

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE
ELETRICIDADE
ÁREA: AUTOMAÇÃO E CONTROLE

**FILTRAGEM ROBUSTA DE TRAJETÓRIAS
DE VEÍCULOS ESPACIAIS**

JOSÉ ALANO PÉRES DE ABREU

São Luís

2002

FILTRAGEM ROBUSTA DE TRAJETÓRIAS DE VEÍCULOS ESPACIAIS

Dissertação de mestrado submetida à
Coordenadoria do Curso de Pós-Graduação em
Engenharia de Eletricidade da UFMA como
parte dos requisitos para obtenção do título de
Mestre em Automação e Controle.

Por

José Alano Péres de Abreu

Dezembro, 2002

Abreu, José Alano Péres de

Filtragem robusta de trajetórias de veículos espaciais. / José Alano Péres de Abreu. — São Luís, 2002.

106 f.

Dissertação (Mestrado em Automação e Controle) – Universidade Federal do Maranhão, 2002.

1. Engenharia – Controle automático. 2. Filtragem robusta.
3. Filtragem de Kalman. I. Título.

CDU 681.5

Filtragem robusta de trajetórias de veículos espaciais

JOSÉ ALANO PÉRES DE ABREU

Dissertação aprovada em 13 de dezembro de 2002.

Prof. Dr. José Tarcísio Costa Filho
(Orientador)

Prof. Dr. João César Moura Mota
(Membro da Banca Examinadora)

Prof. Dr. Anselmo Cardoso Paiva
(Membro da Banca Examinadora)

A Deus, por esta oportunidade.

AGRADECIMENTOS

Ao CLA pela liberação do trabalho durante os períodos de aula e na conclusão da dissertação.

Ao Prof. José Tarcísio pelo interesse, orientação e incentivo.

Aos colegas de trabalho do CLA, pela colaboração com dados de rastreamento e superação das tarefas durante minha ausência.

Ao Eng. Edson do CLBI, pela colaboração com dados reais brutos de rastreamento de foguetes, importantes ferramentas no desenvolvimento deste trabalho.

Aos Prof. Francisco e João Viana pela colaboração com material didático e esclarecimento de dúvidas.

À minha família pelo estímulo constante.

RESUMO

Neste trabalho, é proposta uma metodologia de filtragem de dados de trajetórias de veículos espaciais via estimações de estado H_2 e H_∞ , discretos. Nessa metodologia, obtém-se, inicialmente, a solução do problema de filtragem de dados de trajetórias de veículos espaciais via estimação de estado H_2 através das equações do filtro de Kalman para Estimadores Filtrados. O problema é resolvido através do desenvolvimento matemático das equações do filtro de Kalman que tem como objetivo principal encontrar uma estimação de estado que minimize o erro quadrático médio. As equações matemáticas são utilizadas para o desenvolvimento do algoritmo computacional do filtro de Kalman. O algoritmo de filtragem de Kalman tem duas funções básicas: predição e correção. Na fase de predição são dadas as estimativas iniciais e atualização do tempo de amostragem, enquanto que, na fase de correção são atualizadas as medidas. Aplica-se, também, a nova metodologia proposta no projeto de filtragem de dados de trajetória de veículos espaciais via estimação de estado H_∞ através de equações do filtro de Kalman robusto. A filtragem robusta tem como objetivo principal estimar uma combinação linear que minimize a norma H_∞ , que tem a interpretação da existência de ganho de energia máxima da entrada para a saída. Como contribuição, obtém-se um novo algoritmo computacional para filtragem de dados de trajetórias de veículos espaciais, agora através de estimação de estado H_∞ . Todos os procedimentos de projeto são ilustrados através de alguns exemplos aplicados a sistemas de rastreamento de veículos espaciais. Os resultados são comparados e discutidos.

ABSTRACT

In this work, a new methodology of filtering data of paths of space vehicles is proposed H_2 and H_∞ saw state estimates and discreet. In that new methodology, it is obtained, initially, the solution of the problem of filtering of data of paths of space vehicles saw state estimate through the equations of the filter of Kalman for Predicted Estimators and Filtered Estimators. The problem is solved through the mathematical development of the equations of the filter of Kalman that has as main function, to find a state estimate that minimizes the least-squares error. The equations mathematics are used for the development of the algorithm of the filter of Kalman. The algorithm of filtering of Kalman has two basic functions: prediction and correction. In the prediction phase the initial estimates and updating of the time of sampling are given, while, in the correction phase they are updated the measures. It is applied, also, the new methodology proposed in the project of filtering of data of path of space vehicles H_∞ saw state estimate through equations of robust filter. The robust filtering has as function to esteem a linear combination that minimizes the norm, that has the interpretation of the existence of earnings of maximum energy of the entrance for the exit. In addition, it is obtained a new algorithm for filtering of data of paths of space vehicles, now through state estimate. All the project procedures are cultured through some applied examples to systems of tracking of space vehicles. The results are compared and discussed.

SUMÁRIO

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 1.1 | <i>Sistema de rastreamento de veículos espaciais.....</i> | 3 |
| 1.2 | <i>Modelo cinemático e de medidas</i> | 5 |
| 1.3 | <i>Fundamentos matemáticos</i> | 8 |
| 1.3.1 | <i>Propriedades de vetores aleatórios Gaussiano.....</i> | 8 |
| 1.3.2 | <i>Propriedades estatísticas relativas ao modelo discreto perturbado.....</i> | 9 |
| 1.3.3 | <i>Normas</i> | 12 |
| 1.3.3.1 | <i>Normas de vetores</i> | 12 |
| 1.3.3.2 | <i>Normas de matrizes</i> | 12 |
| 1.3.4 | <i>Normas de matrizes de transferência</i> | 13 |
| 1.3.4.1 | <i>Norma H_2 para sistemas discretos</i> | 14 |
| 1.3.4.2 | <i>Norma H_∞ para sistemas discretos</i> | 14 |
| 1.3.5 | <i>Minimização do operador de transferência $\ T\ _\infty$</i> | 15 |
| 2 | Filtragem de dados via estimação de estado H_2 | 17 |
| 2.1 | <i>Introdução ao filtro de Kalman.....</i> | 17 |
| 2.2 | <i>Filtragem via estimação de estado H_2</i> | 18 |
| 2.3 | <i>Objetivo do filtro de Kalman.....</i> | 19 |
| 2.4 | <i>Filtro de Kalman discreto</i> | 19 |
| 2.5 | <i>Estimação ótima H_2</i> | 20 |
| 2.5.1 | <i>Equações do filtro de Kalman para estimativas filtradas.....</i> | 21 |
| 2.5.2 | <i>Problema do filtro ótimo de Kalman.....</i> | 22 |
| 2.5.3 | <i>Desenvolvimento das equações do filtro de Kalman.....</i> | 24 |
| 2.6 | <i>Algoritmo do filtro de Kalman</i> | 33 |
| 2.7 | <i>Observações na implementação prática</i> | 34 |
| 2.8 | <i>Sintonia do sistema e obtenção das matrizes de covariância</i> | 34 |
| 2.9 | <i>Aplicação nº 1: Filtragem da trajetória de um foguete</i> | 35 |
| 2.10 | <i>Aplicação nº 2: Filtragem da trajetória de uma aeronave.</i> | 41 |
| 3 | Filtragem de dados via estimação de estado H_∞ | 48 |
| 3.1 | <i>Introdução</i> | 48 |
| 3.2 | <i>Filtragem via estimação de estado H_∞.....</i> | 49 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.3 | <i>Formulação do Problema de filtragem H_∞</i> | 50 |
| 3.4 | <i>Problema de Filtragem H_∞ ótimo</i> | 52 |
| 3.5 | <i>Problema de filtragem H_∞ sub-ótimo</i> | 53 |
| 3.6 | <i>Formulação e solução do problema de filtragem H_∞ sub-ótimo</i> | 53 |
| 3.7 | <i>Condições necessárias para solução do problema do filtro H_∞</i> | 56 |
| 3.8 | <i>Algoritmo do filtro de Kalman Robusto</i> | 64 |
| 3.9 | <i>Aplicação: Filtragem robusta da trajetória de um foguete</i> | 65 |
| 4 | Análise comparativa dos filtros H_2 e H_∞ aplicados ao problema de rastreamento | 70 |
| 4.1 | <i>Introdução</i> | 70 |
| 4.2 | <i>Análise dos dados do radar</i> | 70 |
| 4.2.1 | <i>Extração de ruídos</i> | 70 |
| 4.2.2 | <i>Análise de dados do rastreamento do foguete</i> | 71 |
| 4.3 | <i>Metodologias de cálculos de ganhos dos filtros</i> | 72 |
| 4.4 | <i>Desempenho dos filtros propostos</i> | 73 |
| 4.4.1 | <i>Filtro de Kalman</i> | 74 |
| 4.4.2 | <i>Filtro de Kalman Robusto</i> | 81 |
| 4.5 | <i>Comparação entre os filtros de Kalman e Kalman robusto</i> | 87 |
| 4.6 | <i>Resultados obtidos</i> | 88 |
| 5 | Conclusão | 89 |
| | Referências | 91 |
| | Apêndices | 94 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| Tabela 1.1 – Resumo de normas de vetores comumente usadas | 12 |
| Tabela 1.2 – Resumo de normas de matrizes comumente usadas | 13 |
| Tabela 2.1 – Resumo das Equações do Filtro de Kalman | 32 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1.1 – Sistema Básico de Rastreamento de Veículos Espaciais. | 3 |
| Figura 2.1 – Malha usual do Filtro de Kalman..... | 20 |
| Figura 2.2 – Diagrama de blocos dos modelos de Planta, Medidas e Filtro. | 32 |
| Figura 2.3 – Fluxograma e algoritmo do vetor Filtro de Kalman. | 33 |
| Figura 2.4 – Dados não filtrados da trajetória do vôo de um foguete. | 37 |
| Figura 2.5 – Dados brutos e filtrados da trajetória de um foguete. | 38 |
| Figura 2.6 – Vista ampliada da resposta à filtragem de Kalman..... | 38 |
| Figura 2.7 – Desempenho do FKD em função dos parâmetros P, Q e R. | 39 |
| Figura 2.8 – Ganho do filtro de Kalman..... | 39 |
| Figura 2.9 – Erro de Estimação Residual. | 46 |
| Figura 2.10 – Estimativa Ótima da Posição. | 47 |
| Figura 2.11 – Visualização das trajetórias medida e estimativa da posição..... | 47 |
| Figura 3.1 – Diagrama de blocos do modelo da planta e da medida..... | 51 |
| Figura 3.2 – Operador de transferência H_{∞} ótimo..... | 51 |
| Figura 3.3 – Fluxograma e algoritmo do vetor Filtro de Kalman Robusto..... | 64 |
| Figura 3.4 – Dados não filtrados da trajetória de um foguete. | 66 |
| Figura 3.5 – Detalhe dos dados brutos da trajetória de um foguete. | 66 |
| Figura 3.6 – Dados brutos e filtrados da trajetória de um foguete. | 67 |
| Figura 3.7 – Vista ampliada da resposta da filtragem Kalman Robusto. | 67 |
| Figura 3.8 – Desempenho do Filtro de Kalman Robusto. | 68 |
| Figura 3.9 – Ganho do filtro de Kalman Robusto..... | 68 |
| Figura 3.10 – Velocidade estimada..... | 69 |
| Figura 4.1 – Sistema de coordenadas cartesianas e esféricas para rastreamento. | 71 |
| Figura 4.2 – Evolução temporal das coordenadas da trajetória do foguete..... | 73 |
| Figura 4.3 – Coordenada X não filtrada..... | 76 |
| Figura 4.4 – Trecho da Coordenada X filtrada..... | 77 |
| Figura 4.5 – Ruído de média zero da coordenada X..... | 77 |
| Figura 4.6 – Dados não filtrados da Coordenada Y..... | 78 |
| Figura 4.7 – Coordenada Y filtrada..... | 78 |
| Figura 4.8 – Ruído de média zero da Coordenada Y..... | 79 |
| Figura 4.9 – Coordenada Z não filtrada..... | 79 |

