



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO**  
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E**  
**INOVAÇÃO CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE**  
**NACIONAL – PROFMAT**

**PAULO ROBERTO RÊGO DA SILVA**

**RECORRÊNCIAS E ALGUMAS APLICAÇÕES EM PROBLEMAS DE CONTAGEM**

**SÃO LUÍS – MA**

**2020**

**PAULO ROBERTO RÊGO DA SILVA**

**RECORRÊNCIAS E ALGUMAS APLICAÇÕES EM PROBLEMAS DE CONTAGEM**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós –  
Graduação Mestrado Profissional em Matemática em  
Rede Nacional (PROFMAT) como requisito para a  
obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup>. Renata de Farias Limeira  
Carvalho.

**SÃO LUÍS – MA**  
**2020**

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Silva, Paulo Roberto Rêgo da.

RECORRÊNCIAS E ALGUMAS APLICAÇÕES EM PROBLEMAS DE  
CONTAGEM / Paulo Roberto Rêgo da Silva. - 2020.

54 f.

Orientador(a): Renata de Farias Limeira Carvalho.  
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em  
Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade  
Federal do Maranhão, São Luís, 2020.

1. Problemas de contagem. 2. Raciocínio recursivo. 3.  
Recorrência matemática. I. Carvalho, Renata de Farias  
Limeira. II. Título.

**PAULO ROBERTO RÊGO DA SILVA**

**RECORRÊNCIAS E ALGUMAS APLICAÇÕES EM PROBLEMAS DE CONTAGEM**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós –  
Graduação Mestrado Profissional em Matemática em  
Rede Nacional (PROFMAT) como requisito para a  
obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup>. Renata de Farias Limeira  
Carvalho.

Aprovada em:    /    / \_\_\_\_\_

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. Renata de Farias Limeira Carvalho. (Orientador)  
Universidade Federal do Maranhão – UFMA

---

Prof. Dr. Flausino Lucas Neves Spindola  
Universidade Federal do Maranhão – UFMA

---

Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. Sandra Imaculada Moreira Neto  
Universidade Federal do Maranhão – UFMA

A meus pais e amigos ...

## AGRADECIMENTOS

Chego ao fim deste trabalho com o sentimento de muita gratidão a todos que conheci nessa jornada e que contribuíram de uma forma, ou de outra, para que eu chegasse até aqui. Foram muitas as adversidades que surgiram tentando fazer com que eu desistisse muitas vezes, mas a simples companhia e incentivo de meus companheiros de curso me fizeram continuar. Cada um desses colegas se tornaram verdadeiros irmãos em minha vida.

Os agradecimentos que farei aqui estão muito aquém do sentimento que tenho por todos que contribuíram nesta etapa de minha vida acadêmica e espero não esquecer de ninguém. Porém, meu sentimento de gratidão é verdadeiro e àqueles que eu não mencionar, perdoe-me a memória.

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me concedido saúde e força pra continuar seguindo nessa empreitada, mesmo quando as adversidades vieram para impor obstáculos, e alguns até se mostraram intransponíveis. Mas Deus foi bondoso e me deu toda força de que precisava para ir em frente.

Aos meus familiares que sempre acreditaram em minha capacidade de aprender e me fizeram acreditar em uma força que eu mesmo não conhecia. E dentre os familiares, a minha companheira, Losângela Gomes Sousa, que nos momentos de finalização deste trabalho agiu com sua paciência e carinho me apoiando e incentivando no sentido de não deixar que eu ficasse acomodado ou esmorecido.

Àqueles que me ajudaram através do apoio moral e financeiro a fim de que eu não desistisse deste sonho.

Aos meus colegas de trabalho que me estimularam e muitas vezes se fizeram disponíveis para cobrir meus horários de trabalho e, dessa forma, eu pudesse ter mais tempo de dedicação ao curso. E, também, àqueles que me cederam seus livros para que eu tivesse o conhecimento necessário ao prosseguimento dos estudos.

Ao meu nobre professor Flausino Lucas Neves Espíndola que deu início a minha orientação neste trabalho com suas sugestões, apoio e bom humor.

E, também, à minha ilustre orientadora Prof.<sup>a</sup> Dra. Renata de Farias Limeira Carvalho, a quem coube a tarefa de me ajudar a finalizar este trabalho e, mesmo sendo atarefada em sua vida profissional e familiar, procurou dar respostas à minha procura por conhecimento. Assim, aumentou exponencialmente minha admiração por seu profissionalismo.

Agradeço, também, a CAPES pelo apoio financeiro que me foi dado para custear as despesas que eventualmente tive.

Meus agradecimentos a meus colegas, professores e coordenadores do Mestrado PROFMAT, pois se tornaram amigos e cúmplices de uma jornada onde o conhecimento é um meio e um fim.

A minha gratidão a todos aqueles que não foram mencionados, mas que contribuíram de forma direta ou indireta na minha busca por qualificação e aprimoramento profissional e pessoal.

Por fim, dedico este trabalho à memória de minha querida mãe, Maria Luíza Rêgo da Silva, que durante sua vida sempre me fortaleceu com seus conselhos e, assim, sua lembrança se torna presente em todas as minhas conquistas.

A matemática vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza, uma beleza fria e austera, como a da escultura.

Bertrand Russell

A Matemática é uma linguagem onde a criação encontra sua beleza.

Paulo R. R. da Silva



## RESUMO

Muitos problemas matemáticos, em que é necessário fazer a contagem de determinados elementos, se apresentam em situações de difícil resolução. Apresentamos neste trabalho uma forma alternativa de resolver alguns problemas de contagem que pode auxiliar na superação dessas dificuldades. A forma proposta aborda um raciocínio recursivo chamado de recorrência matemática ou, simplesmente, recorrência. Esse pensamento recursivo é apresentado superficialmente no Ensino Médio da Educação Básica. Mostraremos aqui algumas questões que abordam problemas de contagem e que podem parecer difíceis de serem resolvidas à primeira vista, mas que através da percepção de uma relação de recorrência no problema proposto, pode-se encontrar facilmente a solução. Assim, temos como objetivo principal proporcionar mais uma ferramenta matemática que irá, em algumas situações, complementar o aprendizado sobre eventos de Análise Combinatória, em especial, a contagem de certos elementos.

**Palavras – chave:** Problemas de contagem. Raciocínio recursivo. Recorrência matemática.

## ABSTRACT

Many mathematical problems, in which it is necessary to count certain elements, present themselves in situations that are difficult to solve. We present in this work an alternative way to solve some counting problems that can help to overcome these difficulties. The proposed form addresses a recursive reasoning called mathematical recurrence or, simply, recurrence. This recursive thinking is presented superficially in High School of Basic Education. We will show here some questions that address counting problems and that may seem difficult to be solved at first sight, but that through the perception of a recurrence relationship in the proposed problem, the solution can be easily found. Thus, our main objective is to provide another mathematical tool that will, in some situations, complement the learning about Combinatorial Analysis events, in particular, the counting of certain elements.

**Key words:** Counting problems. Recursive reasoning. Mathematical recurrence.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 6.1 – Sequências de triângulos .....	29
Figura 6.2 – Desenho dos triângulos.....	30
Figura 6.3 – Modos de organizar n dominós em uma caixa $2 \times n$ .....	33
Tabela 6.1 – Tabela de resultados .....	34
Figura 6.4 – Estrada entre cidades .....	35
Figura 6.5 – Torre de Hanoi – POSIÇÃO 1 .....	37
Figura 6.6 – Torre de Hanoi – POSIÇÃO 2 .....	37
Figura 6.7 – Torre de Hanoi – POSIÇÃO 3 .....	37
Figura 6.8 – Torre de Hanoi – POSIÇÃO 4 .....	38

## LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Curricular Comum
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
USP	Universidade de São Paulo

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	1
1. RECORRÊNCIAS NO ENSINO BÁSICO.....	3
2. RECORRÊNCIAS LINEARES.....	5
2.1. Sequências Numéricas.....	5
2.2. Recorrências Lineares de Primeira Ordem.....	7
2.3. Recorrências lineares de primeira ordem homogêneas.....	8
2.4. Recorrências lineares de primeira ordem não-homogêneas.....	10
3. RECORRÊNCIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM.....	17
3.1. Recorrências lineares de segunda ordem homogêneas.....	17
3.2. Recorrências lineares de segunda ordem não – homogêneas.....	23
4. RECORRÊNCIAS LINEARES DE ORDEM QUALQUER.....	25
4.1 Generalização sobre recorrências.....	25
5. PRINCÍPIO DA INDUÇÃO.....	27
5.1 Princípio de Indução Matemática.....	27
6. PROBLEMAS DE CONTAGEM.....	29
CONCLUSÃO.....	40
REFERÊNCIAS.....	41

## INTRODUÇÃO

O raciocínio recursivo tem sido pouco explorado em sala de aula, porém ele pode propiciar ao aluno a construção de modelos e soluções para diversos problemas.

As situações de recorrência que são propostas e bastante estudadas no ensino básico giram em torno das sequências de progressões aritméticas e geométricas. Porém, a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) tem, em algumas edições, abordado questões que exigem certo tipo de raciocínio recursivo. São questões que fogem ao modelo proposto na maioria dos livros didáticos adotados nas escolas, pois se percebe que estas requerem muito mais do aluno do que somente o domínio da linguagem matemática e suas fórmulas. Necessitam, para sua resolução, de uma abordagem criativa na observação dos padrões matemáticos que as constitui. Algumas das questões que são abordadas remetem a situações que requerem algum tipo de contagem.

A Base Nacional Comum Curricular propõe uma nova abordagem algébrica por parte dos alunos que é a construção do pensamento algébrico desde os primeiros anos escolares e dentro dessa construção deve se considerar a habilidade de identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva.

Este trabalho tem o intuito de colaborar na construção do pensamento algébrico, mostrando de forma criativa como resolver alguns problemas de contagem através das chamadas “Recorrências”. Veremos que alguns problemas de contagem, à primeira vista, de difícil resolução, podem ser resolvidos através de um raciocínio recursivo que identifica padrões e comportamentos.

Já no capítulo 1 apresentamos alguns argumentos que tem como objetivo principal servir de fundamento e justificativa à abordagem do tema proposto neste trabalho. Neste capítulo fazemos, também, uma referência a uma aplicação da recursividade utilizada pelo matemático, físico e filósofo francês Jules Henri Poincaré.

No segundo capítulo, trataremos uma ideia de sequências numéricas e faremos as primeiras definições. Daremos as classificações das recorrências e discorreremos sobre as peculiaridades das recorrências lineares de primeira ordem.

No capítulo 3, apresentaremos as recorrências lineares de segunda ordem, os teoremas que viabilizam a resolução de recorrências desse tipo. Veremos que essas recorrências estão associadas a equações polinomiais e não são muito estudadas no Ensino Médio. Porém, aparecem em algumas situações de contagem.

O quarto capítulo apresenta uma breve análise sobre a forma e a solução de uma recorrência de ordem qualquer de forma a ampliar o conhecimento sobre este assunto.

O Princípio de Indução é abordado no quinto capítulo como uma ferramenta que pode comprovar a veracidade das soluções gerais obtidas de uma recorrência.

No decorrer do sexto capítulo trazemos algumas aplicações de recorrências na resolução de problemas que envolvem situações onde se deve contar determinadas sequências ou elementos de um conjunto, aqui chamados de problemas de contagem.

