Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Sadoc Fonseca Rocha Filho

Progressão Aritmética de Ordem Superior
- Outro Olhar, Outra Abordagem -

São Luís - MA
2020

Sadoc Fonseca Rocha Filho

Progressão Aritmética de Ordem Superior
Outro Olhar, Outra Abordagem

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Santana Campos Costa

Universidade Federal do Maranhão

São Luís - MA

2020

Rocha Filho, Sadoc Fonseca

Progressão Aritmética de Ordem Superior - Outro Olhar, Outra Abordagem / Sadoc Fonseca Rocha Filho - 2020

106.p

Orientador: Prof. Dr. José Santana Campos Costa

Dissertação (Mestrado) - PROFMAT, Programa de Pós-Graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, 2020.

1. Progressões Aritméticas de Ordem Superior. 2. Tabela de PAOS. 3. Progressões Aritméticas. 4. Ensino Médio. I. Costa, José Santana Campos II. Doutor em Matemática..

CDU 51:373.5(041)

Sadoc Fonseca Rocha Filho

Progressão Aritmética de Ordem Superior
Outro Olhar, Outra Abordagem

Dissertação apresentada ao PROFMAT/ Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 14/09/2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Santana Campos Costa
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Luis Fernando Coelho Amaral
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Antonio Andrade do Espirito Santo
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

À minha família, que sempre foi a minha mola impulsora, e que não foi diferente neste trabalho. Este é mais uma dádiva deixada para ela, para mostrar a importância do estudo, sem tempo nem lugar.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus, Senhor de todas as coisas, ele sabe porque estou aqui e o que estou fazendo, minhas orações e gratidão pelas graças e bençãos recebidas.

À minha Família, meus Pais(In memoriam) e meus Irmãos, que muito me apoiaram nos meus estudos, a minha Esposa, pela paciência em me ter suportado durante alguns momentos nos quais voltei minha atenção a este projeto, e pelas muitas palavras de incentivo. Aos meus filhos Natália e Leonardo, pelo incentivo constante, Anna Dulce, que me motivou e apoiou a fazer este Mestrado e Ana Caroline, que me auxiliou com algumas correções, além de me incentivarem à conclusão desta caminhada, aos meus Netos, aos quais dedico estes anos de estudo, para incentiva-los a estudarem mais, todos eles sabem o quanto é importante esta minha passagem por este portal. Meu amor e gratidão.

Ao meu orientador, com idade de ser um filho, e de repente, se mostrou como um pai, compreensivo e paciente. Em muito contribuiu para o meu crescimento e a melhoria deste trabalho, me fez caminhar por veredas nunca antes trilhadas, minha gratidão.

À CAPES, por proporcionar e financiar um programa como o PROFMAT, onde descobri um mundo antes desconhecido, a Aritmética. Ao IMPA, pelo aporte de conhecimentos. À UFMA, por acolher este curso e pela oportunidade que me deu de conviver com muitos professores do mais alto nível. Ao Prof. Antônio José da Silva, coordenador do PROFMAT/UFMA, pelas orientações e incentivos à conclusão do curso. Aos meus colegas de turma(todos) os mais dedicados, quando estudamos, quando vivenciamos vários momentos juntos, quando compartilhamos os estudos para o ENQ, e com os quais muito aprendi. A todos vocês, meu muito obrigado e meus respeitos.

Ao IFMA, Campus Pedreiras, por ter me liberado de algumas obrigações, e aos colegas professores deste Campus, obrigado.

Aos demais amigos e familiares que de uma forma ou de outra me estimularam ou me ajudaram, meu obrigado.

A melhor e mais enriquecedora forma de enfrentar a vida, é caminhar no centro e passear nos extremos. No centro não se aprende quase nada, mas inspira segurança e dá conforto. Nos extremos estão os precipícios, os desconfortos, mas é onde as experiências nos ensinam mais, no entanto, é onde mais ocorrem os erros humanos.

Portanto viva nos caminhos já trilhados e passeie naqueles em que ninguém ainda andou, onde a atenção tem que ser máxima.

Sadoc Fonseca Rocha Filho.

"Nenhuma ideia é verdadeira só porque alguém diz que é, incluindo eu.

Pense por si próprio, questione a si próprio.

Não acredite em algo só porque quer acreditar, acreditar em algo não o torna verdadeiro.

Lembre-se, você pode estar errado".

Neil de Grasse Tyson

RESUMO

Este trabalho vem mostrar os conceitos de Progressões Aritméticas Ordinárias, já bem conhecidos no Ensino Médio, e sobre Progressões Aritméticas de Ordem Superior, no entanto, trazendo uma nova abordagem, com algumas ideias novas para tratar velhos problemas, estas novas ferramentas, acreditamos, trazem muito mais condições de análises e outros métodos de soluções de muitos problemas. Permitirão ainda análise do comportamento destas progressões, aumentando o campo de opções e alargando conceitos. Estes, pela simplicidade, podem muito bem serem melhor difundidos nas Escolas de Ensino Médio, com o objetivo de disseminar mais o uso destes tipos de Sequências Numéricas. Acreditamos, que a abordagem e as novas visões e ferramentas aqui apresentadas, poderão dar um incentivo e condições aos alunos do Ensino Médio, para maiores aventuras no campo das Progressões Aritméticas de Ordem Superior. Deixamos ainda, novas ideias para aprofundar os estudos.

Palavras-chave: Progressões Aritméticas de Ordem Superior, Tabela de PAOS, Ensino Médio.

ABSTRACT

This work, shows the concepts, of Ordinary Arithmetic Progressions, already well known in High School, and about Higher Order Arithmetic Progressions, however, it brings a new approach, with some new ideas to deal with old problems, these new tools, we believe, bring much more conditions of analysis and other methods of solving many problems. They will also allow analysis of the behavior of these progressions, increasing the field of options and expanding concepts. These, for simplicity, may well be better disseminated in High Schools, with the objective of spreading some more the use of these types of number sequences. We believe, the approach and the new views and tools presented here, may provide an incentive and conditions for High School students, for greater adventures in the field of Higher Order Arithmetic Progressions. We still leave new ideas for further studies.

Keywords: Higher Order Arithmetic Progressions, Table of PAOS, High Schools.

SUMÁRIO

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

1 Introdução

1.1 Motivação

Neste capítulo foi indicado a motivação deste Trabalho e as perspectivas para os estudantes do Ensino Médio, feito ainda uma introdução histórica, relatando de uma forma breve, o nascimento do sistema de numeração e Sequências Numéricas em várias partes do Mundo e por algumas personalidades da História da Matemática.

Na sua história, o homem se deparou sempre com situações de contagem, qual o tamanho da sua família, número das suas criações, tamanho da safra entre outras coisas. Desde os primórdios estas questões o levaram a necessidade de criar mecanismos que hoje conhecemos como sistemas de contagem e de numeração entre outras ferramentas, e isto sempre foi fascinante ao longo da evolução humana.

O estudo das Sequências Numéricas pelos estudantes atuais, assim como para os antigos, sempre desperta muita curiosidade, e é um elemento que pode ensejar o uso de raciocínio e técnicas, que serão muito úteis em problemas mais complexos posteriormente, o uso das Progressões Aritméticas, e em particular as Progressões Aritméticas de Ordem Superior, são Sequências Numéricas simples e que lhes permitirá a utilização de ferramentas também simples, mas que abrirão as portas do raciocínio matemático e de novas técnicas e correlações matemáticas, mudando a forma como se pode ter outros olhares sobre alguns problemas. O raciocínio lógico, necessário a descoberta das interações entre dois têrmos, sempre motiva e as vezes desafia os estudantes a descobrir estes padrões, que necessitará de outros conhecimentos.

Este trabalho pretende mostrar formas no estudo, que ajudarão o ensino das Progressões Aritméticas, indo das triviais já estudadas no Ensino Médio, e principalmente, indo até as de ordem superior, mostrando algumas ferramentas e sua aplicabilidade.

Atualmente, os professores concentram o ensinamento sobre Progressões Geométricas e Aritméticas, sendo esta somente do tipo ordinária, ou de primeira ordem, e alguns até de segunda ordem, porém de uma forma rápida e superficial.

As Progressões Aritméticas, pela sua simplicidade, haja vista suas variações serem constantes para intervalos iguais, são muito apropriadas para fazer os alunos desenvolverem sua pesquisa na busca dos padrões das variação destas, o que lhes fará, percorrer vários temas, como contagem, simetria, geometria e outras estratégias de variação nas sequências, e lhes permitirá descobrir os elementos seguintes da sequência ou seja a lógica utilizada para a sua geração.

Para Progressões Aritméticas ordinárias, essas regras são simples e quase imediatas, (porém) para as Progressões Aritméticas de Ordem Superior, estas regras não são tão imediatas, motivos pelas quais, o conhecimento de algumas ferramentas são importantes, e, os desafios maiores ainda, o que mostra serem elementos a fazer crescer a motivação do estudante, além de incentivá-los a avançar em temas e ferramentas menos triviais.

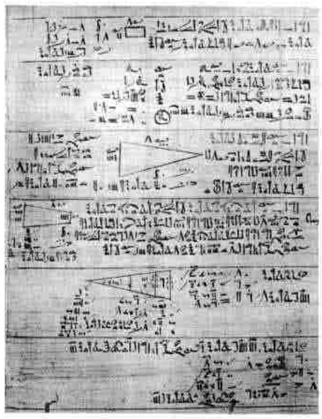
No entanto, deve-se ousar mais e dar-lhes ferramentas e procedimentos mais interessantes, com o propósito de lhes permitir que entrem voluntariamente, em conceitos e problemas mais complexos, além de provocarmos e abrirmos um campo amplo para aqueles alunos mais curiosos e interessados. Deve-se dar aos estudantes, condições e ferramental, para que mesmo sem lhe ter sido apresentado um assunto, possa desenvolver caminhos e sugestões de solução com base nos seus conhecimentos. As Progressões Aritméticas ainda aparecem em muitas provas de concursos e nem sempre com a mesma aparência, portanto é necessário uma maior intimidade para que o aluno possa identificar e dar prosseguimento na solução. Percebe-se que as ferramentas e conceitos aqui utilizados são passíveis de serem repassados aos estudantes do Ensino Médio, e que estas dariam um novo horizonte no raciocínio matemático e que poderiam ser utilizados em outros campos, e ainda, que muitas outras lacunas seriam preenchidas, haja vista serem ferramentas não exclusivas para este tema, aumentando consideravelmente o poder de raciocínio do estudante, o que motivou a apresentação deste trabalho.

1.2 Breve Histórico

Na história da humanidade, o homem sempre se deparou com números, nas suas necessidades diárias de fazer contagens e em muitas situações se deparava com sequências de números. Algumas sequências têm regras de formação e de acordo com estas regras elas se classificam em diversos tipos. Em casos particulares onde a regra envolve apenas soma ou grandezas que sofrem variações iguais em intervalos iguais, que caracterizam as Progressões Aritméticas.

Observando alguns documentos antigos, pode-se verificar a existência de relatos sobre vários problemas envolvendo distribuição de terras e de partições de colheitas. Um destes documentos é um papiro que data de 1950 a.C. onde são encontrados alguns problemas teóricos a respeito de Progressões Aritméticas e Geométricas. Esse papiro foi encontrado em Kahun, também chamado de Papiro de Rhind. Papiro de Rhind ou papiro de Amósis [1], veja Figura 1.1. É um dos mais famosos documentos matemáticos antigos que chegaram aos dias de hoje. Para mais informações sobre o Papiro de Rhind, veja mais detalhes em [O'CONNOR, 2015].

Figura 1.1: Papiro de Rhind.



Fonte: [Wikipédia, 2015].

Consta neste papiro um problema interessante com Progressões Aritméticas, o problema 64, por exemplo, é para encontrar uma distribuição de cereais entre alguns homens segundo alguns critérios, resumidamente é achar uma progressão aritmética. O problema é o seguinte: Se te digo, divide 10 héqats(medida antiga, de volume de cereais) de cevada por 10 homens, de tal maneira que a diferença entre cada homem e o seu vizinho seja em héqats de cereal, 1/8, qual é a parte que cabe a cada homem? Observando a descrição do problema, verificamos se tratar de uma Progressão Aritmética, com um número fixo de têrmos, onde é dado a soma destes têrmos. Vamos resolver este problema, utilizando um conceito, que certamente poderia ser viável para a época:

[1] É um documento egípcio de cerca de 1.650 a.C., onde um escriba de nome Amósis detalha a solução de 85 problemas de aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares, trigonometria básica e geometria entre outros, veja mais informações em [MARTINS, 2015].

Considerando que a primeira pessoa tivesse um certo volume, vamos chamar de V, e os demais teriam valores acrescidos em 1/8 de héqats.

$$V$$
$$V + 1/8$$
$$V + 1/8 + 1/8$$
$$V + 1/8 + 1/8 + 1/8$$
$$V + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8$$
$$V + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8$$
$$V + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8$$
$$V + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8$$
$$V + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8$$
$$V + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8$$

A soma de todas estas parcelas totalizariam em 10 unidades de volume, héqats de cevada. Somando-as, teremos o equivalente a 10 vezes o valor da primeira parcela, portanto 10 V acrescida de 45 parcelas de 1/8, então poderíamos escrever esta expressão como: $10 = 10 \cdot V + 45 \cdot 1/8$

O que os levaria a encontrar o valor de $V = 0.4375$, que corresponde ao valor recebido pelo primeiro homem, e os demais acrescidos de $1/8 = 0.125$; somados sucessivamente. Que mostra uma sequência de números. $0.4375; 0.5325; 0.6875; 0.8125; 0.9375; 1.0625; 1.1875; 1.3175; 1.4375; 1.5625$

Onde o primeiro homem recebe 0.4375 do volume de 1 héqats de cereal; A partir deste ponto, o homem seguinte recebe o valor do anterior, acrescido de 0.125. Portanto:

O próximo recebe 0.5625 do volume de 1 héqats de cereal; O próximo recebe 0.6875 do volume de 1 héqats de cereal; O próximo recebe 0.8125 do volume de 1 héqats de cereal; O próximo recebe 0.9375 do volume de 1 héqats de cereal; O próximo recebe 1.0625 do volume de 1 héqats de cereal; O próximo recebe 1.1875 do volume de 1 héqats de cereal; O próximo recebe 1.3125 do volume de 1 héqats de cereal; O próximo recebe 1.4375 do volume de 1 héqats de cereal; E o último recebe 1.5625 do volume de 1 héqats de cereal. Cuja soma, totaliza o valor de 10 volumes de héqats de cereal, que confirma a solução deste problema como sendo uma Progressão Aritmética.

Referências na Escola Pitagórica

Pitágoras de Samos (570 a 495 a.C.) foi um filósofo e matemático grego jônico creditado como o fundador do movimento chamado Pitagorismo. A maioria das informações sobre Pitágoras foram escritas séculos depois que ele viveu, de modo que há pouca informação confiável sobre ele. Nasceu na ilha de Samos e viajou o Egito e Grécia, em 520 a.C. e voltou a Samos. Cerca de 530 a.C. mudou-se para Crotona, na Magna Grécia. Às vezes, afirma-se que devemos matemática pura a Pitágoras e ele é frequentemente chamado de o primeiro matemático "verdadeiro". Embora sua contribuição tenha sido claramente importante, ele continua sendo uma figura controversa. Ele mesmo não deixou escritos matemáticos e muito do que sabemos sobre o pensamento pitagórico vem até nós dos escritos de Filolau e de outros estudiosos posteriores de Pitágoras. De fato, não está claro se muitos (ou algum) dos teoremas atribuídos a ele foram resolvidos por Pitágoras pessoalmente ou por seus seguidores.

No entanto, Pitágoras e sua escola assim como alguns outros matemáticos da Grécia antiga, foram os principais responsáveis por introduzir uma matemática mais rigorosa do que a anterior, construindo a partir dos primeiros princípios usando axiomas e lógica. Antes de Pitágoras a geometria por exemplo, era apenas uma coleção de regras derivadas da medição empírica. Pitágoras descobriu que um sistema completo de matemática podia ser construído, onde elementos geométricos correspondiam a números e onde inteiros e suas proporções eram tudo o que era necessário para estabelecer um sistema inteiro de lógica e verdade.[2]

A escola que ele estabeleceu em Croton, no sul da Itália, por volta de 530 a.C., era o núcleo de uma seita pitagórica bastante bizarra. Embora o pensamento pitagórico fosse amplamente dominado pela matemática, ele também era profundamente místico.[3]

Parece que isso aconteceu no século VI antes de Cristo, na Grécia. Pitágoras passava na frente de um ateliê de ferreiros quando subitamente estacou. Ficou ouvindo a

[2]O ditado dominante da escola de Pitágoras era "Tudo é número"ou "Deus é número", e os pitagóricos efetivamente praticavam um tipo de numerologia ou adoração por números, e consideravam cada número como tendo seu próprio caráter e significado. Por exemplo, o número um era o gerador de todos os números; dois representavam opinião; três harmonia; quatro, justiça; cinco casamento; seis, criação; sete, os sete planetas ou "estrelas errantes"; etc. Os números ímpares eram considerados femininos e os pares, masculinos.

[3]Pitágoras impôs suas filosofias quase religiosas, vegetarianismo estrito, vida comunitária, ritos secretos e regras estranhas a todos os membros de sua escola (incluindo regras bizarros e aparentemente aleatórios, nunca se casando com uma mulher que usa jóias de ouro, nunca comendo ou mesmo tocando em favas pretas etc).

pancada dos martelos percutindo sobre o denso metal da bigorna. Nos sons projetados no ar, reconhecia com nitidez os intervalos musicais de quarta, quinta e oitava. Tratou logo de pesar os martelos. Aquele que produzia o som da oitava tinha exatamente a metade do peso do martelo cujo som era o mais grave e que fazia as vezes de tônica. O que produzia o som da quinta pesava dois terços do peso do mais pesado. O som do intervalo de quarta vinha do martelo que pesava três quartos do peso do mais pesado. Pitágoras descobriu que havia uma relação matemática entre os sons emitidos e os pesos dos martelos. Refez a experiência usando, dessa vez, uma corda tensionada. Dividiu a corda em partes iguais. Notou que as mesmas proporções produziam os mesmos intervalos sonoros. Confirmou, maravilhado, sua grande descoberta.

Os pitagóricos descobriram que a harmonia na música correspondia a razões simples entre números. De acordo com Aristóteles, os pitagóricos pensavam que todo o céu era composto por escalas musicais e números. A harmonia musical e os desenhos geométricos levaram os pitagóricos a acreditar que tudo se resumia a números. Os pitagóricos pensavam que as razões numéricas básicas da música envolviam apenas os números 1, 2, 3 e 4, cuja soma é 10. E 10, por sua vez, é a base do nosso sistema de numeração. Representavam o número 10 como um triângulo, ao qual chamaram tetraktys.[4]

Essa visão místico matemática do mundo penetrou também o universo da beleza artística. Passando do conceito aritmético de relação numérica à ideia de relação geométrico espacial, os pitagóricos conseguiram estender o império do número ao domínio da arquitetura e das artes plásticas. Estabeleceram que as relações que existem entre as dimensões de diferentes elementos dos templos, entre os espaços vazios e os espaços preenchidos das colunas, correspondiam às relações que regem os intervalos musicais, veja mais detalhes em [The Story of Mathematics, 2020].

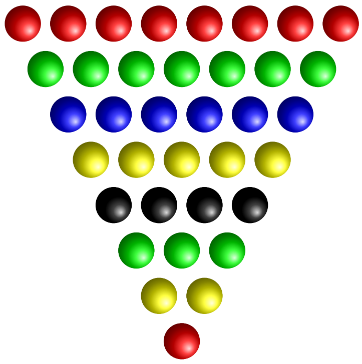
Números Figurados

Nesta época, surgiu o conceito dos Números Figurados, que eram arranjos de objetos geométricos, onde o formato, determinava o nome destas sequências formadas, e a quantidade de objetos, representava o número da sequência.

[4] O número mais sagrado de todos foi "tetractys"ou dez, um número triangular composto pela soma de um, dois, três e quatro. É uma grande homenagem às realizações intelectuais dos pitagóricos que eles deduziram o lugar especial do número 10 a partir de um argumento matemático abstrato, e não de algo tão mundano quanto contar os dedos com as duas mãos.

Figura 1.2: Números Triangulares

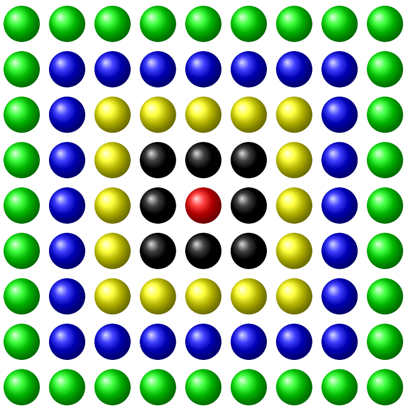
Dado pela Sequência Numérica $(1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$.



Fonte: *Autoria Própria.*

Figura 1.3: Números Quadrados

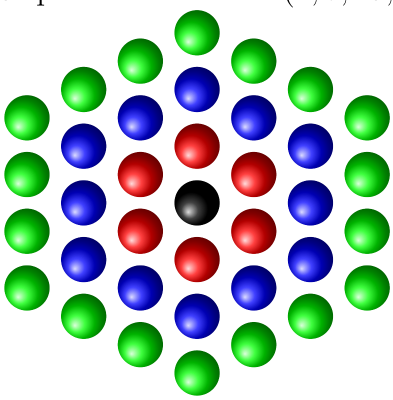
Dado pela Sequência Numérica $(1, 9, 25, 49, 81, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$.



Fonte: *Autoria Própria.*

Figura 1.4: Números Hexagonais.

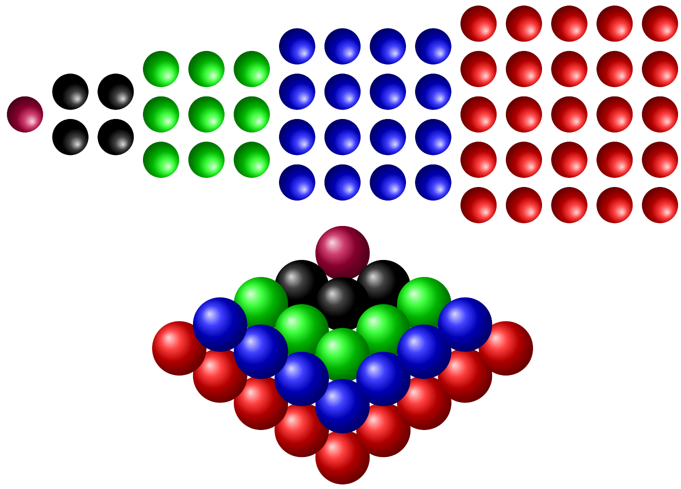
Dado pela Sequência Numérica $(1, 7, 19, 37, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$.



Fonte: *Autoria Própria.*

Figura 1.5: Números Piramidais Quadrados

Dado pela Sequência Numérica $((1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$.



Fonte: *Autoria Própria.*

Referências na China

Por volta do século XIII, registra-se um matemático chinês, chamado de Zhu Shijie ou Chu Shih-Chieh [5].

Zhu Shijie , Wade-Giles Chu Shih-Chieh , (floresceu em 1300, China), matemático chinês que estava no auge da matemática tradicional chinesa . Zhu também é conhecido por ter unificado as tradições matemáticas do sul e do norte da China.