| | |
|---|----|
| Figura 4.10 – Trecho da Coordenada Z filtrada | 80 |
| Figura 4.11 – Ruído de média zero da Coordenada Z..... | 80 |
| Figura 4.12 – Ganho do Filtro de Kalman para a Coordenada Z | 81 |
| Figura 4.13 – Trecho da Coordenada X filtrada..... | 83 |
| Figura 4.14 – Ruído de média zero em relação à Coordenada X..... | 84 |
| Figura 4.15 – Coordenada Y filtrada..... | 84 |
| Figura 4.16 – Ruído de média zero em relação à Coordenada Y..... | 85 |
| Figura 4.17 – Coordenada Z filtrada | 85 |
| Figura 4.18 – Ruído de média zero em relação à Coordenada Z | 86 |
| Figura 4.19 – Ganho do Filtro de Kalman Robusto em relação à Coordenada Z | 86 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

- γ - magnitude da penalidade das perturbações (fator de ponderação);
- $\gamma_{f,o}$ - gama filtrado ótimo;
- L_2 - Conjunto do somatório de todas as funções quadradas;
- H_2 - norma quadrática (norma euclidiana);
- H_∞ - norma de uma matriz (operador) de transferência;
- \mathfrak{R} - conjunto dos números reais;
- \mathfrak{R}^n - conjunto dos vetores n -dimensionais reais;
- $\mathfrak{R}^{m \times n}$ - conjunto de todas as matrizes reais
- I_n - Matriz Identidade $n \times n$;
- \tilde{x}_i - Erro de estimação;
- \hat{x}_i - Estimativa de estado;
- s - Vetor posição;
- \mathcal{G} - Vetor velocidade;
- a - Vetor aceleração;
- $E\{\|\tilde{x}\|^2\}$ - Esperança do erro médio quadrado;
- EDR* - Equação Diferença de Riccati;
(Riccati Difference Equation)
- MMQ* - Método dos Mínimos Quadrados;
- LQG* - Linear Quadrático Gaussiano;
- FK* - Filtro de Kalman;
- FKD* - Filtro de Kalman Discreto;
- FKR* - Filtro de Kalman Robusto;
- CLA* - Centro de Lançamento de Alcântara;
- CLBI* - Centro de Lançamento da Barreira do Inferno.

CAPITULO I

1 Introdução

Um sistema de rastreamento de veículos espaciais é composto, basicamente, por estações de radar e seus respectivos sistemas de tratamento de dados e visualização de trajetórias. Uma boa visualização dessa trajetória em rastreamento de veículos espaciais garante ao setor responsável pela segurança do voo dos mesmos, parâmetros para análise e tomada de decisão com maior confiabilidade e precisão. Por esta razão os algoritmos de filtragem¹ (estimação de estado) de trajetórias de veículos espaciais exercem uma função importante no tratamento dos dados rastreados. Uma característica importante do sistema de tratamento dos dados é a de operar em tempo real, condição necessária para o rastreamento de foguetes. Uma das facilidades deste sistema é efetuar a filtragem dos dados brutos (medidas de posição dos foguetes pelos radares) através da implementação de algoritmos e gerar o que se denominam dados filtrados (valores de posição e velocidade estimados do foguete).

Portanto, a função básica do algoritmo para filtragem de dados de trajetórias é estimar a posição e a velocidade de um veículo espacial em movimento. A informação disponível para computar estas estimativas são medidas ruidosas da posição do veículo. Estas medições são obtidas a intervalos de tempo regulares pelos radares de rastreamento. As variáveis estimadas são utilizadas para prever a posição do veículo no próximo instante de amostragem, permitindo a eliminação das medidas errôneas.

Esta dissertação tem como objetivo principal investigar o emprego de metodologias de filtragem robusta² para tratamento de dados, com a finalidade de cálculo de ganhos de filtros dos dados de radar, para a obtenção de melhores propriedades de rastreamento de veículos espaciais. Estas metodologias são baseadas no problema de filtragem H_∞ para sistemas dinâmicos discretos e lineares, onde são consideradas as incertezas significativas nas estatísticas das medidas ruidosas.

¹O problema de obtenção de uma boa aproximação para uma grandeza corrompida por ruídos leva o nome genérico de *filtragem*.

²A teoria do espaço robusto (H_p) tem suas origens nas descobertas feitas por alguns matemáticos como G. H. Hardy e J. E. Littlewood. O começo do ponto histórico para a teoria do espaço H_p foi considerado com o trabalho, em 1915, por Hardy, com um teorema da convexidade.

Diferentemente da metodologia convencional (baseada no filtro de Kalman), onde o conhecimento exato *a priori* das propriedades estocásticas (ruído branco e sua respectiva densidade espectral) das medidas ruidosas é necessário para não degradar a estimação de estado, a filtragem robusta baseada no ganho de energia máxima das perturbações de entrada para a saída, procura fazer frente a esta dificuldade, sendo atualmente objeto de intensa pesquisa (HASSIBI, Vol. 44, nº 2, 1996).