As conclusões acerca do tema abordado nesta pesquisa serão apresentadas no final deste trabalho e buscam enriquecer o conhecimento sobre recorrência matemática para a resolução de problemas de contagem.

E por fim, apresentamos, também, as referências que serviram de suporte para a elaboração deste trabalho, tais como livros, vídeos e outras fontes de pesquisa.

Enfim, este trabalho é um breve estudo sobre o caráter recursivo de algumas situações que se situam no campo da Análise Combinatória. E busca-se com isso proporcionar um novo enfoque sobre os problemas de contagem, despertando nos alunos uma abordagem mais crítica e criativa sobre os mesmos.

A proposta desse trabalho é servir de incentivo para o aprofundamento de conhecimentos e aplicações sobre o assunto abordado, uma vez que, sua abordagem aqui não esvazia sua amplitude e sua aplicabilidade.

## 1. RECORRÊNCIAS NO ENSINO BÁSICO

A BNCC (Base Nacional Comum Curricular) é um documento de caráter normativo que tem como objetivo definir o conjunto orgânico e essencial para o aprendizado no cursar de toda a Educação Básica. Ela aprofunda e amplia alguns dos objetivos encontrados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) que, são documentos que trazem um referencial padronizado de educação a ser atingido. Nos (PCNs) a recursividade era observada de forma menos aprofundada no bloco de “Números e Operações” e objetivava, apenas, que o aluno utilizasse representações algébricas para expressar generalizações sobre regularidades observadas em sequências numéricas. Assim, o estudo da recursividade era, superficialmente, estudado em Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas.

A necessidade de abordar o tema de Recorrências Matemáticas se encontra fundamentado na BNCC quando esta propõe como Objetos de Conhecimento a descoberta e a verificação de padrões e sequências recursivas na sua Unidade Temática de Álgebra no desenvolvimento das habilidades dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental; lançando, assim, as bases para a construção e consolidação de um pensamento algébrico recursivo que se amplia nos Anos Finais do Ensino Fundamental e, também, no Ensino Médio. Ao contrário dos (PCNs), a BNCC traz a observação da recursividade em toda trajetória da Educação Básica.

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é uma competição promovida pelo IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e recursos dos ministérios da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações e Educação realizada anualmente desde o ano de 2005 e apesar de apresentar no nome uma referência às escolas públicas a competição tem se destinado às escolas públicas e privadas brasileiras.

O tema “Recorrências” tem sido apresentado em muitas edições da OBMEP trazendo questões que exigem um pensamento mais criativo e inteligente por parte dos alunos e, na maioria das vezes, faz-se necessário que eles identifiquem padrões de sequências recursivas em situações-problemas que envolvem algum tipo de contagem e a partir do conhecimento desses padrões, cheguem às soluções das situações propostas. Como exemplo, veja as edições de 2010 e 2012 nas questões do nível 2.



*“...muitos algoritmos são baseados em relações recorrentes e problemas combinatórios considerados difíceis à primeira vista, podem ser resolvidos mais facilmente quando escritos na forma de relação de recorrência” (Jesus e Silva, 2006, p.5).*

De acordo com Jesus e Silva em sua Monografia apresentada na Universidade de Minas Gerais em 2006, é comum encontrar alguns problemas do ramo da Análise Combinatória que podem ser resolvidos através de uma relação de recorrência. Também pode se identificar relações de recorrências na formulação de algoritmos usados no ramo da Computação.

Além de encontrar situações de recursividade nos exames da OBMEP em seus níveis 1, 2 e 3. Podemos, encontrar, também, a utilização de sequências recursivas na resolução de muitos problemas de contagem desde os anos iniciais até níveis superiores.

Na física, o teorema de recorrência de Poincaré afirma que certos sistemas, após um tempo suficientemente longo, finito, retornarão para um estado muito próximo ao estado inicial. Como se pode notar, é de suma importância apropriar-nos de todas as ferramentas matemáticas que possam auxiliar na resolução de situações diversas. Aqui, nos restringimos as situações de contagem de elementos.

Assim a relação entre o assunto “Recorrências e Contagem” se mostra coerente. Alguns exemplos podem ser vistos nos trabalhos expostos nos sites da USP e da OBM citados nas referências do final deste trabalho.

## 2. RECORRÊNCIAS LINEARES

### 2.1. Sequências Numéricas

Uma ideia bastante simples do que é uma sequência é a ideia de uma fila de pessoas, onde cada pessoa representa um termo da sequência e cada termo ocupa uma posição na fila. Assim se trocarmos uma pessoa (termo) de lugar na fila, obtendo uma nova formação, tem-se uma nova fila (sequência).

Existem vários tipos de sequências que podem ser finitas ou infinitas. Podemos representar genericamente uma sequência como  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  caso seja finita, e  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$  caso seja infinita.

Há sequências que só podem ser definidas através de uma propriedade exclusiva de seus termos, pois ainda não se conseguiu encontrar uma equação associada a elas, um exemplo disso é a sequência dos números primos. Algumas podem apresentar uma regra ou lei de formação definida e outras sequências podem ser definidas recursivamente. As sequências mais conhecidas e estudadas no ensino básico são as Progressões Aritméticas e as Progressões Geométricas.

Definir uma sequência recursivamente, ou seja, por recorrência, é se utilizar de uma regra que permita calcular qualquer termo da sequência em função dos termos anteriores.

Antes de definirmos o termo “Recorrências” se faz necessário o entendimento do que é, matematicamente, uma sequência numérica.

Seja  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números reais e  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  o conjunto dos números naturais.

**Definição 2.1.1** Uma sequência de números reais é uma função  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , que para cada  $n \in \mathbb{N}$  associa um número  $a_n$  pertencente ao conjunto dos números reais e chamado  $n$ ésimo termo.

O índice “ $n$ ” de  $a_n$  indica a posição do termo na sequência de números reais determinada pela função  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dessa forma, os termos  $a_3$  e  $a_7$  indicam o terceiro e o sétimo termo de uma sequência, respectivamente, mas em alguns casos, por conveniência,

pode se denotar o primeiro termo da sequência pelo índice zero e, nesse caso, o termo  $a_3$  e  $a_7$  indicariam, nessa ordem, o quarto e oitavo termo de uma sequência. Assim, a função  $a$  teria como domínio o conjunto dos números inteiros não-negativos.

Vale ressaltar que  $(a_n)$  e  $a_n$  não significam a mesma coisa, pois  $a_n$  representa o  $n$ ésimo termo da sequência enquanto  $(a_n)$  representa a sequência de números reais  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ .

As sequências que se definem recursivamente podem se apresentar na forma de uma equação de recorrência ou de uma fórmula fechada e são classificadas de acordo com sua linearidade e homogeneidade. A linearidade se dá quando os termos da sequência se relacionam de uma forma linear e a homogeneidade é determinada pela existência ou não de um termo de valor independente. Definiremos essas noções de maneira precisa mais adiante.

Neste trabalho as sequências numéricas determinadas por recursividade serão chamadas, simplesmente, de recorrências. E quanto a ordem de uma recorrência, ela pode ser determinada pela diferença entre o maior e o menor dos índices dos termos de sua equação. Por exemplo, a recorrência conhecida como “Números de Fibonacci” ( $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ , com  $n > 0$  e  $F_1 = F_2 = 1$ ) é uma recorrência de 2ª ordem, pois o resultado da subtração dos índices  $(n+2) - n = 2$ .

**Definição 2.1.2.** Uma relação de recorrência é uma relação que determina cada termo de uma dada sequência, a partir de certo termo, em função de termos, imediatamente, anteriores.

**Exemplo 2.1.1.** A sequência  $(a_n)$  dos números naturais pares  $(0, 2, 4, 6, 8, \dots)$  pode ser definida por  $a_{n+1} = a_n + 2$ , com  $n \geq 1$  e  $a_1 = 0$ .

**Exemplo 2.1.2.** A sequência  $(F_n)$  dos Números de Fibonacci, cujos termos são  $(1, 1, 2, 3, 5, \dots)$ , também pode ser definida recursivamente através da lei de formação ( $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ , com  $n > 0$  e  $F_1 = F_2 = 1$ ).

**Exemplo 2.1.3.** Sequência dos números naturais determinados pela regra de formação  $a_{n+1} = a_n + 1$ , com  $n \geq 1$ .

**Exemplo 2.1.4.** Sequência dos números naturais determinados pela regra de formação  $a_n = 3 \cdot (n - 1)$  com  $n \geq 1$ .

Como pode se verificar nos Exemplos 2.1.1 e 2.1.2, as sequências ficaram perfeitamente definidas, mas no Exemplo 2.1.3, a sequência não ficou determinada, porque não se conhece o primeiro termo da sequência, ou seja, dependendo do primeiro termo que se tenha, podemos ter uma infinidade de sequências e na sequência do Exemplo 2.1.4 seus termos ficaram determinados através de uma fórmula fechada, ou seja, estão determinados em função de  $n$ .

## 2.2. Recorrências Lineares de Primeira Ordem

**Definição 2.2.1.** Uma relação de recorrência é chamada linear de primeira ordem quando consiste em uma lei de formação onde cada termo da sequência determinado por ela é obtido a partir de apenas um termo imediatamente anterior e essa lei de formação que relaciona cada termo aos anteriores corresponde a uma função linear, ou seja, uma função do primeiro grau.

**Exemplo 2.2.1.** As recorrências  $a_{n+1}=2a_n-n$  e  $a_{n+1}=n \cdot a_n$  são lineares e as recorrências  $a_{n+1}=a_n^2$  e  $a_{n+1}=a_n^2-2n$  são não-lineares.

Nesse contexto de recorrências há de se conceituar, ainda, o que é Recorrência Linear Homogênea e Recorrência Linear Não-Homogênea. Uma recorrência é dita homogênea quando cada termo depende exclusivamente dos anteriores, porém se cada termo da sequência depende não somente dos termos anteriores, mas também de um termo independente da sequência, ela é dita não-homogênea.

**Exemplo 2.2.2.** As recorrências como  $a_{n+1}=2a_n$  e  $a_{n+1}=a_n^2$  são homogêneas, porém as recorrências  $a_{n+1}=a_n-3n$  e  $a_{n+1}=a_n^2-2$  são não-homogêneas por possuírem termos independentes em sua formação.

A resolução de uma relação de recorrência consiste em encontrar uma fórmula fechada para a recorrência, isto é, obter uma expressão que forneça cada termo  $a_n$  da sequência em função apenas de  $n$  e não dos termos anteriores.

### 2.3. Recorrências lineares de primeira ordem homogêneas

Resolvendo a recorrência  $a_{n+1}=2a_n$  com  $a_1=3$ . Temos:

$$a_2=2a_1$$

$$a_3=2a_2$$

$$a_4=2a_3$$

$$a_5=2a_4$$

⋮

$$a_n=2a_{n-1}.$$

Substituindo cada termo na expressão seguinte, obtemos,

$$a_n=a_1 \cdot 2^{n-1}.$$

Assim, tomando o valor de  $a_1=3$ , teremos que a solução da recorrência é:

$$a_n=3 \cdot 2^{n-1}.$$

A solução acima representa o termo geral de uma progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo igual a 3. Observe que a expressão obtida determina os termos da sequência dependendo apenas do valor de  $n$ .

