr}}.$$
(5.68)

5.2 O caso $d_{00} \neq 0$ e $d_{tr} = 0$

Agora analisamos o caso

$$d_{\mu\nu} = \text{diag}(d_{00}, 0, 0, 0). \tag{5.69}$$

A partir das equações (5.3) e (5.4) obtemos os momentos canônicos

$$\pi^0 = 0, (5.70)$$

$$\pi^{i} = -F^{0i} - a^{2} d_{00} \partial^{i} \partial_{j} F^{0j}, \ i = 1, 2, 3,$$
(5.71)

$$\bar{\pi}^{\mu} = 0, \qquad (5.72)$$

gerando oito vínculos primários que denotaremos da seguinte maneira:

$$\phi_0 = \pi^0 \approx 0, \tag{5.73}$$

$$\phi_k = \pi^k + \bar{A}^k - \partial^k A_0 + a^2 d_{00} \partial^k \left(\partial_j \bar{A}^j + \nabla^2 A_0 \right) \approx 0,$$

$$\bar{\phi}_0 = \bar{\pi}^0 \approx 0, \quad \bar{\phi}_k = \bar{\pi}^k \approx 0,$$
 (5.74)

 $\operatorname{com} k = 1, 2, 3.$

Os parênteses de Poisson não nulos entre os vínculos primários são

$$\{\phi_0(x),\phi_k(y)\} = -\left(1 - a^2 d_{00} \nabla_x^2\right) \partial_x^k \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{y}\right),\tag{5.75}$$

$$\left\{\phi_{j}\left(x\right), \bar{\phi}_{k}\left(y\right)\right\} = \left(g_{jk} + a^{2}d_{00}\partial_{x}^{j}\partial_{x}^{k}\right)\delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{y}\right).$$

$$(5.76)$$

Voltando para (4.25) e, após uma integração por partes, a densidade hamiltoniana canônica, que é definida pela transformação de Legendre, é reexpressa como

$$\mathcal{H}_{C} = -\frac{1}{2}\bar{A}_{i}\left(g^{ij} + a^{2}d_{00}\partial^{i}\partial^{j}\right)\bar{A}_{j} + \frac{1}{2}A^{0}\left(1 - d_{00}a^{2}\nabla^{2}\right)\nabla^{2}A^{0} + \frac{1}{4}\left(F_{ij}\right)^{2}.$$
(5.77)

A hamiltoniana primária é escrita como sendo

$$H_{P} = H_{C} + \int d^{3}\mathbf{y} \ \lambda_{0}(y) \ \phi_{0}(y) + \int d^{3}\mathbf{y} \ \lambda_{k}(y) \ \phi_{k}(y)$$
$$+ \int d^{3}\mathbf{y} \ \bar{\lambda}_{0}(y) \ \bar{\phi}_{0}(y) + \int d^{3}\mathbf{y} \ \bar{\lambda}_{k}(y) \ \bar{\phi}_{k}(y) .$$
(5.78)

Os parênteses de Poisson não nulos entre os vínculos primários e a hamiltoniana canônica são

$$\{\phi_0(x), H_C\} = -(1 - d_{00}a^2\nabla^2)\nabla^2\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \qquad (5.79)$$

$$\{\phi_k(x), H_C\} = \partial_j F^{jk}, \qquad (5.80)$$

$$\left\{\bar{\phi}_{k}\left(x\right), H_{C}\right\} = \left(g^{kj} + d_{00}a^{2}\partial^{k}\partial^{j}\right)\bar{A}_{j}.$$
(5.81)

A consistência do vínculo ϕ_0 resulta em

$$\dot{\phi}_0(x) = \{\phi_0(x), H_P\} = -(1 - d_{00}a^2\nabla^2)(\nabla^2 A_0 + \partial^k \lambda_k) \approx 0.$$
 (5.82)

Similarmente, para os vínculos $\phi_k,$ temos

$$\dot{\phi}_k(x) = \{\phi_0(x), H_P\} = \partial_j F^{jk} - \left(1 - a^2 d_{00} \nabla^2\right) \partial^k \lambda_0 + \left(g_{kj} + a^2 d_{00} \partial^k \partial^j\right) \ \bar{\lambda}_j \approx 0.$$
(5.83)

A relação de consistência do vínculo $\bar{\phi}_0$ é

$$\dot{\bar{\phi}}_0 = \left\{ \bar{\phi}_0, H_P \right\} = 0,$$
 (5.84)

assim, não gera novos vínculos.

A evolução temporal dos vínculos $\bar{\phi}_k$ produz a seguinte relação:

$$\dot{\bar{\phi}}_k = \left\{ \bar{\phi}_k, H_p \right\} = \left(g^{kj} + d_{00} a^2 \partial^k \partial^j \right) \left(\bar{A}_j - \lambda_j \right) \approx 0.$$
(5.85)

Como det $\left|g^{kj} + d_{00}a^2\partial^k\partial^j\right| = \det\left|1 - d_{00}a^2\nabla^2\right| \neq 0$, essa relação fixa os multiplicadores λ_j

$$\lambda_j = \bar{A}_j. \tag{5.86}$$

Derivando (5.83), obtemos

$$\left(1 - a^2 d_{00} \nabla^2\right) \left(\nabla^2 \lambda_0 + \partial^j \bar{\lambda}_j\right) \approx 0, \qquad (5.87)$$

que permite fixar λ_0 em termos dos $\bar{\lambda}_j$,

$$\lambda_0 = -\frac{1}{\nabla^2} \ \partial^j \bar{\lambda}_j. \tag{5.88}$$

E, substituindo em (5.83), obtemos

$$\left(g^{kj} + \frac{\partial^k \partial^j}{\nabla^2}\right) \ \bar{\lambda}_j \approx -\partial_j F^{jk}.$$
(5.89)

Dado que a matriz $g^{kj} + \partial^k \partial^j / \nabla^2$ possui nulidade 1, somente podemos encontrar 2 dos 3 multiplicadores $\bar{\lambda}_j$.

Assim, os multiplicadores que ficam indeterminados serão λ_0 , $\bar{\lambda}_0$ e um dos $\bar{\lambda}_j$, ou seja, o modelo possui 3 parâmetros arbitrários que impedem a teoria ser bem definida.

Um vínculo pode ser encontrado se substituímos (5.86) em (5.82),

$$\left(1 - d_{00}a^2\nabla^2\right)\left(\partial_j F^{j0}\right) = \partial_j \pi^j \approx 0, \qquad (5.90)$$

que denotaremos por

$$\phi_9 = \partial_j \pi^j \approx 0. \tag{5.91}$$

A condição de consistência deste vínculo é identicamente nula e, assim, não gera vínculos adicionais.

Assim, denotamos o conjunto de vínculos por

$$\Xi_I = \left\{ \phi_0, \phi_k, \bar{\phi}_0, \bar{\phi}_k, \phi_9 \right\} \tag{5.92}$$

e a matriz formada pelos parênteses de Poisson chamaremos de $\Phi_{IJ}(x, y) = \{\phi_I(x), \phi_J(y)\}.$ Os únicos parênteses de Poisson não nulos são dados pelas equações (5.75) e (5.76).

O espaço nulo ou nulidade da matriz $\Phi_{IJ}(x, y)$ possui dimensão 3 e corresponde a 3 vínculos de primeira classe listados a seguir:

$$\bar{\pi}^0 \approx 0, \quad \partial_j \pi^j \approx 0, \quad \pi^0 - \partial_k \bar{\pi}^k \approx 0.$$
(5.93)

Aqui precisamos observar o seguinte detalhe: os vínculos de primeira classe nos casos estudados possuem exatamente a mesma estrutura.

Agora precisamos fixar 3 condições de calibre. Como nos casos anteriores, partimos da lei de Gauss modificada,

$$\left(1 - a^2 d_{00} \nabla^2\right) \partial_j \partial^j A^0 - \partial^0 \left(1 - a^2 d_{00} \nabla^2\right) \partial_j A^j = 0.$$
(5.94)

Aqui devemos observar que soluções fisicamente consistentes são obtidas se $d_{00} \ge 0$, assim, para o nosso propósito consideramos $d_{00} > 0$. Com isso, a lei de Gauss permite escolhermos duas condições de calibre,

$$\left(1 - d_{00}a^2\nabla^2\right)\partial_i A^i \approx 0 \ \mathrm{e} \ A^0 \approx 0.$$
(5.95)

A terceira escolha natural é impor

$$\bar{A}^0 \approx 0, \tag{5.96}$$

devido que $\bar{\pi}^0 \approx 0$.