Como motivação adicional, pretende-se dar uma contribuição investigativa ao sistema de filtragem dos dados de radar do Centro de Lançamento de Alcântara, apresentando uma metodologia alternativa para a realização de análises comparativas de desempenho com o filtro atualmente utilizado no CLA (“filtro $\alpha - \beta - \gamma$ tracker”, descrito no anexo **D**), com a finalidade de auxiliar no ajuste e adequação dos dados filtrados para diferentes tipos de veículos com fases (propulsada e balística) distintas durante a trajetória. Tais mudanças de fase podem provocar erros significativos na medição dos dados de posição do rastreamento em virtude do filtro em operação no CLA ajustar seus parâmetros constantes e iguais para todas as direções (BARROSO, 1992; CALDEIRA, 2000). Portanto, é altamente desejável que o filtro seja insensível a este tipo de incerteza, isto é, que o filtro seja robusto.

Para análise comparativa de algoritmos de filtragem baseados no filtro de Kalman (em regime permanente, sob certas condições dos parâmetros $\alpha - \beta - \gamma$, o filtro de mesma denominação é semelhante ao filtro de Kalman convencional) e no filtro H_∞ , uma aplicação é realizada para o tratamento de dados brutos obtidos de um radar da trajetória de um foguete de sondagem, bastante empregado no CLA em pesquisas científicas (CALDEIRA, 2000).

Na seção 1.1, é apresentado a estrutura de rastreamento do CLA, com uma breve descrição do sistema de tratamento de dados, compreendendo as principais etapas: aquisição de dados brutos, filtragem e visualização na sala de segurança de vôo.

Na seção 1.2, são descritos os modelos cinemático e de medidas normalmente adotados para os estimadores de estado usados em sistema de rastreamento de foguetes.

No Capítulo II, apresenta-se uma revisão de alguns conceitos estatísticos e após, faz-se uma abordagem matemática da filtragem de Kalman (estimação de estado H_2). De posse das informações necessárias, implementa-se um algoritmo computacional para filtragem dos dados da trajetória de um foguete de sondagem.

No Capítulo III, estuda-se a filtragem robusta (estimação de estado H_∞) e suas respectivas vantagens e desvantagens em relação a filtragem convencional de Kalman,

implementando-se um algoritmo de filtragem robusta para estimação de trajetórias de veículos espaciais.

No Capítulo IV apresenta-se a análise de desempenho dos filtros H_2 e H_∞ .

Finalmente, no Capítulo V, apresenta-se uma conclusão do resultado dos trabalhos desenvolvidos nesta dissertação.

1.1 Sistema de rastreamento de veículos espaciais

O sistema de rastreamento de veículos espaciais do CLA é composto, basicamente, por duas estações de radar e seus respectivos sistemas de tratamento de dados e visualização de trajetórias (BARROSO, 1992; CALDEIRA, 2000). Devido às suas características técnicas e posicionamento em relação à rampa de lançamento os radares são denominados de radar de proximidade e radar de precisão.

Na Figura 1.1, é apresentado esquematicamente o sistema de rastreamento de veículos espaciais do CLA, onde os dados brutos da trajetória do veículo rastreado são adquiridos pelos radares 1 e 2, em uma frequência de amostragem, predefinida em vinte vezes por segundo (20 Hz), fornecendo informações de elevação, azimute e distância do foguete à rampa de lançamento.

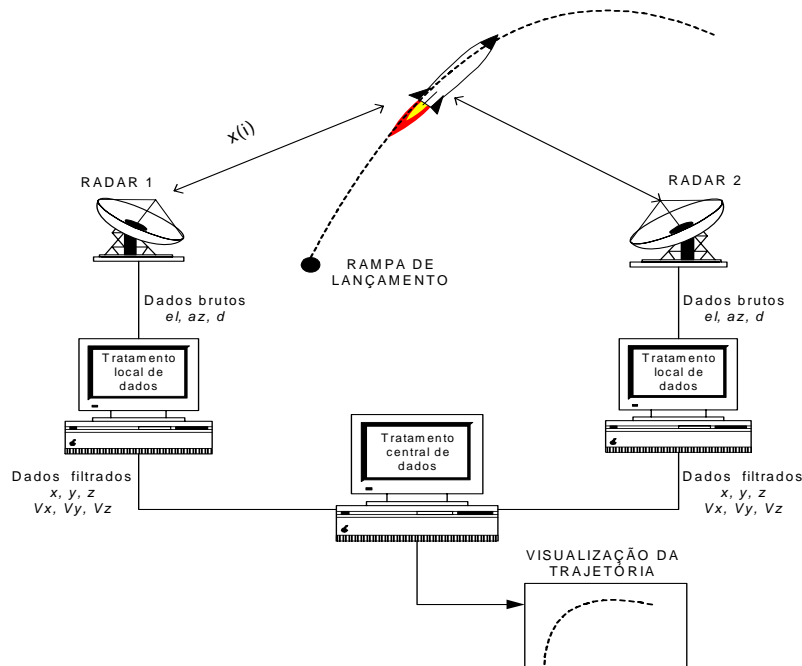


Figura 1.1 – Sistema Básico de Rastreamento de Veículos Espaciais.

A seguir, os dados são enviados a um sistema de tratamento local de dados, situado na própria estação do radar, onde são processados localmente por um algoritmo de filtragem de ruído através de um programa computacional, adotando os critérios de minimização do desvio padrão (erro médio quadrado). Além da filtragem, objeto de investigação deste trabalho, o sistema de tratamento de dados local ainda realiza outras funções, na seguinte seqüência: eliminação de pontos aberrantes, transformação das coordenadas polares em coordenadas cartesianas, e mudança da referência do radar para a rampa de lançamento.

Os dados filtrados da posição e as estimativas de velocidade e aceleração do veículo rastreado, em coordenadas cartesianas no referencial da rampa de lançamento utilizada, são enviados a uma cadência predefinida em projeto de dez vezes por segundo (10 Hz), a um sistema de tratamento central de dados que tem como principal objetivo a realização das seguintes funções:

- Visualização gráfica da trajetória percorrida pelo foguete;
- Designação dos meios de rastreamento (se um radar perde o alvo, um outro radar que está rastreando lhe envia as coordenadas de posição, azimute e elevação e este volta a ser apontado para o foguete, voltando a rastrear);
- Cálculo do possível ponto de impacto do foguete com a superfície terrestre caso a propulsão acabasse naquele instante;
- Armazenamento dos dados em memória.

Os radares podem rastrear os veículos no modo “eco de pele”, também chamado de modo radar ou no modo *transponder* (modo respondedor). No modo *transponder*, o veículo rastreado dispõe de um equipamento embarcado que responde a um sinal de interrogação do radar. No modo radar, o rastreamento é feito através da reflexão no veículo de um pulso eletromagnético enviado pelo radar. Quando é utilizado o modo *transponder* o rastreamento pode ser efetuado no modo automático desde o início do lançamento. No modo radar, os operadores dos radares precisam monitorar o sinal refletido e comutar para o modo automático quando a relação sinal/ruído for considerada satisfatória. A comutação para o modo automático inicia a execução do algoritmo de filtragem.

Quando o veículo rastreado possui vários estágios e está sendo rastreado no modo radar, os operadores precisam monitorar os instantes de separação dos estágios para evitar que os radares passem a rastrear o estágio liberado ao invés do veículo. Nestes casos, os operadores precisam comutar para o modo manual, realinhar os radares com o alvo correto e

depois retornar ao modo automático. A inicialização do rastreamento e filtragem requer o fornecimento dos seguintes dados:

- Ângulo da rampa de lançamento;
- Aceleração inicial do veículo;
- Dados da trajetória nominal (valores das coordenadas cartesianas e os respectivos tempos);
- Tempos de início e término da fase propulsada.

Com estes dados, é possível modelar as fases do lançamento do veículo com boa precisão. Na fase balística pode-se supor uma aceleração aproximadamente igual à da gravidade, no valor de $9,81 \text{ m/s}^2$.

1.2 Modelo cinemático e de medidas

Nesta seção, define-se a trajetória de lançamento de um veículo espacial e suas fases de lançamento. Na fase propulsada do lançamento, as equações do movimento se assemelham às do movimento retilíneo uniformemente acelerado, visto que nessa fase o veículo apresenta aceleração de propulsão que varia rapidamente de zero a um certo patamar de aceleração, caindo novamente (BARROSO, 1992). Portanto, supõe-se uma aceleração média constante (despreza-se os tempos de crescimento e decrescimento da mesma), do início ao fim da fase propulsada. Na fase balística as equações do movimento se assemelham às do movimento de um projétil, pois nesse estágio (despreza-se a resistência do ar), o veículo estará sujeito unicamente à força gravitacional.