De forma geral, os termos de uma progressão geométrica são da forma  $a_n=a_1 \cdot q^{n-1}$ , onde “ $q$ ” é chamado de razão geométrica da PG.

Uma recorrência linear homogênea de primeira ordem é, em geral, do tipo:

$$a_{n+1}=g(n) \cdot a_n. \tag{2.1}$$

Onde  $g(n)$  é uma função de  $n$ . E  $g(n)$  e  $a_n$  devem possuir valores não-nulos. Dessa forma, podemos então escrever:

$$a_2=g(1) \cdot a_1$$

$$a_3 = g(2) \cdot a_2$$

$$a_4 = g(3) \cdot a_3$$

$$a_5 = g(4) \cdot a_4$$

⋮

$$a_{n+1} = g(n) \cdot a_n.$$

Substituindo cada termo na expressão seguinte, obtemos:

$$a_{n+1} = a_1 \cdot g(1) \cdot g(2) \cdot g(3) \cdot g(4) \dots g(n),$$

que pode ser escrita da forma:

$$a_{n+1} = a_1 \cdot \prod_{j=1}^n g(j), \quad (2.2)$$

ou ainda,

$$a_n = a_1 \cdot \prod_{j=1}^{n-1} g(j). \quad (2.3)$$

**Exemplo 2.3.1.** Resolver a recorrência  $a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n$ .

Aplicando o fato de que a solução é da forma descrita na Equação (2.2). Assim,  $g(j) = (j+1)$ . Teremos:

$$a_{n+1} = a_1 \cdot \prod_{j=1}^n (j+1)$$

$$a_{n+1} = a_1 \cdot (1+1) \cdot (2+1) \cdot (3+1) \dots n \cdot (n+1)$$

$$a_{n+1} = a_1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n \cdot (n+1)$$

$$a_{n+1} = a_1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n \cdot (n+1)$$

$$a_{n+1} = a_1 \cdot (n+1)!$$

Podemos escrever a solução da recorrência acima da seguinte forma  $a_n = a_1 \cdot n!$ . E, dessa maneira, como não foi fornecido o valor de  $a_1$ , pode haver uma infinidade de soluções para a recorrência, onde  $a_1$  pode assumir um valor constante arbitrário.

## 2.4. Recorrências lineares de primeira ordem não-homogêneas

Como já foi dito, uma recorrência é não-homogênea quando ela possui um termo independente. As recorrências lineares não-homogêneas de primeira ordem assumem a forma:

$$a_{n+1} = g(n) \cdot a_n + h(n), \quad (2.4)$$

onde  $g(n)$  e  $h(n)$  são funções não-nulas.

Essa recorrência se apresenta em dois casos que serão vistos a seguir:

**1º caso:** quando  $g(n) = 1$ .

**Exemplo 2.4.1.** Resolver a recorrência  $a_{n+1} = a_n + h(n)$ .

**Resolução:**

$$a_2 = a_1 + h(1)$$

$$a_3 = a_2 + h(2)$$

$$a_4 = a_3 + h(3)$$

$$a_5 = a_4 + h(4)$$

⋮

$$a_{n+1} = a_n + h(n).$$

Somando todas as expressões acima, teremos,

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{n+1} = a_1 + h(1) + a_2 + h(2) + a_3 + h(3) + a_4 + h(4) + \dots + a_n + h(n).$$

E cancelando os termos comuns de ambos os lados da igualdade, obteremos:

$$a_{n+1} = a_1 + h(1) + h(2) + h(3) + h(4) + \dots + h(n),$$

que é a solução da recorrência e pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_{n+1} = a_1 + \sum_{j=1}^n h(j), \quad (2.5)$$

ou seja,

$$a_n = a_1 + \sum_{j=1}^{n-1} h(j). \quad (2.6)$$

**2º caso:** quando  $g(n) \neq 1$ .

Como resolver a recorrência de forma  $a_{n+1} = g(n)a_n + h(n)$ ?

O **Teorema 2.4.1** a seguir mostra que qualquer que seja a recorrência linear não-homogênea de primeira ordem pode ser reduzida a uma recorrência da forma  $a_{n+1} = a_n + h(n)$  que foi o caso anterior estudado.

**Teorema 2.4.1.** *Se  $x_n$  é uma solução não nula da recorrência  $a_{n+1} = g(n)a_n$ , então a*

*substituição  $a_n = x_n \cdot y_n$ , transforma a recorrência  $a_{n+1} = g(n)a_n + h(n)$  em  $y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n) \cdot x_n}$ .*

Demonstração:

Tomando  $a_n = x_n y_n$  podemos escrever a equação  $a_{n+1} = g(n)a_n + h(n)$  como:

$$x_{n+1} y_{n+1} = g(n) x_n y_n + h(n).$$

Porém,  $x_{n+1} = g(n)x_n$ , pois  $x_n$  é solução da equação homogênea  $a_{n+1} = g(n)a_n$ . Dessa forma a recorrência  $x_{n+1} y_{n+1} = g(n) x_n y_n + h(n)$  se transforma em,

$$g(n) x_n y_{n+1} = g(n) x_n y_n + h(n).$$

Dividindo todos os membros da equação acima por  $g(n) \cdot x_n$ , teremos:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n) \cdot x_n}. \quad (2.7)$$



Veja alguns exemplos de aplicação do teorema acima que comprovam a sua utilidade em simplificar recorrências lineares de primeira ordem não-homogêneas.

**Exemplo 2.4.2.** Resolver a recorrência  $a_{n+1}=2a_n+1$  com  $a_1=2$ .

Calculando a solução não nula de  $a_{n+1}=2a_n$ .

$$a_2=2a_1$$

$$a_3=2a_2$$

$$a_4=2a_3$$

⋮

$$a_n=2a_{n-1}$$

E substituindo cada termo na expressão seguinte, obtemos:

$$a_n=a_1 \cdot 2^{n-1}.$$

Fazendo  $a_1=1$  na expressão acima, já que o que queremos é apenas uma solução diferente de zero, teremos uma solução não nula de  $a_{n+1}=2a_n$  que é, nesse caso,  $a_n=2^{n-1}$ . Fazendo a substituição  $a_n=2^{n-1} \cdot y_n$ , obtemos  $2^n \cdot y_{n+1}=2^n \cdot y_n+1$ , ou seja,  $y_{n+1}=y_n+2^{-n}$ . Resolvendo, então, a recorrência  $y_{n+1}=y_n+2^{-n}$ , temos:

$$y_2=y_1+2^{-1}$$

$$y_3=y_2+2^{-2}$$

$$y_4=y_3+2^{-3}$$

⋮

$$y_n=y_{n-1}+2^{n-1}.$$

E somando todas as expressões acima, resulta em,

$$y_n=y_1+2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+\dots+2^{-(n-1)}.$$

O termo “ $2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+\dots+2^{-(n-1)}$ ” é a soma dos termos de uma Progressão Geométrica de primeiro termo igual a  $2^{-1}$  e razão, também, igual a  $2^{-1}$ . Assim podemos reescrever a expressão acima da seguinte forma:

$$y_n = y_1 + 2^{-1}$$

$$y_n = y_1 - 2^{1-n} + 1.$$

Como  $a_n = 2^{n-1} \cdot y_n$  e  $a_1 = 2$ , temos que  $y_1 = 2$  e  $y_n = 3 - 2^{1-n}$ . Assim, a solução da recorrência  $a_{n+1} = 2a_n + 1$  é  $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ .

**Exemplo 2.4.3.** Resolver a recorrência  $a_{n+1} = 5a_n + 5^n$ ,  $a_1 = 1$ .

A solução não nula da recorrência homogênea  $a_{n+1} = 5a_n$  é, por exemplo,  $x_n = 5^{n-1}$  como já foi estudado. Fazendo a substituição  $a_n = 5^{n-1} \cdot y_n$ , obtemos  $5^n \cdot y_{n+1} = 5^n \cdot y_n + 5^n$ , ou seja,  $y_{n+1} = y_n + 1$ . Daí se tem:

$$y_2 = y_1 + 1$$

$$y_3 = y_2 + 1$$

$$y_4 = y_3 + 1$$

⋮

$$y_n = y_{n-1} + 1.$$

Somando, resulta em:

$$y_n = y_1 + 1 \cdot (n-1)$$

Como  $a_n = 5^{n-1} \cdot y_n$  e  $a_1 = 1$ , temos que  $y_1 = 1$  e  $y_n = n$ . Assim, a solução da recorrência  $a_{n+1} = 5a_n + 5^n$  é  $a_n = 5^{n-1} \cdot n$ .

Podemos de uma maneira mais elaborada e detalhada resolver a recorrência não homogênea  $a_{n+1} = g(n) \cdot a_n + h(n)$  escrevendo-a da seguinte forma  $a_{n+1} = k_1 \cdot a_n + k_2$ , com  $k_1, k_2$  sendo constantes arbitrárias e  $k_1 \neq 0$ .

Como já foi visto uma solução da recorrência homogênea  $a_{n+1}=k_1 \cdot a_n$  é  $x_n=k_1^{n-1}$ .

Dessa forma, tomando  $a_n=k_1^{n-1} \cdot y_n$  obtemos:

$$k_1^n \cdot y_{n+1} = k_1 \cdot k_1^{n-1} \cdot y_n + k_2$$

ou de outra forma,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_2}{k_1^n}. \quad (2.8)$$

A Equação (2.8) tem a forma do Exemplo 2.4.1 e pelo que já sabemos tem solução do tipo:

$$y_{n+1} = y_1 + \sum_{j=1}^n \frac{k_2}{k_1^j}$$

Desfazendo a mudança de variável por meio da igualdade  $a_n=k_1^{n-1} \cdot y_n$ , obtemos o resultado:

$$\frac{a_{n+1}}{k_1^n} = a_1 + k_2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{k_1^j}$$

ou ainda,

$$a_{n+1} = k_1^n \left( a_1 + k_2 \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{k_1} \right)^j \right). \quad (2.9)$$

No caso em que  $a_{n+1}=k_1 \cdot a_n+k_2$ , com  $k_1, k_2$  sendo constantes arbitrárias e  $k_1$  e  $k_2$  são ambos diferentes de zero, podemos, ainda, usar da seguinte proposição:

**Proposição 2.4.1.** *Seja a equação  $a_{n+1}=k_1 \cdot a_n+k_2$  uma recorrência linear de 1ª ordem não-homogênea com coeficientes constantes  $k_1$  e  $k_2$ , com  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ , onde  $k_1 \neq 0$ ,  $k_1 \neq 1$  e  $k_2 \neq 0$ . A solução da recorrência pode ser escrita em função das constantes  $k_1$  e  $k_2$  e do termo  $a_1$*

*assumindo a seguinte forma:  $a_n = \left( a_1 - \frac{k_2}{1-k_1} \right) \cdot k_1^{n-1} + \frac{k_2}{1-k_1}$ .*

Demonstração:

Fazendo  $a_n = y_n + c$ , com  $c \in \mathbb{R}$  a equação  $a_{n+1} = k_1 \cdot a_n + k_2$  adquire a seguinte forma:

$$y_{n+1} + c = k_1 \cdot (y_n + c) + k_2.$$

Reagrupando os termos da equação obtemos:

$$\begin{aligned} y_{n+1} + c &= k_1 \cdot y_n + k_1 \cdot c + k_2 \Rightarrow y_{n+1} = k_1 \cdot y_n + k_1 \cdot c + k_2 - c \Rightarrow y_{n+1} = k_1 \cdot y_n + (k_1 - 1) \cdot c + k_2 \\ &\Rightarrow y_{n+1} = k_1 \cdot y_n + (k_1 - 1) \cdot \left( c + \frac{k_2}{k_1 - 1} \right) \end{aligned}$$