Com isso, denotamos as condições de calibre por

$$\psi_1 = \left(1 - d_{00}a^2\nabla^2\right)\partial_i A^i \approx 0, \qquad (5.97)$$

$$\psi_2 = \bar{A}^0 \approx 0, \tag{5.98}$$

$$\psi_3 = A^0 \approx 0. \tag{5.99}$$

Assim, o conjunto completo de vínculos é

$$\Sigma_{1} = \pi^{0} , \quad \Sigma_{2} = \bar{\pi}^{0} , \quad \Sigma_{3} = \partial_{i}\pi^{i} , \quad \Sigma_{4k} = \bar{\pi}^{k} ,$$

$$\Sigma_{5k} = \pi^{k} + \bar{A}^{k} + d_{00}a^{2}\partial^{k}\partial_{i}\bar{A}^{i} ,$$

$$\Sigma_{6} = (1 - d_{00}\nabla^{2})\partial_{i}A^{i} , \quad \Sigma_{7} = \bar{A}^{0} , \quad \Sigma_{8} = A^{0}.$$
(5.100)

A matriz formada pelos parênteses de Poisson dos vínculos $M_{IJ}(x,y) = \{\Sigma_I(x), \Sigma_J(y)\}, é$

$$\mathbb{M}(x,y) = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{C} \\ -\mathbb{C}^T & \mathbb{D} \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) , \qquad (5.101)$$

onde \mathbb{O} , $\mathbb{D} \in \mathbb{C}$ são matrizes de 6×6 , com \mathbb{O} a matriz nula e as matrizes $\mathbb{C} \in \mathbb{D}$ expressas como

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{F} \\ -\mathbb{B} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \quad e \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{V} \\ \mathbb{V}^T & \mathbb{O} \end{pmatrix} \quad , \tag{5.102}$$

com \mathbb{O} , \mathbb{V} , $\mathbb{B} = [B_{ij}]$ e \mathbb{F} sendo matrizes de 3 × 3. A matriz \mathbb{O} sendo a matriz nula e as outras 3 matrizes dadas por

$$B^{ij} = g^{ij} + a^2 d_{00} \partial^i \partial^j, \qquad (5.103)$$

$$\mathbb{F} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ (1 - a^2 d_{00} \nabla^2) \nabla^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (5.104)$$

$$\mathbb{V} = \left(1 - a^2 d_{00} \nabla^2\right) \begin{pmatrix} \partial^1 & 0 & 0 \\ \partial^2 & 0 & 0 \\ \partial^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
 (5.105)

Calculando o determinante da matriz $\mathbbm{M}\,,\, {\rm temos}\,$

$$\det \mathbb{M} = \left[\det \mathbb{C}\right]^2 = \det \left| \left(1 - a^2 d_{00} \nabla^2 \right) \nabla^2 \right| \det \left(\mathbb{B} \right)$$
(5.106)

com

$$\det\left(\mathbb{B}\right) = \det\left|1 - a^2 d_{00} \nabla^2\right|. \tag{5.107}$$

Assim, substituindo a expressão (5.107) em (5.106), teremos

$$\det \mathbb{M} = \det \left| \left(1 - a^2 d_{00} \nabla^2 \right)^4 \nabla^4 \right|.$$
(5.108)
Logo, a inversa da matriz $\mathbb{M}(x, y)$ resulta em

$$\mathbb{M}^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbb{D}} & -(\mathbb{C}^{-1})^T \\ \mathbb{C}^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \qquad (5.109)$$

onde \mathbb{C}^{-1} e $\tilde{\mathbb{D}}$ são

$$\mathbb{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{B}^{-1} \\ \mathbb{F}^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \tilde{\mathbb{D}} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -\tilde{\mathbb{V}} \\ -\tilde{\mathbb{V}}^T & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$
 (5.110)

As inversas das matrizes $\mathbb B$ e $\mathbb F$ são dadas por

$$\left(\mathbb{B}^{-1}\right)^{ij} = g^{ij} - \frac{a^2 d_{00} \partial^i \partial^j}{1 - a^2 d_{00} \nabla^2},\tag{5.111}$$

е

$$\mathbb{F}^{-1} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{(1-a^2d_{00}\nabla^2)\nabla^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
(5.112)

respectivamente. A matriz $\tilde{\mathbb{V}}$ sendo dada por

$$\tilde{\mathbb{V}} = \frac{1}{\left(1 - a^2 d_{00} \nabla^2\right) \nabla^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \partial^1 & \partial^2 & \partial^3 \end{pmatrix}.$$
(5.113)

Seguindo o algoritmo de Dirac-Bergmann, os parênteses de Poisson serão substituídos pelos parênteses de Dirac de acordo com a Eq. (4.66). Assim, nesta parametrização, o único parênteses de Dirac relevante é

$$\left\{A_i, \bar{A}_j\right\}_D = -\left(g_{ij} + \frac{\partial_i \partial_j - a^2 d_{00} \nabla^2 \partial_i \partial_j}{\left(1 - a^2 d_{00} \nabla^2\right) \nabla^2}\right) \delta\left(x - y\right).$$
(5.114)

Os parênteses de Dirac, para o caso $d_{00} > 0$ e $d_{tr} = 0$, reduzem a densidade hamiltoniana canônica à seguinte forma simples:

$$\mathcal{H}_C = -\frac{1}{2}\bar{A}_i B^{ij} \bar{A}_j - \frac{1}{2} A_i \partial_j F^{ji}.$$
(5.115)

O próximo passo é verificar como a escolha da parametrização $d_{00} > 0$ e $d_{tr} = 0$ modifica a amplitude de transição vácuo-vácuo.

5.2.1 Amplitude de transição vácuo-vácuo

Por fim, nessa seção deduziremos a amplitude de transição vácuo-vácuo para a parametrização $d_{00} \neq 0$ e $d_{tr} = 0$ e discutiremos suas consequências nos graus de liberdade e as respectivas relações de dispersão.

A amplitude de transição vácuo-vácuo é definida por

$$Z = \int \mathcal{D}A_{\mu} \mathcal{D}\pi^{\mu} \mathcal{D}\bar{A}_{\mu} \mathcal{D}\bar{\pi}^{\mu} \left| \det M_{IJ}(x,y) \right|^{1/2} \prod_{I} \delta\left(\Sigma_{I}\right) \exp\left\{ i \int dx (\pi^{\mu}\bar{A}_{\mu} + \bar{\pi}^{\mu}\dot{A}_{\mu} - \mathcal{H}_{C}) \right\},$$
(5.116)

onde Σ_I é o conjunto formado pelos vínculos definidos em (5.100),

$$\Sigma_{1} = \pi^{0} , \ \Sigma_{2} = \bar{\pi}^{0} , \ \Sigma_{3} = \partial_{i}\pi^{i} , \ \Sigma_{4k} = \bar{\pi}^{k} , \ \Sigma_{5k} = \pi^{k} + B^{kj}\bar{A}_{j} ,$$

$$\Sigma_{6} = (1 - d_{00}\nabla^{2}) \partial_{i}A^{i} , \ \Sigma_{7} = \bar{A}^{0} , \ \Sigma_{8} = A^{0}, \qquad (5.117)$$

com a matriz B^{kj} já definida em (5.103). A matriz $M_{IJ}(x, y) = \{\Sigma_I(x), \Sigma_J(y)\}$ dada em (5.101) possui determinante (5.108)

$$\det \mathbb{M} = \det \left| \left(1 - a^2 d_{00} \nabla^2 \right)^4 \nabla^4 \right|.$$
 (5.118)

A densidade hamiltoniana canônica \mathcal{H}_C é

$$\mathcal{H}_C = -\frac{1}{2}\bar{A}_i B^{ij}\bar{A}_j - \frac{1}{2}A_i\partial_j F^{ji}.$$
(5.119)

Também, reescrevemos o expoente $\pi^{\mu}\bar{A}_{\mu} + \bar{\pi}^{\mu}\dot{A}_{\mu} - \mathcal{H}_{C}$ como

$$\mathcal{L}^{(1)} = \pi^0 \dot{A}_0 + \bar{\pi}^0 \dot{\bar{A}}_0 + \pi^i \dot{A}_i + \bar{\pi}^i \dot{\bar{A}}_i + \frac{1}{2} \bar{A}_i B^{ij} \bar{A}_j - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ji}.$$
(5.120)