O modelo cinemático adotado para os filtros deste sistema de rastreamento de foguetes é o de aceleração constante por partes (YAAKOV, 1993). Neste modelo, o ruído branco do processo (w_i) é o incremento da aceleração durante o i -ésimo período de amostragem. Portanto, para o intervalo de tempo compreendido entre os instantes de tempo t_i e t_{i+1} , a aceleração do foguete é constante e dada por:

$$a_{t_{i+1}} = a_{t_i} + w_i \quad (1.1)$$

para o intervalo de tempo $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ e

$$w_i = a_{t_{i+1}} - a_{t_i} \quad (1.2)$$

As equações de estado (posição e velocidade) para o modelo cinemático são dados, respectivamente, por:

$$\frac{ds}{dt} = \mathcal{G}_t \quad (1.3)$$

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = a_t \quad (1.4)$$

onde: s_t , \mathcal{G}_t e a_t são respectivamente os vetores de posição, velocidade e aceleração do veículo no instante de tempo t .

Deve-se mencionar que estas equações são válidas para uma determinada coordenada. Para movimento em três dimensões, é conveniente considerá-lo independente em cada dimensão.

Substituindo a aceleração definida na Eq. (1.1) na Eq. (1.4) e integrando em relação ao tempo, entre os instantes t_i e t , tal que $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, obtém-se:

$$\mathcal{G}_t - \mathcal{G}_{t_i} = \int_{t_i}^t [a_{t_i} + w_i] d\tau = [a_{t_i} + w_i](t - t_i). \quad (1.5)$$

Agora, de forma análoga, integrando a Eq. (1.3), obtém-se:

$$s_t - s_{t_i} = \int_{t_i}^t \mathcal{G}_\tau d\tau \quad (1.6)$$

Substituindo a Eq. (1.5) na Eq. (1.6), pode-se escrever

$$s_t - s_{t_i} = \int_{t_i}^t [a_{t_i} + w_i](\tau - t_i) d\tau + \int_{t_i}^t \mathcal{G}_{t_i} d\tau, \quad (1.7)$$

resultando em

$$s_t = s_{t_i} + \mathcal{G}_{t_i} [t - t_i] + a_{t_i} \frac{[t - t_i]^2}{2} + w_i \frac{[t - t_i]^2}{2} \quad (1.8)$$

Fazendo $t = t_{i+1}$, nas Eqs. (1.1), (1.5) e (1.8) e definindo-se $T = t_{i+1} - t_i$ (período de amostragem uniforme), obtém-se, respectivamente,

$$s_{t_{i+1}} = s_{t_i} + \mathcal{G}_{t_i} T + a_{t_i} \frac{T^2}{2} + w_i \frac{T^2}{2} \quad (1.9)$$

$$\mathcal{G}_{t_{i+1}} = \mathcal{G}_{t_i} + a_{t_i} T + w_i T \quad (1.10)$$

e

$$a_{t_{i+1}} = a_{t_i} + w_i \quad (1.11)$$

As Eqs. (1.9), (1.10) e (1.11) descrevem a dinâmica do foguete e podem ser representadas na forma de equação discreta de estado para uma determinada coordenada como:

$$x_{i+1} = F_i x_i + G_i w_i \quad (1.12)$$

em que:

$$x_i = \begin{bmatrix} s_i \\ \mathcal{G}_i \\ a_i \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.14)$$

$$G = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

O modelo de medidas de posição em uma coordenada específica é dado por

$$y_i = H_i x_i + v_i \quad (1.16)$$

em que $x \in \mathfrak{R}^n$ representa o vetor de estados, $y \in \mathfrak{R}^m$ representa o vetor de medidas, v_i (de características estatísticas) representa o ruído de medidas e

$$H_i = [1 \ 0 \ 0] \quad (1.17)$$

representa a matriz de observação.

A equação dinâmica completa, na sua versão discreta, compreende o modelo tridimensional, ou seja, para movimento em várias dimensões, é conveniente considerar equações dinâmicas independentes e desacopladas para cada coordenada, como apresentado a seguir:

$$\begin{bmatrix} s_{i+1}^x \\ \mathcal{G}_{i+1}^x \\ a_{i+1}^x \\ s_{i+1}^y \\ \mathcal{G}_{i+1}^y \\ a_{i+1}^y \\ s_{i+1}^z \\ \mathcal{G}_{i+1}^z \\ a_{i+1}^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & T & \frac{T^2}{2} & & & & & & & & \\ 0 & 1 & T & & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & T & \frac{T^2}{2} & & & & & \\ 0 & & & 0 & 1 & T & & & & & \\ & & & 0 & 0 & 1 & & & & & \\ & & & & & & 0 & T & \frac{T^2}{2} & & \\ 0 & & & & & & 0 & 1 & T & & \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_i^x \\ \mathcal{G}_i^x \\ a_i^x \\ s_i^y \\ \mathcal{G}_i^y \\ a_i^y \\ s_i^z \\ \mathcal{G}_i^z \\ a_i^z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & & & & & & & & & & \\ T & 0 & 0 & & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & & & & \\ & \frac{T^2}{2} & & & & & & & & & \\ 0 & T & 0 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & \\ & & & \frac{T^2}{2} & & & & & & & \\ 0 & 0 & T & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{x_i} \\ w_{y_i} \\ w_{z_i} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

$$\begin{bmatrix} y_i^x \\ y_i^y \\ y_i^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_i^x \\ \mathcal{G}_i^x \\ a_i^x \\ s_i^y \\ \mathcal{G}_i^y \\ a_i^y \\ s_i^z \\ \mathcal{G}_i^z \\ a_i^z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{x_i} \\ v_{y_i} \\ v_{z_i} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

No modelo acima, s_i^x , s_i^y e s_i^z representam as coordenadas cartesianas x , y , e z da posição do veículo no i -ésimo período de amostragem T .

1.3 Fundamentos matemáticos

Esta seção é dedicada à apresentação de alguns fundamentos matemáticos necessários ao entendimento e desenvolvimento deste trabalho, em consequência, aproveitamos este capítulo para introduzir os fundamentos teóricos e as técnicas básicas a serem utilizados nos capítulos subsequentes.

1.3.1 Propriedades de vetores aleatórios Gaussiano

Considera-se dois vetores aleatórios Gaussiano x e y tal que $\begin{bmatrix} x \\ \vdots \\ y \end{bmatrix}$ seja Gaussiano

(SINGH, 1978). Estes vetores têm as seguintes propriedades:

Propriedade 1.1:

A esperança condicional de x dado y é

$$E[x/y] = E[x] + P_{xy}P_{yy}^{-1}[y - E(y)] \quad (1.20)$$

onde:

$$\begin{aligned} P_{xx} &= E[(x - E(x))(x - E(x))^T] \\ P_{xy} &= E[(x - E(x))(y - E(y))^T] = P_{yx}^T \\ P_{yy} &= E[(y - E(y))(y - E(y))^T] \end{aligned}$$

Na diferença, $x - E[x/y]$ é independente de y e tem média zero.

Propriedade 1.2:

Considerando o vetor Gaussiano $\begin{bmatrix} x \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ onde y_1 e y_2 são vetores independentes.

A esperança condicional de x dados y_1 e y_2 é:

$$E[x/y_1, y_2] = E[x/y_1] + E[x/y_2] - E[x] \quad (1.21)$$

Propriedade 1.3:

A densidade de probabilidade condicional do vetor x , conhecendo o vetor y é Gaussiana com média $E[x/y]$ e covariância $P_{xx} - P_{xy}P_{yy}^{-1}P_{yx}$.

1.3.2 Propriedades estatísticas relativas ao modelo discreto perturbado.

Sendo o modelo dinâmico, discreto:

$$x_{i+1} = F_i x_i + G_i w_i \quad \therefore i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.22)$$

$$y_i = H_i x_i + v_i, \quad (1.23)$$

em que $x \in \mathfrak{R}^n$ representa o vetor de estados, $y \in \mathfrak{R}^m$ representa o vetor de medidas, $w \in \mathfrak{R}^n$ representa a perturbação do processo (neste caso, o incremento de aceleração), $v \in \mathfrak{R}^m$ representa o vetor ruído de medidas, $F_{n \times n}$ representa a matriz de transição de estado, $G_{n \times l}$ representa a matriz de transição da perturbação do processo e $H_{m \times n}$ representa a matriz de observação, este sistema deve obedecer as seguintes hipóteses:

Propriedade 2.1:

Os vetores w_i e v_i são seqüências de vetores com distribuição Gaussiana, independentes, de média zero, portanto:

$$E[w_i] = 0, \text{ é a esperança ou perturbação de média zero;}$$

$$E[v_i] = 0, \text{ é a esperança ou ruído de média zero;}$$

$$E[w_i w_j^T] = Q \delta_{ij} = \begin{cases} Q & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \text{ matriz covariância da perturbação;}$$

$$E[v_i v_i^T] = R \delta_{ij}, = \begin{cases} R & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \text{ matriz covariância do ruído, onde, } R > 0.$$

$$\delta_{ij} \text{ é a função delta "Kronecker" definida por } \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Q e R são as matrizes de covariância dos ruídos do processo e de medidas, respectivamente. A variável w_i é usada para descrever tanto os erros ocorridos no processo quanto as incertezas no modelo de estados e v_i representa os erros das medidas e os erros no modelo de observação.