Para que a recorrência adquira uma forma homogênea é necessário fazer com que a parcela

$$(k_1 - 1) \cdot \left( c + \frac{k_2}{k_1 - 1} \right) \text{ seja igual a zero. Assim a recorrência é } y_{n+1} = k_1 \cdot y_n \text{ quando } c = -\frac{k_2}{k_1 - 1}.$$

Dessa forma, a recorrência homogênea  $y_{n+1} = k_1 \cdot y_n$  que tem solução  $y_n = y_1 \cdot k_1^{n-1}$  e, sabendo, também, que  $a_n = y_n + c$ . Temos que:

$$a_n = y_1 \cdot k_1^{n-1} + c \Rightarrow a_n - c = y_1 \cdot k_1^{n-1} \Rightarrow a_n - c = (a_1 - c) \cdot k_1^{n-1}.$$

Fazendo a substituição  $c = -\frac{k_2}{k_1 - 1}$  ou de forma equivalente,  $c = \frac{k_2}{1 - k_1}$  obteremos então:

$$a_n - \frac{k_2}{1 - k_1} = \left( a_1 - \frac{k_2}{1 - k_1} \right) \cdot k_1^{n-1}.$$

Dessa última equação podemos concluir que:

$$a_n = \left( a_1 - \frac{k_2}{1 - k_1} \right) \cdot k_1^{n-1} + \frac{k_2}{1 - k_1}. \quad (2.10)$$

Observe que como os valores  $\left( a_1 - \frac{k_2}{1 - k_1} \right)$  e  $\frac{k_2}{1 - k_1}$  são constantes, podemos dizer que a solução de uma recorrência linear de 1ª ordem que se apresenta na forma  $a_{n+1} = k_1 \cdot a_n + k_2$  onde  $k_1$ ,  $k_2$  são números reais com  $k_1$  e  $k_2$  ambos diferentes de zero, e  $k_1 \neq 1$ , é dada por  $a_n = A \cdot k_1^{n-1} + B$  com  $A$  e  $B$  constantes reais.

De acordo com o que foi exposto, podemos, então, resolver uma recorrência da forma  $a_{n+1}=k_1 \cdot a_n+k_2$  conhecendo dois dos seus termos, pois a solução geral  $a_n=A \cdot k_1^{n-1}+B$  terá suas constantes determinadas após a resolução de um sistema de equações em  $A$  e  $B$ .

**Exemplo 2.4.4.** Resolver a recorrência  $a_{n+1}=3 \cdot a_n+2, a_1=2$ .

**Solução:**

Se  $a_1=2$ , então  $a_2=8$ . A solução geral da recorrência  $a_{n+1}=3 \cdot a_n+2$  será, então, da forma  $a_n=A \cdot 3_1^{n-1}+B$ . Podemos escrever:

$$\begin{cases} A \cdot 3^{1-1}+B=a_1 \\ A \cdot 3^{2-1}+B=a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ 3A+B=8 \end{cases}$$

Subtraindo a primeira da segunda equação obtemos  $A=3$  e  $B=-1$ . A solução da recorrência  $a_{n+1}=3 \cdot a_n+2$  é, então,  $a_n=3 \cdot 3_1^{n-1}-1$ .

### 3. RECORRÊNCIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

As recorrências chamadas de segunda ordem são recorrências onde cada termo é expresso em função de dois termos imediatamente anteriores. Assim como as recorrências de primeira ordem, podemos dividir as recorrências de segunda ordem em homogêneas e não-homogêneas.

Trataremos, inicialmente, das recorrências lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes e, em seguida, abordaremos, as recorrências não-homogêneas com coeficientes, também, constantes.

Ao compreendermos mais esta forma de se determinar uma sequência numérica, poderemos, então, utilizá-la para resolver alguns problemas de contagem.

#### 3.1. Recorrências lineares de segunda ordem homogêneas

As recorrências lineares de segunda ordem homogêneas são as que se apresentam na forma:

$$a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = 0, \text{ com } p \text{ e } q \text{ números reais e } q \neq 0.$$

As recorrências dessa forma podem ser associadas a uma equação do 2º grau,  $r^2 + pr + q = 0$ , chamada de equação característica. O fato do coeficiente  $q$  ser diferente de zero implica em dizer que o zero não é raiz da equação característica.

O **Teorema 3.1.1** a seguir mostra que se as raízes da equação característica são  $r_1$  e  $r_2$ , então a solução da recorrência  $a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = 0$  é uma combinação dessas raízes e o **Teorema 3.1.2** se relaciona ao caso específico onde  $r_1 \neq r_2$ .

**Teorema 3.1.1.** *Se as raízes de  $r^2 + pr + q = 0$  são  $r_1$  e  $r_2$ , então  $x_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n$  é solução da recorrência  $a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = 0$ , qualquer que seja os valores das constantes  $C_1$  e  $C_2$ .*

Demonstração:

Substituindo  $x_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n$  na recorrência  $a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = 0$  e agrupando os termos teremos:

$$\begin{aligned} C_1 \cdot r_1^{n+2} + C_2 \cdot r_2^{n+2} + p \cdot (C_1 \cdot r_1^{n+1} + C_2 \cdot r_2^{n+1}) + q \cdot (C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n) &= 0 \\ C_1 \cdot r_1^n \cdot r_1^2 + C_2 \cdot r_2^n \cdot r_2^2 + p \cdot (C_1 \cdot r_1^n \cdot r_1 + C_2 \cdot r_2^n \cdot r_2) + q \cdot (C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n) &= 0 \\ C_2 \cdot r_2^n \cdot r_2^2 + p \cdot C_2 \cdot r_2^n \cdot r_2 + q \cdot C_2 \cdot r_2^n + C_1 \cdot r_1^n \cdot r_1^2 + p \cdot C_1 \cdot r_1^n \cdot r_1 + q \cdot C_1 \cdot r_1^n &= 0 \\ C_2 \cdot r_2^n \cdot (r_2^2 + p \cdot r_2 + q) + C_1 \cdot r_1^n \cdot (r_1^2 + p \cdot r_1 + q) &= 0. \end{aligned}$$

Como  $r_1$  e  $r_2$  são raízes das equações  $r_1^2 + p \cdot r_1 + q = 0$  e  $r_2^2 + p \cdot r_2 + q = 0$ , respectivamente, teremos:

$$C_2 \cdot r_2^n \cdot 0 + C_1 \cdot r_1^n \cdot 0 = 0 \quad (3.1)$$

Logo  $x_n$  é solução da recorrência  $a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = 0$ .

**Teorema 3.1.2.** *Se as raízes de  $r^2 + pr + q = 0$  são  $r_1$  e  $r_2$ , com  $r_1 \neq r_2$ , então todas as soluções da recorrência  $a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = 0$  são da forma  $x_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n$  com  $C_1$  e  $C_2$  constantes.*

Demonstração:

Seja  $y_n$  uma solução qualquer de  $a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = 0$  podemos escrever as igualdades  $y_1$  e  $y_2$  como um sistema de equações do qual as constantes  $C_1$  e  $C_2$  sejam as soluções desse sistema.

$$\begin{cases} C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1 \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2 \end{cases}$$

isto é,

$$C_1 = \frac{r_2^2 \cdot y_1 - r_2 \cdot y_2}{r_1 \cdot r_2 \cdot (r_2 - r_1)} \text{ e } C_2 = \frac{r_1 \cdot y_2 - r_1^2 \cdot y_1}{r_1 \cdot r_2 \cdot (r_2 - r_1)}. \quad (3.2)$$

Como as raízes  $r_1$  e  $r_2$  são ambas diferentes de zero e  $r_1 \neq r_2$ , as soluções  $C_1$  e  $C_2$  tornam-se, perfeitamente, possíveis.

Tomando  $y_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n$  e aplicando em  $z_n = y_n - (C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n)$  mostraremos que  $z_n = 0$ , onde  $n$  representa todo número natural.

Temos que,

$$z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n = (y_{n+2} + p y_{n+1} + q y_n) - C_1 r_1^n (r_1^2 + p r_1 + q) - C_2 r_2^n (r_2^2 + p r_2 + q) \quad (3.3)$$

O primeiro parêntese é igual a zero uma vez que  $y_n$  é solução da recorrência de segunda ordem  $a_{n+2} + p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n = 0$  e os dois últimos parênteses são iguais a zero porque  $r_1$  e  $r_2$  são raízes da equação característica  $r^2 + p r + q = 0$ . Dessa forma,  $z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n = 0$ .

Como  $C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1$  e  $C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2$ , temos  $z_1 = z_2 = 0$ . Entretanto, se  $z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n = 0$  e  $z_1 = z_2 = 0$ , então  $z_n = 0$  para todo  $n$ .

**Exemplo 3.1.1.** Determine a solução da recorrência:

$$a_{n+2} + 2 a_{n+1} - a_n = 0.$$

A equação característica é  $r^2 - r - 2 = 0$  e tem como raízes -1 e 2. De acordo com os **Teoremas 3.1.1 e 3.1.2** as soluções da recorrência  $a_{n+2} + 2 a_{n+1} - a_n = 0$  são as sequências da forma  $x_n = C_1 (-1)^n + C_2 2^n$ , onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes arbitrárias. Observe que, neste caso, não determinamos nenhum dos termos da recorrência.

**Exemplo 3.1.2.** Resolva a recorrência abaixo:

$$a_{n+2} + 2 a_{n+1} - 3 a_n = 0, \text{ com } a_1 = 1 \text{ e } a_2 = 2.$$

A equação característica é  $r^2 + 2 r - 3 = 0$  e tem como raízes -3 e 1. Assim, em conformidade com os **Teoremas 3.1.1 e 3.1.2** as soluções da recorrência são as sequências da forma  $x_n = C_1 (-3)^n + C_2$ . Observe que, neste caso, nós determinamos os primeiros termos da recorrência, com isso podemos identificar o valor das constantes  $C_1$  e  $C_2$ .

$$C_1 = \frac{(1^2 \cdot 1 - 1 \cdot 2)}{(-3) \cdot 1 \cdot (1+3)} \text{ e } C_2 = \frac{(-3) \cdot 2 - (-3)^2 \cdot 1}{(-3) \cdot 1 \cdot (1+3)}.$$

E assim, os valores de  $C_1$  e  $C_2$  são:  $C_1 = \frac{1}{12}$  e  $C_2 = \frac{5}{4}$ .