A fama de Zhu repousa principalmente em duas publicações, Suanxue qimeng (1299; Introdução à Ciência Matemática) e Siyuan yujian (1303; "Espelho precioso dos quatro elementos"). O primeiro é um livro didático de matemática introdutório que vai dos cálculos aritméticos elementares aos cálculos algébricos.[6]

Através de seu layout e progressão, atesta claramente a preocupação didática do autor. Seguindo a tradição da matemática no sul da China, este livro contém muitas regras e problemas apresentados na forma de versículos para facilitar sua memorização.

[5]Um dos maiores matemáticos chineses nascido perto de Pequim, o último dos quatro grandes matemáticos chineses do século XIII da era cristão, juntamente com Qin Jiushao, Yang Hui e Li Zhi, pouco se sabe de sua vida, exceto que ele provavelmente era um nativo da atual área de Pequim e que viajou por todo o país como professor itinerante durante os últimos 30 anos do século XIII, mas sua obra matemática sobreviveu até os dias de hoje.

[6]No seu segundo livro, O Precioso Espelho dos Quatro Elementos, escrito em 1303 e considerado a sua obra mais importante, apresenta entre outros um método de resolução de equações por aproximações sucessivas, cálculos de raízes quadradas e traz figuras de triângulos, conhecidos hoje, por Triângulo de Pascal, além de estudos sobre sequências e progressões, veja mais detalhes em: [The Story of Mathematics, 2020].

Essa orientação prática, juntamente com a introdução de dados contemporâneos em problemas comerciais, sugere que a matemática começou a ir além dos limites da sociedade mandarim. Este livro também foi lido na Coréia e no Japão; desempenhou um papel central no desenvolvimento do wasan ("Cálculo japonês"), veja mais detalhes em: [Horiuchi-Encyclopedia Britannica, 2020].

Carl Friederich Gauss - Princeps Mathematicorum

Na história, temos também o grande matemático alemão, Carl Friederich Gauss, [7] alguns se referem a ele como Princeps Mathematicorum, veja mais detalhes em [The Story of Mathematics, 2020] (em latim: "o príncipe da matemática"ou "o mais notável dos matemáticos") e um "grande matemático desde a antiguidade". Conta-se que aproximadamente aos 7 anos de idade, o seu professor mandou os alunos somarem todos os números que aparecem na sequência de 1 até 100, o objetivo do professor, segundo alguns narradores, era para que a turma se acalmassem, pois ele imaginava, que os alunos demorariam muito tempo fazendo esta soma.
Gauss demorou um tempo muito curto, que surpreendeu muito o professor, sendo o primeiro a terminar, como também foi o único a acertar o resultado (5050). Além disso, não apresentou cálculo algum. O que ele fez foi verificar a seguinte propriedade: Somando o primeiro com o último têrmo, $1 + 100$, teria 101 por resultado; somando o segundo com o penúltimo têrmo $2 + 99$, o resultado também seria 101 e assim por diante, sempre somando os têrmos equidistantes dos extremo, até chegar aos dois últimos têrmos deste raciocínio, $50 + 51$, que também tinha como resultado 101. Como a soma de todos os pares de têrmos equidistantes dos extremos resultava em 101, Gauss só precisou multiplicar esse número pela metade dos têrmos disponíveis para encontrar o resultado. Observa-se que do número 1 até o número 100, existem exatamente 100 números. Então a conta se resumiu a multiplicar 101 por 50(metade dos números, pois tinha 50 pares de números, cuja soma resultava em 101), totalizando 5050.

Aos doze anos Gauss já olhava com desconfiança para os fundamentos da geometria euclidiana. Aos dezesseis já tinha tido seu primeiro vislumbre de uma geometria

[7]Johann Carl Friedrich Gauss (Braunschweig, 30 de abril de 1777, Göttingen, 23 de fevereiro de 1855) foi um matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésia, geofísica, eletrostática, astronomia e óptica. Filho de pais humildes, o pai, Gerhard Diederich, era jardineiro e pedreiro, a mãe Dorothea Benze era analfabeta, não tendo registrado a data de nascimento de Gauss.

diferente da de Euclides. Um ano mais tarde, começou uma busca crítica das provas, na teoria dos números, que tinham sido aceitas por seus antecessores e tomou a decisão de preencher os vazios e completar o que tinha sido feito pela metade. Aritmética, o campo de seus primeiros triunfos, tornou-se seu estudo favorito e o campo de sua obra prima. Para que a prova fosse absolutamente certa, Gauss acrescentou uma fecunda e engenhosa matemática que nunca foi superada. Veja mais detalhes em [Amaral-Unicamp, 2020].

Então já no fim do século 19, acontece outra mudança notável, a matemática se converte em um conjunto de objetos abstratos e de regras para manipula-los.

Eugene Paul Wigner

Nascido em novembro de 1902, físico teórico húngaro-americano e também contribuiu para a física matemática, veja mais detalhes em [Eugene Wigner, 2019]. Em 1960, publicou um artigo, "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", veja mais detalhes em [Eugene Wigner Artigo, 2019], com tradução livre: "A eficácia irracional da matemática nas ciências naturais". Neste artigo, ele observou, "que as estruturas matemáticas de uma teoria física, muitas vezes aponta o caminho para mais avanços nesta teoria, e até mesmo para previsões empíricas". E conclui: "O milagre da adequação da linguagem da matemática para a formulação das leis da física é um presente maravilhoso que não entendemos nem merecemos".

2 Progressão Aritmética Ordinária

2.1 Introdução Teórica

Neste capítulo, será feito uma breve introdução teórica sobre Progressões Aritméticas Ordinárias e algumas de suas propriedades.

Definição 2.1. *Sequência Numérica, é uma função* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *que associa cada número natural* n *a um número real* $a(n)$. *O valor* $a(n)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *será representado por* $a_n \in \mathbb{R}$ *e denominado n-ésimo termo da sequência.*

Definição 2.2. *Progressão Aritmética, é uma Sequência Numérica* $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)_{n \in \mathbb{N}}$, *nas quais a diferença entre dois têrmos sucessivos é sempre igual. Essa diferença constante, tem o nome de razão da progressão.*

Comentário: Doravante, poderá ser usado a abreviatura PA, quando for referido a uma Progressão Aritmética, ou (Progressão Aritmética Ordinária), o primeiro têrmo será representado por a_1, um têrmo qualquer de ordem n, por a_n e a razão por r.

2.1.1 Fórmula de Recorrência

A Fórmula de Recorrência de uma PA, é dada pela equação:

$$a_{n+1} = a_n + r. \tag{2.1}$$

Esta propriedade decorre diretamente da definição de PA, onde a diferença entre dois têrmos sucessivos é constante. $a_{n+1} - a_n = r$. Com a definição, chega-se a fórmula recursiva, em que um têrmo qualquer, é igual ao têrmo anterior, adicionado da razão, que traduz a Fórmula de Recorrência, $a_{n+1} = a_n + r$.

Exemplo 2.1. *Seja uma PA, em que o primeiro têrmo seja* 5, *e a razão* 3, *determinar então a Sequência Numérica:*

Solução: Onde o têrmo de ordem 1, é o primeiro têrmo, que é 5; o têrmo de ordem 2, é o anterior mais a soma da razão 3, totalizando 8; o têrmo de ordem 3, é o anterior mais a soma da razão 3, totalizando 11; e assim sucessivamente, gerando a Sequência Numérica a seguir: $(5, 8, 11, 14, 17, 20 \ldots)_{n \in \mathbb{N}}$.

2.1.2 Fórmula do Têrmo Geral

Utilizando-se a Fórmula de Recorrência de uma PA, dado pela Equação 2.1, verifica-se que um têrmo qualquer é sempre o anterior adicionado da razão. No entanto, é importante têrmos a expressão de um têrmo de ordem "n"em função do primeiro têrmo da razão e da ordem ocupada.

Lema 2.1.1. *A Fórmula do Têrmo Geral de uma PA, é dada pela equação:*

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Demonstração. Para isto, escreve-se todos os têrmos da ordem 1 até o de ordem "n", utilizando a Equação 2.1, conforme abaixo:
Somando-se todos os têrmos em ambos os lados das igualdades, observa-se que os têrmos se cancelam dois a dois, sobrando apenas o têrmo a_n do lado esquerdo e o têrmo a_1 do lado direito adicionados de $(n-1)$ valores de r, o que resulta na expressão do têrmo geral.

$$\begin{aligned}
\cancel{a_1} &= a_1 \\
\cancel{a_2} &= \cancel{a_1} + r \\
\cancel{a_3} &= \cancel{a_2} + r \\
\cancel{a_4} &= \cancel{a_3} + r \\
&\vdots \\
\cancel{a_{n-1}} &= \cancel{a_{n-2}} + r \\
a_n &= \cancel{a_{n-1}} + r.
\end{aligned}$$

Chegando-se ao têrmo final:

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

O que comprova a afirmação. □

Exemplo 2.2. *Dada a PA* $(3, 6, 9, 12, 15 \ldots)_{n \in \mathbb{N}}$*, calcule a razão.*

Solução: Para o cálculo da razão de uma PA, verifica-se que a diferença entre dois têrmos sucessivos é constante: $6 - 3 = 3; 9 - 6 = 3; 12 - 9 = 3$ e $15 - 12 = 3$. O que de acordo com a Definição 2.2, pode-se afirmar que a razão desta PA é $r = 3$.

Exemplo 2.3. *Calcular o têrmo, que ocupa a posição* 34*, da PA, dada pelos seguintes parâmetros, primeiro têrmo* $a_1 = 5$ *e razão* $r = 3$.

Solução: Para isto, aplica-se a Fórmula do Têrmo Geral de uma PA, dado pela equação do Lema 2.1.1, onde: $a_1 = 5; r = 3; n = 34; a_n = a_{34}$.
Então tem-se que:

$$a_{34} = 5 + (34 - 1)3$$
$$a_{34} = 104.$$

Observação 2.1. *Outros problemas utilizando a equação do Lema 2.1.1, também são utilizados para cálculo da razão da PA, ou da ordem de um determinado têrmo.*

Exemplo 2.4. *Dada a PA com o primeiro têrmo* $a_1 = 5$*, e o décimo quarto têrmo* $a_{14} = 44$*, calcule a razão desta PA, e o têrmo de ordem* 90.

Solução: *Primeiro calcula-se a razão desta PA. Aplicando-se a Fórmula do Têrmo Geral de uma PA, dado pela equação do Lema 2.1.1. Onde:* $a_1 = 5; n = 14; a_n = a_{14} = 44$
Onde,

$$44 = 5 + (14 - 1)r$$

Tem-se então que:

$$r = 3.$$

Agora deve-se calcular o têrmo de ordem 90*. Aplicando-se a Fórmula do Têrmo Geral de uma PA, dado pela equação do Lema 2.1.1. Onde:* $a_1 = 5; n = 90; r = 3$.
Onde,

$$a_{90} = 5 + (90 - 1)3$$

Então chega-se ao têrmo final:

$$a_{90} = 272.$$

2.1.3 Fórmula do Têrmo Geral na Posição m, em Função da Posição n

Lema 2.1.2. *A Fórmula do Têrmo Geral na Posição m, em Função da Posição n, é dada pela equação:*

$$a_m = a_n + (m - n)r.$$

Demonstração. Utilizando-se a Fórmula do Têrmo Geral de uma PA, dado pela equação do Lema 2.1.1, e escrevendo-se o têrmo da PA, na posição m; ou seja, escrever a_m em função de a_1, m e r.

$$a_m = a_1 + (m - 1)r$$

Subtraindo e somando nr nesta equação.

$$a_m = a_1 + (m - 1)r - nr + nr = a_1 + mr - r - nr + nr$$

Rearrumando e reagrupando.

$$a_m = a_1 + nr - r + mr - nr = a_1 + (n - 1)r + (m - n)r$$

Mas $a_n = a_1 + (n - 1)r$. Então substituindo esta expressão na anterior, pode-se escrever a equação final:

$$a_m = a_n + (m - n)r.$$

□

2.1.4 Fórmula do Têrmo Central de Três Números

Lema 2.1.3. *A Fórmula do Têrmo Central de Três Números, é dado pela média dos extremos, através da equação:*

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Demonstração. Utilizando-se a Fórmula de Recorrência de uma PA, dado pela Equação 2.1, verifica-se que um têrmo qualquer, é sempre o anterior, adicionado da razão, ou da mesma forma, o têrmo atual, é o têrmos seguinte, subtraído da razão.

Então escrevendo-se o têrmo atual utilizando estes dois formatos.

$$a_n = a_{n-1} + r.$$

$$a_n = a_{n+1} - r.$$

Somando têrmo a têrmo, estas duas equações, teremos:

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Então pode-se escrever:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

□

Lema 2.1.4. *Fórmula do Têrmo Central, distante k posições, o têrmo central numa PA, é a média dos extremos e dada pela equação.*

$$a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2}.$$

Demonstração. Utilizando-se a Fórmula de Recorrência de uma PA, dado pela Equação 2.1, aplicada sucessivamente a partir do têrmo de ordem n, até o têrmo de ordem $n + k$.

$$\begin{aligned} a_n &= a_n \\ a_{n+1} &= a_n + r \\ a_{n+2} &= a_n + 2r \\ a_{n+3} &= a_n + 3r \\ &\vdots \\ a_{n+k} &= a_n + kr. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Então conclui-se que um têrmo qualquer a_{n+k}, distante de k posições de um têrmo de ordem n, é o têrmo de ordem n, adicionado de k vezes a razão r.

Identicamente, pode-se a partir da equação de recorrência dado pela Equação 2.1, aplicada sucessivamente a partir do têrmo de ordem n, até o têrmo de ordem $(n-k)$.

$$\begin{aligned}
a_n &= a_n \\
a_{n-1} &= a_n - r \\
a_{n-2} &= a_n - 2r \\
a_{n-3} &= a_n - 3r \\
&\vdots \\
a_{n-k} &= a_n - kr. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Da mesma forma, conclui-se que um têrmo qualquer a_{n-k}, distante de k posições de um têrmo de ordem n, é o têrmo de ordem n, subtraído de k vezes a razão r.
Escrevendo a Equação 2.2 e a Equação 2.3.

$$\begin{aligned}
a_{n+k} &= a_n + kr \\
a_{n-k} &= a_n - kr
\end{aligned}$$

Somando-se estas duas equações:

$$a_{n+k} + a_{n-k} = 2a_n.$$

Então pode-se escrever a equação final:

$$a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2}.$$

□

Exemplo 2.5. *Dada a PA,* $(3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$. *Verificar que o têrmo central de uma sequência com quantidade ímpar de têrmos, é a média de quaisquer dois têrmos extremos ao têrmo central.*

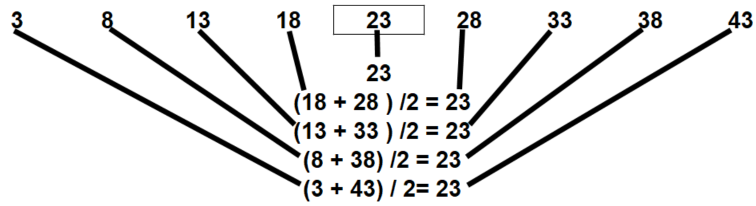
Solução: *Listamos alguns têrmos, equidistante de um têrmo central com suas médias desta PA, para verificação:*

$$\frac{3+43}{2} = \frac{8+38}{2} = \frac{13+33}{2} = \frac{18+28}{2} = 23.$$

Observando-se a Figura 2.1, tem-se uma visualização mais clara.

Figura 2.1: Sequência com quantidade ímpar de têrmos.

Dado pela Sequência Numérica $(3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$.



Fonte: *Autoria Própria.*

Verifica-se portanto que dado têrmos equidistantes do têrmo central, nesta PA, este é a média dos outros dois têrmos extremos.

Exemplo 2.6. *Dada a PA,* $(2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$. *Verificar que, a média de quaisquer dois têrmos equidistantes dos extremos é constante, para uma quantidade par de têrmos.*

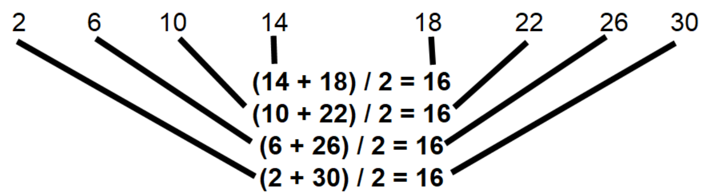
Solução: *Listamos alguns têrmos, com suas médias desta PA, para verificação:*

$$\frac{2+30}{2} = \frac{6+26}{2} = \frac{10+22}{2} = \frac{14+18}{2} = 16.$$

Observando-se a Figura 2.2, tem-se uma visualização mais clara.

Figura 2.2: Sequência com quantidade par de têrmos.

Dado pela Sequência Numérica $(2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$.



Fonte: *Autoria Própria.*

Exemplo 2.7. *Dada a PA,* $(3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, 58, 63, 68, 73, 78, 83, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$. *Verificar que, a média de quaisquer dois têrmos equidistantes dos extremos é constante.*

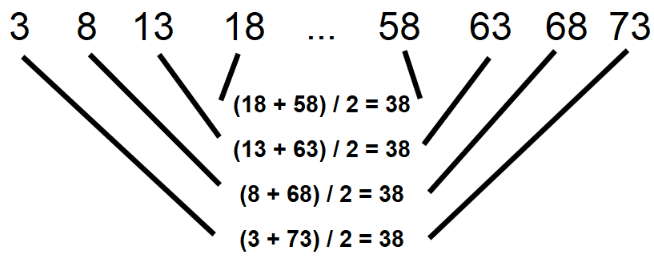
Listamos alguns têrmos, com suas médias desta PA, para verificação:

$$\frac{3+73}{2} = \frac{8+68}{2} = \frac{13+63}{2} = \frac{18+58}{2} = 38.$$

Observando-se a Figura 2.3, tem-se uma visualização mais clara.

Figura 2.3: Sequência com quantidade qualquer de têrmos.

Dado pela Sequência Numérica $(3, 8, 13, 18, \ldots 58, 63, 68, 73, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$.



Fonte: *Autoria Própria.*

Observando-se a Figura 2.3, verifica-se ainda, que termos equidistantes, na PA, tem o mesmo valor médio. Fazendo-se a média de quaisquer quantidade de têrmos equidistantes dos extremos, ainda permanece a mesma média, $(3+8+13+18+58+63+68+73)/8 = 38$.

2.1.5 Soma dos Primeiros Têrmos

Notação: *Denotaremos por S_n a soma dos n primeiros têrmos de uma PA, isto é, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.*

Lema 2.1.5. *A Fórmula da Soma dos Têrmos de uma PA, dos n primeiros têrmos de uma PA, é dado pela equação:*

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Demonstração. Seja $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$. Escrevendo cada têrmo da sequência, em função de a_1 e r, usando-se a Equação 2.1, teremos:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + \cancel{r} \\ a_3 &= a_1 + \cancel{2r} \\ &\vdots \\ a_{n-2} &= a_1 + \cancel{(n-3)r} \\ a_{n-1} &= a_1 + \cancel{(n-2)r} \\ a_n &= a_1 + \cancel{(n-1)r}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Novamente, escrevendo cada têrmo da sequência em função de a_n e r, usando-se novamente a Equação 2.1, podemos escrever também:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_n - \cancel{(n-1)r} \\ a_2 &= a_n - \cancel{(n-2)r} \\ a_3 &= a_n - \cancel{(n-3)r} \\ &\vdots \\ a_{n-2} &= a_n - \cancel{2r} \\ a_{n-1} &= a_n - \cancel{r} \\ a_n &= a_n. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Somando-se todas as igualdades dos dois blocos de Equações 2.4 e 2.5, membro a membro, teremos do lado esquerdo da igualdade, 2 vezes a soma da sequência $(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)$ portanto $2Sn$, enquanto do lado direito teremos n têrmos de a_1 e n têrmos de a_n, enquanto que os têrmos que contém valores múltiplos de r são iguais e positivos e negativos, alternadamente no bloco de cima com o bloco de baixo, cancelando-se mutuamente, conforme indicado, restando apenas:

$$2S_n = na_1 + na_n.$$

Donde, pode-se concluir que a soma dos primeiros n têrmos de uma PA é dada pela expressão:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

□

Exemplo 2.8. *Calcular a soma dos* 34 *primeiros têrmos da PA, dada pelos seguintes parâmetros, primeiro têrmo* $a_1 = 5$ *e a razão* $r = 3$.

Solução: *Primeiro vamos calcular o têrmo de ordem* 34*, utilizando-se a equação do Lema 2.1.1, do têrmo Geral de uma PA.*
Sendo: $a_1 = 5$, $r = 3$ *e* $n = 34$. *Então:*

$$\begin{aligned} a_{34} &= 5 + (34-1)3 \\ a_{34} &= 104. \end{aligned}$$

Aplicando-se a fórmula da soma dos n primeiros têrmos de uma PA, dada pela equação do Lema 2.1.5:
Se $a_1 = 5$ *e* $a_{34} = 104$.
Então:

$$S_{34} = \frac{34(5 + 104)}{2}.$$

Portanto

$$S_{34} = 1853.$$

Exemplo 2.9. *Dada a PA*=$(3, 5, 7, 9, 11 \ldots)_{n \in \mathbb{N}}$, *calcule a soma dos seus* 100 *primeiros têrmos.*

Solução: *Para calcular essa soma é necessário conhecer os têrmos* a_1 *e o* a_{100}. *Porém, primeiro vamos encontrar alguns parâmetros desta PA: O primeiro têrmo é* 3, *então* $a_1 = 3$; *a razão é encontrada fazendo-se a diferença entre quaisquer dois têrmos consecutivos, por exemplo,* $a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$, *então* $r = 2$.
Calculando-se o têrmo a_{100}, *utilizando-se a Fórmula do Têrmo Geral de uma PA, dada pela equação do Lema 2.1.1.*
Então:

$$a_{100} = 3 + (100 - 1)2$$
$$a_{100} = 201.$$

Calculando-se a soma de todos os têrmos, desde o têrmo de ordem 1 *até o têrmo de ordem* 100, *utilizando-se a Fórmula do Têrmo Geral da soma, dada pela equação do Lema 2.1.5.*

$$S_{100} = \frac{100(3 + 201)}{2}$$
$$S_{100} = 10200.$$

2.1.6 Soma dos Têrmos desde a Posição n até a Posição m

Notação: *Denotaremos a Soma dos têrmos de uma PA, da posição* n, *até a posição* m, *com* $n \leq m$, *como sendo a soma de todos os têrmos de uma PA, do têrmo* a_n, *até o têrmo* a_m, *ou seja* $S_{n,m} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{m-2} + a_{m-1} + a_m$.

Lema 2.1.6. *A fórmula da soma dos têrmos de uma PA da posição* n *até a posição* m *é* *dado pela equação:*

$$S_{n,m} = (m - n + 1) \cdot \frac{a_n + a_m}{2}.$$

Demonstração. Seja $S_{n,m} = a_n + a_{(n+1)} + a_{(n+2)} + \ldots + a_{(m-2)} + a_{(m-1)} + a_m$. Como esta sequência vai desde a posição n, até a posição m, então o número de têrmos é dado por: $(m - n + 1)$. Sabemos que a média entre dois têrmos equidistante do centro de uma PA permanece constante e é igual a média dos têrmos inicial e final, os extremos desta PA, conforme equação do Lema 2.1.4.