Propriedade 2.2:

A perturbação w_i e o ruído v_i não são correlatos, portanto:

$$E[w_i v_j^T] = 0; \quad \forall i \neq j$$

Propriedade 2.3:

O estado inicial $x(0) = x_0$ é um vetor aleatório Gaussiano com:

$$\text{média} \quad E[x_0] = \mu_0 \text{ e}$$

$$\text{covariância} \quad E[(x_0 - \mu_0)(x_0 - \mu_0)^T] = P_0$$

Propriedade 2.4:

O estado inicial x_0 e w_i, v_i são não correlatos (independentes), logo

$$E[x_0 w_i^T] = 0; \quad E[x_0 v_i^T] = 0 \quad \forall i.$$

Propriedade 2.5:

Valores médios de matrizes e vetores

a) Valor médio m_x , onde x é um vetor aleatório

$$m_x = E[x] = \begin{bmatrix} E[x_1] \\ E[x_2] \\ \vdots \\ E[x_n] \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

b) Matriz Covariância.

$$K_x = E[(\bar{x} - m_x)(\bar{x} - m_x)^T] = \begin{bmatrix} E[(x_1 - m_{x1})^2] & E[(x_1 - m_{x1})(x_1 - m_{x2})] & \cdots & E[(x_1 - m_{x1})(x_1 - m_{xn})] \\ E[(x_2 - m_{x2})(x_1 - m_{x1})] & E[(x_2 - m_{x2})^2] & \cdots & \\ E[(x_3 - m_{x3})(x_1 - m_{x1})] & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \cdots & E[(x_n - m_{xn})^2] \\ E[(x_n - m_{xn})(x_1 - m_{x1})] & & & \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

que pode ser escrita da seguinte forma

$$K_x = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & K_{x_1x_2} & \cdots & K_{x_1x_n} \\ K_{x_2x_1} & \sigma_{x_2}^2 & \vdots & K_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{x_nx_1} & K_{x_nx_2} & \cdots & \sigma_{x_n}^2 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

em que, se os termos x_i da Eq. (1.26) forem estatisticamente independentes, resta só a diagonal principal (σ).

Propriedade 2.6:

$$\text{Seja } x_i = \begin{bmatrix} x_{1(i)} \\ x_{2(i)} \\ \vdots \\ x_{n(i)} \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.27)$$

Se os elementos são Gaussianos, então eles são conjuntamente Gaussianos e tem **função densidade conjunta**:

$$p_x(x, i) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |X_i|^{1/2}} e^{\left\{ -\frac{1}{2} [x_i - \bar{x}_i]^T X_i^{-1} [x_i - \bar{x}_i] \right\}} \quad (1.28)$$

em que: $\bar{x}_i = E[x_i]$

$X_i = E\left\{ [x_i - \bar{x}_i]^T [x_i - \bar{x}_i] \right\}$ é uma matriz covariância de dimensão $n \times n$;

$|X_i|$ é o determinante da matriz covariância.

1.3.3 Normas

As teorias de estimação de estado H_2 e H_∞ fazem grande uso de *normas*, que são medidas do tamanho de um vetor ou de uma matriz.

1.3.3.1 Normas de vetores

Seja $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ um vetor de n elementos pertencentes aos números reais. A definição geral da norma deste vetor é (DOYLE, 1996):

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq n. \quad (1.29)$$

Somente três *normas-p*, obtidas pelo conjunto p para 1, 2 ou ∞ são comumente usados:

| Nome | Fórmula | Comentários |
|------------------|---|---|
| norma - 1 | $\ x\ _1 = \sum_{i=1}^n x_i $ | Somatório dos valores absolutos |
| norma - 2 | $\ x\ _2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i ^2}$ | Raiz quadrada do somatório dos valores absolutos ao quadrado. |
| norma - ∞ | $\ x\ _\infty = \max_i x_i $ | Máximo valor absoluto |

Tabela 1.1 – Resumo de normas de vetores comumente usadas

As normas L_2 e $L_2[0, N]$ de um vetor x_i são definidas, respectivamente, por:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i^T x_i \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=0}^N x_i^T x_i \right)^{1/2}.$$

No Apêndice **F** faz-se uma abordagem conceitual mais completa das normas de vetores e matrizes, mostrando exemplos numéricos e ilustração geométrica das normas de vetores 1, 2 e ∞ .

1.3.3.2 Normas de matrizes

Estendendo o alcance de normas de vetores para matrizes requer o entendimento do papel destas matrizes como *operador linear*, decisivo na teoria de estimação de estado com muitas variáveis.

Recordando a definição de multiplicação de matrizes tem-se: para uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

de m -linha e n -coluna no espaço $\mathfrak{R}^{m \times n}$ e para um vetor de saída $y \in \mathfrak{R}^m$ e um vetor de entrada $x \in \mathfrak{R}^n$, escreve-se $y = Ax$ onde cada elemento do vetor de entrada é dado por $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, sendo que a_{ij} é o elemento da matriz A na linha i e coluna j . Pode-se definir normas úteis para matrizes em termos do *ganho* do vetor norma de x para y . Isto é, a razão da norma de saída y e a entrada x mede o ganho de A como um operador linear, de entrada no espaço \mathfrak{R}^n e saída no espaço \mathfrak{R}^m . Desde que esta relação não é sempre fixa, mas depende da escolha de x , usa-se o máximo ganho possível da norma do vetor de entrada para o vetor de saída:

$$\|A\|_p = \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathfrak{R}^n}} \frac{|Ax|_p}{|x|_p} \quad (1.30)$$

A norma da matriz definida neste método é chamada de norma *induzida*, pois é induzida pela escolha da norma do vetor. Existem três normas de matriz induzida comumente usadas, correspondentes a normas de vetores para $p = 1, 2$ e ∞ .

| Nome | Fórmula | Comentários |
|------------------|--|--|
| norma - 1 | $\ A\ _1 = \max_j \sum_{i=1}^m a_{ij} $ | Máximo somatório dos valores absolutos das colunas. |
| norma - 2 | $\ A\ _2 = \overline{\sigma}(A)$ ou $\ A\ _2 = [\max \lambda_i(A^T A)]^{1/2}$ | Máximo valor singular, denotado de $\overline{\sigma}(\cdot)$. $\max \lambda_i(A^T A)$ é o máximo autovalor de $A^T A$. Achar Autovalor λ_1, λ_2 : $\det(\lambda I - A) = 0$ |
| norma - ∞ | $\ A\ _\infty = \max_i \sum_j a_{ij} $ | Máxima soma da linha (valor absoluto). |

Tabela 1.2 – Resumo de normas de matrizes comumente usadas

1.3.4 Normas de matrizes de transferência

Há dois tipos de normas de matrizes de transferência: as dependentes e as não dependentes da frequência. Das normas que não dependem da frequência, são usuais as normas H_2 e H_∞ .

1.3.4.1 Norma H_2 para sistemas discretos

A norma H_2 de uma matriz de transferência $G(s)$ é definida por (VIDYASAGAR, 1993):

$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Tr} \{ G^T(e^{jw}) G(e^{jw}) \} dw \right)^{1/2} \quad (1.31)$$

e a correspondente temporal

$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \text{tr}(g_i^T g_i) \right)^{1/2} \quad (1.32)$$

em que a operação de integração utilizada no caso contínuo aparece substituída pelo somatório. As mesmas propriedades e interpretações discutidas no caso contínuo podem ser transpostas para o caso discreto.

1.3.4.2 Norma H_∞ para sistemas discretos

A norma e H_∞ é definida por (DOYLE, 1996; OLIVEIRA, 1999; RUDIN, 1987):

$$\|G\|_\infty = \max_{w \in \mathfrak{R}} \|G(e^{jw})\| \quad (1.33)$$

e no domínio do tempo por:

$$\|G\|_\infty = \max_{w \in \mathfrak{R}} \frac{\|Gu(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} \quad (1.34)$$

A norma H_∞ de um operador de transferência T da perturbação da entrada w_i para a variável medida na saída y_i , é definida da seguinte forma:

$$\|T\|_\infty = \max_{u \in l_2, u \neq 0} \frac{\|Tu\|_2}{\|u\|_2} \quad (1.35)$$

supondo-se o sistema $y = Tu$ estável (onde L_2 é o espaço formado pelas funções quadráticas somáveis) em que u representa a entrada do operador de transferência, $y = Tu$ representa a saída do mesmo operador e $\|u\|_2$ representa a norma usual H_2 de uma seqüência causal $\{u_k\}$, isto é,

$$\|u\|_2^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \|u_i\|^2 \text{ ou } \|u\|_2 = \left(\sum_i |u_i|^2 \right)^{1/2} \text{ ou } \|u\|_2^2 = \sum_{i=0}^{\infty} u_i^T u_i .$$

A norma $\|T\|_\infty$ limitada por um número γ é escrita no domínio do tempo e pode ser definida como o máximo valor de γ para o qual

$$\|y\|_2 < \gamma \|u\|_2 \quad (1.36)$$

e

$$\max_{u \in L_2, u \neq 0} \frac{\|Tu\|_2^2}{\|u\|_2^2} < \gamma^2 \quad (1.37)$$

A norma H_∞ tem, deste modo, a interpretação da existência de ganho de energia máxima da entrada u para a saída y .