Assim, a amplitude de transição vácuo-vácuo assume a forma

$$Z = \det \left| \left(1 - a^2 d_{00} \nabla^2 \right)^2 \nabla^2 \right| \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\pi^\mu \mathcal{D}\bar{A}_\mu \mathcal{D}\bar{\pi}^\mu \prod_I \delta\left(\Sigma_I\right) \exp\left(i \int dx \,\mathcal{L}^{(1)} \right).$$
(5.121)

Primeiramente, observamos que a função $\delta(\Sigma_6)$ pode ser expressa como

$$\delta\left[\left(1-d_{00}\nabla^{2}\right)\partial_{i}A^{i}\right] = \det\left|1-d_{00}\nabla^{2}\right|^{-1}\delta\left(\partial_{i}A^{i}\right).$$
(5.122)

Assim, após a integração em π^0 , A_0 , \bar{A}^0 , $\bar{\pi}^0$ e $\bar{\pi}^i$ a AVV é expressa como

$$Z = \det \left| \left(1 - a^2 d_{00} \nabla^2 \right) \nabla^2 \right| \int \mathcal{D}A_k \mathcal{D}\pi^k \mathcal{D}\bar{A}_k \delta \left(\pi^k + B^{kj} \bar{A}_j \right) \delta \left(\partial_k \pi^k \right) \delta \left(\partial_i A^i \right) \exp \left(i \int dx \, \mathcal{L}^{(2)} \right),$$
(5.123)

onde

$$\mathcal{L}^{(2)} = \pi^i \dot{A}_i + \frac{1}{2} \bar{A}_i B^{ij} \bar{A}_j - \frac{1}{4} \left(F_{ij} \right)^2.$$
(5.124)

Em seguida integramos os campos π_k que resulta em

$$Z = \det \left| \left(1 - a^2 d_{00} \nabla^2 \right) \nabla^2 \right| \int \mathcal{D}A_k \mathcal{D}\bar{A}_k \delta \left(\partial_k B^{kj} \bar{A}_j \right) \delta \left(\partial_i A^i \right) \exp \left(i \int dx \, \mathcal{L}^{(3)} \right), \quad (5.125)$$

com

$$\mathcal{L}^{(3)} = -B^{ij}\bar{A}_j\dot{A}_i + \frac{1}{2}\bar{A}_iB^{ij}\bar{A}_j - \frac{1}{4}\left(F_{ij}\right)^2.$$
(5.126)

Antes de realizar a integração em \bar{A}^k expressamos $\delta \left(\partial_k B^{kj} \bar{A}_j\right)$ na representação de Fourier,

$$\delta(\partial_k B^{kj} \bar{A}_j) = \int \mathcal{D}A_0 \exp\left(-i \int d^3 x \ A_0 \partial_k B^{kj} \bar{A}_j\right) = \int \mathcal{D}A_0 \exp\left(i \int d^3 x \ \left(\bar{A}_i B^{ij} \partial_j A_0\right)\right),\tag{5.127}$$

de tal modo que a AVV (5.125) se expressa como

$$Z = \det \left| \left(1 - a^2 d_{00} \nabla^2 \right) \nabla^2 \right| \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{A}_k \delta \left(\partial_i A^i \right) \exp \left(i \int dx \, \mathcal{L}^{(4)} \right), \tag{5.128}$$

com

$$\mathcal{L}^{(4)} = \frac{1}{2} \left(\bar{A}_i - F_{0i} \right) B^{ij} \left(\bar{A}_j - F_{0i} \right) - \frac{1}{2} F_{0i} B^{ij} F_{0i} - \frac{1}{4} \left(F_{ij} \right)^2, \qquad (5.129)$$

onde definimos $F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0$. Após a integração em \bar{A}^k a AVV é dada por

$$Z = \det \left| \left(1 - a^2 d_{00} \nabla^2 \right) \nabla^2 \right| \det \left| B^{ij} \right|^{-1/2} \int \mathcal{D}A_\mu \delta \left(\partial_i A^i \right) \exp \left(i \int dx \, \mathcal{L}^{(5)} \right), \tag{5.130}$$

onde

$$\mathcal{L}^{(5)} = -\frac{1}{2} F_{0i} B^{ij} F_{0i} - \frac{1}{4} \left(F_{ij} \right)^2.$$
(5.131)

Com esse resultado, a amplitude de transição vácuo-vácuo (5.130) se expressa como

$$Z = \det \left| \nabla^2 \right| \det \left| \left(1 - a^2 d_{00} \nabla^2 \right) \nabla^2 \right|^{1/2} \int \mathcal{D}A_\mu \delta \left(\partial_i A^i \right) \exp \left(i \int dx \, \mathcal{L}^{(6)} \right), \tag{5.132}$$

com $\mathcal{L}^{(6)}$ sendo a densidade Lagrangiana (5.1) dada por

$$\mathcal{L}^{(6)} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}a^2 d_{\alpha\beta}\partial_{\mu}F^{\mu\alpha}\partial_{\nu}F^{\nu\beta}, \qquad (5.133)$$

com $d_{\alpha\beta} = \text{diag}(d_{00}, 0, 0, 0).$

É chegado o momento de usar a técnica de Faddeev-Popov [definido em (4.88) e (4.89)] com o calibre de Lorentz generalizado (4.108) na amplitude de transição vácuo-vácuo (5.132) a qual, após a transformação de calibre $A_{\mu} \to A_{\mu} - \partial_{\mu}\omega$, resulta expressa como

$$Z = \det \left| \nabla^2 \right| \det \left| 1 - d_{00} a^2 \nabla^2 \right|^{1/2} \det \left| \xi^{-1/2} \Box \right|$$
$$\times \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\omega \, \delta \left(\xi^{-1/2} \partial_\mu A^\mu - f \right) \delta \left(\partial_i A^i - \nabla^2 \omega \right) \exp \left(i \int d^3 x \mathcal{L}^{(6)} \right). \tag{5.134}$$

A integracção em ω é facilmente calculada

$$\int \mathcal{D}\omega \,\,\delta\left(\partial_i A^i - \nabla^2 \omega\right) = \det \left|\nabla^2\right|^{-1}.\tag{5.135}$$

Assim, a AVV toma a seguinte forma:

$$Z = \det \left| 1 - d_{00} a^2 \nabla^2 \right|^{1/2} \det \left| \xi^{-1/2} \Box \right| \int \mathcal{D}A_\mu \delta \left(\xi^{-1/2} \partial_\mu A^\mu - f \right) \exp \left(i \int d^3 x \mathcal{L}^{(6)} \right).$$
(5.136)

Como a amplitude de transição deve ser independente de f, integramos essa variável usando o seguinte peso $\exp\left(-\frac{i}{2}\int dx f^2\right)$. Assim, temos

$$Z = N \det \left| 1 - d_{00} a^2 \nabla^2 \right|^{1/2} \det \left| \xi^{-1/2} \Box \right| \int \mathcal{D}A_\mu \exp\left(iS_{eff}\right),$$
(5.137)

onde S_{eff} é dada por

$$S_{eff} = \int dx \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} a^2 d_{\alpha\beta} \partial_\mu F^{\mu\alpha} \partial_\lambda F^{\lambda\beta} - \frac{1}{2\xi} \left(\partial_\mu A^\mu \right)^2 \right]$$
$$= \int dx \frac{1}{2} A^\mu S_{\mu\nu} A^\nu. \tag{5.138}$$

O operador $S_{\mu\nu}$ já foi definido em (5.54)

$$S_{\mu\nu} = \Box \eta_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) \partial_{\mu} \partial_{\nu} + a^2 d_{\mu\nu} \Box^2 - a^2 d_{\mu\beta} \partial_{\nu} \partial^{\beta} \Box - a^2 d_{\nu\beta} \partial_{\mu} \partial^{\beta} \Box + a^2 d_{\alpha\beta} \partial^{\alpha} \partial^{\beta} \partial_{\mu} \partial_{\nu}, \qquad (5.139)$$

mas, agora, $d_{\alpha\beta} = \text{diag}(d_{00}, 0, 0, 0) \in S_{\mu\nu}$ possui as seguintes componentes:

$$S_{00} = -\left(1 - a^2 d_{00} \nabla^2\right) \nabla^2 + \frac{1}{\xi} \partial_0 \partial_0$$
 (5.140)

$$S_{0k} = \left(\frac{1}{\xi} - 1 + a^2 d_{00} \nabla^2\right) \partial_0 \partial_k \tag{5.141}$$

$$S_{jk} = \Box g_{jk} + \left(\frac{1}{\xi} - 1 + a^2 d_{00} \partial^0 \partial^0\right) \partial_j \partial_k.$$
(5.142)

A integração do campo de calibre é

$$\int \mathcal{D}A_{\mu} \exp\left(iS_{eff}\right) = \det |S_{\mu\nu}|^{-1/2} = \det \left|\xi^{-1/2}\Box^{2}\right|^{-1} \det \left|1 - d_{00}a^{2}\nabla^{2}\right|^{-1/2}.$$
(5.143)

Com esse último resultado, a amplitude de transição vácuo-vácuo resulta ser simplesmentem

$$Z = N \det \left|\Box\right|^{-1}.$$
(5.144)

Assim, na amplitude de transição vácuo-vácuo para a parametrização $d_{\alpha\beta} = \text{diag}(d_{00}, 0, 0, 0)$ há um campo sem massa com dois graus de liberdade físicos, ou seja, o fóton. Os efeitos da quebra de Lorenz, controlados por d_{00} , não aparecem na relação de dispersão do fóton, mas devem aparecer nas funções de Green do modelo, por exemplo, no propagador fotônico.