Então a média entre os extremos será dada pela expressão:

$$\frac{a_n + a_m}{2}.$$

Portanto a soma de todos os têrmos desde a posição n até a posição m será o *número de têrmos*, multiplicado pela *média dos extremos.*

$S_{n,m} =$ (número de têrmos) $\cdot$ (média dos têrmos).

Portanto podemos escrever.

$$S_{n,m} = (m - n + 1) \cdot \frac{(a_n + a_m)}{2}.$$

□

Exemplo 2.10. *Dada a PA com os seguintes parâmetros, primeiro têrmo* $a_1 = 5$ *e a razão* $r = 3$*, calcular a soma dos têrmos desta, a partir do têrmo de posição* 25 *até o têrmo de posição* 99*.*

Solução: *Primeiro calcular o têrmo de ordem* 25*, e em seguida o têrmo de ordem* 99*, utilizando a equação do têrmo geral do Lema 2.1.1, e sabendo-se dos itens:* $a_1 = 5; r = 3; n = 25$*. Para o primeiro têrmo.*

$$a_n = a_{25}$$

Então tem-se que:

$$a_{25} = 5 + (25 - 1)3$$

$$a_{25} = 77$$

Para o segundo têrmo:

$$a_n = a_{99}$$

Teremos que:

$$a_{99} = 5 + (99 - 1)3$$
$$a_{99} = 299.$$

Conhecido estes dois têrmos, aplica-se a equação de soma entre dois têrmos quaisquer usando a equação do Lema 2.1.6.

$$S_{n,m} = (m - n + 1)\frac{a_n + a_m}{2}$$
$$S_{25,99} = (99 - 25 + 1)\frac{a_{25} + a_{99}}{2}$$
$$S_{25,99} = (99 - 25 + 1)\frac{77 + 299}{2}$$
$$S_{25,99} = 14.100.$$

3 Progressão Aritmética de Ordem Superior

3.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo serão estudadas as Progressões Aritméticas de Ordem Superior e utilizadas algumas soluções e comprovações feitas por outros autores.

Para o estudo das Progressões Aritméticas de Ordem Superior, necessita-se da definição de um operador denominado Operador Diferença.

Definição 3.1. *Dada a Sequência Numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$ *define-se Operador Diferença* Δ *desta Sequência Numérica para o têrmo* (n)*-ésimo como sendo a diferença entre o têrmo* $(n+1)$*-ésimo e o têrmo* (n)*-ésimo. Que será abreviado por OD e poderá ser representado por:*

$$(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Proposição 3.1. *A aplicação do OD sobre uma Sequência Numérica gera uma nova Sequência Numérica.*

Demonstração. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$. Aplicando-se o OD sobre a sequência sucessivamente, construirá uma nova sequência $(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Então aplicando-se o OD nesta sequência, teremos outras sequências como a seguir:

$$(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, a_5 - a_4, \ldots, a_{n+1} - a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$$

Ou ainda:

$$(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\Delta^1 a_1, \Delta^1 a_2, \Delta^1 a_3, \Delta^1 a_4, \ldots, \Delta^1 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$$

Aplicando-se novamente o OD.

$$(\Delta^1(\Delta^1 a_n))_{n\in\mathbb{N}} = (\Delta^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\Delta^2 a_1, \Delta^2 a_2, \Delta^2 a_3, \Delta^2 a_4, \ldots, \Delta^2 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$$

E assim sucessivamente, k vezes, formando consequentemente, novas sequências.

$$(\Delta^k a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\Delta^k a_1, \Delta^k a_2, \Delta^k a_3, \Delta^k a_4, \ldots, \Delta^k a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$$

□

Exemplo 3.1. *Dada a Sequência Numérica* $(1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$, *calcule as sequências decorrentes da aplicação sucessiva do OD.*

Solução: *Analisando-se as sequências após a aplicação do OD.*
Sequência dada.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 4, 10, 20, 35, 56\ldots)_{n\in\mathbb{N}}$$

Aplicando-se o OD sobre esta sequência.

$$\begin{aligned}(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= (4-1, 10-4, 20-10, 35-20, 56-35, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}\\ (\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (3, 6, 10, 15, 21, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

Aplicando-se novamente o OD sobre a última sequência.

$$\begin{aligned}(\Delta^1(\Delta^1 a_n))_{n\in\mathbb{N}} &= (\Delta^1(3, 6, 10, 15, 21, \ldots))_{n\in\mathbb{N}}\\ &= (6-3, 10-6, 15-10, 21-15, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}\\ (\Delta^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (3, 4, 5, 6, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

Aplicando-se novamente o OD sobre a última sequência.

$$\begin{aligned}(\Delta^1(\Delta^2 a_n))_{n\in\mathbb{N}} &= (\Delta^1(3, 4, 5, 6, \ldots))_{n\in\mathbb{N}}\\ &= (4-3, 5-4, 6-5, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}\\ (\Delta^3 a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (1, 1, 1, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}.\end{aligned}$$

Portanto as sequências geradas, com suas ordens, são as seguintes:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 4, 10, 20, 35, 56, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \textit{ordem do OD - 0}$$
$$(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (3, 6, 10, 15, 21, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \textit{ordem do OD - 1}$$
$$(\Delta^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (3, 4, 5, 6, \ldots, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \textit{ordem do OD - 2}$$
$$(\Delta^3 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 1, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \textit{ordem do OD - 3.}$$

3.2 Progressão Aritmética de Ordem Superior

Definição 3.2. *Uma Sequência Numérica* $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$*, é uma Progressão Aritmética de Ordem Superior, quando a aplicação sucessiva do OD encontrar em algum momento, uma sequência constante, e quando a ordem do OD desta sequência gerada,* constante*, for maior ou igual a 2.*

Comentários: *Doravante, poderá ser usado a abreviatura PAOS, quando referido a uma Progressão Aritmética de Ordem Superior.*
Nota 1: Quando, a sequência constante for atingida na aplicação do OD de valor da ordem igual a 1, a sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$*, será chamada de Progressão Aritmética Ordinária, ou simplesmente PA.*
Nota 2: Quando, a sequência constante for atingida na aplicação do OD de valor da ordem igual a 0, a sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$*, será chamada de Sequência Constante.*

Definição 3.3. *Define-se a ordem de uma PAOS, como sendo o valor da ordem do OD da sequência gerada, quando for encontrado uma sequência constante.*

Notação: *Doravante, quando referido a uma Progressão Aritmética de Ordem k, poderá ser usada a notação* $PAOS_k$.

Exemplo 3.2. *Seja a Sequência Numérica* $(4, 6, 8, 10, 12, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$*, verificar que se trata de uma PAOS e determinar a sua ordem.*

Solução: *Aplicando-se o OD na sequência* $(4, 6, 8, 10, 12, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$*, obtemos outra, ou seja,* $(\Delta^1(4, 6, 8, 10, \ldots, a_n, \ldots))_{n\in\mathbb{N}} = (2, 2, 2, \ldots, \Delta^1 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$*. Verifica-se que a sequência que tem a ordem do* $OD = 1$ *é uma sequência constante, portanto chega-se a conclusão que esta Sequência Numérica é uma Progressão Aritmética Ordinária. Usaremos a notação* $PAOS_1$ *ou somente* PA.

Exemplo 3.3. *Seja a Sequência Numérica* $(2, 8, 20, 40, 70, 112, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$*, verificar que se trata de uma PAOS e determinar a sua ordem.*

Solução: *Aplicado o OD na sequência* $(2, 8, 20, 40, 70, 112, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$*, obtemos outra sequência não constante, desta forma aplicando o* OD sucessivamente *até chegarmos numa sequência constante, como visualizado a seguir.*
Aplicando-se o OD sobre a sequência $(2, 8, 20, 40, 70, 112, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$*, sucessivamente, teremos então:*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2, 8, 20, 40, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$(\Delta^1(2, 8, 20, 40, \ldots, a_n, \ldots))_{n\in\mathbb{N}} = (6, 12, 20, 30, \ldots, \Delta^1 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Aplicando-se novamente o OD sobre a última sequência.

$$(\Delta^1(6, 12, 20, 30, \ldots, \Delta^1 a_n, \ldots))_{n\in\mathbb{N}} =$$
$$(\Delta^2(2, 8, 20, 40, \ldots, a_n, \ldots))_{n\in\mathbb{N}} = (6, 8, 10, 12, 14, \ldots, \Delta^2 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Aplicando-se novamente o OD sobre a última sequência.

$$(\Delta^1(6, 8, 10, 12, 14, \ldots, \Delta^2 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} =$$
$$(\Delta^3(2, 8, 20, 40, \ldots, a_n, \ldots))_{n\in\mathbb{N}} = (2, 2, 2, 2, 2, \ldots, \Delta^3 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Separando-se e organizando as sequências, tem-se uma visualização melhor:

$$\begin{array}{rlll}
(a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (2, 8, 20, 40, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} & \textit{ordem do OD - 0} & PAOS_3 \\
(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (6, 12, 20, 30, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} & \textit{ordem do OD - 1} & PAOS_2 \\
(\Delta^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (6, 8, 10, 12, 14, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} & \textit{ordem do OD - 2} & PAOS_1 \\
(\Delta^3 a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (2, 2, 2, 2, 2, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} & \textit{ordem do OD - 3} & PAOS_0.
\end{array}$$

Constata-se que a sequência gerada de ordem 3 *do OD é constante, e isto dá a informação para que se possa afirmar, que esta sequência é uma PAOS e que a sua ordem é* 3*, pois é a ordem do OD da sequência constante, então esta é uma* $PAOS_3$.

Exemplo 3.4. *Seja a Sequência Numérica* $(0, -3, -8, -8, 5, 40, 107, 217 \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$*, verificar que é uma PAOS e determinar sua ordem.*

Solução: *Aplicado o OD na sequência* $(0, -3, -8, -8, 5, 40, 107, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$, *obtemos outra sequência não constante, desta forma aplicando o OD sucessivamente até chegarmos numa sequência constante, como visualizado a seguir.*

Aplicando-se o OD sobre a sequência $(0, -3, -8, -8, 5, 40, 107, 217 \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$, *sucessivamente, teremos então:*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, -3, -8, -8, 5, 40 \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$(\Delta^1(0, -3, -8, -8, 5, 40, \ldots, a_n, \ldots))_{n\in\mathbb{N}} = (-3, -5, 0, 13, 35, 67, \ldots, \Delta^1 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Aplicando-se novamente o OD sobre a última sequência.

$$(\Delta^1(-3, -5, 0, 13, 35, 67, \ldots, \Delta^1 a_n, \ldots))_{n\in\mathbb{N}} =$$
$$(\Delta^2(0, -3, -8, -8, 5, 40, \ldots, a_n, \ldots))_{n\in\mathbb{N}} = (-2, 5, 13, 22, 32, \ldots, \Delta^2 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Aplicando-se novamente o OD sobre a última sequência.

$$(\Delta^1(-2, 5, 13, 22, 32, \ldots, \Delta^2 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} =$$
$$(\Delta^3(0, -3, -8, -8, 5, 40, \ldots, a_n, \ldots))_{n\in\mathbb{N}} = (7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots, \Delta^3 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Aplicando-se novamente o OD sobre a última sequência.

$$(\Delta^1(7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots, \Delta^3 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} =$$
$$(\Delta^4(0, -3, -8, -8, 5, 40, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 1, 1, 1, \ldots, \Delta^4 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Separando-se e organizando as sequências tem-se uma visualização melhor:

$$\begin{array}{rlll}
(a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (0, -3, -8, -8, 5, 40, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} & \textit{ordem do OD 0} & PAOS_4 \\
(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (-3, -5, 0, 13, 35, 67, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} & \textit{ordem do OD 1} & PAOS_3 \\
(\Delta^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (-2, 5, 13, 22, 32, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} & \textit{ordem do OD 2} & PAOS_2 \\
(\Delta^3 a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} & \textit{ordem do OD 3} & PAOS_1 \\
(\Delta^4 a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (1, 1, 1, 1, 1, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} & \textit{ordem do OD 4} & PAOS_0.
\end{array}$$

Constata-se que a sequência gerada de ordem 4 *do OD é constante, e isto dá* *a informação para que se possa afirmar, que esta sequência é uma PAOS, e que a sua ordem é 4, então é uma* $PAOS_4$.

Estas sequências, ilustram o conceito central do que se considera uma Progressão Aritmética de Ordem Superior. Na Escola Pitagórica, algumas sequências de números foram muito reverenciadas pelas distribuições geométricas a elas associadas, e estas sequências ficaram conhecidas como Números Figurados, as quais são representantes típicas de Progressão Aritmética de Ordem Superior.

Números Figurados no Plano

Na história, vimos várias Sequências Numéricas, chamadas de Números Figurados.

Observação 3.1. *Números Figurados no Plano, são as Sequências Numéricas, as quais permitem formar arranjos de objetos no plano, e de acordo com a semelhança da figura geométrica formada, tomar-lhe o nome.*

Os Números Figurados são exemplos clássicos de Progressão Aritmética de Ordem Superior:

Exemplo 3.5. *Seja a Sequência Numérica de Números Triangulares, dados por:* $(1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$. *Confirmar que é uma PAOS e determinar sua ordem.*

Figura 3.1: Números Triangulares.

Dado pela Sequência Numérica $(1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$.

Fonte: *Autoria Própria.*

Solução: *Para verificar quanto a caracterização e ordem desta sequência, vamos aplicar o OD a esta Sequência Numérica* $(1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$. *Aplicando-se o OD obtemos outra sequência não constante, aplicando o OD sucessivamente, até chegarmos numa sequência constante, conforme a seguir:*

Aplicando-se o OD sobre a sequência $(1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$*, sucessivamente, teremos então:*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$(\Delta^1(1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, \ldots, a_n, \ldots))_{n\in\mathbb{N}} = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$$

Aplicando-se o OD sobre a última sequência.

$$(\Delta^1(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots, \Delta^3 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} =$$
$$(\Delta^2(1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 1, 1, 1, \ldots, \Delta^4 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Constata-se que a sequência gerada na ordem 2 *do OD é constante, e isto dá a informação para que se possa afirmar, que esta sequência é uma Progressão Aritmética de Ordem Superior, e que a sua ordem é* 2*, então é uma* $PAOS_2$.

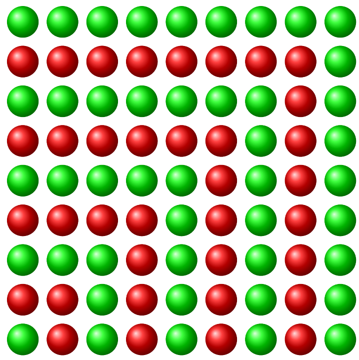
Esta Sequência Numérica $(1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$*, compõem a terceira coluna do Triângulo de Pascal. Estes números, também representam as maneiras de inserir um par de parênteses numa sequência de n letras. Por exemplo, existem* 6 *maneiras para três letras: (a) bc, (ab) c, (abc), a (b) c, a (bc), ab (c). Ou ainda, também representam as maneiras em que dois números diferentes podem ser selecionados no conjunto* $(0, 1, 2, \ldots, n)$ *sem repetição ou também o número de maneiras em que dois números diferentes podem ser selecionados no conjunto* $(1, 2, \ldots, n)$ *com repetição, veja mais detalhes desta sequência em [OEIS, 1964].*

Exemplo 3.6. *Seja a Sequência Numérica conhecida como Números Quadrados, dados por:* $(1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$. *Confirmar que é uma Progressão Aritmética de Ordem Superior e determinar sua ordem.*

São Números Figurados, cujos arranjos geométricos têm a semelhança de quadrado formado por bolas empilhadas como na Figura 3.2.

Figura 3.2: Números Quadrados.

Dado pela Sequência Numérica $(1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$.



Fonte: *Autoria Própria.*

Para verificar quanto à caracterização da ordem desta sequência, vamos aplicar o OD a esta Sequência Numérica $(1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$. *Aplicando-se o OD na sequência, obtemos outra, uma segunda sequência, desta forma, aplicando o OD sucessivamente, até chegarmos numa sequência constante.*

Aplicando-se o OD sobre a sequência $(1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$, *sucessivamente, teremos então:*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$(\Delta^1(1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots, a_n, \ldots))_{n\in\mathbb{N}} = (3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Aplicando-se o OD novamente, sobre a última sequência.

$$(\Delta^1(3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots, \Delta^3 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} =$$
$$(\Delta^2(1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} = (2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots, \Delta^4 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Constata-se que a sequência gerada de ordem 2 *no OD é constante, e isto dá a informação para que se possa afirmar, que esta sequência é uma PAOS, e que a sua ordem é* 2, *então é uma* $PAOS_2$. *Esta sequência* $(1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$ *é a do quadrado dos números naturais, veja mais detalhes desta sequência em [OEIS, 1964].*

Os números triangulares, quadrados, assim como vários outros, tem suas representações no plano. Mas existem alguns Números Figurados, que tem sua construção geométrica no espaço.

Números Figurados no Espaço - Números Piramidais

Na história, vimos várias Sequências Numéricas, chamadas de Números Figurados Piramidais.

Observação 3.2. *Números Figurados no Espaço ou Piramidais são as sequências numéricas, as quais permitem construir empilhamento de objetos no espaço, em formato de pirâmides e de acordo com a semelhança do sólido geométrico formado, tomar-lhe o nome.*

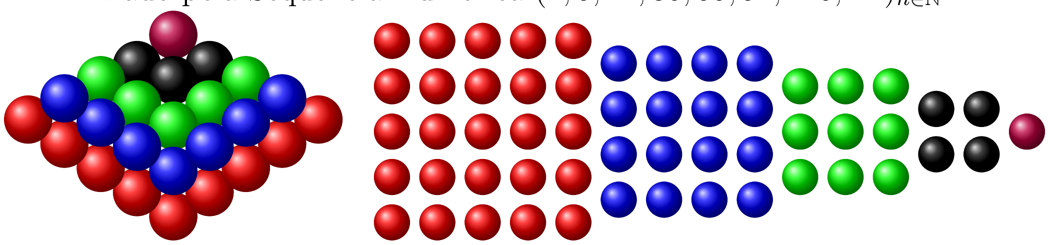
Estas construções em formato de pirâmides, pode ter bases de diversas formas, como triangulares, quadradas, poligonais etc. Observa-se que a formação de uma pirâmide, se dá pela justaposição de camadas, de sucessivos Números Figurados planos crescentes, que são classificados segundo a figura da sua base.

Exemplo 3.7. *Seja a Sequência Numérica conhecida por Números Piramidais Quadrados, dados por:* $(1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$. *Verificar que é uma PAOS e determinar sua ordem.*

São Números Figurados, cujos arranjos geométricos espaciais, cuja base têm a semelhança de quadrado, como exibido na Figura 3.3, formado por bolas empilhadas, que são construídas por camadas sucessivas de números quadrados, sucessivamente crescentes.

Figura 3.3: Números Piramidais Quadrados.

Dado pela Sequência Numérica $(1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$.



Fonte: *Autoria Própria.*

Para verificar quanto à caracterização da ordem desta sequência, vamos aplicar o OD a esta Sequência Numérica $(1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$. *Aplicando-se o OD na sequência, obtêm-se outra sequência não constante, desta forma, aplicando o OD sucessivamente, até chegarmos numa sequência constante.*

Aplicando-se o OD sobre a sequência $(1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$*, sucessivamente, teremos então:*

$$
\begin{aligned}
(a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} \\
(\Delta^1(1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, \ldots, a_n, \ldots))_{n\in\mathbb{N}} &= (4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots, \Delta^1 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}.
\end{aligned}
$$

Aplicando-se novamente o OD sobre a última sequência.

$$
\begin{aligned}
&(\Delta^1(4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots, \Delta^1 a_n, \ldots))_{n\in\mathbb{N}} = \\
&\quad (\Delta^2(1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, \ldots, a_n, \ldots))_{n\in\mathbb{N}} = (5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \ldots, \Delta^2 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}.
\end{aligned}
$$

Aplicando-se novamente o OD sobre a última sequência.

$$
\begin{aligned}
&(\Delta^1(5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \ldots, \Delta^2 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} = \\
&(\Delta^3(1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, \ldots, a_n, \ldots))_{n\in\mathbb{N}} = (2, 2, 2, 2, 2, \ldots, \Delta^3 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}.
\end{aligned}
$$

Separando-se e organizando as sequências, tem-se uma visualização melhor:

$$
\begin{array}{rlll}
(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = & (1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} & \textit{ordem do OD 0} & PAOS_3 \\
(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = & (4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} & \textit{ordem do OD 1} & PAOS_2 \\
(\Delta^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = & (5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} & \textit{ordem do OD 2} & PAOS_1 \\
(\Delta^3 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = & (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} & \textit{ordem do OD 3} & PAOS_0
\end{array}
$$

Constata-se que a sequência gerada de ordem 3 *é constante, e isto dá a informação para que se possa afirmar, que esta sequência é uma* $PAOS$*, e que a sua ordem é* 3*, então é uma* $PAOS_3$*. A Sequência Numérica tem a sua representação geométrica, por uma pirâmide. Veja mais detalhes desta sequência em [OEIS, 1964].*

Definição 3.4. *Define-se como Primeiros Têrmos das Sequências de uma Progressão Aritmética de Ordem Superior, a Sequência Numérica, composto dos primeiros têrmos de todas as sequências originadas da aplicação do OD sobre a Progressão Aritmética de Ordem Superior.*

Observação 3.3. *Os conceitos e definições a seguir, ficarão melhor explicitados, quando forem tratados novamente no capítulo seguinte, onde serão mostrados novas ferramentas* *e formas de visualizarmos as Progressão Aritmética de Ordem Superior.*

Exemplo 3.8. *Seja a PAOS:* $(1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$ *dos Números Piramidais Quadrados. Encontrar os Primeiros Têrmos das Sequências desta Progressão Aritmética de Ordem Superior.*

Solução: *Esta PAOS foi utilizada no Exemplo 3.7, onde foram calculadas as sequências geradas pelo OD conforme a seguir:*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\boldsymbol{1}, 5, 14, 30, 55, 91, 140, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}.$$
$$(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\boldsymbol{4}, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots, \Delta^1 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}.$$
$$(\Delta^2 a_n))_{n\in\mathbb{N}} = (\boldsymbol{5}, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \ldots, \Delta^2 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}.$$
$$(\Delta^3 (a_n))_{n\in\mathbb{N}} = (\boldsymbol{2}, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots, \Delta^3 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}.$$

O que permite escrever os Primeiros Têrmos das Sequências, da Progressão Aritmética de Ordem Superior: $(1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$ *como sendo igual a* $(1, 4, 5, 2)$.

3.3 PAOS de Ordem k, Polinômio de Ordem k

Afirmação 3.1. *Uma PAOS de ordem k pode ser representada por um polinômio de ordem k.*

Demonstração. Um polinômio qualquer de ordem k é composto pela soma de monômios de ordem decrescente, desde sua ordem mais alta, até zero.

$$P(n) = b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + b_2 n^{k-2} + \ldots + b_{k-1} n^1 + b_k.$$

Vamos mostrar a seguir, que a aplicação do OD sobre um monômio de ordem k, reduz o grau deste monômio para um polinômio com uma ordem $(k-1)$, cujos monômios poderão então ser somado aos outro monômio de ordem mais baixa, e novamente poderemos tratar o segundo polinômio, apenas tratando o monômio de ordem mais alta $(k-1)$, e assim sucessivamente, e com isto, pode-se tratar um polinômio, para efeito da aplicação do OD considerando apenas o monômio de ordem mais alta.