Neste estudo, T é uma matriz, então a norma H_∞ de T é o valor máximo de T , $\bar{\sigma}(T)$.

1.3.5 Minimização do operador de transferência $\|T\|_\infty$

Como visto na seção 1.3.4, o operador de transferência $\|T\|_\infty$ é dado por:

$$\|T\|_\infty = \max_{u \in L_2, u \neq 0} \frac{\|Tu\|_2}{\|u\|_2} \quad (1.38)$$

que, minimizando vem:

$$\min \|T\|_\infty = \min \max_{u \in L_2, u \neq 0} \frac{\|Tu\|_2}{\|u\|_2} \quad (1.39)$$

supondo Tu estável, onde L_2 é o espaço formado pelas funções quadraticamente somáveis.

A norma $\|T\|_\infty$, visto na Eq. (1.37), limitada por um número γ é reescrita no domínio do tempo como:

$$\max_{u \in L_2, u \neq 0} \frac{\|Tu\|_2^2}{\|u\|_2^2} < \gamma^2 \quad (1.40)$$

em que u é formado pelo conjunto das seguintes penalidades: perturbação do processo (w), ruído das medidas da saída (v) e do estado inicial (x_0), como visto na Eq. (1.41).

$$\|u\|_2^2 = x_0 \Pi_0^{-1} x_0 + \|w\|_2^2 + \|v\|_2^2 \quad (1.41)$$

e a **função custo** dada por:

$$J = \|Tu\|_2^2 - \gamma^2 [x_0 \Pi_0^{-1} x_0 + \|w\|_2^2 + \|v\|_2^2] \quad (1.42)$$

O primeiro termo do lado direito da Eq. (1.42) corresponde à função custo que minimiza o **erro médio quadrático**. O segundo termo do lado direito da Eq. (1.42) é o termo da penalidade sobre w , v e x_0 , sendo γ uma constante positiva que representa a magnitude da penalidade. Do ponto de vista teórico, pode-se dizer que a estimativa Tu e as variáveis

(w, v, x_0) são as políticas de minimização e maximização da função custo J , respectivamente.

CAPITULO II

2 Filtragem de dados via estimação de estado H_2

2.1 Introdução ao filtro de Kalman

Em 1960, Rudolf Emil Kalman³ publicou o seu famoso artigo descrevendo uma solução recursiva para o problema da filtragem linear de dados discretos (KALMAN, 1960; KALMAN, 1961). Desde então, devido principalmente aos avanços da computação digital, o Filtro de Kalman tem sido uma ferramenta de muita pesquisa e desenvolvimento. A Filtragem de Kalman vem sendo aplicada em áreas tão diversas quanto: aeroespacial, navegação marítima, instrumentação de usinas nucleares, modelamento demográfico, astronomia, meteorologia, economia e indústria em geral.

A primeira aplicação prática para o Filtro de Kalman foi encontrada por Stanley F. Shimidt que trabalhava no projeto Apollo da NASA cujo objetivo era levar uma nave à Lua e trazê-la de volta a Terra. No momento ele tinha problemas na estimação de trajetórias e controle. Shimidt trabalhou no que seria a primeira implementação completa do Filtro de Kalman e tornou o mesmo parte integrante do sistema de controle da Apollo. Também por influência de Shimidt, o Filtro de Kalman foi incluído no sistema de navegação do cargueiro aéreo C5A. Neste caso, o Filtro de Kalman resolveu o problema de fusão sensorial, quando combinou dados de radar com aqueles provenientes de sensores inerciais para estimar a trajetória do avião. Desde então o Filtro de Kalman vem sendo parte integrante da maioria dos sistemas de bordo de estimação de trajetória e controle em aeronaves.

O Filtro de Kalman é, porém, considerado por muitos o grande avanço da teoria de estimação do século vinte. Muitas realizações desde sua introdução talvez não fossem possíveis sem ele. As principais aplicações da filtragem de Kalman estão nos sistemas de controle modernos e na navegação e rastreamento de todos os tipos de veículos.

Diante das qualidades abordadas e de sua vasta aplicação, como já mencionado anteriormente, decidimos investigar e dar continuidade na utilização da filtragem de Kalman, agora, aplicado em rastreamento de foguetes de sondagem, aproveitando dados de vôos realizados no Centro de Lançamento de Alcântara – CLA.

³No Apêndice A é mostrado uma pequena biografia de R. E. Kalman.

2.2 Filtragem via estimação de estado H_2

O problema de estimação de estados se resume, basicamente, ao seguinte conceito: dado um modelo de espaço de estado de um sistema dinâmico, deseja-se estimar as variáveis de estado a partir das medições das variáveis de saída (MENDEL, 1995; JACQUOT, 1994; HASSIBI, Vol. 44, n° 2, 1996; HASSIBI, Vol. 41, n° 1, 1996; SINGH, 1978).

Um procedimento padrão para resolver o problema de estimação de estado, compreende a minimização de alguns critérios quadráticos com base nos erros de estimação. Este procedimento, denominado de Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) ou estimação de estado H_2 , é bastante atraente sob vários pontos de vista, como por exemplo, o emprego de algoritmos de otimização para se determinar estimativas ótimas.

No emprego da filtragem de Kalman, inicialmente, estuda-se o desenvolvimento matemático da estimação de estado predita ou estimação *a priori*, que significa calcular a estimativa de estado no tempo i dado uma seqüência de medidas somente até $i-1$. Esta estimação pode ser calculada recursivamente através de uma equação que faz a correção do erro estimado dando um ganho do desempenho do filtro. Este ganho obedece à recursividade de Riccati, discreta no tempo. A seguir, são desenvolvidas as equações da estimação de estado filtrada (ou estimação *a posteriori*), que significa calcular a estimativa de estado no tempo i dada uma seqüência de medidas até o tempo i . Esta estimação pode ser calculada recursivamente através de uma equação que faz a correção do erro estimado dando um ganho do desempenho do filtro. Este ganho, também, obedece a uma recursividade discreta no tempo de Riccati. É observado que as estimativas de estado filtrado e predito são inter-relacionadas. De posse das equações necessárias para se fazer predição e correção de erros de estimação, desenvolve-se e implementa-se o algoritmo para fazer a filtragem de dados da trajetória de um veículo espacial, usando um sistema de radar de rastreamento.

A solução do problema de estimação de estado H_2 é dada através do estudo do Filtro de Kalman. Mas o que é o Filtro de Kalman? Teoricamente, ele é um estimador para aquilo que é chamado o “problema Gaussiano-linear-quadrático”, que é o problema de estimação dos estados instantâneos de um sistema linear dinâmico perturbado por ruído Gaussiano branco usando-se medições linearmente relacionadas aos estados e também corrompidos por ruído branco (CAINES, 1987). Na prática, o Filtro de Kalman é um conjunto de equações matemáticas que provê uma solução computacional eficiente para o método dos

mínimos quadrados, ou seja, descreve uma solução recursiva para o problema da filtragem linear de dados discretos (MENDEL, 1995; JACQUOT, 1994; SINGH, 1978; GREG, 2001). O filtro é muito poderoso, pois, permite a estimação dos estados passados, presentes e futuros de um sistema, sendo que para isso não é necessário um conhecimento preciso de seu modelo.

Pelo que foi mencionado, pode parecer estranho que um estimador seja chamado de “filtro”, no entanto, dá uma idéia de remoção de parte indesejável de uma mistura. Este conceito pode ainda, ser estendido à separação entre “sinal” e “ruído”. Com o Filtro de Kalman, o termo além destes significados inclui também, o problema da inversão de um sistema, que representa as várias medidas como função das variáveis de interesse principal. No fundo, o filtro inverte esta relação funcional e estima as variáveis independentes (medidas).

2.3 Objetivo do filtro de Kalman

O objetivo do Filtro Ótimo de Kalman é estimar a cada instante, de forma ótima, o estado de um sistema dinâmico usando medidas de ruído da saída do sistema, conhecendo x_i (*variável de estado*) sabendo que y_i (*saída medida*) está sendo contaminada pelo ruído (v_i) e pela perturbação (w_i), o que permite dizer que **filtragem** é: poder estimar x a cada instante.