**Proposição 3.1.1.** *Caso as raízes da equação característica sejam complexas, a solução  $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$  com  $C_1$  e  $C_2$  constantes arbitrárias pode ser escrita colocando as raízes na forma trigonométrica. Assim teremos:*

$$r_1 = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

$$r_2 = \rho(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta),$$

$$r_1^n = \rho^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta),$$

$$r_2^n = \rho^n(\cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta).$$

Assim,

$$C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = \rho^n [(C_1 + C_2) \cos n\theta + i(C_1 - C_2) \operatorname{sen} n\theta]. \quad (3.4)$$

Dessa maneira,  $(C_1 + C_2)$  e  $(C_1 - C_2)$  são novas constantes arbitrárias e, assim, a solução pode ser escrita da forma a seguir:

$$x_n = \rho^n [k_1 \cdot \cos n\theta + i k_2 \cdot \operatorname{sen} n\theta] \text{ com } k_1 = (C_1 + C_2) \text{ e } k_2 = (C_1 - C_2). \quad (3.5)$$

**Exemplo 3.1.3.** Resolva a recorrência  $a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 0$ .

A equação característica é  $r^2 + r + 1 = 0$  e tem como raízes  $r_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$  e  $r_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ . Essas raízes são complexas de módulo  $\rho = 1$  e argumento principal  $\theta = \frac{\pm\pi}{3}$ .

E, como já foi dito, a solução é da forma:

$$x_n = \rho^n [k_1 \cdot \cos n\theta + i k_2 \cdot \operatorname{sen} n\theta].$$

Atribuindo o valor positivo de  $\theta$  à solução podemos expressá-la como:

$$x_n = k_1 \cdot \cos n \frac{\pi}{3} + i k_2 \cdot \operatorname{sen} n \frac{\pi}{3}. \quad (3.6)$$

Os **Teoremas 3.1.3** e **3.1.4** a seguir nos darão suporte para resolver o caso em que as raízes  $r_1$  e  $r_2$  da equação característica são iguais.

**Teorema 3.1.3.** Se as raízes de  $r^2 - pr - q = 0$  são iguais,  $r_1 = r_2 = r$ , então a solução da recorrência  $a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2} = 0$  é da forma  $x_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$  qualquer que seja os valores de  $C_1$  e  $C_2$ .

Demonstração:

Se as raízes da equação  $r^2 - pr - q = 0$  são iguais, então, a soma das raízes é  $2r = p$  e o discriminante da equação deve ser de tal forma que  $(-p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-q) = 0$  o que equivale a dizer que  $p^2 = -4q$  e substituindo o valor de  $p = 2r$  teremos  $q = -r^2$ . Fazendo a substituição  $x_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$  na recorrência  $a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2} = 0$  temos:

$$C_1 r^n + C_2 n r^n - p(C_1 r^{n-1} + C_2(n-1)r^{n-1}) - q(C_1 r^{n-2} + C_2(n-2)r^{n-2}) = 0.$$

Reorganizando e agrupando os termos teremos o seguinte:

$$\begin{aligned} C_1(r^n - p r^{n-1} - q r^{n-2}) + C_2(n r^n - p(n-1)r^{n-1} - q(n-2)r^{n-2}) &= 0, \\ C_1 r^{n-2}(r^2 - pr - q) + C_2 n r^{n-2}(r^2 - pr - q) + C_2 r^{n-2}(pr + 2q) &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Como  $r^2 - pr - q = 0$  então, substituindo, convenientemente,  $p = 2r$  e  $q = -r^2$  na expressão acima, chegaremos ao resultado:

$$C_1 r^{n-2} \cdot 0 + C_2 n r^{n-2} \cdot 0 + C_2 r^{n-2} \cdot 0 = 0. \quad (3.8)$$

Assim,  $x_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$  é solução da recorrência  $a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2} = 0$  qualquer que seja os valores de  $C_1$  e  $C_2$ .

**Teorema 3.1.4.** Se as raízes de  $r^2 - pr - q = 0$  são, de tal forma, que  $r_1 = r_2 = r \neq 0$ , então todas as soluções da recorrência  $a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2} = 0$  são da forma  $x_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$  com  $C_1$  e  $C_2$  constantes.

Demonstração:

Seja  $y_n$  uma solução qualquer de  $a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2} = 0$  podemos escrever  $y_1 = C_1 r + C_2 r$  e  $y_2 = C_1 r^2 + C_2 2r^2$  uma vez que  $y_n$  é da forma  $C_1 r^n + C_2 n r^n$ .

Assim, resolvendo o sistema,

$$\begin{cases} C_1 r + C_2 r = y_1 \\ C_1 r^2 + C_2 2r^2 = y_2 \end{cases},$$

teremos,

$$C_1 = \frac{2ry_1 - y_2}{r^2} \text{ e } C_2 = \frac{y_2 - ry_1}{r^2}, \text{ com } r \neq 0 \quad (3.9)$$

Tomando  $y_n = C_1 r^n + C_2 nr^n$  e aplicando em  $z_n = y_n - C_1 r^n - C_2 nr^n$  mostraremos que  $z_n = 0$  para todo número  $n$ .

Temos que,

$$\begin{aligned} z_n - p \cdot z_{n-1} - q \cdot z_{n-2} &= (y_n - p \cdot y_{n-1} - q \cdot y_{n-2}) - C_1 r^{n-2} (r^2 - p \cdot r - q) \\ &\quad - C_2 nr^{n-2} (r^2 - p \cdot r - q) - C_2 r^{n-2} (p \cdot r + 2 \cdot q) \end{aligned} \quad (3.10)$$

O primeiro parêntese é igual a zero uma vez que  $y_n$  é solução da recorrência de segunda ordem  $a_n - p a_{n-1} - q a_{n-2} = 0$  e o segundo e terceiro parênteses são iguais a zero, pois  $r$  é raiz da equação característica  $r^2 - pr - q = 0$ , já o último parêntese é igual a zero porque sendo  $r_1 = r_2 = r$  temos que  $p = 2r$  e  $q = -r^2$  e dessa forma  $p \cdot r + 2 \cdot q = 0$ . Dessa forma conclui-se que a recorrência  $(z_n - p \cdot z_{n-1} - q \cdot z_{n-2}) = 0$ .

Como  $y_1 = C_1 r + C_2 r$  e  $y_2 = C_1 r^2 + C_2 2r^2$ , temos  $z_1 = z_2 = 0$ . Entretanto, se  $z_n - p \cdot z_{n-1} - q \cdot z_{n-2} = 0$  e  $z_1 = z_2 = 0$ , então  $z_n = 0$  para todo  $n$ .

**Exemplo 3.1.3.** Resolver a recorrência  $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ , com  $a_1 = 0$  e  $a_2 = 1$ .

A equação característica da recorrência é  $r^2 - 4r + 4 = 0$  e essa equação tem raízes iguais, ou seja,  $r_1 = r_2 = r = 2$ . De acordo com o **Teorema 3.1.4** as soluções da recorrência são da forma  $x_n = C_1 r^n + C_2 nr^n$  qualquer que seja os valores das constantes  $C_1$  e  $C_2$ .

$$C_1 = \frac{2r \cdot a_1 - a_2}{r^2} \text{ e } C_2 = \frac{a_2 - r \cdot a_1}{r^2}$$

$$C_1 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 0 - 1}{2^2} \text{ e } C_2 = \frac{1 - 2 \cdot 0}{2^2}$$

$$C_1 = \frac{-1}{4} \text{ e } C_2 = \frac{1}{4},$$

aplicando em,

$$x_n = C_1 r^n + C_2 n r^n,$$

teremos:

$$x_n = \frac{-1}{4} \cdot 2^n + \frac{1}{4} \cdot n \cdot 2^n$$

### 3.2. Recorrências lineares de segunda ordem não – homogêneas

**Teorema 3.2.1.** *Se  $x_n$  é uma solução da equação  $a_{n+2} + p a_{n+1} + q a_n = f(n)$ , então a substituição  $a_n = x_n + y_n$  transforma a equação em  $y_{n+2} + p y_{n+1} + q y_n = 0$ .*

Demonstração:

Substituindo  $a_n$  por  $x_n + y_n$  na equação, obtemos  $(x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n) + (y_{n+2} + p y_{n+1} + q y_n) = f(n)$ . Mas  $x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = f(n)$ , pois  $x_n$  é solução da equação original. Logo, a equação se transformou em  $y_{n+2} + p y_{n+1} + q y_n = 0$ . De acordo com o teorema acima, a solução de uma recorrência não homogênea é constituída de duas parcelas: uma solução qualquer da não-homogênea e a solução homogênea. Sabemos achar a solução da homogênea. Uma solução da não-homogênea, procuraremos por tentativas.

**Exemplo 3.2.1.** Resolver a recorrência  $a_{n+2} - 5 a_{n+1} + 6 a_n = n + 3^n$ .

A equação homogênea  $a_{n+2} - 5 a_{n+1} + 6 a_n = 0$  de equação característica  $r^2 - 5r + 6 = 0$  tem como soluções  $r_1 = 3$  e  $r_2 = 2$ . Portanto, a solução da homogênea é  $h_n = C_1 3^n + C_2 2^n$ . Agora tentaremos descobrir uma solução particular  $t_n$  da recorrência não homogênea  $a_{n+2} - 5 a_{n+1} + 6 a_n = n + 3^n$ . Ora, se substituirmos  $t_n$  em  $a_{n+2} - 5 a_{n+1} + 6 a_n$  devemos encontrar  $n + 3^n$ . Então é razoável imaginar que  $t_n$  seja a soma de um polinômio do primeiro grau com uma

exponencial de base 3. Tentaremos  $t_n = An + B + C3^n$ . Substituindo em  $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = n + 3^n$ , temos:

$$2An - (3A + 2B) = n + 3^n. \quad (3.11)$$

Vemos que a recorrência não admite solução da forma  $t_n = An + B + C3^n$ . Isso ocorreu porque o termo  $C3^n$  é solução da homogênea e substituindo na equação daria zero e não uma exponencial que pudesse igualar a  $3^n$ . Para corrigir a tentativa multiplica-se o bloco por  $n$ . dessa forma tentaremos  $t_n = An + B + Cn3^n$  e teremos:

$$A(n+2) + B + C(n+2)3^{n+2} - 5A(n+1) - 5B - 5C(n+1)3^{n+1} + 6An + 6B + Cn3^n. \quad (3.12)$$

Simplificando a expressão acima temos  $2An - 3A + 2B + 5C3^n = n + 3^n$ , que é satisfeita para  $A = \frac{1}{2}$ ,  $B = \frac{3}{4}$  e  $C = \frac{1}{5}$ . Logo uma solução particular é  $a_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{4} + \frac{1}{5}3^n$  e a solução geral da equação não homogênea é da forma:

$$a_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{4} + \frac{1}{5}3^n + C_1 2^n + C_2 3^n \quad (3.13)$$

**Exemplo 3.2.2.** Resolver a recorrência  $a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 6 - 8n$ , com  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 4$ .

As soluções da equação característica  $r^2 + r - 6 = 0$  são  $r_1 = 2$  e  $r_2 = -3$ , conduzindo à solução geral  $a_n = C_1 2^n + C_2 (-3)^n$  para a solução homogênea. Tentando uma solução particular da forma  $a_n = An + B$ , encontramos que a equação é satisfeita para  $A = 2$  e  $B = 0$ . Assim,  $a_n = 2n$  é uma solução particular e  $a_n = 2n + C_1 2^n + C_2 (-3)^n$  é a solução geral da equação não homogênea  $a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 6 - 8n$ .

Substituindo  $n = 0$  e  $n = 1$  nessa solução, obtemos:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 - 3C_2 = 2 \end{cases} \quad (3.14)$$

Resolvendo, encontramos  $C_1 = 1$  e  $C_2 = 0$ . Portanto, a solução é  $a_n = 2n + 2^n$ .