Portanto para efeito de simplicidade, e sem perda de generalidade, vamos considerar um polinômio de ordem k representado apenas pelo têrmo de maior ordem k.

Então seja o polinômio de ordem k, como a seguir:

$$P(n) = bn^k. \tag{3.1}$$

E, desenvolvendo o binômio para $P(n+1) = b(n+1)^k$, tem-se:

$$b(n+1)^k = b[\binom{k}{k}n^k + \binom{k}{k-1}n^{k-1} + \binom{k}{k-2}n^{k-2} + \ldots + \binom{k}{1}n^1 + \binom{k}{0}n^0].$$

Mas como

$$\binom{k}{k} = \binom{k}{0} = 1.$$

E, $n^0 = 1$, se $n \neq 0$.

Tem-se então

$$P(n+1) = bn^k + b[\binom{k}{k-1}n^{k-1} + \binom{k}{k-2}n^{k-2} + \ldots + \binom{k}{1}n + 1]. \tag{3.2}$$

A aplicação do OD sobre o polinômio $P(n)$, equivale a proceder a subtração da Equação 3.2, pela Equação 3.1, conforme Definição 3.1. Então $\Delta^1 P(n)]_{n\in\mathbb{N}} = P(n+1) - P(n)$.

$$[\Delta^1 P(n)]_{n\in\mathbb{N}} \ = \ \cancel{bn^k} + b[\binom{k}{k-1}n^{k-1} + \binom{k}{k-2}n^{k-2} + \ldots + \binom{k}{1}n + 1] - \cancel{bn^k}.$$

Os têrmos bn^k se cancelam, sobrando apenas:

$$[\Delta^1 P(n)]_{n\in\mathbb{N}} = b[\binom{k}{k-1}n^{k-1} + \binom{k}{k-2}n^{k-2} + \ldots + \binom{k}{1}n + 1]. \tag{3.3}$$

O que demonstra, que a aplicação do OD sobre um polinômio qualquer de ordem k, diminui de 1 unidade, a ordem deste polinômio, ou seja o polinômio passa a ter ordem $(k-1)$. Se aplicarmos k vezes o OD sobre este polinômio, com a diminuição sucessiva da sua ordem, chegaremos a um resultado constante, o que implica que o polinômio de ordem k, pode representar uma PAOS de ordem k. $\square$

3.4 Fórmula do Têrmo Geral

Proposição 3.2. *Um têrmo qualquer de uma $PAOS_k$, pode ser representada pela equação:*

$$a_n = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-1}{i} \Delta^i a_1.$$

Demonstração. Esta demonstração vai se restringir a apresentar os têrmos de composição da fórmula, haja vista a prova desta fórmula, se encontrar em sua completude, na referencia citada no fim deste trabalho, exibido em [NOBRE, 2019].
Uma outra prova será demonstrada pelo autor, no próximo Capítulo, com o desenvolvimento de novos conceitos e ferramentas.
Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma $PAOS_k$ a qual foi aplicado k vezes o OD até chegar-se a uma sequência constante.

$$\begin{aligned}
(a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (a_1, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}\\
(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (\Delta^1 a_1, \ldots, \Delta^1 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}\\
(\Delta^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (\Delta^2 a_1, \ldots, \Delta^2 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}\\
(\Delta^3 a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (\Delta^3 a_1, \ldots, \Delta^3 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}\\
&\vdots\\
(\Delta^{k-1} a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (\Delta^{k-1} a_1, \ldots, \Delta^{k-1} a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}\\
(\Delta^k a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (r, \ldots, r, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}.
\end{aligned}$$

Então utilizando-se os Primeiros Têrmos das Sequências, e portanto a fórmula pode ser escrita como:

$$a_n = \binom{n-1}{0} a_1 + \binom{n-1}{1} \Delta^1 a_1 + \ldots + \binom{n-1}{k-1} \Delta^{k-1} a_1 + \binom{n-1}{k} \Delta^k r.$$

Ou ainda:

$$a_n = \sum_{i=0}^{k} \Delta^i a_1 \cdot \binom{n-1}{i}.$$

□

Exemplo 3.9. *Tomando novamente o Exemplo 3.8, a sequência referente aos Números Piramidais Quadrados,* $(1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$. *Encontrar a Fórmula do Têrmo Geral desta Progressão Aritmética de Ordem Superior.*

Solução: *Verificamos que após a aplicação sucessiva do OD sobre esta sequência, já verificado no exemplo indicado, obtemos o seguinte resultado.*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\mathit{1}, 5, 14, 30, 55, 91, 140, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}.$$
$$(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\mathit{4}, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots, \Delta^1 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$(\Delta^2 a_n))_{n\in\mathbb{N}} = (\mathit{5}, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \ldots, \Delta^2 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$(\Delta^3 (a_n))_{n\in\mathbb{N}} = (\mathit{2}, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots, \Delta^3 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$$

Destes resultados localizamos os Primeiros Têrmos das Sequências, que serão dadas por:

$$((a_1), (\Delta^1 a_1), (\Delta^2 a_1), (\Delta^3 a_1 = r)) = (1, 4, 5, 2)$$

Utilizando-se estes resultados na equação da Proposição 3.2 podemos escrever:

$$a_n = 1 \cdot \binom{n-1}{0} \quad +4 \cdot \binom{n-1}{1} \quad +5 \cdot \binom{n-1}{2} \quad +2 \cdot \binom{n-1}{3}$$
$$a_n = 1 \cdot 1 \quad +4 \cdot \frac{(n-1)}{1!} \quad +5 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2!} \quad +2 \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}$$

Ou ainda, arrumando e reagrupando, que representa um polinômio de ordem 3*:*

$$a_n = \frac{(2n+1)n(n+1)}{3!}.$$

3.5 Soma dos n Primeiros Têrmos de uma PAOS

Proposição 3.3. *A soma dos n primeiros têrmos de uma $PAOS_k$ é dada pela equação:*

$$S_n = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i+1} \Delta^i a_1.$$

Demonstração. Este item, vai se restringir a apresentar os têrmos de composição da fórmula, haja vista a prova desta fórmula, estar em sua completude, na referencia citada no fim desta seção, exibido em [DLAB, 2011].

Uma outra prova será demonstrada pelo autor no próximo capítulo, com o desenvolvimento de novos conceitos e ferramentas.

Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma $PAOS_k$, a qual foi aplicado sucessivamente o OD até chegar-se a uma sequência constante.

$$\begin{aligned}
(a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (a_1, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} \\
(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (\Delta^1 a_1, \ldots, \Delta^1 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} \\
(\Delta^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (\Delta^2 a_1, \ldots, \Delta^2 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} \\
(\Delta^3 a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (\Delta^3 a_1, \ldots, \Delta^3 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} \\
&\vdots \\
(\Delta^{k-1} a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (\Delta^{k-1} a_1, \ldots, \Delta^{k-1} a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} \\
(\Delta^k a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (r, \ldots, r, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}.
\end{aligned}$$

Então utiliza-se os Primeiros Têrmos das Sequências, e então a fórmula pode ser escrita como:

$$S_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} \Delta^1 a_1 + \ldots + \binom{n}{k} \Delta^k a_1 + \binom{n}{k+1} \Delta^k r.$$

Ou ainda:

$$S_n = \sum_{i=0}^{k} \Delta^i a_1 \cdot \binom{n}{i+1}.$$

$\square$

Exemplo 3.10. *Tomando novamente o Exemplo 3.8 a sequência referente aos Números Piramidais Quadrados. Encontrar a fórmula da soma dos n primeiro têrmos desta PAOS.*

Solução: *Trata-se da sequência* $(1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$, *após a aplicação sucessiva do OD sobre esta sequência, obtêm-se o seguinte resultado.*

$$\begin{aligned}
(a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (\boldsymbol{1}, 5, 14, 30, 55, 91, 140, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}. \\
(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (\boldsymbol{4}, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots, \Delta^1 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} \\
(\Delta^2 a_n))_{n\in\mathbb{N}} &= (\boldsymbol{5}, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \ldots, \Delta^2 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}} \\
(\Delta^3 (a_n))_{n\in\mathbb{N}} &= (\boldsymbol{2}, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots, \Delta^3 a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

Destes resultados, localizamos os primeiros têrmos de cada sequência, ou seja, *os Primeiros Têrmos das Sequências, que será dada por:*

$$((a_1), (\Delta^1 a_1), (\Delta^2 a_1), (\Delta^3 a_1 = r)) = (1, 4, 5, 2)$$

Utilizando-se estes resultados na equação da Proposição 3.3:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 \cdot \binom{n}{1} &&+4 \cdot \binom{n}{2} &&+5 \cdot \binom{n}{3} &&+2 \cdot \binom{n}{4} \\ S_n &= 1 \cdot \frac{(n)}{1!} &&+4 \cdot \frac{(n)(n-1)}{2!} &&+5 \cdot \frac{(n)(n-1)(n-2)}{3!} &&+2 \cdot \frac{(n)(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \quad . \end{aligned}$$

4 Tabela de PAOS

4.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo será desenvolvido um novo formato para a análise das Progressões Aritméticas de Ordem Superior, onde, se distanciando das formas de análise tradicionalmente estabelecidos, conforme [NOBRE, 2019] e [DLAB, 2011], apresentamos uma tabela, onde várias relações entre todas as sequências envolvidas são encontradas, tendo-se ainda em conta, que a forma minimalista da tabela é o próprio Triangulo de Pascal, de onde utilizando-se de uma característica deste, para efetuar a formulação do conceito da Tabela de PAOS, e encontrar várias relações entre seus têrmos e sequências, criando novas linhas de pensamento e estratégias.

Seja a PAOS dos Números Piramidais Quadrados, esta sequência, foi utilizada no Exemplo 3.9: $(1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385, 506, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$.

Representando-se a sequência dada, na primeira coluna de uma tabela, e aplicando-se o OD como visualizado na Tabela 4.1. Verifica-se que cada coluna, representa uma sequência desta PAOS, conforme já verificado neste mesmo exemplo.

Tabela 4.1: Sequências da PAOS geradas pelo OD.

(a_i)	$(\Delta^1 a_i)$	$(\Delta^2 a_i)$	$(\Delta^3 a_i = r)$
1	4	**5**	**2**
5	9	**7**	2
14	16	9	2
30	**25**	**11**	2
55	**36**	13	2
91	49	15	2
140	**64**	17	2
204	81	19	2
285	100	21	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fonte: *Autoria Própria.*

Esta tabela, foi construída de cima para baixo e da esquerda para a direita, utilizando-se o Operador Diferença, *conforme Definição 3.1, e para exemplificar, mostramos a relação entre alguns têrmos;* $7-5=2, 36-25=11, 204-140=64$. *E assim, se procede para toda a tabela. Veja, que partiu-se da PAOS, e chegou-se a tabela.*

Observando-se esta tabela, constata-se que as sequências obtidas no Exemplo 3.9, são as mesmas que compõem esta tabela, o que era esperado, pois em ambas, foi aplicado o OD comprovando que os dois tratamento a que a sequência foi submetida, na verdade trata-se de um só, porém com formatos diferentes.

Esta mesma tabela, pode ser reconstruída, utilizando-se apenas os Primeiros Têrmos das Sequências, conforme Definição 3.4, ou seja, os têrmos das sequências que compõem a primeira linha da tabela, retirado da Tabela 4.1, e tem como objetivo, mostrar que todas as sequências anteriormente geradas, podem ser representadas apenas por esta primeira linha.

Tabela 4.2: Primeiros Têrmos das Sequências da PAOS.

(a_1)	$(\Delta^1 a_1)$	$(\Delta^2 a_1)$	$(\Delta^3 a_1 = r)$
1	**4**	**5**	**2**
			2
			2
			2
			2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fonte: *Autoria Própria.*

Para efetuar a reconstrução desta tabela, vamos considerar apenas os têrmos escritos na primeira linha da Tabela 4.1, considerando o último têrmo, repetido em todas as linhas da última coluna, conforme pode ser visualizado na Tabela 4.2, haja vista, ser esta a condição para uma Sequência Numérica ser uma PAOS, é que a última sequência seja constante, conforme Definição 3.2. Em seguida, efetuando-se uma operação de soma entre dois têrmos, que é a operação inversa do OD uma vez que estamos agora invertendo o processo de geração dentro da tabela, conforme mostrado na Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Tabela reconstruída.

(a_i)	$(\Delta^1 a_i)$	$(\Delta^2 a_i)$	$(\Delta^3 a_i = r)$
1	4	**5**	**2**
5	9	**7**	2
14	16	9	2
30	25	11	2
55	36	13	2
91	**49**	**15**	2
140	**64**	17	2
204	81	19	2
285	**100**	21	2
385	121	23	2
506	144	25	2
⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: *Autoria Própria.*

A Tabela 4.3 foi reconstruída a partir da Tabela 4.2, utilizando-se o inverso do Operador Diferença, efetuando-se as operações de cima para baixo e da direita para a esquerda, mostrando-se as relações entre alguns têrmos; $2+5=7, 15+49=64, 100+285=385$. *E assim, se procede para toda a tabela.*

Observando-se as Tabela 4.1 gerada utilizando-se a PAOS com o OD, com a Tabela 4.3 gerada através da aplicação dos Primeiros Têrmos das Sequências desta PAOS, verifica-se que as Sequências Numéricas são iguais, pois para as primeiras foi utilizada o OD, enquanto nas segundas, utilizamos o artifício de efetuarmos as operações inversas do OD, tornando então iguais as sequencias numéricas, o que nos permite afirmar que as duas tabelas também são iguais.

4.2 Tabela de PAOS

Definição do Operador Soma

Definição 4.1. *Define-se Operador Soma, do têrmo* $(a_{l,c})$, *numa tabela, como sendo a soma deste têrmo e o seu sucessor nesta linha* $(a_{l,c+1})$, *e tendo como resultado, o têrmo* *imediatamente sucessor na linha e coluna,* ($a_{l+1,c+1}$)*, conforme exibido na Figura 4.1, e na Tabela 4.4.*

Comentário: *Doravante, quando referido a um Operador Soma, poderá ser usada a notação, e dado pela expressão:*

$$OS(a_{l,c}) = a_{l+1,c+1} = a_{l,c} + a_{l,c+1}.$$

Figura 4.1: Operador Soma Visual, OS($a_{l,c}$).

$$\begin{tikzcd} a_{l,c} \arrow[r, "(+)"] & a_{l,c+1} \arrow[d, "(=)"] \\ . & a_{l+1,c+1} \end{tikzcd}$$

Fonte: *Autoria Própria.*

Tabela 4.4: Operador Soma na Tabela, OS($a_{l,c}$)).

	Col	C	$C+1$	$C+2$	$C+3$	$C+4$	$\ldots$
Lin	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
L	$\ldots$	$a_{l,c}$	$a_{l,c+1}$	$a_{l,c+2}$	$a_{l,c+3}$	$a_{l,c+4}$	$\ldots$
$L+1$	$\ldots$	$a_{l+1,c}$	$a_{l+1,c+1}$	$a_{l+1,c+2}$	$a_{l+1,c+3}$	$a_{l+1,c+4}$	$\ldots$
$L+2$	$\ldots$	$a_{l+2,c}$	$a_{l+2,c+1}$	$a_{l+2,c+2}$	$a_{l+2,c+3}$	$a_{l+2,c+4}$	$\ldots$
$L+3$	$\ldots$	$a_{l+3,c}$	$a_{l+3,c+1}$	$a_{l+3,c+2}$	$a_{l+3,c+3}$	$a_{l+3,c+4}$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Fonte: *Autoria Própria.*

Definição da Tabela de PAOS

Definição 4.2. *Chamamos de Tabela de PAOS, a tabela, onde a primeira coluna é constante e para os demais têrmos, vale o Operador Soma.*

Definição 4.3. *A Sequência Geratriz da Tabela de PAOS é definida como a primeira linha da Tabela.*

Algoritmo 4.1. *Define-se o Algorítimo para a construção da Tabela de PAOS, estruturando-o em três etapas:*
Utiliza-se a Sequência Geratriz de uma Tabela de PAOS, preenchendo a primeira linha;

Repete-se o primeiro têrmo, da Sequência Geratriz, em todas as linhas da primeira coluna; Utiliza-se o Operador Soma para gerar os demais têrmos.

Exemplo 4.1. *Seja dada a Sequência Numérica* $(1, 2, 3, 4)$. *Considere-a como a Sequência Geratriz, construir a Tabela de PAOS correspondente.*

Pela notação, representa-se esta Tabela de PAOS como PAOS(1,2,3,4). Inserindo esta Sequência Numérica na primeira linha e, repetindo-se o primeiro têrmo desta sequência em todas as linhas da primeira coluna, obtêm-se a Tabela 4.5,

Tabela 4.5: PAOS$(1, 2, 3, 4)$ - Início.

	C1	C2	C3	C4
Ł1	**1**	**2**	**3**	**4**
L2	**1**			
L3	**1**			
L4	**1**			
L5	**1**			
L6	**1**			
L7	**1**			
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: *Autoria Própria.*

Utiliza-se o Operador Soma, para os demais têrmos, completando-se a Tabela 4.6.

Tabela 4.6: PAOS$(1, 2, 3, 4)$ - Concluída.

	C1	C2	C3	C4
Ł1	**1**	**2**	**3**	**4**
L2	1	3	5	7
L3	**1**	**4**	8	12
L4	1	**5**	12	20
L5	1	6	17	32
L6	1	7	**23**	**49**
L7	1	8	30	**72**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: *Autoria Própria.*

Observação 4.1. *Para a notação* $\boldsymbol{PAOS}(1,2,3,4)$*, leia-se:* ***"Tabela de PAOS, da Sequência Geratriz*** $(1,2,3,4)$***."***

Observação 4.2. *A Sequência Geratriz de uma Tabela de PAOS é uma permutação dos Primeiros Têrmos das Sequências de uma Progressão Aritmética de Ordem Superior, sendo a sequência tomada do fim para o início.*

Exemplo 4.2. *Dada a Progressão Aritmética de Ordem Superior* $(1,5,14,30,55,91,140,204,285,385,506,\ldots,a_n,\ldots)_{n\in\mathbb{N}}$. *Encontrar os Primeiros Têrmos das Sequências e construir a Tabela de PAOS, utilizando-se sua Sequência Geratriz.*

Solução: *A sequência refere ao Exemplo 3.8, a qual tem os Primeiros Têrmos das Sequências Geradas da PAOS, já calculado como sendo:*

$$((a_1)=1,(\Delta^1 a_1)=4,(\Delta^2 a_1)=5,(\Delta^3 a_1)=r=2)=(1,4,5,2).$$

A Sequência Geratriz será a sequência tomada do fim para o início dos Primeiros Têrmos das Sequências geradas pela aplicação do OD, conforme Observação 4.2, então podemos escrever esta Sequência Geratriz como sendo $(2,5,4,1)$.

Portanto utilizando-se a sequência $(2,5,4,1)$*, inserindo esta Sequência Numérica na primeira linha da tabela e, repetindo-se o primeiro têrmo em toda as linhas da primeira coluna, e para os demais têrmos utilizando-se o Operador Soma, completa-se a Tabela de PAOS, visualizada na Tabela 4.7.*

Tabela 4.7: $PAOS(2,5,4,1)$

	$(\Delta^3 a_i = r)$	$(\Delta^2 a_i)$	$(\Delta^1 a_i)$	(a_i)
Ł1	**2**	**5**	**4**	**1**
L2	2	7	9	5
L3	**2**	**9**	16	14
L4	2	**11**	25	30
L5	2	13	36	55
L6	2	**15**	**49**	91
L7	2	17	**64**	140
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: *Autoria Própria.*

A Tabela 4.7 foi construída de cima para baixo e da esquerda para a direita, utilizando-se o Operados Soma, mostrado na relação entre alguns deles; $2 + 9 = 11$*,* $15 + 49 = 64$*. E assim, se procede para toda a tabela.*

Afirmação 4.1. *Uma Tabela de PAOS fica completamente definida pela primeira linha da Tabela de PAOS, que é representada pela Sequência Geratriz.*

Demonstração. Observando-se a Tabela 4.1 gerada utilizando-se a PAOS com o OD, com a Tabela 4.7, gerada através da Sequência Geratriz, comprova-se que que uma tabela é o reflexo da outra e única.
Como esta Tabela 4.1 representa a Progressão Aritmética de Ordem Superior e todas as suas sequências, então conclui-se que a tabela contendo todos as sequências de uma PAOS pode ser representada apenas com a primeira linha da Tabela. □

4.2.1 Ordem das Sequências de uma Tabela

Proposição 4.1. *Dada uma Progressão Aritmética de Ordem Superior de ordem k, as colunas desta Tabela de PAOS, representam PAOS de ordem crescentes, iniciando pela ordem zero, e crescendo unitariamente até a ordem k, cuja sequência representa esta PAOS.*

Demonstração. Nota 1- Comprova-se que uma PAOS de ordem k, ao ser aplicado o Operador Diferença, vai diminuindo de ordem, unitariamente, até que se chegue a uma sequência constante, na aplicação do OD(k), portanto as sequências encontradas, e que compõem uma Tabela de PAOS, vão desde a de ordem k até a de ordem 0.
Nota 2 - A ordem da sequência de maior ordem, será igual a quantidade de têrmos da Sequência Geratriz desta PAOS, menos 1.

□

Exemplo 4.3. *Dada a PAOS* $(1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$*. Encontrar as sequências e verificar as suas ordens.*

Solução: *Esta PAOS já teve suas sequências encontrados no Exemplo 3.7,* *como:*

$$(\Delta^3 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2,2,2,2,2,2,2,\ldots)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{ordem do OD 3} \quad PAOS_0$$

$$(\Delta^2 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (5,7,9,11,13,15,17,\ldots,\ldots)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{ordem do OD 2} \quad PAOS_1$$

$$(\Delta^1 a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (4,9,16,25,36,49,64,\ldots)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{ordem do OD 1} \quad PAOS_2$$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1,5,14,30,55,91,140,\ldots)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{ordem do OD 0} \quad PAOS_3$$

Também mostrado na Tabela 4.7. O que comprova o enunciado.

Exemplo 4.4. *Dada a PAOS* $(1,5,14,30,55,91,140,\ldots)_{n\in\mathbb{N}}$. *Encontrar a Sequência Geratriz da Tabela de PAOS, e comprovar que a sequência de maior ordem, será dada pela quantidade de têrmos da Sequência Geratriz, menos 1.*

Solução: *Seja a PAOS* $(1,5,14,30,55,91,140,204,\ldots,a_n,\ldots)_{n\in\mathbb{N}}$, *onde já foi encontrado a sua Sequência Geratriz no Exemplo 4.3, como sendo* $(2,5,4,1)$*:*

Como temos 4 *têrmos nesta Sequência Geratriz, e usando-se a Proposição 4.1, nota 2, a ordem desta PAOS será de* $(4-1)$, *portanto teremos uma* $PAOS_3$. *Comparando com o Exemplo 4.3, comprova-se o enunciado.*

4.2.2 Parametrização de uma Tabela

Definição 4.4. *Dada uma Tabela de PAOS, esta tabela será dita Limitada, se a maior ordem das sequências, for um número finito.*

Exemplo 4.5. *Dada a PAOS* $(1,5,14,30,55,91,140,204\ldots,a_n,\ldots)_{n\in\mathbb{N}}$. *Encontrar sua Sequência Geratriz, para uma Tabela de PAOS Limitada.*

Solução: *Esta sequência, já teve sua Sequência Geratriz encontrados no Exemplo 4.2 como:* $(2,5,4,1)$.