2.4 Filtro de Kalman discreto

O Filtro de Kalman discreto é um algoritmo linear, recursivo e de variância mínima para a estimação dos estados desconhecidos de um sistema dinâmico a partir de medições discretas, corrompidas por ruído. Estado, neste contexto, se refere a qualquer quantidade de interesse envolvido no processo dinâmico.

O Filtro de Kalman discreto no tempo é um procedimento iterativo representado em várias etapas de processamento, como visto na Fig. 2.1.

O filtro é provido de uma informação inicial, incluindo medidas do erro de covariância, estimativas dos parâmetros iniciais e erro associado, sendo estes parâmetros usados para calcular uma matriz de ganho. O erro entre os parâmetros estimados e o dado medido é determinado e calculado pela matriz ganho para atualizar os parâmetros estimados e erro estimado. O erro atualizado e os parâmetros são usados como entrada de um modelo de comportamento para prever o erro projetado e parâmetros para o próximo instante de tempo.

Para o desenvolvimento do algoritmo de estimação de estado H_2 (Filtro de Kalman), deve-se considerar inicialmente, algumas propriedades estatísticas, vistas na Sessão 1.3.1, de variáveis aleatórias Gaussiana ao modelo discreto, contaminada com perturbações do sistema e ruídos nas medidas (GREG, 2001). Tais propriedades dão base matemática para o desenvolvimento das principais equações do Filtro de Kalman.

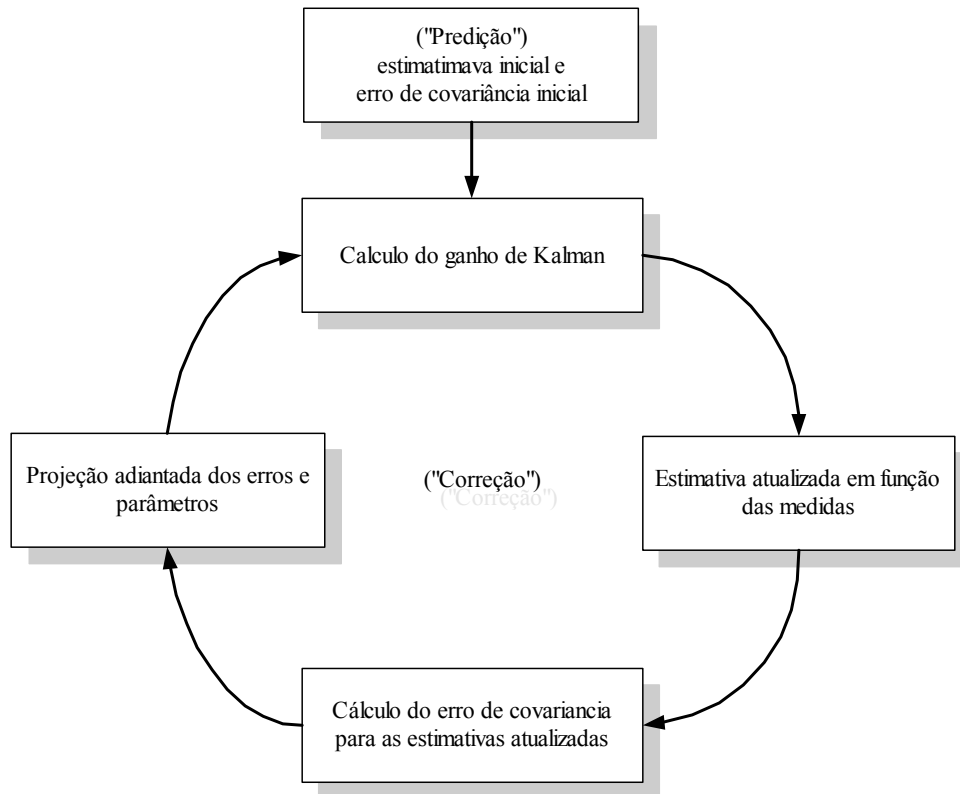


Figura 2.1 – Malha usual do Filtro de Kalman

2.5 Estimação ótima H_2

A técnica de estimação de parâmetros associados a fenômenos físicos, baseados em medições imprecisas, não é recente e certamente vem desde os tempos dos esforços de Gauss para estimar parâmetros de órbitas planetárias baseado em dados adquiridos de muitos observatórios espalhados pela Europa. Gauss postulou que erros positivos e negativos poderiam ser considerados igualmente se uma medida de erro quadrático fosse empregada. Ele também encontraria que a melhor estimativa prevista seria atualizada pelos dados recentes de ponderação de acordo com a confiança na precisão das medições atuais. Isto é a essência da técnica de estimação de estado de Kalman (JACQUOT, 1994; SINGH, 1978).

O problema de filtragem envolve estimação de estados de um sistema usando medições ruidosas passadas. Desde a publicação de artigos fundamentais por R. E. Kalman, a teoria de filtragem de Kalman baseada no critério de erro médio quadrático (H_2 ótimo) tem sido profundamente estabelecido no controle e teoria de processamento de sinais e suas aplicações por mais de três décadas. Quando as perturbações de ruído são processos de ruído branco e suas densidades espectrais são exatamente conhecidas, o filtro de Kalman oferece o algoritmo de estimação de estado ótimo no sentido médio quadrático e variância mínima em que $\|\tilde{x}_i\|_2$ e $E\{\|\tilde{x}_i\|^2\}$ são minimizadas, onde $\tilde{x}_i = x_i - \hat{x}_i$ denota o erro de estimação. Entretanto, é difícil conhecer as propriedades estocásticas exatas das perturbações *a priori*. Neste caso, os estados estimados baseados no critério médio quadrático podem ser graduados pela estatística das incertezas das perturbações (TAKABA, 1996).

Neste capítulo é elaborado um estudo do Filtro de Kalman, onde se aborda a parte conceitual, tratamento matemático e aplicação do mesmo. Dando seqüência ao estudo de estimação de estado é apresentado uma versão do filtro de Kalman, escolhido pode ser, comprovadamente, o melhor estimador linear no sentido mínimo-quadrado H_2 (FORSSELL, 1996; KAILATH, 1996; SINGH, 1978).

2.5.1 Equações do filtro de Kalman para estimativas filtradas.

Inicia-se este desenvolvimento considerando o modelo discreto do filtro de Kalman, onde será calculada a estimativa de x_i dada a seqüência de medições de saída $\{y_0, y_1, \dots, y_i\}$, ou seja, incluindo o tempo atual i . O filtro de Kalman é um estimador linear, que trabalha envolvendo valores $\hat{x}_{i|i}$ (estimativa filtrada), isto é, a estimativa de x_i dado a seqüência de medições de saída $\{y_0, y_1, \dots, y_i\}$. Para dar mais clareza a este raciocínio estuda-se a seguir o Filtro de Kalman para estimativas filtradas.

O problema do Filtro de Kalman é estimar, a cada instante, os estados de um sistema dinâmico usando medições de ruído da saída do sistema. O Filtro de Kalman pressupõe que o sistema em questão pode ser descrito por duas equações que compõem um modelo geral de um sistema dinâmico discreto, da seguinte forma:

$$x_{i+1} = F_i x_i + G_i w_i \quad x_0 = 0 \quad (2.1)$$

$$y_i = H_i x_i + v_i \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2)$$

sendo que $x \in \mathfrak{R}^n$ representa o vetor de estados, $y \in \mathfrak{R}^m$ representa o vetor de medidas, $w \in \mathfrak{R}^n$ representa o ruído do processo, $v \in \mathfrak{R}^m$ representa o vetor de erros de medidas, $F_{n \times n}$ é uma matriz de transição de estado, $G_{n \times l}$ é uma matriz de transição do ruído do processo e $H_{m \times n}$ é a matriz de observação.

A equação (2.1) é denominada **equação de estado**, que no caso específico deste trabalho, descreve a dinâmica do foguete, conforme Eq. (1.12) e a equação (2.2) representa as **medidas de posição** do foguete em uma direção específica, conforme Eq. (1.16). Os índices i e $i-1$ representam os instantes de tempo **atual** e **anterior**, respectivamente.

Considera-se as equações de espaço de estado (2.1) do modelo geral do sistema dinâmico que será controlado pela equação diferença do vetor e matriz estocástico, com um vetor de saída (2.2) medido através de uma combinação linear de estados contaminados com medidas de ruído com $\{w_i, v_i, x_0\}$ variáveis aleatórias, puramente Gaussiana, de média zero, de tal forma que a matriz covariância seja dada por:

$$E \begin{bmatrix} w_i \\ v_i \\ x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ v_i \\ x_0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} Q_i \delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & R_i \delta_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

em que as matrizes $\{F_i, G_i, H_i, Q_i, R_i, \Pi_0\}$ são assumidas conhecidas (FORSELL, 1996).