## 4. RECORRÊNCIAS LINEARES DE ORDEM QUALQUER

### 4.1 Generalização sobre recorrências

Podemos estender os conceitos abordados nos tópicos anteriores para a resolução de recorrências de uma ordem qualquer.

**Definição 4.1.1.** Chama-se “*recorrência linear de ordem  $k$* ” a sequência na qual cada termo é obtido a partir dos  $k$  termos imediatamente anteriores a ele.

Uma recorrência linear de ordem  $k$  é do tipo:

$$a_n = g_1(n)a_{n-1} + g_2(n)a_{n-2} + g_3(n)a_{n-3} + \dots + g_k(n)a_{n-k} + f(n), \text{ com } g_k(n) \neq 0. \quad (4.1)$$

Se  $g_1(n), g_2(n), g_3(n), \dots, g_k(n)$  são constantes e  $f(n) = 0$ , a recorrência é homogênea e pode assumir a forma:

$$a_n = q_1 a_{n-1} + q_2 a_{n-2} + q_3 a_{n-3} + \dots + q_k a_{n-k}. \quad (4.2)$$

Dessa forma, podemos representar a equação acima por sua equação característica  $r^k - q_1 r^{k-1} - q_2 r^{k-2} - q_3 r^{k-3} - \dots - q_{k-1} r - q_k = 0$ .

**Teorema 4.1.1.** Se  $r_1, r_2, \dots, r_{k-1}, r_k$  são raízes da equação característica  $r^k - q_1 r^{k-1} - q_2 r^{k-2} - q_3 r^{k-3} - \dots - q_{k-1} r - q_k = 0$ , então  $x_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + c_3 r_3^n + \dots + c_k r_k^n$  é solução da recorrência  $a_n = q_1 a_{n-1} + q_2 a_{n-2} + q_3 a_{n-3} + \dots + q_k a_{n-k}$  para quaisquer valores que sejam  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$ .

Demonstração:

Substituindo  $x_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + c_3 r_3^n + \dots + c_k r_k^n$  na relação de recorrência  $a_n - q_1 a_{n-1} - q_2 a_{n-2} - q_3 a_{n-3} - \dots - q_k a_{n-k}$ , e agrupando os termos, obtemos:

$$c_1 r_1^{n-k} (r_1^k - q_1 r_1^{k-1} - \dots - q_k) + c_2 r_2^{n-k} (r_2^k - q_1 r_2^{k-1} - \dots - q_k) + c_3 r_3^{n-k} (r_3^k - q_1 r_3^{k-1} - \dots - q_k) + \dots + c_k r_k^{n-k} (r_k^k - q_1 r_k^{k-1} - \dots - q_k) \quad (4.3)$$

**Teorema 4.1.2.** Se  $r_1, r_2, \dots, r_{k-1}, r_k$  são raízes distintas e não nulas da equação característica  $r^k - q_1 r^{k-1} - q_2 r^{k-2} - q_3 r^{k-3} - \dots - q_{k-1} r - q_k = 0$ , então todas as soluções da recorrência  $a_n = q_1 a_{n-1} + q_2 a_{n-2} + q_3 a_{n-3} + \dots + q_k a_{n-k}$  são da forma  $x_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + c_3 r_3^n + \dots + c_k r_k^n$  com  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$  constantes.

Demonstração:

Seja  $u_n$  uma solução qualquer de  $a_n - q_1 a_{n-1} - q_2 a_{n-2} - q_3 a_{n-3} - \dots - q_k a_{n-k} = 0$ . Tomemos  $v_n = u_n - c_1 r_1^n - c_2 r_2^n - c_3 r_3^n - \dots - c_k r_k^n$ . Vamos provar que  $v_n = 0$  para todo  $n$ .

Temos,

$$v_n - q_1 v_{n-1} - q_2 v_{n-2} - q_3 v_{n-3} - \dots - q_k v_{n-k} = (u_n - c_1 r_1^n - c_2 r_2^n - c_3 r_3^n - \dots - c_k r_k^n) - c_1 r_1^{n-k} (r_1^k - q_1 r_1^{k-1} - \dots - q_k) - c_2 r_2^{n-k} (r_2^k - q_1 r_2^{k-1} - \dots - q_k) - \dots - c_k r_k^{n-k} (r_k^k - q_1 r_k^{k-1} - \dots - q_k) \quad (4.4)$$

O primeiro parêntese é igual zero, pois  $u_n$  é solução de  $a_n - q_1 a_{n-1} - q_2 a_{n-2} - q_3 a_{n-3} - \dots - q_k a_{n-k} = 0$  e os demais parênteses são iguais a zero já que  $r_1, r_2, \dots, r_{k-1}, r_k$  são raízes da equação  $r^k - q_1 r^{k-1} - q_2 r^{k-2} - q_3 r^{k-3} - \dots - q_{k-1} r - q_k = 0$ .

Assim,  $v_n - q_1 v_{n-1} - q_2 v_{n-2} - q_3 v_{n-3} - \dots - q_k v_{n-k} = 0$  e, além disso, como  $c_1 r_1 + c_2 r_2 + c_3 r_3 + \dots + c_k r_k = u_1$  e  $c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2 + c_3 r_3^2 + \dots + c_k r_k^2 = u_2$ , temos  $v_1 = v_2 = 0$ . Entretanto, se  $v_n - q_1 v_{n-1} - q_2 v_{n-2} - q_3 v_{n-3} - \dots - q_k v_{n-k} = 0$  e  $v_1 = v_2 = 0$  então  $v_n = 0$  para todo  $n$ .

## 5. PRINCÍPIO DA INDUÇÃO

### 5.1 Princípio de Indução Matemática

Quando se resolve um problema de recorrência obtemos uma fórmula fechada, ou seja, uma fórmula que determina cada termo em função apenas de  $n$ , onde o valor de  $n$  corresponde a um número natural. Sendo assim, podemos confrontar a fórmula obtida com os dados do problema e comprovar sua validade através de uma das formas do princípio de indução matemática. Os teoremas que se apresentam a seguir podem ser úteis como formas de ratificar os argumentos da solução de uma recorrência.

**Teorema 5.1.1.** *Seja  $P(n)$  uma proposição associada a cada inteiro positivo  $n$  e que satisfaz às duas seguintes condições:*

- 1  $P(1)$  é verdadeira;
- 2 Para todo inteiro positivo  $k$ , se  $P(k)$  é verdadeira, então  $P(k+1)$  também é verdadeira.

*Nestas condições,  $P(n)$  é verdadeira para todo inteiro positivo  $n$ .*

Demonstração:

Seja  $S$  o conjunto de todos os inteiros positivos  $n$  para os quais a proposição  $P(n)$  é verdadeira, isto é:

$$S = \{n \in \mathbb{N} \text{ tal que } P(n) \text{ é verdadeira}\}$$

Pela condição (1),  $P(1)$  é verdadeira e, portanto,  $1 \in S$ . E, pela condição (2), para todo inteiro positivo  $k$ ,  $k \in S$ , então  $k+1 \in S$ . Logo, o conjunto  $S$  satisfaz às condições (1) e (2) do princípio de indução finita e, portanto,  $S = \mathbb{N}$ , isso é, a proposição  $P(n)$  é verdadeira para todo inteiro positivo  $n$ .

Outra forma do princípio de indução matemática é o que segue:

**Teorema 5.1.2.** *Seja  $r$  um inteiro positivo fixo e seja  $P(n)$  uma proposição associada a cada inteiro  $n \geq r$  e que satisfaz às duas seguintes condições:*

- 1  $P(r)$  é verdadeira;
- 2 Para todo inteiro  $k \geq r$ , se  $P(k)$  é verdadeira, então  $P(k+1)$  também é verdadeira.

*Nestas condições,  $P(n)$  é verdadeira para todo inteiro  $n \geq r$ .*



Demonstração:

Seja  $S$  o conjunto de todos os inteiros positivos  $n$  para os quais a proposição  $P(r+n-1)$  é verdadeira, isto é:

$$S = \{n \in \mathbb{N} \text{ tal que } P(r+n-1) \text{ é verdadeira}\}.$$

Pela condição (1),  $P(r) = P(r+1-1)$  é verdadeira, isto é,  $1 \in S$ . E, pela condição (2), se  $P(r+k-1)$  é verdadeira, então:

$$P((r+k-1)+1) = P(r+(k+1)-1)$$

A igualdade acima significa que se  $k \in S$ , então  $k+1 \in S$ . Logo pelo Princípio de Indução,  $S$  é o conjunto dos inteiros positivos:  $S = \mathbb{N}$ , isto é, a proposição  $P(r+n-1)$  é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja, o que é a mesma coisa, a proposição  $P(n)$  é verdadeira para todo inteiro  $n \geq r$ .

Como exemplo, pode-se provar que a solução da recorrência  $a_n = a_{n-1} + r$ , com  $r$  uma constante diferente de zero, abrange todos os  $n$  naturais positivos, basta, pra isso, aplicar o princípio de indução na sua solução que é  $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ .

## 6. PROBLEMAS DE CONTAGEM

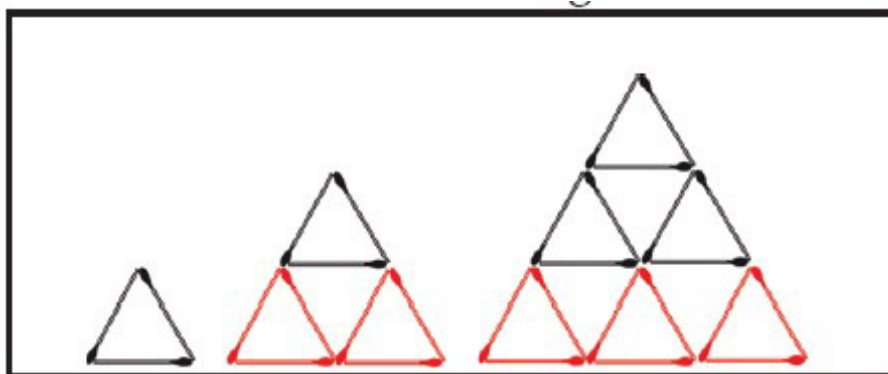
Agora veremos alguns problemas de contagem que poderão ser resolvidos utilizando os conhecimentos sobre recorrências. Faremos uso de problemas que abrangem conceitos mais simples sobre recorrências e aqueles que exigem um pouco mais de conhecimento. Abordaremos aqui alguns problemas já conhecidos, mas que nos servirão de referência para a resolução de outras situações de contagem.

### Problema 1.

(Questão 09 – OBMEP 2012, nível 2) Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforos, seguindo o padrão indicado na figura 1. Um desses triângulos foi construído com 13 palitos de fósforo. Quantos palitos formam o lado desse triângulo?

Esse problema que foi proposto na OBMEP de 2012 pode ser resolvido observando a figura abaixo e percebendo que se trata de uma recorrência de primeira ordem não-homogênea. Sendo assim, usando os métodos e técnicas já estudados acima sobre equações de raciocínio recursivo chegaremos a solução desejada.