Esta Tabela de PAOS, diz-se que é limitada, *pois ela representa somente, as sequências geradas pela aplicação do OD na sequência* $(1,5,14,30,55,\ldots,a_n,\ldots)_{n\in\mathbb{N}}$, *conforme visualizada na Tabela 4.7 limitadas nas linhas.*

Definição 4.5. *Uma Tabela de PAOS será dita Estendida se a sua Sequência Geratriz, finita, for acrescidos de zeros indefinidamente, no final.*

Exemplo 4.6. *Dada a PAOS* $(1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$. *Encontrar sua Sequência Geratriz para uma Tabela de PAOS Estendida, construir a tabela.*

Solução: *Esta PAOS já teve sua Sequência Geratriz encontrados no Exemplo 4.6, como:* $(2, 5, 4, 1)$. *Portanto podemos escrever a Sequência Geratriz da Tabela Estendida, acrescendo de 0's:* $(2, 5, 4, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$.

Tabela 4.8: PAOS$(2, 5, 4, 1, 0, 0, 0, \ldots)$ Tabela de PAOS Estendida

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	...
L1	2	5	4	1	0	0	0	0	0	...
L2	2	7	9	5	1	0	0	0	0	...
L3	2	9	16	14	6	1	0	0	0	...
L4	2	11	25	30	20	7	1	0	0	...
L5	2	13	36	55	50	27	8	1	0	...
L6	2	15	49	91	105	77	35	9	1	...
L7	2	17	64	140	196	182	112	44	10	...
L8	2	19	81	204	336	378	294	156	54	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Fonte: *Autoria Própria.*

Características de algumas Sequências Numéricas desta Tabela de PAOS.

Sequência	*Coluna*	*Ordem da PAOS*
$(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$	*C1*	$PAOS_0$
$(5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$	*C2*	$PAOS_1$
$(4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$	*C3*	$PAOS_2$
$(1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 240, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$	*C4*	$PAOS_3$
$(0, 1, 6, 20, 50, 105, 196, 336, 540, 825 \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$	*C5*	$PAOS_4$
$(0, 0, 1, 7, 27, 77, 182, 378, 714, 1254, 2079, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$	*C6*	$PAOS_5$
$(0, 0, 0, 1, 8, 35, 112, 294, 672, 1386, 2640, 4719, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$	*C7*	$PAOS_6$

Observação 4.3. *Constata-se que a PAOS, que deu origem a esta Tabela é uma* $PAOS_3$. *Enquanto todas as sequências desta Tabela, a partir da coluna* 5, *tem ordem superior a* 3 *e crescente, indefinidamente.*

Definição 4.6. *Dada uma Tabela de PAOS, esta será dita Ilimitada, se a Sequência Geratriz da Tabela de PAOS, for uma sequência numérica aleatória qualquer.*

Exemplo 4.7. *Dada uma sequência numérica aleatória qualquer* $(2, 3, 1, 0, 2, 1, 0, 5, 3, \ldots)$, *exibir as primeiras linhas e colunas da Tabela de PAOS.*

Solução: *Utilizando-se a Definição 4.2, e do Algoritmo 4.1 de uma Tabela de PAOS, e ainda, a Definição 4.6 de Tabela de PAOS Ilimitada. Inicia-se a construção, considerando esta sequência como Sequência Geratriz.*

Tabela 4.9: PAOS$(2, 3, 1, 0, 2, 1, 0, 5, 3, \ldots)$ Tabela de PAOS Ilimitada

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	...
L1	**2**	**3**	**1**	**0**	**2**	**1**	**0**	**5**	**3**	...
L2	2	5	4	1	2	3	1	5	8	...
L3	2	7	9	5	3	5	4	6	13	...
L4	2	9	16	14	8	8	9	10	19	...
L5	2	11	25	30	22	16	17	19	29	...
L6	2	13	36	55	52	38	33	36	48	...
L7	2	15	49	91	107	90	71	69	84	...
L8	2	17	64	140	198	197	161	140	153	...
L9	2	19	81	204	338	395	358	301	293	...
L10	2	21	100	285	542	733	753	659	594	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Fonte: *Autoria Própria.*

Características de algumas Sequências Numéricas desta Tabela de PAOS.

Sequência Numérica	*Coluna*	*Ordem da PAOS*
$(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$	*C1*	$PAOS_0$
$(3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$	*C2*	$PAOS_1$
$(0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$	*C3*	$PAOS_2$
$(1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$	*C4*	$PAOS_3$
$(2, 2, 3, 8, 22, 52, 107, 198, 338, 542, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$	*C5*	$PAOS_4$
$(1, 3, 5, 8, 16, 38, 90, 197, 395, 733, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$	*C6*	$PAOS_5$
$(0, 1, 4, 9, 17, 33, 71, 161, 358, 753, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$	*C7*	$PAOS_6$.

Exemplo 4.8. *Dada uma sequência numérica aleatória qualquer* $(2, 3, 1, 0, 2, 1, 0, 5, 3, \ldots)$, *gerar algumas Tabelas de PAOS, Limitadas e Estendidas, mostrando apenas a Notação das Tabelas de PAOS.*

Solução: *Utilizando-se os conceito de Parametrização de Tabela de PAOS, dada na Definição 4.4 e na Definição 4.6 visualizamos o resultado.*

Sequências Geratrizes	*Tipo de PAOS*
$PAOS(2, 3, 1, 0, 2, 1, 0, 5, 3, \ldots)$	*Ilimitada*
$PAOS(2, 3)$	*Limitada*
$PAOS(2, 3, 0, 0, 0, \ldots)$	*Estendida*
$PAOS(2, 3, 1, 0, 2)$	*Limitada*
$PAOS(2, 3, 1, 0, 2, 0, 0, 0, \ldots)$	*Estendida*
$PAOS(2, 3, 1, 0, 2, 1, 0, 5)$	*Limitada*
$PAOS(2, 3, 1, 0, 2, 1, 0, 5, 0, 0, 0, \ldots)$	*Estendida*
$\vdots$	$\vdots$

4.3 Propriedades das Tabelas de PAOS

4.3.1 Regra da Soma em L

Regra 4.1. *Define-se a Soma em L, numa Tabela de PAOS(A), aplicado no têrmo* $a_{l,c}$, *como sendo a soma deste têrmo e o seu sucessor nesta linha* $a_{l,c+1}$, *e, tendo como resultado, o têrmo imediatamente sucessor na linha e coluna,* $a_{l+1,c+1}$. *Que será dada pela equação:*

$$S.L(a_{l,c}) = a_{l+1,c+1} = a_{l,c} + a_{l,c+1}$$

Observação 4.4. *Também poderá ser usada* $S.L(a_{l,c}) \equiv S.L(A)_{l,c}$.

Demonstração. Esta propriedade decorre diretamente da definição do Operador Soma, dado na Definição 4.1 e da definição da Tabela de PAOS, dado na Definição 4.2, conforme visualizado na Figura 4.2 e na Tabela 4.10.

Figura 4.2: Regra da Soma em L. $S.L(a_{l,c})$.

$$\begin{tikzcd} a_{l,c} \arrow[r, "(+)"] & a_{l,c+1} \arrow[d, "(=)"] \\ & a_{l+1,c+1} \end{tikzcd}$$

Fonte: *Autoria Própria.*

Tabela 4.10: Regra da Soma em L. $S.L(a_{l,c})$.

	Col	C	$C+1$	$C+2$	$C+3$	$C+4$	C+5	$\ldots$
Lin	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
L	$\ldots$	$a_{l,c}$	$a_{l,c+1}$	$a_{l,c+2}$	$a_{l,c+3}$	$a_{l,c+4}$	$a_{l,c+5}$	$\ldots$
$L+1$	$\ldots$	$a_{l+1,c}$	$a_{l+1,c+1}$	$a_{l+1,c+2}$	$a_{l+1,c+3}$	$a_{l+1,c+4}$	$a_{l+1,c+5}$	$\ldots$
$L+2$	$\ldots$	$a_{l+2,c}$	$a_{l+2,c+1}$	$a_{l+2,c+2}$	$a_{l+2,c+3}$	$a_{l+2,c+4}$	$a_{l+2,c+5}$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Fonte: *Autoria Própria.*

O que comprova esta Regra. □

Exemplo 4.9. *Seja dada a PAOS* $(1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, \ldots, a_n, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$. *Construir a Tabela de PAOS, verificar a Regra da Soma em L, para alguns valores.*

Solução: Esta PAOS tem sua Sequência Geratriz dados por: $(2, 5, 4, 1)$ *e a tabela do Exemplo 4.2, já construída.*

Tabela 4.11: Regra da Soma em L, $PAOS(2, 5, 4, 1)$

$(\Delta^3 a_1)$	$(\Delta^2 a_1)$	$(\Delta^1 a_1)$	(a_1)
2	**5**	4	1
2	**7**	9	5
2	9	16	14
2	11	**25**	**30**
2	13	36	**55**
2	**15**	**49**	91
2	17	**64**	140
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fonte: *Autoria Própria.*

Onde para os valores que aparecem marcados são mostrados a relação entre eles; $2+5=7$*;* $25+30=55$ *e* $15+49=64$.

4.3.2 Regra da Soma da Coluna

Regra 4.2. *A Soma da Coluna de uma Tabela de PAOS, aplicado sobre o têrmo* $a_{l,c}$*, por* r *têrmos sucessivos será definido como sendo a soma do têrmo sucessivo nesta linha* $a_{l,c+1}$*, somado com os têrmos da coluna, desde o têrmo* $a_{l,c}$*, por* r *colunas, até o têrmo* $a_{l+r,c}$*, e tendo como resultado, o têrmo sucessivo na linha e coluna deste último têrmo,* $a_{l+r+1,c+1}$*. Que será dada pela equação:*

$$S.C(a_{l,c})_r = a_{l+r+1,c+1} = a_{l,c+1} + a_{l,c} + a_{l+1,c} + a_{l+2,c} + a_{l+3,c} + \ldots + a_{l+r-1,c} + a_{l+r,c}$$

Observação 4.5. *Também poderá ser usada* $S.C(a_{l,c})_r \equiv S.C(A)_{(l,c)_r}$.

Demonstração. Visualizando conforme a seguir na Tabela 4.12 e Figura 4.3.

Tabela 4.12: Regra da Soma da Coluna $S.C(a_{l,c})_r$

	$\ldots$	C	$C+1$	$C+2$	$C+3$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
L	$\ldots$	$a_{l,c}$	$a_{l,c+1}$	$a_{l,c+2}$	$a_{l,c+3}$	$\ldots$
$L+1$	$\ldots$	$a_{l+1,c}$	$a_{l+1,c+1}$	$a_{l+1,c+2}$	$a_{l+1,c+3}$	$\ldots$
$L+2$	$\ldots$	$a_{l+2,c}$	$a_{l+2,c+1}$	$a_{l+2,c+2}$	$a_{l+2,c+3}$	$\ldots$
$L+3$	$\ldots$	$a_{l+3,c}$	$a_{l+3,c+1}$	$a_{l+3,c+2}$	$a_{l+3,c+3}$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$L+r-1$	$\ldots$	$a_{l+r-1,c}$	$a_{l+r-1,c+1}$	$a_{l+r-1,c+2}$	$a_{l+r-1,c+3}$	$\ldots$
$L+r$	$\ldots$	$a_{l+r,c}$	$a_{l+r,c+1}$	$a_{l+r,c+2}$	$a_{l+r,c+3}$	$\ldots$
$L+r+1$	$\ldots$	$a_{l+r+1,c}$	$a_{l+r+1,c+1}$	$a_{l+r+1,c+2}$	$a_{l+r+1,c+3}$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Fonte: *Autoria Própria.*

Figura 4.3: Regra da Soma da Coluna $S.C(a_{l,c})_r$

$$
\begin{tikzcd}
a_{l,c} \arrow[d, "(+)"] & a_{l,c+1} \arrow[l, "(+)"] \\
a_{l+1,c} \arrow[d, "(+)"] & \\
a_{l+2,c} \arrow[d, "(+)"] & \\
a_{l+3,c} \arrow[d, "(+)"] & \\
\vdots \arrow[d, "(+)"] & \\
a_{l+r,c} \arrow[dr, "(=)"] & \\
& a_{l+r+1,c+1}
\end{tikzcd}
$$

Fonte: *Autoria Própria.*

Vamos aplicar a Regra da soma em L, dado na propriedade da Tabela, pela Definição 4.1.

$$
\begin{aligned}
a_{l,c} + a_{l,c+1} &= \cancel{a_{l+1,c+1}} \\
a_{l+1,c} + \cancel{a_{l+1,c+1}} &= \cancel{a_{l+2,c+1}} \\
a_{l+2,c} + \cancel{a_{l+2,c+1}} &= \cancel{a_{l+3,c+1}} \\
a_{l+3,c} + \cancel{a_{l+3,c+1}} &= \cancel{a_{l+4,c+1}} \\
&\vdots \\
a_{l+r-1,c} + \cancel{a_{l+r-1,c+1}} &= \cancel{a_{l+r,c+1}} \\
a_{l+r,c} + \cancel{a_{l+r,c+1}} &= a_{l+r+1,c+1}
\end{aligned}
$$

Somando-se estas igualdade, os têrmos, $a_{l+1,c+1}; a_{l+2,c+1}; a_{l+3,c+1}; \ldots; a_{l+r-1,c+1}; a_{l+r,c+1}$, cancelam-se mutuamente, pois aparecem dos dois lado da igualdade, alternadamente. Sobrando apenas:

$$a_{l,c} + a_{l,c+1} + a_{l+1,c} + a_{l+2,c} + a_{l+3,c} + \ldots + a_{l+r-1,c} + a_{l+r,c} = a_{l+r+1,c+1}$$

O que comprova a regra.

□

Exemplo 4.10. *Seja dada a Progressão Aritmética de Ordem Superior:* $(2, 5, 4, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots, a_n, \ldots)_{n \in \mathbb{N}}$. *Construir a Tabela de PAOS, e comprovar a Regra da Soma da Coluna, para alguns valores.*

Solução: Tomando-se a tabela do Exemplo 4.6, já construída, e confirmando alguns valores, conforme tabela.

Tabela 4.13: Regra da Soma da Coluna - $PAOS(2, 5, 4, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots)$

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	...
L1	**2**	**5**	**4**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	...
L2	2	7	9	5	1	0	0	0	0	...
L3	2	9	16	14	6	1	0	0	0	...
L4	2	11	25	30	20	7	1	0	0	...
L5	2	13	36	55	50	27	8	1	0	...
L6	2	15	49	91	105	77	35	9	1	...
L7	2	17	64	140	196	182	112	44	10	...
L8	2	19	81	204	336	378	294	156	54	...
L9	2	21	100	285	**540**	714	672	450	210	...
L10	2	23	121	385	825	1254	1386	1122	660	...
L11	2	25	**144**	506	1210	2079	2640	**2508**	1782	...
L12	2	27	169	650	1716	3289	4719	5148	4290	...
L13	2	29	196	819	2366	5005	8008	9867	9438	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Fonte: *Autoria Própria.*

Onde para os valores que aparecem marcados, são mostrados a relação entre eles, a somatória das colunas, abaixo indicadas:
Somatória da coluna do têrmo $a_{4,2}$ por 6 têrmos seguidos.

$$S.C(a_{4,2})_6 = 25 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 = 144;$$

Somatória da coluna do têrmo $a_{1,4}$ por 7 têrmos seguidos.

$$S.C(a_{1,4})_7 = 0 + 1 + 5 + 14 + 30 + 55 + 91 + 140 + 204 = 540;$$

Somatória da coluna do têrmo $a_{1,7}$ por 9 têrmos seguidos.

$$S.C(a_{1,7})_9 = 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 8 + 35 + 112 + 294 + 672 + 1386 = 2508.$$

4.3.3 Regra da Soma da Diagonal

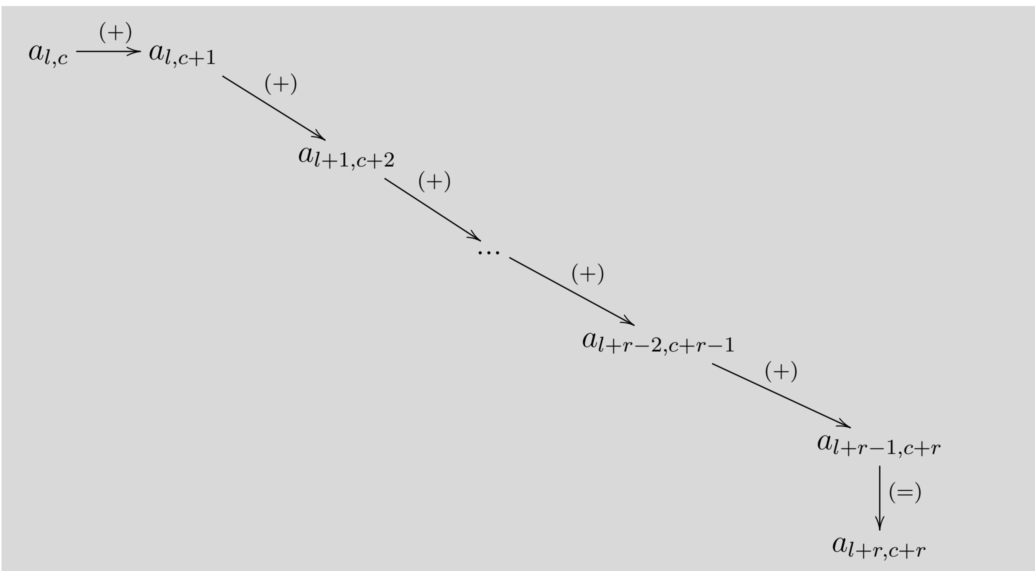
Regra 4.3. *Define-se a Soma da Diagonal de uma Tabela de PAOS do têrmo $a_{l,c}$, por r têrmos sucessivos como sendo a soma deste têrmo, com r têrmos sucessivo, na linha e na coluna, a partir do têrmo $a_{l,c+1}$, por r têrmos, até o têrmo $a_{l+r-1,c+r}$, e tendo como resultado, o têrmo desta última coluna e da linha sucessiva, ou seja $a_{l+r,c+r}$. Que será dada pela equação:*

$$S.D(a_{l,c})_r = a_{l+r,c+r} = a_{l,c} + a_{l,c+1} + a_{l+1,c+2} + a_{l+2,c+3} + \ldots + a_{l+r-2,c+r-1} + a_{l+r-1,c+r}.$$

Observação 4.6. *Também poderá ser usada $S.D(a_{l,c})_r \equiv S.D(A)_{(l,c)_r}$.*

Demonstração. Visualizando uma Tabela de PAOS, construída, conforme exibido a seguir, na Figura 4.4 e na Tabela 4.14.

Figura 4.4: Regra da Soma da Diagonal. $S.D(a_{l,c})_r$



Fonte: *Autoria Própria.*

Tabela 4.14: Regra da Soma da Diagonal. $S.D(a_{l,c})_r$

	C	$C+1$	$C+2$	$\dots$	$C+r-1$	C+r	$\dots$
L	$a_{l,c}$	$a_{l,c+1}$	$a_{l,c+2}$	$\dots$	$a_{l,c+r-1}$	$a_{l,c+r}$	$\dots$
$L+1$	$a_{l+1,c}$	$a_{l+1,c+1}$	$a_{l+1,c+2}$	$\dots$	$a_{l+1,c+r-1}$	$a_{l+1,c+r}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
$L+r-2$	$a_{l+r-2,c}$	$a_{l+r-2,c+1}$	$a_{l+r-2,c+2}$	$\dots$	$a_{l+r-2,c+r-1}$	$a_{l+r-2,c+r}$	$\dots$
$L+r-1$	$a_{l+r-1,c}$	$a_{l+r-1,c+1}$	$a_{l+r-1,c+2}$	$\dots$	$a_{l+r-1,c+r-1}$	$a_{l+r-1,c+r}$	$\dots$
$L+r$	$a_{l+r,c}$	$a_{l+r,c+1}$	$a_{l+r,c+2}$	$\dots$	$a_{l+r,c+r-1}$	$a_{l+r,c+r}$	$\dots$
$L+r+1$	$a_{l+r+1,c}$	$a_{l+r+1,c+1}$	$a_{l+r+1,c+2}$	$\dots$	$a_{l+r+1,c+r-1}$	$a_{l+r+1,c+r}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Fonte: *Autoria Própria.*

Vamos aplicar o Operador Soma, dado na propriedade da Tabela, pela Definição 4.1.

$$\begin{aligned}
a_{l,c} + a_{l,c+1} &= \cancel{a_{l+1,c+1}} \\
\cancel{a_{l+1,c+1}} + a_{l+1,c+2} &= \cancel{a_{l+2,c+2}} \\
\cancel{a_{l+2,c+2}} + a_{l+2,c+3} &= \cancel{a_{l+3,c+3}} \\
&\vdots \\
\cancel{a_{l+r-2,c+r-2}} + a_{l+r-2,c+r-1} &= \cancel{a_{l+r-1,c+r-1}} \\
\cancel{a_{l+r-1,c+r-1}} + a_{l+r-1,c+r} &= a_{l+r,c+r}
\end{aligned}$$

Somando, os têrmos: $(a_{l+1,c+1}, a_{l+2,c+2}, a_{l+3,c+3}, \dots, a_{l+r-2,c+r-2}, a_{l+r-1,c+r-1})$ cancelam-se mutuamente, pois aparecem dos dois lado da igualdade, alternadamente. Sobrando apenas:

$$SD(a_{l,c})_r = a_{l+r,c+r} = a_{l,c} + a_{l,c+1} + a_{l+1,c+2} + a_{l+2,c+3} + \dots + a_{l+r-2,c+r-1} + a_{l+r-1,c+r}$$

O que comprova a Regra.

$\square$

Exemplo 4.11. *Seja dada a PAOS:* $(2, 5, 4, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, a_n, \dots)_{n\in\mathbb{N}}$. *Construir a Tabela de PAOS, e comprovar a Regra da Soma da Diagonal, para alguns valores.*

Solução: Tomando-se a tabela do Exemplo 4.6, já construída, confirmamos alguns valores, conforme tabela.