Capítulo 6

da Tabela 6.1.

Conclusões e perspectivas

A tese estuda os efeitos de violação da simetria de Lorentz em dois contextos diferentes: em átomos mesônicos e na eletrodinâmica de Maxwell, munida de termos de derivadas superiores. O estudo em átomos mesônicos é realizado usando a SQED como um modelo efetivo para obter as contribuições da LV (em primeira ordem) para o espectro da energia dos átomos de hidrogênio usual e hidrogênio mesônico, que serão modificados. Em seguida, usamos as contribuições calculadas aos níveis de energia e, comparando aos dados experimentais, buscamos estabelecer limites superiores para os coeficientes portadores da quebra de Lorentz (ver Tabela 6.1). Os limites são alcançados de maneiras distintas: via estudo das contribuições CPT-pares e CPT-ímpares dadas em (3.3), nas transições ao nível fundamental e em transições puramente eletromagnéticas, onde usamos os dados experimentais dos átomos piônicos e kaônicos; contribuições ao setor do próton (3.39) usando espectroscopia do átomo de hidrogênio, além de modificações à interação coulombiana. Os resultados são apresentados na Tabela 6.1, onde a segunda coluna representa os limites superiores provenientes de dados da interação forte; e a terceira, apresenta os limites superiores obtidos através de transições eletromagnéticas puras. Ressaltamos que os limites superiores para os coeficientes piônicos e kaônicos, aqui obtidos, são completamente novos e não estão contidos no MPE Ref. [12]. Na segunda abordagem, o primeiro passo foi calcular as correções radiativas em primeira ordem da LV para a ação efetiva do fóton na ordem de um 1-loop. Logo, foram considerados os limites não relativísticos destas correções e as respectivas contribuições à energia do átomo de hidrogênio. Essa informação e os dados da espectroscopia do átomo de hidrogênio permitiram encontrar limites superiores mais restritivos para os respectivos coeficientes da LV, tal como mostrados na quarta coluna

Um estudo mais completo dos efeitos da LV em átomos hadrônicos será realizado utilizando a técnica da perturbação quiral, munida de acoplamentos não-mínimos da maneira aqui in-

Acoplamento LV	1S shift	$4P \rightarrow 3P$	Átomo H
$ eg_{\pi}w^{\mu} <$	$2.3 \ \mathrm{GeV}^{-1}$	$1.0 \times 10^2 \mathrm{GeV}^{-1}$	_
$ eg_K w^\mu <$	$1.02\times 10^3 {\rm GeV^{-1}}$	_	_
$\left e \tilde{g}_{\pi} \kappa^{(DE)} \right <$	$1.9\times 10^2 {\rm GeV^{-2}}$	$1.8\times 10^4 {\rm GeV}^{-2}$	_
$\left e \tilde{g}_K \kappa^{(DE)} \right <$	$3.3 \times 10^4 \mathrm{GeV}^{-2}$	-	_
$eg^{(p)}w^{(p)}_{\mu}$, $egu^{\mu}_{(w)}$ <	-	-	$5.1 \times 10^{-7} {\rm GeV}^{-1}$
$ e\tilde{g}^{(p)}\kappa^{(p)}_{(DE)} , 2e\tilde{g}l^{(DE)}_{(k)} <$	—	—	$5.1\mathrm{GeV}^{-2}$

Tabela 6.1: Limites superiores para as constantes de acoplamentos do modelo dado pela Eq. 3.1, os resultados da segunda coluna foram dos dados advindo da interação nuclear forte, a terceira coluna dos dados dos níveis de transição da QED e a quarta coluna usando dados de espectroscopia de hidrogênio.

troduzida. Estes estudos serão parte de nossa investigação futura dos efeitos da LV no setor hadrônico da QCD.

O segundo ponto de estudo é o efeito da LV na eletrodinâmica de Maxwell suplementado de um termo CPT-par contendo derivadas de ordem superior, que é controlado por um campo de fundo representado por $d_{\mu\nu}$, um tensor de ordem 2. Interessante observar que quando o campo de fundo é proporcional à métrica de Minkowski se recupera a eletrodinâmica de Podolsky. O objetivo foi estudar a estrutura canônica do modelo com o intuito de verificar os graus de liberdade e as respectivas relações de dispersão. Nesse processo observamos que a tal estrutura depende das componentes do tensor. Sendo assim, foram escolhidas duas representações:

(i) Na primeira escolha consideramos

$$d_{\mu\nu} = \text{diag}\left(d_{00}, -\frac{d_{tr}}{3}, -\frac{d_{tr}}{3}, -\frac{d_{tr}}{3}\right),$$

onde a escolha $d_{00} > 0$ e $d_{tr} > 0$ fornece graus de liberdade com relações de dispersão fisicamente aceitáveis. Essa parametrização descreve 1 fóton (2 graus de liberdade) e 3 graus de liberdade massivos, cujas relações de dispersão dizem que 2 deles possuem a mesma massa. Com isso, concluímos que o campo massivo não é exatamente um campo de Proca;

(ii) Na segunda escolha consideramos

$$d_{\mu\nu} = \text{diag}(d_{00}, 0, 0, 0)$$

com $d_{00} > 0$. A amplitude de transição indica que essa parametrização somente fornece 1 fóton. Esse resultado é muito interessante, pois apesar da presença da quebra da invariância de Lorentz ainda existe uma parametrização, cujo espectro é exatamente igual à da eletrodinâmica de Maxwell.

A lição principal do estudo é que os efeitos do campo de fundo estão ligados intimamente com a parametrização escolhida. Efeitos que se manifestam na estrutura canônica fundamental para a descrição correta do espectro do modelo e consequente processo de quantização.

Entre as perspectivas futuras, pretendemos analisar os efeitos da quebra de simetria quando consideramos as parametrizações: (i) com somente d_{0i} não nulo e; (ii) com as componentes d_{ij} não nulas e formando uma matriz singular ou não singular. Outro estudo interessante é o da simetria BRST relacionada aos casos anteriormente citados. Teorias com derivadas superiores espaciais inerentemente apresentam campos fantasmas. Torna-se relevante, então, o estudo da unitariedade, mas também o do campo de calibre interagindo com partículas carregadas.

Apêndice A

Artigos publicados ou em fase final de elaboração

Physics Letters B 790 (2019) 354-360

Contents lists available at ScienceDirect



Physics Letters B

www.elsevier.com/locate/physletb

Lorentz-violating nonminimal coupling contributions in mesonic hydrogen atoms



R. Casana^a, J.S. Rodrigues^a, F.E.P. dos Santos^{b,*}

^a Departamento de Fisica, Universidade Federal do Maranhão, Campus Universitário do Bacanga, 65080-805, São Luís, Maranhão, Brazil
^b Coordenação do Curso Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia, Universidade Federal do Maranhão, Campus Universitário do Bacanga, 65080-805, São Luís, Maranhão, Brazil

ARTICLE INFO

Article history: Received 31 August 2018 Received in revised form 20 December 2018 Accepted 13 January 2019 Available online 19 January 2019 Editor: B. Grinstein

ABSTRACT

We have studied a Lorentz-violating scalar electrodynamics in which the gauge and scalar fields interact via a nonminimal covariant derivative containing CPT-odd and CPT-even backgrounds. By considering the complex scalar field describes a charged meson we have analyzed the contributions to the mesonic hydrogen energy. By using the experimental data for the 1*S* strong correction shift and for the pure QED transitions $4P \rightarrow 3P$, the best upper-bound for the CPT-odd coupling is $< 10^{-3} \text{ GeV}^{-1}$ and for the CPT-even one is $< 10^{-2} \text{ GeV}^{-2}$. Besides, both the nonminimal couplings generate radiative higher-order derivative corrections that are contained in the nonminimal photon sector of the standard model extension. We also have studied their respective contributions to the bound-state energies of the hydrogen-like atoms and determined similar upper-bounds for the Lorentz-violating coefficients. © 2019 The Authors. Published by Elsevier B.V. This is an open access article under the CC BY license

(http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). Funded by SCOAP³.