Figura 1: Sequências de triângulos



Fonte: Caderno de Questões da OBMEP 2012

Na Figura 1, consideremos  $a_1=3$  o número de palitos utilizados para construir o primeiro triângulo. Desta forma  $a_2=a_1+6$ ,  $a_3=a_2+9$ , e assim sucessivamente. Assim, examinando as igualdades abaixo podemos chegar a uma relação de recorrência para resolver o problema. Observe:

$$a_1=3$$

$$a_2=a_1+2.3$$

$$a_3=a_2+3.3$$

$$a_4=a_3+4.3$$

⋮

$$a_n = a_{n-1} + 3 \cdot n$$

Adicionando membro a membro todas as igualdades obtemos que:

$$a_n = a_1 + 3 \cdot (2+3+4+\dots+n) = \frac{3 \cdot n \cdot (n+1)}{2}.$$

Como  $a_n = 135$ , segue que :

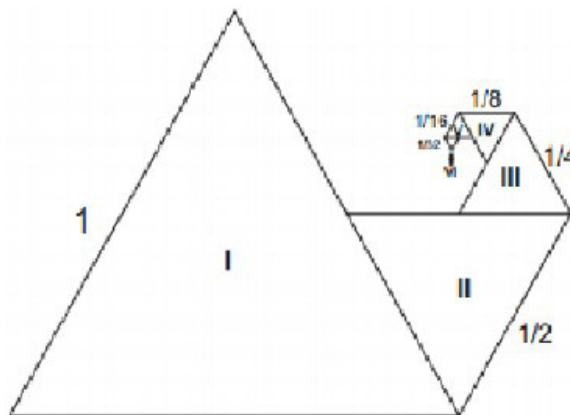
$$3n^2 + 3n = 270 \Rightarrow n = 9 \text{ ou } n = -10.$$

Desconsiderando o valor negativo, a resposta procurada é  $n = 9$ .

### Problema 2.

Na figura abaixo estão expostos seis triângulos equiláteros adjacentes que foram construídos da seguinte forma; o primeiro com lado de comprimento 1 cm e os triângulos seguintes com lado igual à metade do lado do triângulo anterior. Quantos triângulos serão necessários para que se tenha um perímetro da figura assim formada igual a  $\frac{1023}{256}$ ?

Figura 2: Desenho dos triângulos



Fonte: Dissertação de Marcos Antônio Rosa, 2017

Quando a figura possui apenas um triângulo seu perímetro é  $P_1 = 3$  cm. Após incluir o segundo triângulo, o perímetro da figura aumenta em  $\frac{1}{2}$  cm, ou seja  $P_2 = P_1 + \frac{1}{2}$ . Com a colocação do terceiro triângulo a medida do contorno da figura aumenta em  $\frac{1}{4}$  cm, isto é,  $P_3 = P_2 + \frac{1}{2^2}$ , e assim sucessivamente.

Portanto, podemos escrever:

$$P_1 = 3$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}$$

$$P_3 = P_2 + \frac{1}{2^2}$$

⋮

$$P_n = P_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Adicionando membro a membro todas as igualdades segue que:

$$P_n = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$P_n = 3 + \frac{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$P_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$P_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Para,  $P_n = \frac{1023}{256} = \frac{2^{10} - 1}{2^8}$  temos:

$$\frac{2^{10} - 1}{2^8} = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\frac{2^{10} - 1}{2^8} = \frac{2^2 \cdot 2^{n-1} - 1}{2^{n-1}}$$

$$\frac{2^{10} - 1}{2^8} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n-1}}$$

Resolvendo a equação exponencial acima encontraremos  $n=9$ . Logo a figura construída por nove triângulos nas condições descritas no problema tem o perímetro igual a

$$\frac{1023}{256}.$$

**Problema 3.**

*Uma pessoa sai às compras e gasta na primeira loja que entra, a metade do que tem no bolso e mais um real. Na segunda loja gasta metade do que sobrou e mais um real. Na loja seguinte ocorre o mesmo. E ao sair da quinta e última loja, ela possuía apenas R\$ 10,00. Quantos reais ela possuía ao sair de casa?*

Seja  $(a_n)$  a sequência que fornece a quantidade, em reais, que restou a cada compra. Neste caso,  $a_1$  corresponde ao que a pessoa possuía ao sair de casa e  $a_{n+1}$  corresponde ao que restou após a  $n$ -ésima compra.

Após cada compra, resta o valor antecedente menos metade dele e menos um real.

Ou seja,

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n}{2} - 1.$$

ou, ainda,

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} - 1.$$

Resolvendo a recorrência de acordo com os conhecimentos sobre recorrências lineares de primeira ordem não-homogêneas descritos neste trabalho, encontramos:

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + 2}{2^n} - 2.$$

Como ao sair da quinta loja ela possuía apenas R\$ 10,00 podemos fazer  $a_5 = 10$ . Assim temos:

$$a_5 = \frac{a_1 + 2}{2^5} - 2 = 10$$

$$a_5 = \frac{a_1 + 2 - 64}{32} = 10$$

$$a_1 = 382.$$


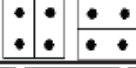
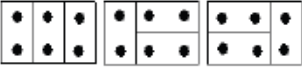
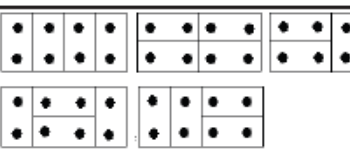
Assim, a pessoa saiu de casa com R\$ 382,00.

**Problema 4.**

*De quantas maneiras diferentes podemos organizar  $n$  dominós  $2 \times 1$  em uma caixa  $2 \times n$  (sem contar as possíveis permutações entre as peças)?*

Esse problema pode ser facilmente resolvido utilizando-se um raciocínio recursivo. Para isso, faremos uso de uma figura onde se apresentam algumas maneiras de organizar algumas peças.

Figura 3: Modos de organizar  $n$  em uma caixa  $2 \times n$

$n$	
1	
2	
3	
4	

Fonte: Banco de Questões 2010

Analisando a *Figura 3* podemos perceber que se  $a_n$  é o total de maneiras de organizar os dominós, então:

$$a_3 = a_1 + a_2$$

e, ainda,

$$a_4 = a_2 + a_3.$$

O que intuitivamente nos leva a concluir que:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

A equação característica da recorrência é  $r^2 - r - 1 = 0$  e essa equação tem raízes iguais  $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  e  $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ .

De acordo com o **Teorema 4.1.2** as soluções da recorrência são da forma  $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$  quais quer que sejam os valores das constantes  $C_1$  e  $C_2$ . Dessa maneira, temos a solução:

$$x_n = C_1 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Para determinar  $C_1$  e  $C_2$  podemos por conveniência usar  $x_0=0$  e  $x_1=1$  e , assim, encontraremos  $C_1 = -C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Logo a solução da recorrência  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  se apresenta da seguinte forma:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Observe que apesar de aparecerem números racionais na solução ela resultará em números inteiros positivos, pois se refere ao número de maneiras de organizar  $n$  dominós em uma caixa  $2 \times n$ .

A recorrência que se apresentou acima é conhecida no universo matemático como Sequência de Fibonacci e sua solução é conhecida como fórmula de Binet.

**Problema 5.**

*Usando apenas os algarismos 1 ou 2, quantos números podem ser formados de modo que a soma de seus algarismos seja um certo  $n \in \mathbb{N}$  ?*

*Tabela de resultados*

Soma	0 dígito 2	1 dígito 2	2 dígitos 2	3 dígitos 2	Total
1	1				1
2	11	2			2
3	111	12, 21			3
4	1111	112, 121, 211	22		5
5	11111	1112, 1121, 1211, 2111	122, 212, 221		8
6	111111	11112, 11121, 11211, 12111, 21111	1122, 1212, 1221, 2112, 2121, 2211	222	13

*Fonte: Dissertação de Marcos Antônio Rosa, 2017*

Observe a tabela de resultados acima que foi composta fazendo  $n$  variar.

Se continuarmos a preencher a tabela e chamarmos de  $y_n$  a quantidade de números que satisfazem a condição pedida, concluiremos que se trata de um problema análogo ao problema anterior. Logo,

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$$

E, de forma semelhante a questão anterior, teremos:

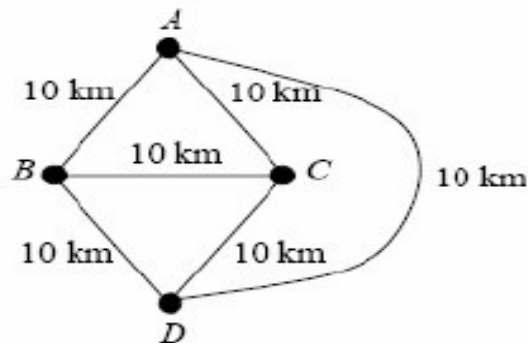
$$y_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

### Problema 6.

(IME-2000). Quatro cidades A, B, C e D são conectadas por estradas conforme a figura a seguir. Quantos percursos diferentes começam e terminam na cidade A, e possuem:

- a) Exatamente 50 km?
- b)  $n \times 10$  km?

Figura 5: Estradas entre cidades



Fonte: Vestibular IME 2000

### Resolução:

a) Chamando de  $n$  o número de trajetos de exatamente 10 km e de  $a_n$  o número de percursos diferentes temos que para  $n=5$ , os caminhos poderão ser da seguinte forma:  $(A, \_, \_, \_, \_, A)$ ,  $(A, \_, A, \_, \_, A)$  ou  $(A, \_, \_, A, \_, A)$ .

Utilizando o princípio multiplicativo e aditivo teremos:

Da forma  $(A, \_, \_, \_, \_, A)$ , temos:  $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$

Da forma  $(A, \_, A, \_, \_, A)$ :  $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$

Da forma  $(A, \_, \_, A, \_, A)$ :  $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$



Logo temos um total de  $24+18+18=60$  caminhos que possuem exatamente 50 km, assim  $a_5=60$ .

b) Utilizaremos o princípio multiplicativo para determinar o número de caminhos para cada caso abaixo:

$p/n=2$ , na forma  $(A, \_, A)$ , temos:  $1 \cdot 3 \cdot 1=3$

$p/n=3$ , na forma  $(A, \_, \_, A)$ :  $1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1=6$

$p/n=4$ , na forma  $(A, \_, \_, \_, A)$ :  $1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1=12$

$p/n=4$ , na forma  $(A, \_, A, \_, A)$ :  $1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1=9$

Comparando e analisando  $a_2, a_3, a_4$  e  $a_5$  veremos que;

$$a_4=21=12+9=2 \cdot a_3+3 \cdot a_2$$

$$a_5=60=42+18=2 \cdot 21+3 \cdot 6=2 \cdot a_4+3 \cdot a_3.$$

Generalizando,

$$a_n=2 \cdot a_{n-1}+3 \cdot a_{n-2}.$$

A recorrência acima tem como equação característica  $r^2+2 \cdot r-3=0$  de raízes iguais  $r_1=3$  e  $r_2=-1$ . De acordo com o **Teorema 4.1.2** as soluções da recorrência são da forma  $x_n=C_1 r_1^n+C_2 r_2^n$  quais quer que sejam os valores das constantes  $C_1$  e  $C_2$ . Assim,

$$x_n=C_1 \cdot 3^n+C_2 \cdot (-1)^n.$$

E resolvendo o sistema abaixo para  $x_2=3$  e  $x_3=6$  obteremos os valores de  $C_1$  e  $C_2$ .

$$\begin{cases} 9C_1+C_2=3 \\ 27C_1-C_2=6 \end{cases}$$

Assim acharemos  $C_1=\frac{1}{4}$  e  $C_2=\frac{3}{4}$ .