Tabela 4.15: Regra da Soma da Diagonal $PAOS(2, 5, 4, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots)$

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	...
L1	**2**	**5**	**4**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	...
L2	2	7	9	5	1	0	0	0	0	...
L3	2	9	16	14	6	1	0	0	0	...
L4	2	11	25	30	20	7	1	0	0	...
L5	2	13	36	55	50	27	8	1	0	...
L6	2	15	49	91	105	77	35	9	1	...
L7	2	17	64	140	196	182	112	44	10	...
L8	2	19	81	204	336	378	294	156	54	...
L9	2	21	100	285	540	714	672	450	210	...
L10	2	23	121	385	825	1254	1386	1122	660	...
L11	2	25	144	506	1210	2079	2640	2508	1782	...
L12	2	27	169	650	1716	3289	4719	5148	4290	...
L13	2	29	196	819	2366	5005	8008	9867	9438	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Fonte: *Autoria Própria.*

Onde para os valores que aparecem marcados são mostrados a relação entre eles: Somatória da diagonal do têrmo $a_{2,1}$ por 7 têrmos seguidas.

$$S.D(a_{2,1})_7 = 2 + 7 + 16 + 30 + 50 + 77 + 112 + 156 = 450;$$

Somatória da diagonal do têrmo $a_{4,0}$ por 6 têrmos seguidas.

$$S.D(a_{4,0})_6 = 2 + 13 + 49 + 140 + 336 + 714 = 1254;$$

Somatória da diagonal do têrmo $a_{9,2}$ por 3 têrmos seguidas.

$$S.D(a_{9,2})_3 = 21 + 100 + 385 + 1210 = 1716.$$

4.3.4 Somatório de Tabelas

Regra 4.4. *A Soma de duas Tabela de PAOS é igual a Tabela de PAOS da soma das suas Sequências Geratrizes.*

Observação 4.7. *A soma de Tabelas de PAOS, se dará na forma de têrmo a têrmo. Somando-se Tabelas de PAOS, a tabela resultante é também uma Tabela de PAOS.*
Nota 1 - Para representar o têrmo $a_{l,c}$ *da PAOS(A), poderá utilizar-se:* $a_{l,c} \equiv PAOS(A)_{l,c}$.
E poderá ser representadas pelas equações:

$$PAOS(A+B) = PAOS(A) + PAOS(B). \tag{4.1}$$

$$PAOS(A+B)_{l,c} = (a+b)_{l+1,c+1} = (a_{l,c} + b_{l,c}) + (a_{l,c+1} + b_{l,c+1}). \tag{4.2}$$

$$\sum_{j=1}^{p} PAOS_{i=1}^{k}(a_{j,i}, 0, 0, \ldots) = PAOS_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{p}(a_{j,i}, 0, 0, \ldots)). \tag{4.3}$$

Nota 2 - Para Tabelas de PAOS Limitadas, as Somas da Tabelas de PAOS, só podem ser efetuadas, se as Sequências Geratrizes tiverem a mesma quantidade de têrmos, conforme visualizado na Tabela 4.17, no Exemplo 4.12.
Nota 3 - As Tabelas de PAOS, Estendidas ou Ilimitadas, podem ser somadas sem restrições, conforme visualizado no Exemplo 4.13, conforme tabelas exibidas na sequência, Tabela 4.18, Tabela 4.19 e Tabela 4.20.

Demonstração. Sejam as PAOS A e B. As Tabelas de PAOS correspondentes serão geradas pela aplicação da Regra da Soma do L, 4.1, e pela definição de Tabela de PAOS, dada na Definição 4.2.

Tabela 4.16: Somatório das Tabelas de PAOS A e B.

(a) Tabela da PAOS(A)

	C	C+1	C+2
L	$a_{l,c}$	$a_{l,c+1}$	$a_{l,c+2}$
L+1	$a_{l+1,c}$	$a_{l+1,c+1}$	$a_{l+1,c+2}$
L+2	$a_{l+2,c}$	$a_{l+2,c+1}$	$a_{l+2,c+2}$

(b) Tabela da PAOS(B).

	C	C+1	C+2
L	$b_{l,c}$	$b_{l,c+1}$	$b_{l,c+2}$
L+1	$b_{l+1,c}$	$b_{l+1,c+1}$	$b_{l+1,c+2}$
L+2	$b_{l+2,c}$	$b_{l+2,c+1}$	$b_{l+2,c+2}$

(c) Tabela da PAOS(A)+PAOS(B).

	C	C+1	C+2
L	$a_{l,c} + b_{l,c}$	$a_{l,c+1} + b_{l,c+1}$	$a_{l,c+2} + b_{l,c+2}$
L+1	$a_{l+1,c} + b_{l+1,c}$	$a_{l+1,c+1} + b_{l+1,c+1}$	$a_{l+1,c+2} + b_{l+1,c+2}$
L+2	$a_{l+2,c} + b_{l+2,c}$	$a_{l+2,c+1} + b_{l+2,c+1}$	$a_{l+2,c+2} + b_{l+2,c+2}$

(d) Tabela da PAOS(A+B).

	C	C+1	C+2
L	$(a+b)_{l,c}$	$(a+b)_{l,c+1}$	$(a+b)_{l,c+2}$
L+1	$(a+b)_{l+1,c}$	$(a+b)_{l+1,c+1}$	$(a+b)_{l+1,c+2}$
L+2	$(a+b)_{l+2,c}$	$(a+b)_{l+2,c+1}$	$(a+b)_{l+2,c+2}$

Fonte: *Autoria Própria.*

Aplicando a Regra da soma em L de uma Tabela de PAOS, nos têrmos da linha L e coluna C das PAOS A e B, conforme exibido na Tabela 4.16, teremos:

Soma em L do têrmo $a_{l,c}$.

$$S.L(A)_{l,c} = a_{l+1,c+1} = a_{l,c} + a_{l,c+1}. \tag{4.4}$$

Soma em L do têrmo $b_{l,c}$.

$$S.L(B)_{l,c} = b_{l+1,c+1} = b_{l,c} + b_{l,c+1}. \tag{4.5}$$

Somando-se estas duas equações têrmo a têrmo e comparando-se a soma dos primeiros têrmos com a soma dos segundos têrmos, resultante da somatória da Equação 4.4, com a

Equação 4.5, teremos:

$$S.L(A)_{l,c} + S.L(B)_{l,c} = a_{l+1,c+1} + b_{l+1,c+1}.$$

Mas

$$a_{l+1,c+1} + b_{l+1,c+1} = S.L(A+B)_{l,c}.$$

Então

$$S.L(A)_{l,c} + S.L(B)_{l,c} = S.L(A+B)_{l,c}. \tag{4.6}$$

Com este resultado exibido na Equação 4.6 demonstra que somando-se duas PAOS, têrmo a têrmo, continua valendo a Regra da Soma em L, para a PAOS resultante da soma, se constituindo uma nova PAOS.

Comparando-se agora a soma dos segundos têrmos com a soma dos terceiros têrmos, resultante da somatória da Equação 4.4, com a Equação 4.5, visualizamos:

$$a_{l+1,c+1} + b_{l+1,c+1} = a_{l,c} + a_{l,c+1} + b_{l,c} + b_{l,c+1}.$$

Mas

$$a_{l+1,c+1} + b_{l+1,c+1} = PAOS(A+B)_{l,c}.$$

E

$$a_{l,c} + a_{l,c+1} + b_{l,c} + b_{l,c+1} = PAOS(A)_{l,c} + PAOS(B)_{l,c}.$$

Então

$$PAOS(A+B)_{l,c} = PAOS(A)_{l,c} + PAOS(B)_{l,c}. \tag{4.7}$$

Como se demonstrou, que a regra vale para um têrmo qualquer, conforme visto na Equação 4.7 então vale para toda a PAOS. Portanto podemos escrever:

$$PAOS(A+B) = PAOS(A) + PAOS(B). \tag{4.8}$$

O que valida a Regra 4.4 da soma de PAOS.

Generalizando, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
&PAOS(a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,k}, 0, 0, \ldots)+\\
&PAOS(a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,k}, 0, 0, \ldots)+\\
&\qquad\vdots\\
&PAOS(a_{p,1}, a_{p,2}, \ldots, a_{p,k}, 0, 0, \ldots) =
\end{aligned}$$

$$PAOS(a_{1,1}+a_{2,1}+\ldots+a_{p,1}, a_{1,2}+a_{2,2}+\ldots+a_{p,2}, , \ldots, a_{1,k}+a_{2,k}+\ldots+a_{p,k}, 0, 0, \ldots). \quad (4.9)$$

Ou

$$\sum_{j=1}^{p} PAOS_{i=1}^{k}(a_{j,i}, 0, 0, \ldots) = PAOS_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{p}(a_{j,i}, 0, 0, \ldots)). \quad (4.10)$$

O que comprova a Regra.

□

Exemplo 4.12. *Sejam dadas as PAOS* $(1, 2, 3, 4)$ *e a PAOS* $(2, 5, 4, 1)$. *Mostrar que a soma destas é a PAOS* $(3, 7, 7, 5)$. *Construir as Tabelas de PAOS, para comprovar a Regra da Somatório de Tabelas de PAOS, mostrando alguns valores.*

Solução: Tomando-se as PAOS e construindo-se as Tabelas de PAOS, correspondentes.

Tabela 4.17: Somatório das PAOS(1,2,3,4)+ PAOS(2,5,4,1)= PAOS(3,7,7,5).

(a) Tabela da PAOS(1,2,3,4)

	C1	C2	C3	C4
Ł1	**1**	**2**	**3**	**4**
L2	1	3	5	7
L3	**1**	**4**	8	12
L4	1	**5**	12	20
L5	1	6	17	32
L6	1	7	**23**	**49**
L7	1	8	30	**72**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(b) Tabela da PAOS(2,5,4,1)

	C1	C2	C3	C4
Ł1	**2**	**5**	**4**	**1**
L2	2	7	9	5
L3	**2**	**9**	16	14
L4	2	**11**	25	30
L5	2	13	36	55
L6	2	15	**49**	**91**
L7	2	17	64	**140**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(c) Tabela PAOS(1,2,3,4)+ PAOS(2,5,4,1)

	C1	C2	C3	C4
Ł1	**1+2**	**2+5**	**3+4**	**4+1**
L2	1+2	3+7	5+9	7+5
L3	**1+2**	**4+9**	8+16	12+14
L4	1+2	**5+11**	12+25	20+30
L5	1+2	6+13	17+36	32+55
L6	1+2	7+15	**23+49**	**49+91**
L7	1+2	8+17	30+64	**72+140**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(d) Tabela da PAOS(3,7,7,5)

	C1	C2	C3	C4
Ł1	**3**	**7**	**7**	**5**
L2	3	10	14	12
L3	**3**	**13**	24	26
L4	3	**16**	37	50
L5	3	19	53	87
L6	3	22	**72**	**140**
L7	3	25	94	**212**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: *Autoria Própria.*

Exemplo 4.13. *Sejam dada a PAOS* $(5, 0, 0, 0, \ldots)$ *e a PAOS* $(0, 3, 0, 0, \ldots)$*. Mostrar que a soma destas é a PAOS* $(5, 3, 0, 0, \ldots)$*. Construir as Tabelas de PAOS para comprovar a Regra da Somatório de Tabelas de PAOS mostrando alguns valores.*

Solução: Tomando-se as PAOS e construindo-se as Tabelas de PAOS, correspondentes a PAOS$(5, 0, 0, 0, \ldots)$*, visualizada na Tabela 4.18, a PAOS*$(0, 3, 0, 0, \ldots)$*, exibida na Tabela 4.19 e a PAOS*$(5, 3, 0, 0, \ldots)$*, representando a somatória destas duas PAOS anteriores, exibida na Tabela 4.21.*

Tabela 4.18: PAOS$(5, 0, 0, 0, \ldots)$

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	...
L1	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
L2	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	...
L3	5	10	5	0	0	0	0	0	0	0	...
L4	**5**	**15**	15	5	0	0	0	0	0	0	...
L5	5	**20**	30	20	5	0	0	0	0	0	...
L6	5	25	50	50	25	5	0	0	0	0	...
L7	5	**30**	**75**	100	75	**30**	**5**	0	0	0	...
L8	5	35	**105**	175	175	105	**35**	5	0	0	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Fonte: *Autoria Própria.*

Tabela 4.19: PAOS$(0, 3, 0, 0, \ldots)$

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	...
L1	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	...
L2	0	3	3	0	0	0	0	0	0	0	...
L3	0	3	6	3	0	0	0	0	0	0	...
L4	**0**	**3**	9	9	3	0	0	0	0	0	...
L5	0	**3**	12	18	12	3	0	0	0	0	...
L6	0	3	15	30	30	15	3	0	0	0	...
L7	0	**3**	**18**	45	60	**45**	**18**	3	0	0	...
L8	0	3	**21**	63	105	105	**63**	21	3	0	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Fonte: *Autoria Própria.*

Tabela 4.20: PAOS$(5, 3, 0, 0, 0, \ldots)$

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	...
L1	5	3	0	0	0	0	0	0	0	0	...
L2	5	8	3	0	0	0	0	0	0	0	...
L3	5	13	11	3	0	0	0	0	0	0	...
L4	**5**	**18**	24	14	3	0	0	0	0	0	...
L5	5	**23**	42	38	17	3	0	0	0	0	...
L6	5	28	65	80	55	20	3	0	0	0	...
L7	5	**33**	**93**	145	135	**75**	**23**	3	0	0	...
L8	5	38	**126**	238	280	210	**98**	26	3	0	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Fonte: *Autoria Própria.*

Exibindo alguns valores, para verificação:

$$5 + 15 = 20 \qquad 30 + 75 = 105 \qquad 30 + 5 = 35$$

$$0 + 3 = 3 \qquad 3 + 18 = 21 \qquad 45 + 18 = 63$$

$$5 + 18 = 23 \qquad 33 + 93 = 126 \qquad 75 + 23 = 98.$$

Exemplo 4.14. *Crie algumas PAOS genéricas, do tipo Estendida ou Ilimitada, exibir a PAOS resultante da soma destas.*

Solução: *Sejam PAOS Estendidas quaisquer, representadas pelas suas Sequências Geratrizes:*

$PAOS(2, 3, 1, 0, 2, 1, 0, 5, 3, 5, 4, 7, \ldots)$;

$PAOS(2, 5, 4, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots)$;

$PAOS(1, 3, 7, 2, 9, 13, 0, 0, \ldots)$;

$PAOS(0, 3, 23, 11, 0, \ldots)$.

Analisando as PAOS, vê-se que a primeira é uma PAOS Ilimitada, já visualizada no Exemplo 4.7, a segunda também foi exibida no Exemplo 4.6 onde foi construída suas Tabelas de PAOS, enquanto as demais, são PAOS genéricas(aleatórias), do tipo Estendida.

$$\begin{array}{ll}
PAOS(2,3,1,0,2,1,0,5,3,5,4,7,\ldots) & \textit{Ilimitada;} \\
PAOS(2,5,4,1,0,0,0,0,\ldots) & \textit{Estendida;} \\
PAOS(1,3,7,2,9,13,0,0,\ldots) & \textit{Estendida;} \\
PAOS(0,3,23,11,0,0,0,0,\ldots) & \textit{Estendida.}
\end{array}$$

Para encontrar a Somatória das Tabela de PAOS, soma-se têrmo a têrmo suas Sequências Geratrizes para compor a Tabela de PAOS resultante.
Organizado estas Tabelas de PAOS, veja que a última linha, a Sequência Geratriz 4.11 é o resultado da soma das anteriores.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr}
2, & 3, & 1, & 0, & 2, & 1, & 0, & 5, & 3, & 5, & 4, & 7,\ldots \\
2, & 5, & 4, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0,\ldots \\
1, & 3, & 7, & 2, & 9, & 13, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0,\ldots \\
0, & 3, & 23, & 11, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0,\ldots
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr}
5, & 14, & 35, & 14, & 11, & 14, & 0, & 5, & 3, & 5, & 4, & 7,\ldots
\end{array} \tag{4.11}$$

Portanto a Tabela de PAOS resultante será dado pela Sequência Geratriz 4.11:

Exibir as primeiras linhas e colunas desta Tabela de PAOS.

Tabela 4.21: $PAOS(5,14,35,14,11,14,0,5,3,5,4,7,\ldots)$

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	...
L1	5	14	35	14	11	14	0	5	3	5	4	7	...
L2	5	19	49	49	25	25	14	5	8	8	9	11	...
L3	5	24	68	98	74	50	39	19	13	16	17	20	...
L4	5	29	92	166	172	124	89	58	32	29	33	37	...
L5	5	34	121	258	338	296	213	147	90	61	62	70	...
L6	5	39	155	379	596	634	509	360	237	151	123	132	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Fonte: *Autoria Própria.*

4.3.5 Produto de um Número por uma Tabela

Regra 4.5. *Uma Tabela de PAOS(A), ao ser multiplicada por um número inteiro n, terá como resultado, uma Tabela de PAOS, onde cada têrmo fica multiplicado pelo número n. E representadas pelas equações:*

$$PAOS(n \cdot A) = n \cdot PAOS(A) \tag{4.12}$$

$$PAOS(n \cdot A)_{l,c} = n \cdot a_{l,c}. \tag{4.13}$$

Demonstração. Multiplicar uma PAOS por um número n inteiro é o mesmo que somar a mesma PAOS n vezes. Utilizando o conceito de Somatória de Tabelas de PAOS, dado na Regra 4.4.

$$PAOS(n \cdot A) = PAOS(\underbrace{A + \ldots + A}_{\text{n têrmos}}) = \underbrace{PAOS(A) + \ldots + PAOS(A)}_{\text{n têrmos}}$$

Mas

$$\underbrace{PAOS(A) + \ldots + PAOS(A)}_{\text{n têrmos}} = n \cdot PAOS(A)$$

Então pode-se escrever:

$$PAOS(n \cdot A) = n \cdot PAOS(A)$$

Conforme proposto. □

Exemplo 4.15. *Considerar a Tabela de PAOS(1,2,3,4), construir as Tabelas de PAOS(3,6,9,12), 3 · PAOS(1,2,3,4) e PAOS(1,2,3,4), e mostrar alguns valores para comprovação.*

Solução:construir as Tabelas de PAOS indicadas, conforma Tabela 4.22

Tabela 4.22: Produto da PAOS por n. $3 \cdot$ PAOS(1,2,3,4) = PAOS(3,6,9,12).

(a) Tabela da PAOS(3,6,9,12)

	C1	C2	C3	C4
Ł1	**3**	**6**	**9**	**12**
L2	3	9	15	21
L3	**3**	**12**	24	36
L4	3	**15**	36	60
L5	3	18	51	96
L6	3	21	**69**	**147**
L7	3	24	90	**216**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(b) Tabela de 3·PAOS(1,2,3,4)

	C1	C2	C3	C4
Ł1	**3·1**	**3·2**	**3·3**	**3·4**
L2	3·1	3·3	3·5	3·7
L3	**3·1**	**3·4**	3·8	3·12
L4	3·1	**3·5**	3·12	3·20
L5	3·1	3·6	3·17	3·32
L6	3·1	3·7	**3·23**	**3·49**
L7	3·1	3·8	3·30	**3·72**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(c) Tabela da PAOS(1,2,3,4)

	C1	C2	C3	C4
Ł1	**1**	**2**	**3**	**4**
L2	1	3	5	7
L3	**1**	**4**	8	12
L4	1	**5**	12	20
L5	1	6	17	32
L6	1	7	**23**	**49**
L7	1	8	30	**72**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: *Autoria Própria.*

Exibindo alguns valores, marcados, e comprovando, que n·PAOS(A)=PAOS(n·A).

$$3 = 3 \cdot 1 \qquad 3 = 3 \cdot 1 \qquad 69 = 3 \cdot 23$$

$$6 = 3 \cdot 2 \qquad 12 = 3 \cdot 4 \qquad 147 = 3 \cdot 49$$

$$9 = 3 \cdot 3 \qquad 15 = 3 \cdot 5 \qquad 216 = 3 \cdot 72$$

$$12 = 3 \cdot 4.$$

4.3.6 Unitização de Tabela

Definição 4.7. *Define-se a Tabela de PAOS Unitária, quando a Sequência Geratriz é uma Sequência Numérica, composta de* 0*(zeros) e somente um têrmo desta sequência é o numeral* 1*. Que poderá ser representada por: $PAOS\ (0,\ldots,0,1_k,0,\ldots)_{k\in\mathbb{N}} \equiv PAOS(p(k))$, onde k indica a ordem de localização do têrmo igual a 1.*

Afirmação 4.2. *Uma Tabela de PAOS Unitária, $PAOS(p(k))$, representa um Triângulo de Pascal deslocado para a coluna k.*

Demonstração. A comprovação desta afirmativa baseia-se em dois elementos básicos para a construção da Tabela de PAOS:

1 - A regra Tabela de PAOS - Regra da Soma em L, dada na Definição 4.1, coincide com a relação de Stiefel do Triângulo de Pascal;

2 - A Tabela de PAOS Unitária começa com o numeral 1, da mesma forma que o Triângulo de Pascal;

3 - O início da construção da Tabela de PAOS inicia-se na coluna k.

□

Exemplo 4.16. *Gerar algumas PAOS Unitárias quaisquer.*

Solução: *Utilizando-se a definição de Tabela de PAOS Estendida, conforme Definição 4.5, indica-se algumas PAOS Unitárias, exibidas a seguir.*

$$
\begin{aligned}
PAOS(1,0,0,0,0,0,0,\ldots)_{n\in\mathbb{N}} &\equiv PAOS(p(1))\\
PAOS(0,1,0,0,0,0,0,\ldots)_{n\in\mathbb{N}} &\equiv PAOS(p(2))\\
PAOS(0,0,1,0,0,0,0,\ldots)_{n\in\mathbb{N}} &\equiv PAOS(p(3))\\
PAOS(0,0,0,1,0,0,0,\ldots)_{n\in\mathbb{N}} &\equiv PAOS(p(4))\\
PAOS(0,0,0,0,1,0,0,\ldots)_{n\in\mathbb{N}} &\equiv PAOS(p(5))\\
&\vdots\\
PAOS(0,0,\ldots,1_k,\ldots,0,0,\ldots)_{n\in\mathbb{N}} &\equiv PAOS(p(k))
\end{aligned}
$$

Exemplo 4.17. *Construir a* $PAOS(1, 0, 0, 0, 0, \ldots)$.

Considerando a PAOS Unitárias, dada por $PAOS(p(1))$, *conforme exibida na Tabela 4.23.*

Tabela 4.23: $PAOS(p(1))$

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	...
L1	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	...
L2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	...
L3	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	...
L4	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	...
L5	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	...
L6	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	...
L7	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	...
L8	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Fonte: *Autoria Própria.*

Exemplo 4.18. *Construir a* $PAOS(0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$.

Considerando a PAOS Unitárias, dada por $PAOS(p(2))$, *conforme exibida na Tabela 4.24.*

Tabela 4.24: $PAOS(p(2))$

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	...
L1	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	...
L2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	...
L3	0	1	2	1	0	0	0	0	0	0	...
L4	0	1	3	3	1	0	0	0	0	0	...
L5	0	1	4	6	4	1	0	0	0	0	...
L6	0	1	5	10	10	5	1	0	0	0	...
L7	0	1	6	15	20	15	6	1	0	0	...
L8	0	1	7	21	35	35	21	7	1	0	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Fonte: *Autoria Própria.*

Exemplo 4.19. *Construir a Tabela de* $PAOS(0, \ldots, 0, 1_k, 0, \ldots)$.