Apêndice B

Solução angular e radial da equação de Klein-Gordon (2.57)

Como continuação calculamos as autofunções e autoenergias da equação de Klein-Gordon dada na equação (2.57),

$$\left[\left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)^2 + \nabla^2 - m^2\right]\phi = 0 \tag{B.1}$$

O laplaciano dado em coordenadas esféricas

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \tag{B.2}$$

Fazendo uma separação de variáveis, podemos expressar

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + m^2\phi = \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)^2\phi.$$
 (B.3)

Usamos a seguinte representação para a função ϕ

$$\phi(\vec{r}) = \phi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y_l^m(\theta,\varphi) \tag{B.4}$$

onde $Y_l^m(\theta, \varphi)$ são os harmônicos esféricos, autofunções do operador momento angular. Nossa tarefa é solucionar a equação diferencial para a função radial R(r),

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR\left(r\right)}{dr}\right) + \left[\left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)^2 - m^2 - \frac{l\left(l+1\right)}{r^2}\right]R\left(r\right) = 0,\tag{B.5}$$

ou,

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) + \left[E^2 + \frac{2Z\alpha E}{r} - m^2 + \frac{Z^2\alpha^2 - l(l+1)}{r^2}\right]R(r) = 0,$$
(B.6)

onde introduzimos $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$, a constante de estrutura fina.

Fazendo uma mudança de variável, $R(r) = \frac{u}{r}$, obtemos

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\mu^2 - \frac{1}{4}}{r^2} + \frac{2Z\alpha E}{r} - \frac{\beta^2}{4}\right]u = 0,$$
(B.7)

onde definimos

$$\beta^2 = 4(E^2 - m^2) \quad e \quad \mu^2 = \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - Z^2 \alpha^2.$$
 (B.8)

Agora, fazendo as seguintes mudanças de variáveis

$$\rho = r\beta, \quad u(r) \to w(\rho), \quad (B.9)$$

$$\lambda = \frac{2Z\alpha E}{\beta},\tag{B.10}$$

obtemos a seguinte equação diferencial para $w(\rho)$,

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\mu^2 - \frac{1}{4}}{\rho^2} + \frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4}\right] w\left(\rho\right) = 0.$$
(B.11)

Soluções assintóticas:

a) Solução para
 $\rho \to \infty$

$$\frac{d^2 w\left(\rho\right)}{d\rho^2} = \frac{1}{4} w\left(\rho\right),\tag{B.12}$$

com solução geral dada por

$$w\left(\rho\right) = Ae^{-\frac{\rho}{2}} + Be^{\frac{\rho}{2}}$$

o segundo termo não é normalizável, podemos fazer B = 0. Assim, para $\rho \to \infty$, temos $w\left(\rho\right) = e^{-\frac{\rho}{2}}$.

b) Solução para
 $\rho \to 0$

$$\frac{d^2 w(\rho)}{d\rho^2} = \frac{\mu^2 - \frac{1}{4}}{\rho^2} w(\rho)$$
(B.13)

cuja solução geral é

$$w(\rho) = A\rho^{\frac{1}{2}+u} + B\rho^{\frac{1}{2}-u}$$
(B.14)

o segundo termo não é normalizável (B = 0)

$$w(\rho) = \rho^{\frac{1}{2}+u}.$$
 (B.15)

Desse modo, encolhemos o seguinte ansatz para a solução geral

$$w(\rho) = \rho^{\frac{1}{2} + u} e^{-\frac{\rho}{2}} \nu(\rho), \qquad (B.16)$$

que substituído na Eq. (B.11) obtemos a equação diferencial descrevendo a função $\nu(r)$,

$$\frac{d^2\nu}{d\rho^2} + \left(\frac{d}{\rho} - 1\right)\frac{d\nu}{d\rho} - \frac{b}{\rho}\nu = 0$$
(B.17)

onde definimos as constantes $b \in d$

$$b = \mu + \frac{1}{2} - \lambda$$
 e $d = 2\mu + 1.$ (B.18)

A equação (B.17) admite solução em séries de potências, assim,

$$\nu(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j, \quad \frac{d\nu}{d\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} j c_j \rho^{j-1}, \quad \frac{d^2 \nu}{d\rho^2} = \sum_{j=0}^{\infty} j (j-1) c_j \rho^{j-2}, \quad (B.19)$$

substituindo essas expressões na Eq.(B.17), temos

$$\sum_{j=0}^{\infty} j \left(j-1\right) c_j \rho^{j-2} + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{d}{\rho} - 1\right) j c_j \rho^{j-1} - b \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^{j-1} = 0,$$
(B.20)

fazendo $j \rightarrow j + 1$, obtemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left[(j+1) \left(j+d \right) c_{j+1} - (j+b) c_j \right] \rho^{j-1} = 0,$$
 (B.21)

que gera a seguinte equação de recorrência para os coeficientes c_j :

$$c_{j+1} = \frac{j+b}{(j+1)(j+d)}c_j,$$
(B.22)

cujo comportamento para j grande é

$$c_{j+1} \approx \frac{1}{j} c_j, \tag{B.23}$$

que resulta na seguinte expressão para c_j ,

$$c_j \approx \frac{1}{j!} c_0 \tag{B.24}$$

isso leva a seguinte série,

$$\nu(\rho) \approx \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} c_0 \rho^j = c_0 e^{\rho}.$$
(B.25)

Desse modo a função $w(\rho)$ possui o seguinte comportamento

$$w(\rho) = \rho^{\frac{1}{2}+u} e^{\frac{\rho}{2}},$$
 (B.26)

a qual não é normalizável, ou seja, isto significa que a função de onda diverge para r grande. Portanto a série deve ser truncada, ou seja, a função w(r) deve ser um polinômio. Assumindo que a série termina em algum j_{max} , temos

$$c_{j_{\max}+1} = 0 \tag{B.27}$$

$$c_{j+1} = \frac{j_{\max} + b}{j(d+j_{\max})}c_{j_{\max}} = 0$$
(B.28)

$$j_{\max} + b = 0 \tag{B.29}$$

 j_{max} é algum inteiro não negativo que chamaremos de k. Dessa forma, substituindo b dado em (B.18), temos

$$b + k = \mu - \lambda + \frac{1}{2} + k = 0 \tag{B.30}$$

e substituindo os valores de λ e μ , encontramos

$$\lambda = \mu + \frac{1}{2} + k = \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - Z^2 \alpha^2} + \frac{1}{2} + k = \frac{2Z\alpha E}{\beta} = \frac{2Z\alpha E}{2\sqrt{m^2 - E^2}}$$
(B.31)

que podemos reescrever como

$$Z^{2}\alpha^{2}E^{2} = m^{2}\left(\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^{2} - Z^{2}\alpha^{2}} + \frac{1}{2} + k\right)^{2} - E^{2}\left(\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^{2} - Z^{2}\alpha^{2}} + \frac{1}{2} + k\right)^{2}$$
(B.32)

isolando a energia E e substituindo o valor de k = n - l - 1, obtemos

$$E = m \left[1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{\left(n - l - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - Z^2 \alpha^2} \right)^2} \right]^{-1/2},$$

 $com \ n = 1, 2,$

B.1 Solução Angular

Temos a seguinte equação para a parte angular

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_l^m}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_l^m}{\partial\phi^2} + l\left(l+1\right)Y_l^m = 0.$$

Podemos ainda separar variáveis em $\theta \in \phi$, cujas soluções são dadas pelo polinômio de Legendre e $e^{im\phi}$ respectivamente, de forma que as autofunções assumem

$$Y_l^m(\theta,\phi) = \sqrt[\varepsilon]{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(1-|m|)!}{(1+|m|)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}, \quad \varepsilon = \begin{cases} (-1)^m, m \ge 0\\ 1, m < 0 \end{cases}$$
(B.33)

$$P_{l}^{m}(x) = (-1)^{m} (1-x^{2})^{m/2} \frac{d^{m}}{dx^{m}} P_{l}(x), \qquad P_{l}^{-m}(x) = (-1)^{m} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{l}^{m}(x),$$
$$P_{l}(x) = \frac{1}{2^{l} l!} \frac{d^{l}}{dx^{l}} (x^{2}-1)^{l} \quad \text{com } -l \leq m \leq l.$$