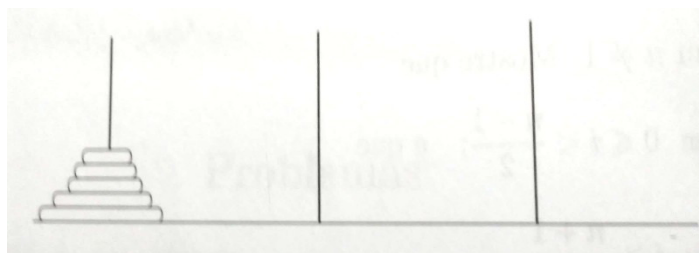
Logo a solução da recorrência  $a_n=2 \cdot a_{n-1}+3 \cdot a_{n-2}$  é  $x_n=\frac{1}{4} \cdot 3^n+\frac{3}{4} \cdot (-1)^n$  para todo  $n \geq 4$ .

### Problema 7.

*A Torre de Hanoi é um quebra-cabeças com uma base, na qual são fixadas três hastes. Em uma destas hastes são enfiados um certo número de discos, de diâmetros diferentes, de modo que um disco sempre repousa sobre outro de diâmetro maior? Qual é o número mínimo de movimentos para transferir oito discos para uma outra haste, respeitando sempre a restrição de que um disco nunca seja colocado sobre um disco de diâmetro menor?*

Vamos, primeiramente, fazer uma análise do jogo.

*Figura 6: Torre de Hanoi–Posição 1*

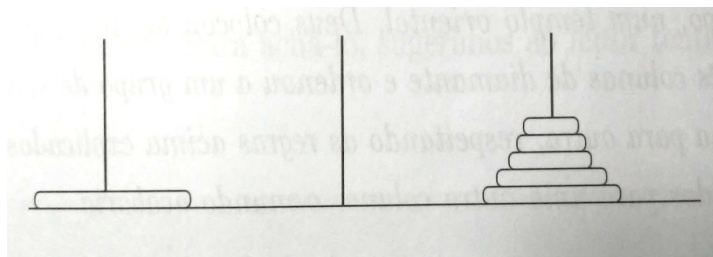


*Fonte: Números e Funções – Coleção Profmat*

Obviamente, o jogo tem solução para 1 disco. E supondo que o jogo tenha solução para  $n$  discos, provaremos, por indução, que tem solução para  $n+1$  discos e, dessa forma, para todo o  $n$ .

Vamos resolver o problema para os  $n$  discos superiores da pilha, transferindo-os para uma das hastes livre, pois por hipótese, o problema tem solução para  $n$  discos.

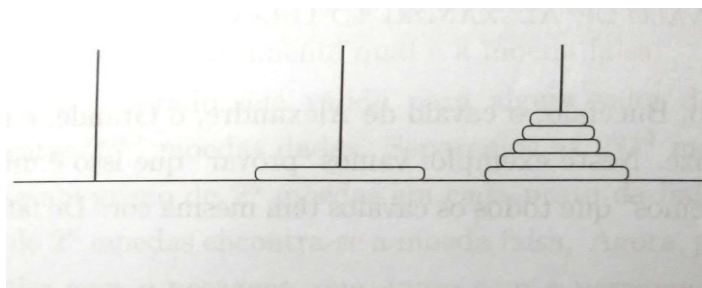
*Figura : 7 Torre de Hanoi–Posição 2*



*Fonte: Números e Funções – Coleção Profmat*

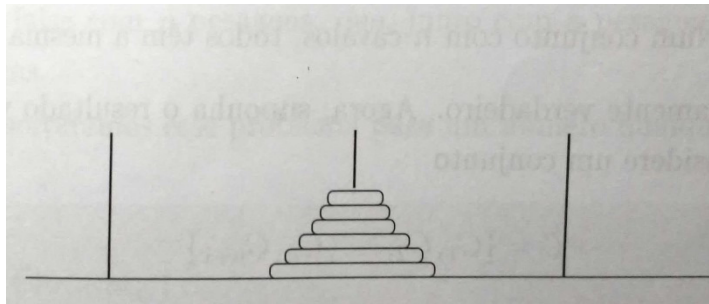
Transfira o disco que restou da pilha original (o maior dos discos) para a haste vazia. Resolva novamente o problema para os  $n$  discos que estão juntos, transferindo-os para a haste que contém o maior dos discos.

*Figura 8: Torre de Hanoi–Posição 3*



*Fonte: Números e Funções – Coleção Profmat*

Figura 9: Torre de Hanoi–Posição 4



Fonte: *Números e Funções – Coleção Profmat*

Assim, vemos que o problema com  $n+1$  discos possui solução e passa duas vezes pela solução mínima do problema com  $n$  discos. Chamando de  $j_n$  o número mínimo de movimentos para resolver o problema com  $n$  discos, temos:

$$J_{n+1} = 2j_n + 1.$$

A expressão acima consiste em uma recorrência linear não-homogênea de primeira ordem que tem como solução  $j_n = 2^n - 1$ . Para  $n=8$ , temos  $j_8 = 2^8 - 1$ . Assim  $j_8 = 255$ .

**Problema 8.**

*Quantas são as seqüências de  $n$  termos, todos pertencentes a  $\{0,1,2\}$ , que possuem em número ímpar de termos iguais a zero?*

Seja  $x_n$  o número de seqüências que atendem as condições descritas. As seqüências de  $n+1$  termos 0, 1 ou 2 com um número ímpar de termos iguais a 0 podem ser de dois tipos: as que começam com 1 ou 2, seguido por uma seqüência de  $n$  termos com número ímpar de zeros e as que começam com 0, seguido por uma seqüência de  $n$  termos com número par de zeros. Daí, temos a recorrência  $x_{n+1} = 2x_n + (3^n - x_n)$ , ou seja,  $x_{n+1} = x_n + 3^n$ , com  $x_1 = 1$ . Temos:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = x_1 + 3^1$$

...

$$x_n = x_{n-1} + 3^{n-1}$$

Somando, resulta

$$x_n = 1 + 3 + \dots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2} \text{ ou } x_n = \frac{3^n - 1}{2}$$

Temos aí, então, a solução do problema. Que se apresenta como a fórmula geral da recorrência  $x_{n+1} = x_n + 3^n$ .

### Problema 9.

*Uma planta é tal que cada uma de suas sementes produz, um ano após ter sido plantada, 21 novas sementes e, a partir daí, 44 novas sementes a cada ano. Se plantarmos hoje uma semente e se, toda vez que uma semente for produzida ela for imediatamente plantada, quantas sementes serão produzidas daqui a  $n$  anos?*

No ano  $n+2$  são geradas 21 sementes para cada semente gerada no ano  $n+1$  e 44 sementes para cada semente gerada nos anos anteriores. Logo, se  $x_n$  denota o número de sementes geradas no ano  $n$ , temos:

$$x_{n+2} = 21 x_{n+1} + 44(x_n + x_{n-1} + \dots + x_1 + x_0), \text{ com } x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 485.$$

Para transformar esta recorrência em uma recorrência linear de segunda ordem, escrevemos a expressão para:

$$x_{n+1} = 21 \cdot x_n + 44(x_{n-1} + x_{n-2} + \dots + x_1 + x_0).$$

E subtraindo as duas expressões, obtemos:

$$x_{n+2} = 22 x_{n+1} + 23 x_n.$$

ou seja,

$$x_{n+2} - 22 x_{n+1} - 23 x_n = 0.$$

A equação característica  $r^2 - 22r - 23 = 0$  tem raízes iguais  $r_1 = 23$  e  $r_2 = -1$ , levando a solução geral  $x_n = C_1 \cdot 23^n + C_2 \cdot (-1)^n$  para a recorrência. Usando as condições iniciais, obtemos:

$$23 C_1 - C_2 = 21$$

$$529 C_1 + C_2 = 485$$

Resolvendo, encontramos  $C_1 = \frac{11}{12}$  e  $C_2 = \frac{1}{12}$ . Dessa forma, a solução da recorrência é  $x_n = \frac{11}{12} \cdot 23^n + \frac{1}{12} \cdot (-1)^n$ .

## CONCLUSÃO

Para elaborar este trabalho foi realizado um estudo sobre este tema chamado aqui de Recorrências e, inicialmente, percebemos a sua riqueza e sua aplicabilidade em vários assuntos. Porém resolvemos nos direcionar pela sua aplicação em problemas de contagem.

Acreditamos que, embora o raciocínio recursivo seja abordado principalmente nas séries do Ensino Médio através das sequências numéricas chamadas de Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas, ele deve ser trabalhado desde os níveis iniciais da Educação Básica, uma vez que, sua aparição em algumas edições da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) com questões que abordam algum tipo de contagem tem se tornado frequente. Além disso, a BNCC trás o pensamento recursivo permeando todo o conteúdo de Álgebra, o que torna extremamente necessário esse conhecimento matemático.

São inúmeras as situações em que problemas que envolvem contagem podem ser facilmente interpretados e solucionados utilizando-se de um raciocínio recursivo. As relações de recorrências são, dessa forma, mais uma estratégia a somar com as ferramentas típicas da Análise Combinatória para resolução de problemas dessa natureza.

O que queremos propor é que as relações de recorrência sejam inseridas no contexto da Educação Básica desde os primeiros anos de forma progressiva para que o aluno possa de forma fácil e criativa resolver problemas que à primeira vista parecem difíceis. E, assim, possam, de fato, evoluir em seu potencial de aprendizagem.

Neste trabalho, concluímos que o estudo sobre “Recorrências” é uma ferramenta que pode auxiliar na solução de muitos problemas onde se pretende contar um determinado número de elementos ou sequências. Assim, não há motivos para não abordar este assunto dentro do contexto da Análise Combinatória em toda extensão do ensino básico.

## REFERÊNCIAS

- [1] BRASIL. MEC. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Portal MEC, 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc>. Acesso em: 20 dez. 2019.
- [2] BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental, 1998.
- [3] IEZZI, Gelson; et al. Matemática: Ciência e Aplicações: Volume 1. 4a ed. São Paulo: Atual, 2006.
- [4] LIMA, Elon Lages. *Números e Funções*: Coleção Profmat. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- [5] MORGADO, Augusto C.; CARVALHO, Paulo C. P. *Matemática Discreta*: Coleção Profmat. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- [6] OBMEP – Banco de questões 2010. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- [7] PAIVA, Manoel. Matemática Paiva: Volume 1. São Paulo: Moderna, 2009.
- [8] PEREIRA, Marcos Vinícius. *Recorrências – Problemas e Aplicações*. Dissertação (proposta de apresentação de trabalho do PROFMAT) – Universidade de Brasília, Brasília, 2014.
- [9] SILVA, Israel Carley da. *Recorrências – Uma abordagem sobre sequências recursivas para aplicações no Ensino Médio*. Dissertação (proposta de apresentação de trabalho do PROFMAT) – Universidade de Brasília, Brasília, 2015.
- [10] <https://novaescola.org.br/bncc/disciplina/9/matematica>. Acesso em: 20 dez. 2019.
- [11] <https://sites.icmc.usp.br/smania/sma181/contagem.pdf>. Acesso em: 18 nov. 2019.
- [12] [https://www.obm.org.br/content/uploads/2018/01/Metodos\\_em\\_contagens.pdf](https://www.obm.org.br/content/uploads/2018/01/Metodos_em_contagens.pdf). Acesso em: 18 nov. 2019.