Seja a PAOS Unitárias, $PAOS(p(k))$, *conforme Tabela 4.25.*

Tabela 4.25: $PAOS(p(k))$

	$\ldots$	C_{k-1}	C_k	C_{k+1}	C_{k+2}	C_{k+3}	C_{k+4}	C_{k+5}	C_{k+6}	C_{k+7}	$\ldots$
L_1	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	$\ldots$
L_2	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	$\ldots$
L_3	0	0	1	2	1	0	0	0	0	0	$\ldots$
L_4	0	0	1	3	3	1	0	0	0	0	$\ldots$
L_5	0	0	1	4	6	4	1	0	0	0	$\ldots$
L_6	0	0	1	5	10	10	5	1	0	0	$\ldots$
L_7	0	0	1	6	15	20	15	6	1	0	$\ldots$
L_8	0	0	1	7	21	35	35	21	7	1	$\ldots$
L_9	0	0	1	8	28	56	70	56	28	8	$\ldots$
L_{10}	0	0	1	9	36	84	126	126	84	36	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Fonte: *Autoria Própria.*

Corolário 4.1. *Qualquer Tabela de PAOS, do tipo* $PAOS(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots, a_n)$, *pode ser reescrita, utilizando-se de Tabelas de PAOS Unitárias. E dado pelas equações:*

$$PAOS(0, \ldots, 0, a_k, 0, \ldots)_{n \in \mathbb{N}} \equiv a_k \cdot PAOS(p(k)) \tag{4.14}$$

$$PAOS(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_k, \ldots, a_n)_{n \in \mathbb{N}} \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot PAOS(p(k)) \tag{4.15}$$

Demonstração. A comprovação desta afirmativa, baseia-se no fato de que qualquer número, pode ser reescrito, como sendo o produto dele mesmo, pela unidade.

Utilizando-se a propriedade do Produto de um Número Inteiro por uma Tabela de PAOS, conforme Definição 4.5. Pode-se escrever:

Seja uma PAOS estendida qualquer, de um único têrmo diferente de zero.

PAOS $(0, 0, 0, \ldots, 0, a_k, 0, \ldots)$, como pode-se escrever $a_k = a_k \cdot 1$

Então.

$$PAOS(0, \ldots, 0, a_k, 0, \ldots) = a_k \cdot PAOS(0, \ldots, 0, 1_k, 0, \ldots)$$

$$PAOS(0, \ldots, 0, a_k, 0, \ldots) \equiv a_k \cdot PAOS(p(k)) \tag{4.16}$$

Seja uma Tabela de PAOS, qualquer, dada por: $PAOS(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_n)$
Utilizando-se a Equação 4.16 pode-se reescrever sucessivamente:

$$\begin{aligned} PAOS(a_1, 0, 0, 0, 0, \ldots) &\equiv a_1 \cdot PAOS(p(1)) \\ PAOS(0, a_2, 0, 0, 0, \ldots) &\equiv a_2 \cdot PAOS(p(2)) \\ &\vdots \\ PAOS(0, \ldots, 0, a_k, 0, \ldots) &\equiv a_k \cdot PAOS(p(k)) \\ &\vdots \\ PAOS(0, 0, 0, 0, \ldots, a_n) &\equiv a_n \cdot PAOS(p(n)) \end{aligned} \tag{4.17}$$

Somando-se as coluna, têrmo a têrmo, do bloco de equações visualizadas na Equação 4.17. Levando-se em conta, a propriedade de Somatória de Tabela de PAOS, na Regra 4.4, e a Unitização da Tabela de PAOS na Definição 4.7, pode-se escrever:

$$\sum_{k=1}^{n} PAOS(0, \ldots, a_k, \ldots, 0) \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot PAOS(p(k))$$

Mas

$$\sum_{k=1}^{n} PAOS(0, \ldots, a_k, \ldots, 0) \equiv PAOS(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_k, \ldots, a_n)$$

Então:

$$PAOS(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_k, \ldots, a_n) \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot PAOS(p(k))$$

Conforme proposição. □

Afirmação 4.3. *Reescrever uma Tabela de PAOS Limitada, utilizando-se de Tabelas de PAOS Unitárias, transforma a Tabela de PAOS Limitada em Tabela de PAOS Estendida.*

Demonstração. A Tabela de PAOS Unitária é uma Tabela de PAOS Estendida, portanto a multiplicação de um número inteiro por uma Tabela de PAOS Estendida, gera uma Tabela de PAOS Estendida. □

Exemplo 4.20. *Representar a PAOS(5,0,0,0, ...) em função de uma PAOS Unitária.*

Solução: *Como: 5=5 · 1. Então pode-se reescrever:*

$$PAOS(5,0,0,0,\ldots) = 5 \cdot PAOS(1,0,0,0,\ldots)$$
$$PAOS(5,0,0,0,\ldots) = 5 \cdot PAOS(p(1))$$

Exemplo 4.21. *Representar a $PAOS(2,5,4,1)$, que é uma PAOS limitada, em função de uma PAOS Unitária.*

Solução: *Como: 2=2 · 1, 5=5 · 1, 4=4 · 1 e 1=1 · 1. Então pode-se reescrever:*

$$PAOS(2,0,0,0) = 2 \cdot PAOS(1,0,0,0,\ldots) = 2 \cdot PAOS(p(1))$$
$$PAOS(0,5,0,0) = 5 \cdot PAOS(0,1,0,0,\ldots) = 5 \cdot PAOS(p(2))$$
$$PAOS(0,0,4,0) = 4 \cdot PAOS(0,0,1,0,\ldots) = 4 \cdot PAOS(p(3))$$
$$PAOS(0,0,0,1) = 1 \cdot PAOS(0,0,0,1,\ldots) = 1 \cdot PAOS(p(4))$$

A soma destes têrmos gera a PAOS: $PAOS(2,5,4,1) = 2 \cdot PAOS(p(1)) + 5 \cdot PAOS(p(2)) + 4 \cdot PAOS(p(3)) + PAOS(p(4)) = PAOS(2,5,4,1,0,0,0,\ldots)$, *que é uma Tabela de PAOS Estendida, que pode ser verificado as alterações da tabela, quando ainda limitada, veja a Tabela 4.7 e a Tabela 4.8.*

Exemplo 4.22. *Representar a Tabela de PAOS(6,2,5,0,0,0,0, ...), em função de PAOS Unitárias.*

Solução: *Como: 6=6 · 1, 2=2 · 1, 5=5 · 1. Portanto pode-se reescrever:*

$$PAOS(6,0,0,0,\ldots) = 6 \cdot PAOS(1,0,0,0,\ldots) = 6 \cdot PAOS(p(1))$$
$$PAOS(0,2,0,0,\ldots) = 2 \cdot PAOS(0,1,0,0,\ldots) = 2 \cdot PAOS(p(2))$$
$$PAOS(0,0,5,0,\ldots) = 5 \cdot PAOS(0,0,1,0,\ldots) = 5 \cdot PAOS(p(3))$$

Somando-se a primeira e a terceira coluna têrmo têrmo, pode-se escrever então:
$PAOS(6,2,5,0,\ldots) = 6 \cdot PAOS(p(1)) + 2 \cdot PAOS(p(2)) + 5 \cdot PAOS(p(3))$

4.3.7 Fórmula do Têrmo Geral

Teorema 4.1. *A Fórmula do Têrmo Geral de uma Tabela de PAOS é dada pela Equação:*

$$a_{l,c} = \sum_{k=1}^{c} a_k \cdot \binom{l-1}{c-k}$$

Demonstração. Seja a Tabela Unitária a seguir $PAOS(0,\ldots,0,1_k,0,\ldots)$ conforme Definição 4.7, a qual representa um Triângulo de Pascal, conforme Teorema 4.2. Observando-se a Tabela 4.26, e levando-se em conta que ela se inicia a partir da coluna "k", para determinar a fórmula do têrmo na posição da linha l e na coluna c, de um Triângulo de Pascal, pode-se escrever como $a_{l,c}$.

Tabela 4.26: Fórmula do Têrmo Geral de uma Tabela de PAOS.

	1	...	k-1	k	k+1	k+2	k+3	...	**c**	c+1	c+2	c+3	...
1	**0**	**...**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**...**	**0**	**0**	**0**	**0**	**...**
2	0	...	0	1	1	0	0	...	0	0	0	0	...
3	0	...	0	1	2	1	0	...	0	0	0	0	...
4	0	...	0	1	3	3	1	...	0	0	0	0	...
5	0	...	0	1	4	6	4	...	0	0	0	0	...
6	0	...	0	1	5	10	10	...	0	0	0	0	...
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
l	0	...	0	1	l-1			...	$a_{l,c}$				...
l+1	0	...	0	1	l			...					...
l+2	0	...	0	1	l+1			...					...
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Fonte: *Autoria Própria.*

Este têrmo constante na linha "l"e coluna "c"da Tabela, fica na linha "l-1"e coluna "c-k"do Triângulo de Pascal, uma vez que neste, a linha e a coluna começam em 0(zero). Portanto para este têrmo do Triângulo de Pascal, nesta posição, pode-se escrever a equação do têrmo geral, somente para esta Tabela de PAOS Unitária, que se inicia na coluna k, como sendo:

$$a_{l,c} = \binom{l-1}{c-k} \tag{4.18}$$

Considerando agora, que seja uma Tabela de PAOS, com vários, termos diferentes de 0(zero), do tipo: PAOS $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_k, \ldots, a_p, \ldots)$.

Fazendo a Equação 4.18, do têrmo para uma única Tabela Unitária percorrer todos os têrmos da PAOS, e utilizando-se o Corolário 4.1, que reescreve uma PAOS, em função das PAOS unitárias, teremos:

$$a_{l,c} = \sum_{k=1}^{c} a_k \cdot \binom{l-1}{c-k}$$

O que comprova o Teorema. $\square$

Exemplo 4.23. *Seja a PAOS$(2, 3, 1, 0, 2, 1, 0, 5, 3, \ldots)$, determinar o têrmo $a_{9,5}$.*

Observando-se a Tabela 4.27, construída utilizando-se esta Sequência Geratriz.

Tabela 4.27: Têrmo Geral $PAOS(2, 3, 1, 0, 2, 1, 0, 5, 3, \ldots)$

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	...
L1	**2**	**3**	**1**	**0**	**2**	**1**	**0**	**5**	**3**	...
L2	2	5	4	1	2	3	1	5	8	...
L3	2	7	9	5	3	5	4	6	13	...
L4	2	9	16	14	8	8	9	10	19	...
L5	2	11	25	30	22	16	17	19	29	...
L6	2	13	36	55	52	38	33	36	48	...
L7	2	15	49	91	107	90	71	69	84	...
L8	2	17	64	140	198	197	161	140	153	...
L9	2	19	81	204	**338**	395	358	301	293	...
L10	2	21	100	285	542	733	753	659	594	...
L11	2	23	121	385	827	1275	1486	1412	1253	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Fonte: *Autoria Própria.*

Utilizando a equação do têrmo geral de uma PAOS qualquer, mostrada na equação do Teorema 4.1, vamos escrever:

$$a_{9,5} = \sum_{k=1}^{5} a_k \cdot \binom{9-1}{5-k}$$

$$\begin{aligned}
a_{9,5} &= 2 \cdot \binom{9-1}{5-1} \quad +3 \cdot \binom{9-1}{5-2} \quad +1 \cdot \binom{9-1}{5-3} \quad +0 \cdot \binom{9-1}{5-4} \quad +2 \cdot \binom{9-1}{5-5}\\
&= 2 \cdot \binom{8}{4} \quad +3 \cdot \binom{8}{3} \quad +1 \cdot \binom{8}{2} \quad +0 \cdot \binom{8}{1} \quad +2 \cdot \binom{8}{0}\\
&= 2 \cdot 70 \quad +3 \cdot 56 \quad +1 \cdot 28 \quad +0 \cdot 8 \quad +2 \cdot 1\\
a_{9,5} &= 338.
\end{aligned}$$

4.3.8 Fórmula da Soma da Coluna

Corolário 4.2. *A Fórmula da Soma da Coluna, de uma Tabela de PAOS, será dada pela Equação:*

$$SC_{l,c} = \sum_{k=1}^{c} a_k \cdot \binom{l}{c+1-k}$$

Demonstração. Seja a Tabela de PAOS Unitária 4.28, a qual representa um Triângulo de Pascal, conforme Teorema 4.2.

De acordo com a Regra da Soma da Coluna 4.2, a soma da coluna c, desde a linha 1 até a linha l é representada pelo têrmo $a_{l+1,c+1}$. Então utilizando-se a Fórmula do Têrmo Geral, vista no Teorema 4.1, para o têrmo, teremos como resultado, a equação: Válido para Tabelas de PAOS Estendida, a partir da última coluna dos dígitos da Sequência Geratriz diferentes de zero.

Tabela 4.28: Fórmula da Soma da Coluna.

	1	...	k	k+1	k+2	k+3	...	**c**	c+1	c+2	c+3	...
1	0	...	1	0	0	0	0...	**0**	**0**	0	0	...
2	0	...	1	1	0	0	...	**0**	0	0	0	...
3	0	...	1	2	1	0	...	**0**	0	0	0	...
4	0	...	1	3	3	1	...	**0**	0	0	0	...
...	0	...	1	...	...	...	...	**...**	...	...	...	...
l	0	...	1	l-1			...	$a_{l,c}$				...
l+1	0	...	1	l			...		$a_{l+1,c+1}$			...
l+2	0	...	1	l+1			...					...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Fonte: *Autoria Própria.*

Então podemos escrever:

$$SC_{l,c} = a_{l+1,c+1} = \sum_{k=1}^{c} a_k \cdot \binom{l-1}{c-k} = \sum_{k=1}^{c} a_k \cdot \binom{(l+1)-1}{(c+1)-k} = \sum_{k=1}^{c} a_k \cdot \binom{l}{c+1-k}.$$

Conforme proposição.

$\square$

Exemplo 4.24. *Seja uma Tabela de PAOS Estendida qualquer, dado como a seguir:* *PAOS* $(2, 5, 4, 3, 0, 0, 0, \ldots)$.

Calcular a soma até a linha 7, da coluna 4.

Tabela 4.29: PAOS$(2, 5, 4, 3, 0, 0, 0, \ldots)$

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	...
L1	2	5	4	3	0	0	0	0	0	0	...
L2	2	7	9	7	3	0	0	0	0	0	...
L3	2	9	16	16	10	3	0	0	0	0	...
L4	2	11	25	32	26	13	3	0	0	0	...
L5	2	13	36	57	58	39	16	3	0	0	...
L6	2	15	49	93	115	97	55	19	3	0	...
L7	2	17	64	142	208	212	152	74	22	3	...
L8	2	19	81	206	350	420	364	226	96	25	...
L9	2	21	100	287	556	770	784	590	322	121	...
L10	2	23	121	387	843	1326	1554	1374	912	443	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Fonte: *Autoria Própria.*

Aplicando-se a Fórmula da Soma da Coluna de uma Tabela de PAOS Estendida, conforme visto na Equação 4.2.
Utilizando a equação:

$$SC_{l,c} = \sum_{k=1}^{c} a_k \cdot \binom{l}{c+1-k}$$

para a coluna 4, da linha 1 até a 7.

$$SC_{7,4} = \sum_{k=1}^{4} a_k \cdot \binom{7}{4+1-k} = \sum_{k=1}^{4} a_k \cdot \binom{7}{5-k}$$

$$\begin{aligned} SC_{7,4} &= 2 \cdot \binom{7}{5-1} && +5 \cdot \binom{7}{5-2} && +4 \cdot \binom{7}{5-3} && +3 \cdot \binom{7}{5-4} \\ &= 2 \cdot \binom{7}{4} && +5 \cdot \binom{7}{3} && +4 \cdot \binom{7}{2} && +3 \cdot \binom{7}{1} \\ &= 2 \cdot 35 && +5 \cdot 35 && +4 \cdot 21 && +3 \cdot 7 \end{aligned}$$

$SC_{7,4} = 350.$

4.3.9 Fórmula da Soma da Diagonal

Corolário 4.3. *A Fórmula da Soma da Diagonal, de uma Tabela de PAOS, será dada pela Equação:*

$$SD_{(l,c)_r} = \sum_{k=1}^{c+r} a_k \cdot \binom{l+r-1}{c+r-k}$$

Demonstração. De acordo com a Regra da Soma da Diagonal 4.3, que se inicia no têrmo $a_{l,c}$, por r têrmos sucessivos crescentes em linha e coluna, é representada pelo têrmo $a_{l+r,c+r}$. Então utilizando-se a Fórmula do Têrmo Geral, vista no Teorema 4.1.

$$a_{l,c} = \sum_{k=1}^{c} a_k \cdot \binom{l-1}{c-k}$$

Utilizando-se esta equação para o têrmo $a_{l+r,c+r}$, substituindo-se na Fórmula do Têrmo Geral, a linha por $l+r$ e a coluna por $c+r$, conforme visualizada na Tabela 4.30.

Tabela 4.30: Fórmula da Soma da Diagonal.

	C	$C+1$	$C+2$	.	$C+r-1$	C+r	Z
L	$a_{l,c}$	$a_{l,c+1}$	$a_{l,c+2}$	.	$a_{l,c+r-1}$	$a_{l,c+r}$	.
L+1	$a_{l+1,c}$	$a_{l+1,c+1}$	$a_{l+1,c+2}$	.	$a_{l+1,c+r-1}$	$a_{l+1,c+r}$	.
...	...	...	...	.	...	...	.
L+r-2	$a_{l+r-2,c}$	$a_{l+r-2,c+1}$	$a_{l+r-2,c+2}$	.	$a_{l+r-2,c+r-1}$	$a_{l+r-2,c+r}$	.
L+r-1	$a_{l+r-1,c}$	$a_{l+r-1,c+1}$	$a_{l+r-1,c+2}$	.	$a_{l+r-1,c+r-1}$	$a_{l+r-1,c+r}$	.
L+r	$a_{l+r,c}$	$a_{l+r,c+1}$	$a_{l+r,c+2}$	.	$a_{l+r,c+r-1}$	$a_{l+r,c+r}$	.
L+r+1	$a_{l+r+1,c}$	$a_{l+r+1,c+1}$	$a_{l+r+1,c+2}$	.	$a_{l+r+1,c+r-1}$	$a_{l+r+1,c+r}$	.
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	.

Fonte: *Autoria Própria.*

Então podemos escrever:

$$SD_{(l,c)_r} = \sum_{k=1}^{c+r} a_k \cdot \binom{(l+r)-1}{(c+r)-k} = \sum_{k=1}^{c+r} a_k \cdot \binom{l+r-1}{c+r-k}.$$

Conforme proposição.

□

Exemplo 4.25. *Seja o exemplo 4.11 já dado, recalcular as mesmas somas, agora utilizando a Fórmula do Têrmo Geral da soma da Diagonal de uma Tabela de PAOS Estendida. Seja dada a PAOS:* $(2, 5, 4, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots, a_n, \ldots)_{n \in \mathbb{N}}$. *Comprovar a Fórmula do Têrmo Geral dado pela equação relatada em 4.3.*

Solução: *Tomando-se a Tabela de PAOS, aplicar a equação e comprovar a conformidade.*

Tabela 4.31: Têrmo da Soma da Diagonal $PAOS(2, 5, 4, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots)$

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	...
L1	**2**	**5**	**4**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	...
L2	2	7	9	5	1	0	0	0	0	...
L3	2	9	16	14	6	1	0	0	0	...
L4	2	11	25	30	20	7	1	0	0	...
L5	2	13	36	55	50	27	8	1	0	...
L6	2	15	49	91	105	77	35	9	1	...
L7	2	17	64	140	196	182	112	44	10	...
L8	2	19	81	204	336	378	294	156	54	...
L9	2	21	100	285	540	714	672	450	210	...
L10	2	23	121	385	825	1254	1386	1122	660	...
L11	2	25	144	506	1210	2079	2640	2508	1782	...
L12	2	27	169	650	1716	3289	4719	5148	4290	...
L13	2	29	196	819	2366	5005	8008	9867	9438	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Fonte: *Autoria Própria.*

Onde para os valores que aparecem marcados, são mostrados a relação entre eles: Utilizando a equação têrmo geral da Soma da Diagonal de uma Tabela de PAOS:

$$SD_{(c,l)_r} = \sum_{k=1}^{c+r} a_k \cdot \binom{l+r-1}{c+r-k}$$

Verificando a Soma da Diagonal, do têrmo $(a_{2,1})$ *por 7 têrmos sucessivos.*

$$S.D(a_{2,1})_7 = 2 + 7 + 16 + 30 + 50 + 77 + 112 + 156 = 450;$$

$$SD_{(2,1)_7} = \sum_{k=1}^{1+7} a_k \cdot \binom{2+7-1}{1+7-k} = \sum_{k=1}^{8} a_k \cdot \binom{8}{8-k}$$

Observar que a Tabela de PAOS é: PAOS(2,5,4,1,0,0,0,0,0,0,0, ...), portanto a partir do quinto têrmo, a parcela a_k, é igual a 0(zero), o que motiva a não exibi-los.

$$\begin{aligned}
SD_{(2,1)_7} &= 2 \cdot \binom{8}{8-1} \quad + 5 \cdot \binom{8}{8-2} \quad + 4 \cdot \binom{8}{8-3} \quad + 1 \cdot \binom{8}{8-4} \quad + 0 \ldots \\
&= 2 \cdot \binom{8}{7} \quad + 5 \cdot \binom{8}{6} \quad + 4 \cdot \binom{8}{5} \quad + 1 \cdot \binom{8}{4} \quad + 0 \ldots \\
&= 2 \cdot 8 \quad + 5 \cdot 28 \quad + 4 \cdot 56 \quad + 1 \cdot 70 \quad + 0 \ldots \\
SD_{(2,1)_7} &= 450.
\end{aligned}$$

Verificando a Soma da Diagonal, do têrmo ($a_{4,0}$) por 6 têrmos sucessivos.

$$S.D(a_{4,0})_6 = 2 + 13 + 49 + 140 + 336 + 714 = 1254;$$

$$SD_{(l,c)_r} = \sum_{k=1}^{c+r} a_k \cdot \binom{l+r-1}{c+r-k}$$

$$SD_{(4,0)_6} = \sum_{k=1}^{1+6} a_k \cdot \binom{4+6-1}{0+6-k} = \sum_{k=1}^{7} a_k \cdot \binom{9}{6-k}$$

Observar que a Tabela de PAOS é: PAOS(2,5,4,1,0,0,0,0,0,0,0, ...), portanto a partir do quinto têrmo, a parcela a_k, é igual a 0(zero), o que motiva a não exibi-los.

$$\begin{aligned}
SD_{(4,0)_6} &= 2 \cdot \binom{9}{6-1} \quad +5 \cdot \binom{9}{6-2} \quad +4 \cdot \binom{9}{6-3} \quad +1 \cdot \binom{9}{6-4} \quad + 0 \ldots \\
&= 2 \cdot \binom{9}{5} \quad +5 \cdot \binom{9}{4} \quad +4 \cdot \binom{9}{3} \quad +1 \cdot \binom{9}{2} \quad + 0 \ldots \\
&= 2 \cdot 126 \quad +5 \cdot 126 \quad +4 \cdot 84 \quad +1 \cdot 36 \quad + 0 \ldots \\
SD_{(4,0)_6} &= 1254.
\end{aligned}$$

Verificando a Soma da Diagonal, do têrmo ($a_{9,2}$) por 3 têrmos sucessivos.