Apêndice C

Limite não relativístico do termo CPT-ímpar

Nesta seção calculamos o limite não relativístico do termo LV e CPT-ímpar presente na equação (3.3). A parte relevante, na análise a seguir, está contida na contribuição,

$$\mathcal{L}_{I} = \frac{i}{2} eg w_{\mu} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \left[\left(D_{\nu} \phi \right)^{*} \phi - \phi^{*} \left(D_{\nu} \phi \right) \right], \qquad (C.1)$$

em que (D_{ν}) é a derivada covariante mínima, expressa por

$$D_{\nu} = \partial_{\nu} - ieA_{\nu}.\tag{C.2}$$

Usando o ansatz para o campo escalar no limite não relativístico, normalizado, temos

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2m}}\varphi e^{-imt}, \qquad \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2m}}\varphi^* e^{imt} \tag{C.3}$$

por outro lado, expandimos o termo de corrente através de suas componentes e substituímos os campos $\phi \in \phi^*$

$$\phi \left(D_0 \phi \right)^* - \phi^* \left(D_0 \phi \right) = i\varphi \varphi^* + \frac{1}{2m} \left[\varphi \left(D_0 \varphi \right)^* - \varphi^* \left(D_0 \varphi \right) \right]$$
(C.4)

$$(D_j\phi)^*\phi - \phi^*(D_j\phi) = \frac{1}{2m} \left[\varphi \left(D_j\varphi\right)^* - \varphi^*(D_j\varphi)\right]$$
(C.5)

que quando substituído na equação (C.1) nos leva a

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{2} egw_k \epsilon^{0kij} F_{ij} \varphi \varphi^* + \frac{i}{4m} egw_k \epsilon^{k0ij} F_{ij} \left[\varphi \left(D_0 \varphi \right)^* - \varphi^* D_0 \varphi \right] + \frac{i}{4m} egw_\mu \epsilon^{\mu j \alpha \beta} F_{\alpha \beta} \left[\varphi \left(D_j \varphi \right)^* - \varphi^* D_j \varphi \right].$$
(C.6)

Usando as condições para baixas energias, o termo w_{μ}/m é de ordem superior, assim, obtemos o seguinte resultado para a densidade de lagrangiana (C.6),

$$\mathcal{L}_{eff} \approx egw_k B_k \varphi \varphi^* = eg\vec{w} \cdot \vec{B}\varphi \varphi^* = -\varphi^* \left(\Delta H\right) \varphi^*, \tag{C.7}$$

onde $B_k = \frac{1}{2} \epsilon^{0kij} F_{ij}$, e ΔH sendo a contribuição da LV à Hamiltoniana do átomo mesônico,

$$\Delta H = -eg\vec{w} \cdot \vec{B},\tag{C.8}$$

que é o resultado apresentado na Eq. (3.5).

Apêndice D

Limite não relativístico do termo CPT-par

Nesta seção calculamos o limite não relativístico do termo LV e CPT-par presente na equação (3.3). A parte relevante está contida na contribuição,

$$\mathcal{L}_{I} = -i\frac{e\tilde{g}}{2} (k_{\phi F}^{(6)})_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^{\nu} F^{\alpha\beta} \left[(D^{\mu}\phi)^{*}\phi - \phi^{*}D^{\mu}\phi \right].$$
(D.1)

Usando as expressões (C.4) e (C.5) acima, chegamos ao seguinte resultado

$$\mathcal{L}_{I} = \frac{eg}{2} (k_{\phi F}^{(6)})_{0\nu\alpha\beta} \partial^{\nu} F^{\alpha\beta} \varphi \varphi^{*} -i \frac{e\tilde{g}}{4m} (k_{\phi F}^{(6)})_{0\nu\alpha\beta} \partial^{\nu} F^{\alpha\beta} \left[\varphi \left(D^{0} \varphi \right)^{*} - \varphi^{*} D^{0} \varphi \right] -i \frac{e\tilde{g}}{4m} (k_{\phi F}^{(6)})_{j\nu\alpha\beta} \partial^{\nu} F^{\alpha\beta} \left[\varphi \left(D^{j} \varphi \right)^{*} - \varphi^{*} D^{j} \varphi \right],$$
(D.2)

que sob as condições para baixas energias, o termo $(k_{\phi F}^{(6)})_{\mu\nu\alpha\beta}/m$ é considerado de ordem superior, assim, obtemos

$$\mathcal{L}_{I} \approx \frac{e\tilde{g}}{2} (k_{\phi F}^{(6)})_{0\nu\alpha\beta} \partial^{\nu} F^{\alpha\beta} \varphi \varphi^{*}$$
(D.3)

ou ainda , usando as definições do campo elétrico $E^i = -F^{0i}$ e campo magnético $F^{jk} = \varepsilon_{jkl}B^l$, obtemos

$$(k_{\phi F}^{(6)})_{0\nu\alpha\beta}\partial^{\nu}F^{\alpha\beta} = -2(k_{\phi F}^{(6)})_{0i0j}\partial^{i}E^{0j} + (k_{\phi F}^{(6)})_{0ijk}\varepsilon_{jkl}\partial^{i}B^{l}.$$
 (D.4)

Agora usamos a parametrização implementada em [16] para o tensor $(k_{\phi F}^{(6)})_{0\nu\alpha\beta}$, assim, temos

$$(\kappa_{DE})_{jk} = -2 \left(k_{\phi F}^{(6)}\right)_{0j0k}, \qquad (\kappa_{DB})^{jk} = \left(k_{\phi F}^{(6)}\right)^{0jab} \varepsilon^{kab} , \qquad (D.5)$$

e chegamos a seguinte expressão

$$(k_{\phi F}^{(6)})_{0\nu\alpha\beta}\partial^{\nu}F^{\alpha\beta} = (\kappa_{DE})_{ij}\partial^{i}E^{0j} + (\kappa_{DB})_{ij}\partial^{i}B^{j}.$$
 (D.6)

Assim o termo (D.3) se escreve como

$$\mathcal{L}_{I} \approx \varphi^{*} \left[\frac{e\tilde{g}}{2} \left(\kappa_{DE} \right)_{ij} \partial^{i} E^{j} + \frac{e\tilde{g}}{2} \left(\kappa_{DB} \right)_{ij} \partial^{i} B^{j} \right] \varphi = -\varphi^{*} \left(\Delta H \right) \varphi, \tag{D.7}$$

onde

$$\Delta H = -\frac{1}{2} e \tilde{g} \left(\kappa_{DE}\right)_{ij} \partial^{i} E^{j} - \frac{e \tilde{g}}{2} \left(\kappa_{DB}\right)^{ij} \partial^{i} \left(B^{j}\right).$$
(D.8)

corresponde à contribuição LV e CPT-par para a energia do átomo mesônico, apresentado na Eq. (3.18).

Apêndice E

Obtenção da correção à energia vinda do termo CPT-par

Para obtermos (3.19), precisamos calcular $(\kappa_{DE})_{ij}\partial_i E_j$. A componente \hat{i} do campo elétrico é:

$$E_i = \frac{e}{4\pi} \frac{\hat{r}_i}{r^2} = \frac{e}{4\pi} \frac{r_i}{r^3}.$$
 (E.1)

Assim, a derivada do campo elétrico (E.1) torna-se

$$(\kappa_{DE})_{ij}\partial_i E_j = \frac{e}{4\pi} \left(\frac{(\kappa_{DE})_{ii}}{r^3} - 3 \frac{x_i x_j (\kappa_{DE})_{ij}}{r^5} \right).$$
(E.2)

Calcularemos o valor esperado de (E.2) apenas para alguns estados com l = 1, devemos ter:

$$\left\langle \left(\kappa_{DE}\right)_{ij}\partial_{i}E_{j}\right\rangle = \frac{e}{4\pi}\left(-3\left(\kappa_{DE}\right)_{ij}\left\langle \frac{x_{i}x_{j}}{r^{5}}\right\rangle + \operatorname{tr}\left(\kappa_{DE}\right)_{ij}\left\langle \frac{1}{r^{3}}\right\rangle\right).$$
(E.3)