$$S.D(a_{9,2})_3 = 21 + 100 + 385 + 1210 = 1716;$$

$$SD_{(l,c)_r} = \sum_{k=1}^{c+r} a_k \cdot \binom{l+r-1}{c+r-k}$$

$$SD_{(9,2)_3} = \sum_{k=1}^{2+3} a_k \cdot \binom{9+3-1}{2+3-k} = \sum_{k=1}^{5} a_k \cdot \binom{11}{5-k}$$

Observar que a Tabela de PAOS é: PAOS(2,5,4,1,0,0,0,0,0,0,0, ...), portanto a partir do quinto têrmo, a parcela a_k, é igual a 0(zero), o que motiva a não exibi-los.

$$\begin{aligned}
SD_{(9,2)_3} &= 2\cdot\binom{11}{5-1} \quad +5\cdot\binom{11}{5-2} \quad +4\cdot\binom{11}{5-3} \quad +1\cdot\binom{11}{5-4} \quad +0\ldots\\
&= 2\cdot\binom{11}{4} \quad +5\cdot\binom{11}{3} \quad +4\cdot\binom{11}{2} \quad +1\cdot\binom{11}{1} \quad +0\ldots\\
&= 2\cdot 330 \quad +5\cdot 165 \quad +4\cdot 55 \quad +1\cdot 11 \quad +0\ldots\\
SD_{(9,2)_3} &= 1716.
\end{aligned}$$

4.3.10 Fórmula da Soma de uma Linha

Corolário 4.4. *Define-se Soma de uma Linha de uma Tabela de PAOS Estendida, como sendo a soma de todos os seus têrmos pertencentes a esta linha, e será dado pela Equação:*

$$S.L_l = 2^{(l-1)} \cdot \sum_{k=1}^{n} (a_k)$$

Demonstração. Tendo-se em conta que de acordo com a definição de PAOS Unitária, ver na Definição 4.7, $(0,0,\ldots,1_k,0,0,\ldots)$, ser equivalente a um Triângulo de Pascal, a partir da coluna K de um Tabela de PAOS. Mas em um Triângulo de Pascal, temos que a somatória de uma linha de uma PAOS unitária, é igual a 2^{l-1}, e, para uma PAOS Estendida não unitária, $(0,0,0,0,\ldots,a_k,\ldots)$, a somatória é dada por $a_k \cdot 2^{l-1}$.
Para uma PAOS estendida qualquer, $(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_k,\ldots+a_n)$, percorremos todos os têrmos da Sequência Geratriz da tabela de PAOS, portanto podemos escrever:

$$S.L_l = 2^{(l-1)} \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + \ldots + a_n) = 2^{(l-1)} \cdot \sum_{k=1}^{n} (a_k).$$

□

Exemplo 4.26. *Determinar a SOMA da linha de uma PAOS Estendida qualquer.*

Solução: *Seja a PAOS* $(2, 5, 4, 3, 0, 0, 0, \ldots)$, *determinar a soma da linha* 5, *da Tabela 4.32.*

Tabela 4.32: Soma da linha 5 da PAOS$(2, 5, 4, 3, 0, 0, 0, \ldots)$

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	...
L1	2	5	4	3	0	0	0	0	0	0	...
L2	2	7	9	7	3	0	0	0	0	0	...
L3	2	9	16	16	10	3	0	0	0	0	...
L4	2	11	25	32	26	13	3	0	0	0	...
L5	**2**	**13**	**36**	**57**	**58**	**39**	**16**	**3**	0	0	...
L6	2	15	49	93	115	97	55	19	3	0	...
L7	2	17	64	142	208	212	152	74	22	3	...
L8	2	19	81	206	350	420	364	226	96	25	...
L9	2	21	100	287	556	770	784	590	322	121	...
L10	2	23	121	387	843	1326	1554	1374	912	443	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Fonte: *Autoria Própria.*

Aplicando a Equação 4.4, calcular a soma da linha 5 da PAOS$(2, 5, 4, 3, 0, 0, \ldots)$

$$
\begin{aligned}
S.L_5 &= 2^{(5-1)} \sum_{k=1}^{5} (a_k) \\
&= 2^4(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \\
&= 2^4(2 + 5 + 4 + 3) \\
&= 16 \cdot 14 \\
S.L_5 &= 224.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos:

$$S.L_5 = (2 + 13 + 36 + 57 + 58 + 39 + 16 + 3) = 224.$$

O que comprova esta afirmação.

5 Transformações numa Tabela de PAOS

5.1 Considerações Iniciais

Neste Capítulo, serão desenvolvidos alguns conceitos novos, que poderão servir de linhas de desafios e pesquisa nas relações entre Progressões Aritméticas de Ordem Superior e Polinômios, que ficam como áreas ainda a serem melhor desenvolvidas.

Definição 5.1. *Define-se uma transformação numa Tabela de PAOS, quando a Sequência Geratriz, é transformada em outra sequência, dentro da Tabela de PAOS, por alguma regra definida e estruturada.*

5.1.1 Transformação Direta Restrita Inicial

Definição 5.2. *Define-se uma Transformação Direta Restrita Inicial, de ordem p, na Tabela de PAOS, como sendo a sequência encontrada, avançando-se p linhas no sentido descendente, considerando os primeiros têrmos da linha e preservando a sua ordem e a mesma quantidade de têrmos.*

Notação: *Doravante, para indicarmos a sequência Transformada Direta Restrita Inicial, de ordem p, de uma Tabela de PAOS, pode-se usar a notação:*
TDRI.PAOS$(a_1, a_2, \ldots, a_n)_p$.

Exemplo 5.1. *Determinar a Transformada Direta Restrita Inicial, de ordem* 3*, da Tabela de PAOS(2,5,4,1,0,0,0 ...).*

Solução: *Montada a PAOS*$(2, 5, 4, 1, 0, 0, 0, \ldots)$*, a transformada, é formada pelos 4 primeiros têrmos, ao avançar 3 linhas, ou seja, na linha 4.*

Tabela 5.1: Transformação Direta Restrita Inicial.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	...
L1	**2**	**5**	**4**	**1**	0	0	0	0	0	...
L2	2	7	9	5	1	0	0	0	0	...
L3	2	9	16	14	6	1	0	0	0	...
L4	**2**	**11**	**25**	**30**	20	7	1	0	0	...
L5	2	13	36	55	50	27	8	1	0	...
L6	2	15	49	91	105	77	35	9	1	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Fonte: *Autoria Própria.*

Observação 5.1. *Portanto de acordo com a definição, a sequência* $(2, 5, 4, 1)$ *foi transformada na sequência* $(2, 11, 25, 30)$*, avançando* 3 *linhas, e o indicamos pela notação:* *TDRI.PAOS*$(2, 5, 4, 1)_3 = (2, 11, 25, 30)$.

5.1.2 Transformação Direta Restrita Final

Definição 5.3. *Define-se uma Transformação Direta Restrita Final, de ordem p, em uma Tabela de PAOS, como sendo a sequência encontrada, avançando-se p linhas no sentido descendente, considerando os últimos têrmos da linha e preservando a sua ordem e a mesma quantidade de têrmos.*

Notação: *Doravante, para indicarmos uma Transformação Direta Restrita Final, de ordem p, de uma Tabela de PAOS, pode-se usar a notação:* *TDRF.PAOS*$(a_1, a_2, \ldots, a_n)_p$.

Exemplo 5.2. *Determinar a Transformada Direta Restrita Final, de ordem* 5*, da Tabela de PAOS(2,5,4,1,0,0,0 ...).*

Solução: *Montada a PAOS*$(2, 5, 4, 1, 0, 0, 0, \ldots)$*, a transformada, é composta pelos 4 últimos têrmos, ao avançar 5 linhas, ou seja na linha 6.*

Tabela 5.2: Transformação Direta Restrita Final da PAOS(2,5,4,1).

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	...
L1	**2**	**5**	**4**	**1**	0	0	0	0	0	...
L2	2	7	9	5	1	0	0	0	0	...
L3	2	9	16	14	6	1	0	0	0	...
L4	2	11	25	30	20	7	1	0	0	...
L5	2	13	36	55	50	27	8	1	0	...
L6	2	15	49	91	105	**77**	**35**	**9**	**1**	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Fonte: *Autoria Própria.*

Observação 5.2. *Portanto de acordo com a definição, a sequência* $(2, 5, 4, 1)$ *foi transformada na sequência* $(77, 35, 9, 1)$*, avançando* 5 *linhas, e o indicamos pela notação:* *TDRI.PAOS*$(2, 5, 4, 1)_5 = (77, 35, 9, 1)$.

5.1.3 Transformação Direta Extensiva

Definição 5.4. *Define-se uma Transformação Direta Extensiva, de ordem p, em uma Tabela de PAOS, como sendo a sequência encontrada, quando avançando p linhas no sentido descendente, considerando todos os têrmos desta linha e preservando a sua ordem.*

Notação: *Doravante, para indicarmos uma Transformação Direta Extensiva, de ordem p, de uma Tabela de PAOS, pode-se usar a notação:*
TDE.PAOS$(a_1, a_2, \ldots, a_n)_p$.

Exemplo 5.3. *Determinar a Transformada Direta Restrita Extensiva, de ordem* 3*, da Tabela de PAOS(2,5,4,1,0,0,0 ...).*

Solução: *Montada a PAOS*$(2, 5, 4, 1, 0, 0, 0, \ldots)$*, a transformada, é composta por todos os têrmos, ao avançar 3 linhas, ou seja na linha 4.*

Tabela 5.3: Transformação Direta Extensiva da PAOS(2,5,4,1)

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	...
L1	**2**	**5**	**4**	**1**	0	0	0	0	0	...
L2	2	7	9	5	1	0	0	0	0	...
L3	2	9	16	14	6	1	0	0	0	...
L4	**2**	**11**	**25**	**30**	**20**	**7**	**1**	0	0	...
L5	2	13	36	55	50	27	8	1	0	...
L6	2	15	49	91	105	77	35	9	1	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Fonte: *Autoria Própria.*

De acordo com a definição, a sequência $(2, 5, 4, 1)$ *foi transformada na sequência* $(2, 11, 25, 30, 20, 7, 1)$*, avançando* 3 *linhas, e o indicamos pela notação:*
$TDE.PAOS(2, 5, 4, 1)_3 = (2, 11, 25, 30, 20, 7, 1)$.

Observação 5.3. *A Transformação Direta Extensiva, passa a representar a continuidade da Tabela de PAOS, da sequência anterior, como se uma nova Tabela de PAOS, tivesse a sua Sequência Geratriz naquela linha, como pode ser vista na Tabela 5.4.*

Tabela 5.4: PAOS$(2, 11, 25, 30, 20, 7, 1, 0, \ldots)$ Gerada a partir de PAOS$(2, 5, 4, 1, 0, \ldots)$

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	...
L1	**2**	**11**	**25**	**30**	**20**	**7**	**1**	0	0	0	0	0	...
L2	2	13	36	55	50	27	8	1	0	0	0	0	...
L3	2	15	49	91	105	77	35	9	1	0	0	0	...
L4	2	17	64	140	196	182	112	44	10	1	0	0	...
L5	2	19	81	204	336	378	294	156	54	11	1	0	...
L6	2	21	100	285	540	714	672	450	210	65	12	1	...
L7	2	23	121	385	825	1254	1386	1122	660	275	77	13	...
L8	2	25	144	506	1210	2079	2640	2508	1782	935	352	90	...
L9	2	27	169	650	1716	3289	4719	5148	4290	2717	1287	442	...
L10	2	29	196	819	2366	5005	8008	9867	9438	7007	4004	1729	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Fonte: *Autoria Própria.*

Observação 5.4. *Cada linha da Tabela de PAOS, representa uma Família de Polinômios, que vai desde o grau zero, cresce até atingir um valor máximo, decrescendo novamente, retornando a zero.*

5.1.4 Transformação Retrógrada

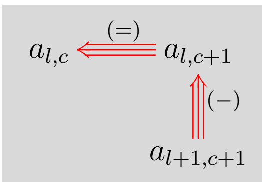
Considerações Iniciais

Para o estudo das Transformação Retrógrada numa tabela de PAOS, necessita-se de algumas definições:

Definição 5.5. *Define-se Operador Reverso, sobre o têrmo* ($a_{l,c}$)*, numa tabela, como sendo este têrmo, subtraído do têrmo da mesma coluna e da linha anterior* ($a_{l-1,c}$)*, e tendo como resultado, o têrmo imediatamente anterior da linha e da coluna* ($a_{l-1,c-1}$)*, conforme exibido na Figura 5.1, e na Tabela 5.5.*

Notação: *Doravante, quando referido a um Operador reverso, poderá ser usada a notação, e dado pela expressão:*
$OR(a_{l,c}) = a_{l-1,c-1} = a_{l,c} - a_{l-1,c}$.

Figura 5.1: Operador Reverso, visual.



Fonte: *Autoria Própria.*

Tabela 5.5: Operador Reverso na Tabela.

	Col	$C-1$	C	$C+1$	$C+2$	$C+3$	$\dots$
Lin	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$L-1$	$\dots$	$a_{l-1,c-1}$	$a_{l-1,c}$	$a_{l-1,c+1}$	$a_{l-1,c+2}$	$a_{l-1,c+3}$	$\dots$
L	$\dots$	$a_{l,c-1}$	$a_{l,c}$	$a_{l,c+1}$	$a_{l,c+2}$	$a_{l,c+3}$	$\dots$
$L+1$	$\dots$	$a_{l+1,c-1}$	$a_{l+1,c}$	$a_{l+1,c+1}$	$a_{l+1,c+2}$	$a_{l+1,c+3}$	$\dots$
$L+2$	$\dots$	$a_{l+2,c-1}$	$a_{l+2,c}$	$a_{l+2,c+1}$	$a_{l+2,c+2}$	$a_{l+2,c+3}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Fonte: *Autoria Própria.*

Espaço das Tabelas de PAOS

Definição 5.6. *Define-se o Espaço das tabelas de PAOS, como sendo uma região infinita, dividida em dois semi-espaços, sendo que, a parte inferior vale o Operador Soma, conforme Definição 4.1, e a parte superior, onde vale o Operador Reverso, conforme Definição 5.5. Visualizado na Figura 5.2.*

Figura 5.2: Espaço das Tabelas de PAOS.

Parte superior, se aplica o Operador Reverso.

$$\begin{tikzcd} a_{l,c} & a_{l,c+1} \arrow[l, Rightarrow, "(=)"'] \\ & a_{l+1,c+1} \arrow[u, Rightarrow, "(-)"'] \end{tikzcd}$$

$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$$\begin{tikzcd} a_{l,c} \arrow[r, Rightarrow, "(+)"] & a_{l,c+1} \arrow[d, Rightarrow, "(=)"] \\ & a_{l+1,c+1} \end{tikzcd}$$

Parte inferior, se aplica o Operador Soma.

Fonte: *Autoria Própria.*

Exemplo 5.4. *Introduzir um número na linha central do espaço das Tabelas de PAOS, e visualizar como ocorre a perturbação no Espaço das Tabela de PAOS.*

Solução: *Inserindo-se o numeral 1, na linha no Espaço das Tabelas de PAOS, pode-se visualizar como ocorre esta perturbação.*

Tabela 5.6: Perturbação no Espaço da Tabela de PAOS.

$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...
...	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
...	-5	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
...	10	-4	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
...	-10	6	-3	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	...
...	5	-4	3	-2	**1**	0	0	0	0	0	0	0	...
...	**-1**	**1**	**-1**	**1**	**-1**	**1**	0	0	0	0	0	0	...
0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
...	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0	0	...
...	0	0	0	0	0	0	**1**	2	**1**	0	0	0	...
...	0	0	0	0	0	0	**1**	3	3	**1**	0	0	...
...	0	0	0	0	0	0	**1**	4	6	4	**1**	0	...
...	0	0	0	0	0	0	**1**	5	10	10	5	**1**	...
...	0	0	0	0	0	0	**1**	6	15	20	15	6	...
...	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Fonte: *Autoria Própria.*

Transformação Retrógrada numa Tabelas de PAOS

Definição 5.7. *Define-se uma Transformação Retrógrada, num Espaço das Tabelas de PAOS, de ordem p, retroagindo-se p linhas no sentido ascendente, a partir da linha que separa as duas regiões, considerando-se os primeiros têrmos da linha e preservando a sua ordem e a mesma quantidade de têrmos.*

Notação: *Doravante, para indicarmos a sequência Transformada Retrógrada, de ordem p, de uma Tabela de PAOS, pode-se usar a notação:*
$TR.PAOS(a_1, a_2, \ldots, a_n)_p$.

Exemplo 5.5. *Introduzir a sequência, (1,2,3,4) na linha central do Espaço das Tabelas de PAOS, e visualizar como ocorre a perturbação no Espaço das Tabela de PAOS. Encontrar a Transformação retrógrada* $TR.PAOS(1, 2, 3, 4)_6$.

Solução: *Inserindo-se a sequência (1,2,3,4), na linha no Espaço das Tabelas de PAOS, pode-se visualizar como ocorre esta perturbação.*

Retroagindo em 6 linha no Espaço das Tabela de PAOS, encontra-se.

$TR.PAOS(1,2,3,4)_6 = (-172, 68, -21, 4)$.

Tabela 5.7: Transformação Retrógrada índice 6, da PAOS(1,2,3,4,0,0, ...).

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
...	-29	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
...	93	-25	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
...	-172	68	-21	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
...	200	-104	47	-17	4	0	0	0	0	0	0	0	0	...
...	-149	96	-57	30	-13	4	0	0	0	0	0	0	0	...
...	69	-53	39	-27	17	-9	4	0	0	0	0	0	0	...
...	-18	16	-14	12	-10	8	-5	4	0	0	0	0	0	...
...	2	-2	2	-2	2	-2	3	-1	4	0	0	0	0	...
...	0	0	0	0	0	0	1	2	3	4	0	0	0	...
...	0	0	0	0	0	0	1	3	5	7	4	0	0	...
...	0	0	0	0	0	0	1	4	8	12	11	4	0	...
...	0	0	0	0	0	0	1	5	12	20	23	15	4	...
...	0	0	0	0	0	0	1	6	17	32	43	38	19	...
...	0	0	0	0	0	0	1	7	23	49	75	81	57	...
...	0	0	0	0	0	0	1	8	30	72	124	156	138	...
...	0	0	0	0	0	0	1	9	38	102	196	280	294	...
...	0	0	0	0	0	0	1	10	47	140	298	476	574	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: *Autoria Própria.*

Exemplo 5.6. *Construir a Tabela de PAOS, PAOS(-172, 68,-21,4).*

Solução: *Montando-se a Tabela de PAOS, PAOS(-172, 68,-21,4).*

Tabela 5.8: PAOS(-172, 68, -21,4,0,0,0, ...).

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	...
L1	-172	68	-21	4	0	0	0	0	0	0	...
L2	-172	-104	47	-17	4	0	0	0	0	0	...
L3	-172	-276	-57	30	-13	4	0	0	0	0	...
L4	-172	-448	-333	-27	17	-9	4	0	0	0	...
L5	-172	-620	-781	-360	-10	8	-5	4	0	0	...
L6	-172	-792	-1401	-1141	-370	-2	3	-1	4	0	...
L7	-172	-964	-2193	-2542	-1511	-372	1	2	3	4	...
L8	-172	-1136	-3157	-4735	-4053	-1883	-371	3	5	7	...
L9	-172	-1308	-4293	-7892	-8788	-5936	-2254	-368	8	12	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Fonte: *Autoria Própria.*

Observação 5.5. *Ao verificar o Espaço das Tabelas de PAOS 5.7 e na Tabela 5.8, constata-se que:*

$$TR.PAOS(1,2,3,4)_6 = (-172, 68, -21, 4)$$

E que, encontrando a Transformação Direta Restrita Inicial da PAOS(-172, 68,-21,4) e visualizando na Tabela 5.8, veremos que:

$$TDRI.PAOS(-172, 68, -21, 4)_6 = (1, 2, 3, 4).$$

Referências Bibliográficas

[NOBRE, 2019] Nobre, J. F. F.; PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE ORDEM SUPERIOR*; SBM, 2019. Disponível no site* $http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/2019/03/art3_vol6_PMO_SBM.pdf$*; Último acesso 2020-07-07.*

[DLAB, 2011] DLAB, V.; Arithmetic progressions of higher order*; Journal - Teaching Mathematics and Computer Science, 2011. Disponível no site* $http://tmcs.math.unideb.hu/load_doc.php?p=216\&t=doc$*; volum 9, number 2, pages(225–239); Último acesso 2020-07-07.*

[OEIS, 1964] Sloane, Neil James Alexander; The On-Line Encyclopedia of Integer Sequence; *OEIS Foundation, Incorporated, 1964. Disponível no site* $https://oeis.org/$*; Último acesso 2020-07-07. Códigos das Sequências citadas: A000217, A000290 e A000330.*

[The Story of Mathematics, 2020] Luke Mastin; The Story of Mathematics, CARL FRIEDRICH GAUSS The Prince of Mathematics*; The Story of Mathematics, 2020. Disponível no site* $https://www.storyofmathematics.com/19th\_gauss.html$*;Último acesso 2020-07-07.*

[Amaral-Unicamp, 2020] Daniel A. Amaral - Unicamp-Gauss, Faculdade de Engenharia Mecânica; Gauss, Carl Friedrich (1777-1855)*; SBM, 2019. Disponível no site http://www.fem.unicamp.br/ em313/paginas/person/gauss.htm; Último acesso 2020-07-07.*

[The Story of Mathematics, 2020] Luke Mastin; The Story of Mathematics*; All About Yang Hui - A Nobel Chinese Mathematician. Disponível no site https://www.storyofmathematics.com/yang-hui;Último acesso 2020-07-07.*

[Horiuchi-Encyclopedia Britannica, 2020] Horiuchi, Annick; Encyclopedia Britannica*; Zhu Shijie Chinese mathematician, inc.,2019. Disponível no site https://www.britannica.com/biography/Zhu-Shijie;Último acesso 2020-07-07.*

[MARTINS, 2015] MARTINS, Juliana; O livro que divulgou o papiro Rhind no Brasil*; Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2015. Disponível no site https://repositorio.unesp.br/handle/11449/124102;Último acesso 2020-07-07.*

[O'CONNOR, 2015] O'Connor, J J and Robertson, E F; MacTutor - An overview of Egyptian mathematics*; School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland, 2000.Disponível no site http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Egyptian_mathematics.html;Último acesso 2020-07-07.*

[Wikipédia, 2015] Wikipédia - Papiro de Rhind*; 2020. Disponível no site https://pt.wikipedia.org/wiki/Papiro_de_Rhind;Último acesso 2020-07-07.*

[Eugene Wigner, 2019] Wikipédia - Eugene_Wigner*; 2020. Disponível no site https://en.wikipedia.org/wiki/Eugene_Wigner;Último acesso 2020-07-07.*

[Eugene Wigner Artigo, 2019] The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*; 2020. Disponível no site https://en.wikipedia.org/wiki/The_Unreasonable_Effectiveness_of_Mathematics_in_the_Natural_Sciences;Último acesso 2020-07-07.*

[The Story of Mathematics, 2020] Luke Mastin; Story of Mathematics-PYTHAGORAS OF SAMOS Biography Who was Pythagoras*; The Story of Mathematics,2020. Disponível no site https://www.storyofmathematics.com/greek_pythagoras.html;Último acesso 2020-07-07.*