Trabalhando em coordenadas esféricas,

$$x_1 = r \sin \theta \cos \phi$$
 $x_2 = r \sin \theta \sin \phi$ $x_3 = r \cos \theta$, (E.4)

as funções de interesse são:

$$\psi_{2,1,0} = \frac{\sqrt{2}ue^{-\frac{u}{2}}\cos\theta}{8\sqrt{\pi}a_0^{\frac{3}{2}}}, \quad \psi_{2,1,\pm 1} = \frac{ue^{-\frac{u}{2}}\sin\theta e^{\pm i\phi}}{8\sqrt{\pi}a_0^{\frac{3}{2}}}, \quad (E.5)$$

$$\psi_{3,1,0} = \frac{\sqrt{2}u(u-6)e^{-\frac{u}{3}}\cos\theta}{81\sqrt{\pi}a_0^{\frac{3}{2}}}, \quad \psi_{3,1,\pm 1} = \frac{u(u-6)e^{-\frac{u}{3}}\sin\theta e^{\pm i\phi}}{81\sqrt{\pi}a_0^{\frac{3}{2}}}, \quad (E.6)$$

$$\psi_{4,1,0} = \frac{\sqrt{5}u \left(u^2 - 20u + 80\right) \cos \theta e^{-\frac{u}{4}}}{2560 \sqrt{\pi} a_0^{\frac{3}{2}}}, \tag{E.7}$$

$$\psi_{4,1,\pm 1} = \frac{\sqrt{10}u \left(u^2 - 20u + 80\right) e^{-\frac{u}{4}} \sin \theta e^{\pm i\phi}}{5120\sqrt{\pi}a_0^{\frac{3}{2}}},$$
(E.8)

onde $u = r/a_0$, sendo $a_0 = (\mu \alpha)^{-1}$ o respectivo raio de Bohr.

Não é difícil perceber que uma integração no ângulo azimutal elimina a contribuições dos termos fora da diagonal do tensor κ_{DE} , assim, a expressão (E.3) fica como

$$\left\langle (\kappa_{DE})_{ij} \partial_i E_j \right\rangle = -\frac{3e}{4\pi} \left\langle \frac{(\kappa_{DE})_{11} \cos^2 \phi \sin^2 \theta + (\kappa_{DE})_{22} \sin^2 \phi \sin^2 \theta + (\kappa_{DE})_{33} \cos^2 \theta}{r^3} \right\rangle + \frac{e}{4\pi} \operatorname{tr} \left(\kappa_{DE} \right)_{ij} \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle.$$
(E.9)

O valor esperado (E.9) para n = 1 é nulo. Os resultados obtidos para n = 2, 3, 4 mostram que as contribuições não nulas correspondem a l = 1 e $m = 0, \pm 1$, assim temos

$$\left\langle (\kappa_{DE})_{ij} \partial_i E_j \right\rangle_{m=0} = \frac{e\kappa^{(DE)}}{30\pi a_0{}^3 n^3}, \qquad (E.10)$$

$$\left\langle (\kappa_{DE})_{ij} \partial_i E_j \right\rangle_{|m|=1} = -\frac{e\kappa^{(DE)}}{60\pi a_0^3 n^3}, \tag{E.11}$$

onde definimos $\kappa^{(DE)} = (\kappa_{DE})_{11} + (\kappa_{DE})_{22} - 2 (\kappa_{DE})_{33}$. Ao utilizarmos a contribuição que vem de l = 1, |m| = 1, obtemos a seguinte contribuição à energia do átomo mesônico,

$$\Delta E = -\frac{e\tilde{g}}{2} \left\langle (\kappa_{DE})_{ij} \partial_i E^j \right\rangle = -e\tilde{g} \frac{\alpha^{\frac{7}{2}} \mu^3 \kappa^{(DE)}}{60\sqrt{\pi}n^3}.$$
 (E.12)

que é o resultado obtido da (3.19)
e, que usamos para obter o limites superiores para $\kappa^{(DE)}$
(um resultado similar é obtido se usarmos a contribuição vinda de
 l = 1, m = 0).

Referências Bibliográficas

- V. A. Kostelecky and S. Samuel, Phys. Rev. D **39**, 683 (1989); Phys. Rev. D **40**, 1886 (1989), V. A. Kostelecky and R. Potting, Nucl. Phys. B **359**, 545 (1991).
- [2] O. W. Greenberg, Phys. Rev. Lett 89, 231602 (2002)
- [3] R. C. Myers and M. Pospelov, Phys. Rev. Lett. 90, 211601 (2003).
- [4] P. A. Bolokhov and M. Pospelov, Phys. Rev. D 77, 025022 (2008); C. M. Reyes, Phys. Rev. D 80, 105008 (2009); Phys. Rev. D 82, 125036 (2010); C.M. Reyes, L.F. Urrutia, J.D. Vergara, Phys. Lett. B 675, 336 (2009); F. A. Brito, M. S. Guimaraes, E. Passos, P. Sampaio, C. Wotzasek, Phys. Rev. D 86, 105036 (2012).
- [5] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D 80, 015020 (2009);
- [6] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys.Rev. D 88, 096006 (2013)
- [7] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Neutrinos with Lorentz-violating operators of arbitrary dimension. Phys. Rev. D 2012, 85, 096005
- [8] M. Mewes, Phys. Rev. D 85, 116012 (2012); M. Cambiaso, R. Lehnert, R. Potting, Phys. Rev. D 85 085023 (2012); B. Agostini, F. A. Barone, F. E. Barone, P. Gaete, J. A. Helayël-Neto, Phys. Lett. B 708, 212 (2012); Y. Ding, V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D 94, 056008 (2016).
- [9] H. Belich, T. Costa-Soares, M. M. Ferreira Jr., J. A. Helayël-Neto, Eur. Phys. J. C 41, 421 (2005).
- [10] D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D 55, 6760 (1997).
- [11] D. Colladay, V. A. Kostelecky Phys. Rev. D 58, 116002 (1998).
- [12] V. A. Kostelecky, N. Russell, "Data tables for Lorentz and CPT violation", Rev. Mod. Phys. 83, 11 (2011); arXiv:0801.0287 [hep-ph].

- [13] C. Adam and F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B607, 247 (2001); C. Adam and F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B 657, 214 (2003); A.A. Andrianov, R. Soldati and L. Sorbo, Phys. Rev. D 59, 025002 (1998); O. M. Del Cima, D. H. T. Franco, A. H. Gomes, J. M. Fonseca, and O. Piguet, Phys. Rev. D 85, 065023 (2012).
- [14] R. Lehnert and R. Potting, Phys. Rev. Lett. 93, 110402 (2004); R. Lehnert and R. Potting, Phys. Rev. D 70, 125010 (2004); B. Altschul, Phys. Rev. D 75, 105003 (2007); C. Kaufhold and F.R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B 73(4)(2006)1.
- [15] A. P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo, J.A. Helayël-Neto, Phys. Rev. D 67, 085021 (2003); M. B. Cantcheff, Eur. Phys. J. C 46, 247 (2006); J.A. de Sales, T. Costa-Soares, and V. J. Vasquez Otoya, Physica 391A, 5422 (2012).
- [16] B. Altschul, Phys. Rev. D 70, 056005 (2004); D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Lett. B 511, 209 (2001); O. G. Kharlanov and V. Ch. Zhukovsky, J. Math. Phys. 48, 092302 (2007); B. Goncalves, Y. N. Obukhov, I. L. Shapiro, Phys.Rev. D 80, 125034 (2009); V. A. Kostelecky and R. Lehnert, Phys. Rev. D 63, 065008 (2001); T. J. Yoder and G. S. Adkins, Phys. Rev. D 86, 116005 (2012).
- [17] A. P. Baeta Scarpelli, J. Phys. G **39**, 125001 (2012).
- [18] R. Casana, M. M. Ferreira Jr, R.V. Maluf, F.E.P. dos Santos, Phys. Rev. D 86, 125033 (2012).
- [19] R. Casana, M. M. Ferreira Jr, E. Passos, F.E.P. dos Santos, E.O. Silva, Phys. Rev. D 87, 047701 (2013).
- [20] J. B.Araujo, R. Casana, M.M. Ferreira Jr, Phys. Rev. D 92, 025049 (2015); Phys. Lett. B, 760, 302 (2016).
- [21] H. Belich, L.P. Colatto, T. Costa-Soares, J. A. Helayel-Neto, M. T. D. Orlando, Eur. Phys. J. C 62, 425 (2009).
- [22] B. Charneski, M. Gomes, R. V. Maluf, A. J. da Silva, Phys. Rev. D 86, 045003 (2012).
- [23] L. R. Ribeiro, E. Passos, C. Furtado, J. Phys. G. **39**, 105004 (2012).
- [24] K. Bakke, H. Belich, J. Phys. G **39**, 085001 (2012); K. Bakke, H. Belich, E. O. Silva, J. Math. Phys. **52**, 063505 (2011); J. Phys. G **39**, 055004 (2012); Annalen der Physik (Leipzig) **523**, 910 (2011); K. Bakke and H. Belich, Eur. Phys. J. Plus **127**, 102 (2012).

- [25] H. Belich, E.O. Silva, M.M. Ferreira Jr., and M.T. D. Orlando, Phys. Rev. D 83, 125025 (2011).
- [26] R. Jackiw and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. Lett. 82, 3572 (1999); M. Perez-Victoria, Phys. Rev. Lett. 83, 2518 (1999); J.M. Chung, Phys.Rev. D 60, 127901 (1999); J. M. Chung and B. K. Chung Phys. Rev. D 63, 105015 (2001); G. Bonneau, Nucl. Phys. B 593, 398 (2001); M. Perez-Victoria, J. High. Energy Phys. 0104, (2001) 032.
- [27] O.A. Battistel and G. Dallabona, J. Phys. G 28, L23 (2002); A. P. B. Scarpelli, M. Sampaio, M. C. Nemes, and B. Hiller, Phys. Rev. D 64, 046013 (2001); T. Mariz, J.R. Nascimento, E. Passos, R.F. Ribeiro and F.A. Brito, J. High. Energy Phys. 0510 019(2005).
- [28] J. R. Nascimento, E. Passos, A. Yu. Petrov, F. A. Brito, J. High. Energy Phys. 0706, (2007) 016; B. Altschul, Phys. Rev. D 70, 101701 (2004); A.P.B. Scarpelli, M. Sampaio, M.C. Nemes, B. Hiller, Eur. Phys. J. C 56, 571 (2008); O. M. Del Cima, J. M. Fonseca, D.H.T. Franco, O. Piguet, Phys. Lett. B 688, 258 (2010).
- [29] M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, A. J. da Silva, Phys. Rev. D 81, 045018 (2010).
- [30] S. M. Carroll and H. Tam, Phys. Rev. D 78, 044047 (2008); C. F. Farias, A. C. Lehum, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, Phys. Rev. D 86, 065035 (2012).
- [31] T. Mariz, Phys. Rev. D 83, 045018 (2011); T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, Phys. Rev. D 85, 125003 (2012).
- [32] G. Gazzola, H. G. Fargnoli, A. P. B. Scarpelli, M. Sampaio, and M. C. Nemes, J. Phys. G 39, 035002 (2012).
- [33] L. C. T. Brito, H. G. Fargnoli, and A. P. B. Scarpelli, Phys. Rev. D 87, 125023 (2013).
- [34] V. A. Kostelecky, C.D. Lane, and A.G.M Pickering, Phys. Rev. D 65, 056006 (2002).
- [35] R. Casana, M. M. Ferreira, R. V. Maluf, F. E. P dos Santos, Phys. Lett. B **726**, 815 (2013).
- [36] A. P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo, and J. A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D 67, 085021 (2003).
- [37] B. Altschul, Phys. Rev. D 86, 045008, (2012).

- [38] C. Miller, R. Casana, M. M. Ferreira Jr., and E. da Hora, Phys. Rev. D 86, 065011 (2012);
 R. Casana, M. Ferreira Jr., E. da Hora, and C. Miller, Phys. Lett. B 718, 620 (2012); R. Casana and L. Sourrouille, Phys. Lett. B 726, 488 (2013); R. Casana, M. M. Ferreira Jr., E. da Hora, and A. B. F. Neves, Eur. Phys. J. C 74, 3064 (2014); R. Casana and G. Lazar, Phys. Rev. D 90, 065007 (2014); L. Sourrouille, Phys. Rev. D 89, 087702 (2014).
- [39] R. Casana, J. S. Rodrigues, F. E. P. dos Santos, Phys. Let. **B** 790, 354 (2019).
- [40] B. Podolsky, Phys. Rev. **62**, 68 (1942).
- [41] B. Podolsky and C. Kikuchy, Phys. Rev. 65, 228 (1944).
- [42] B. Podolsky, C. Kikuchi, Phys. Rev. 67, 184 (1945).
- [43] B. Podolsky and P. Schwed, Rev. Mod. Phys. **20**, 4 (1948).
- [44] A. Accioly, H. Mukai, Braz. J. Phys. 28, 35 (1998).
- [45] R. Casana, M. M. Ferreira Jr., L. Lisboa-Santos, F. E. P. dos Santos, M. Schreck, Phys. Rev. D 97, 115043 (2018).
- [46] T. D. Lee and G. C. Wick, Nucl. Phys. B9, 209 (1969); Phys. Rev. D 2, 1033 (1970).
- [47] B. Grinstein, D. O'Connell, and M. Wise, Phys. Rev. D 77, 25012 (2008).
- [48] R. Turcati and M. J. Neves, Adv. High Energy Phys. 2014, 1 (2014).
- [49] C. A. P. Galvão and B. M. Pimentel, Can. J. Phys. 66, 460 (1988).
- [50] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. 87, 251304 (2001); V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D 66, 056005 (2002); V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. 97, 140401 (2006).
- [51] R. Bufalo, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, Phys. Rev. D 83, 045007 (2011); R. Bufalo and B. M. Pimentel, Phys. Rev. D 88, 125023 (2013).
- [52] C. A. Bonin, R. Bufalo, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, Phys. Rev. D 81, 025003 (2010); C. A. Bonin and B. M. Pimentel, Phys. Rev. D 84, 065023 (2011).
- [53] C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, Phys. Lett. B 52, 344 (1974); Commun. Math. Phys. 42, 127 (1975).
- [54] I. V. Tyutin, arXiv: 0812.0580 (2008).

- [55] P. A. M. Dirac, Canad. J. Math. 2, 129 (1950); Lectures on Quantum Mechanics, 1st edn. (Belfer Graduate School of Science, New York, 1964).
- [56] M. Hori, H. Agha-Khozani, A. Soter, A. Dax, and D. Barna, Nature 581, 37 (2020).
- [57] Yukawa, H. Proc. Phys.-Math. Soc. Jpn. 17, 48 (1935).
- [58] S. H. Neddermeyer, C. D. Anderson, Phys. Rev. 51, 884 (1937).
- [59] J. C. Street, and E. C. Stevenson, Phys. Rev. 52, 1003 (1937).
- [60] C.M.G.Lattes, H.Muirhead, G.P.S.Occhialini, and C.F.Powell, Nature 159, 694 (1947).
- [61] W. Gordon, Z. Physik **40**, 117 (1926).
- [62] O. Klein, Z.Physik **41**, 407 (1927).
- [63] W. Pauli, Z. Physik **43**, 601 (1927).
- [64] P. A. M. Dirac. Proceedings of the Royal Society A 43, 601, (1927).
- [65] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **61**, 455 (1973).
- [66] S. Weinberg, Phys. Rev. D 10, 3497 (1973).
- [67] S. Schlesser et al., Phys. Rev. C 84, 015211 (2011).
- [68] J. P. Noordmans, J. de Vries, and R. G. E. Timmermans, Phys. Rev. C 94, 025502 (2016).
- [69] R. Kamand, B. Altschul and M. R. Schindler, Phys. Rev. D 95, 056005 (2017).
- [70] S. Weinberg, Physica A 96, 327 (1979); J. Gasser and H. Leutwyler, Ann. Phys. 158, 142 (1984); J. Gasser and H. Leutwyler, Nucl. Phys. B250, 465 (1985); S. Scherer and M. R. Schindler, A Primer for Chiral Perturbation Theory (Springer, New York, 2012).
- [71] M. Hennebach et al., Eur. Phys. J. A 50, 190 (2014)
- [72] C. Patrignani et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C 40, 100001 (2016).
- [73] M. Bazzi et al., Phys. Lett. B 704, 113 (2011); M. Bazzi et al., Nucl. Phys. A881, 88 (2012).
- [74] João A. A. S. Reis, Manoel M. Ferreira, Jr., and Marco Schreck, Phys. Rev. D 100, 095026 (2019).

- [75] J.Leite, T. Mariz and W. Serafim, J. Phys. G, 40 (2013).
- [76] L. D. Faddeev and V. N. Popov, Phys. Lett. B 25, 29 (1967); B.S. DeWitt, Phys. Rev. 160, 1113 (1967).