A estimativa ótima de estado filtrado, também chamado de estimativa de estado *a posteriori*, de x_i dada a seqüência de medições de saída $\{y_0, y_1, \dots, y_i\}$ pode ser calculada via recursão de Riccati, conforme visto nas seções subseqüentes.

Para dar seqüência ao desenvolvimento do Filtro de Kalman, é necessário conhecer, inicialmente, alguns princípios estatísticos, apresentados na Seção 1.3.2, relativos ao modelo dinâmico discreto contaminado com perturbação e ruído.

2.5.2 Problema do filtro ótimo de Kalman

O problema do filtro ótimo de Kalman, discreto no tempo, é determinar a **melhor** estimativa de x_i da Eq. 2.1 em função de uma seqüência de observações passadas e recentes $\{y_0, y_1, \dots, y_i\}$ da Eq. 2.2. O conjunto da seqüência de observações é denotado por: $\{y_0, y_1, \dots, y_i\} = Y_i$.

A **melhor** estimativa no sentido de **minimização** do seguinte critério de erro quadrático é:

$$E[(x_i - \hat{x}_i)^T S(x_i - \hat{x}_i) / Y_i] \quad (2.4)$$

em que S representa uma matriz de ponderação simétrica definida não-negativa ($S \geq 0$) e \hat{x}_i representa uma estimativa de estado em função das observações $\{y_0, y_1, \dots, y_i\} = Y$.

Dadas as considerações iniciais sobre o modelo discreto, o objetivo é encontrar uma **estimativa ótima** para o vetor x_i , representada por \hat{x}_i , que minimize o erro médio quadrático

$$E[(x_i - \hat{x}_i)^T (x_i - \hat{x}_i)] = P_i$$

Definindo $\tilde{x}_i \hat{=} x_i - \hat{x}_i$ como sendo o vetor dos resíduos entre os estados reais e os estimados vê-se que a função custo a ser minimizada (pelo método dos mínimos quadrados) é exatamente o somatório do quadrado dos resíduos para cada instante de amostragem:

$$J = \sum_{i=1}^N E[\tilde{x}_i^T \tilde{x}_i] \quad (2.5)$$

Nota-se que ao minimizar uma função custo, minimiza-se também a covariância do resíduo:

$$P_i = E[\tilde{x}_i^T \tilde{x}_i] \quad (2.6)$$

Sabendo que a estimativa ótima com relação ao critério de erro quadrático é a estimativa média condicional, pode-se escolher \hat{x}_i tal que o erro médio quadrático condicional seja minimizado:

$$J = \frac{1}{2} E[\tilde{x}_i^T \tilde{x}_i / Y_i] \quad (2.7)$$

ou

$$J = \frac{1}{2} E[(x_i - \hat{x}_i)^T (x_i - \hat{x}_i) / Y_i] \quad (2.8)$$

em que $\tilde{x}_i = x_i - \hat{x}_i$ representa o vetor erro de estimação, x_i representa o vetor de estado e \hat{x}_i representa a estimativa ótima.

A **estimativa ótima** (\hat{x}) do critério acima é a média condicional, ou seja,

$$\hat{x}_{j/i} = E[x_i / y_0, y_1, \dots, y_i] = E[x_i / Y_i] \quad (2.9)$$

Observa-se das propriedades descritas nas seções 1.3.1 e 1.3.2, que a densidade de probabilidade condicional $p(x_i / Y_i)$ é gaussiana e a **estimação máxima a posteriori** é idêntica à **estimativa média condicional** para este problema.

Define-se, também, os estados estimados **a priori (ou predição de um passo)**, como a estimação de estado x_i no instante i , dado uma seqüência de medições até $i-1$, ou seja:

$$\hat{x}_{i/i-1} = E[x_i / y_0, \quad y_1, \quad \dots \quad y_{i-1}] = E[x_i / y_{i-1}] \quad (2.10)$$

sendo que $\hat{x}_{i/i-1} \in \mathfrak{R}^n$ representa a estimativa ótima de estado.

Através desta definição observa-se que poderão ser solucionados dois outros problemas, os quais estão próximos do problema do filtro, que são: a determinação de $\hat{x}_{j/i}$ com $i < j$ que representa o problema de Predição ou Extrapolação e a determinação de $\hat{x}_{j/i}$ com $i > j$ que representa o problema *Smoothing*. Tratar-se-á a seguir apenas o problema de filtragem.

2.5.3 Desenvolvimento das equações do filtro de Kalman.

A abordagem para o desenvolvimento das equações do filtro de Kalman pode ser dividida em um número de passos distintos, descritos a seguir:

Passo 1 – Transição do estado x_{i-1} para x_i .

Assumindo conhecido a estimativa de estado $\hat{x}_{i-1/i-1}$, deseja-se determinar o **preditor de um passo** $\hat{x}_{i/i-1}$. Considerando a equação dinâmica (2.1) e tornando a média condicional dos dois lados da equação, obtém-se:

$$E[x_i / y_0, \quad y_1, \quad \dots \quad y_{i-1}] = F_{i-1} E[x_{i-1} / y_0, \quad y_1, \quad \dots \quad y_{i-1}] + G_{i-1} [w_{i-1} / y_0, \quad y_1, \quad \dots \quad y_{i-1}] \quad (2.11)$$

Porém, desde que w_{i-1} seja independente de $v_i, \quad w_{i-2}, \quad \dots \quad w_0$ e x_0 , ele é independente de $\{y_0, \quad y_1, \quad \dots \quad y_i\}$, tal que

$$E[w_{i-1} / y_0, \quad y_1, \quad \dots \quad y_{i-1}] = E[w_{i-1}] = 0$$

e a Eq. (2.11) fica

$$E[x_i / y_0, y_1, \dots, y_{i-1}] = F_{i-1} E[x_{i-1} / y_0, y_1, \dots, y_{i-1}]$$

que corresponde a

$$\hat{x}_{i/i-1} = F_{i-1} \hat{x}_{i-1/i-1} \quad (2.12)$$

A equação acima é denominada de “**preditor**”.

Erro de predição de 1 passo:

A seguir determina-se a matriz covariância para o **erro de predição de 1 passo**, ou seja:

$$P_{i/i-1} = E[(x_i - \hat{x}_{i/i-1})(x_i - \hat{x}_{i/i-1})^T / y_0, y_1, \dots, y_{i-1}] \quad (2.13)$$

A propriedade 1.1 da Seção 1.3.1, sobre vetores aleatórios Gaussianos, garante que o **erro de predição** $(x_i - \hat{x}_{i/i-1})$ é independente da seqüência y_0, y_1, \dots, y_{i-1} , de tal forma que a matriz covariância da Eq. (2.13) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$P_{i/i-1} = E[(x_i - \hat{x}_{i/i-1})(x_i - \hat{x}_{i/i-1})^T] \quad (2.14)$$

O erro de predição de um passo pode ser escrito assim

$$x_i - \hat{x}_{i/i-1} = F_{i-1}(x_{i-1} - \hat{x}_{i-1/i-1}) + G_{i-1}w_{i-1} \quad (2.15)$$

de tal forma que se obtém

$$\begin{aligned} P_{i/i-1} &= E\{[F_{i-1}(x_{i-1} - \hat{x}_{i-1/i-1}) + G_{i-1}w_{i-1}][F_{i-1}(x_{i-1} - \hat{x}_{i-1/i-1}) + G_{i-1}w_{i-1}]^T\} \\ &= E[F_{i-1}x_{i-1}(F_{i-1}x_{i-1})^T - F_{i-1}x_{i-1}(F_{i-1}\hat{x}_{i-1/i-1})^T + F_{i-1}x_{i-1}(G_{i-1}w_{i-1})^T \\ &\quad - F_{i-1}\hat{x}_{i-1/i-1}(F_{i-1}x_{i-1})^T + F_{i-1}\hat{x}_{i-1/i-1}(F_{i-1}\hat{x}_{i-1/i-1})^T - F_{i-1}\hat{x}_{i-1/i-1}(G_{i-1}w_{i-1})^T \\ &\quad + G_{i-1}w_{i-1}(F_{i-1}x_{i-1})^T - G_{i-1}w_{i-1}(F_{i-1}\hat{x}_{i-1/i-1})^T + G_{i-1}w_{i-1}(G_{i-1}w_{i-1})^T] \end{aligned}$$

que resulta

$$\begin{aligned} P_{i/i-1} &= F_{i-1}P_{i-1/i-1}F_{i-1}^T + F_{i-1}E[(x_{i-1} - \hat{x}_{i-1/i-1})w_{i-1}^T / Y_{i-1}]G_{i-1}^T \\ &\quad + G_{i-1}E[w_{i-1}(x_{i-1} - \hat{x}_{i-1/i-1})^T / Y_{i-1}]F_{i-1}^T + G_{i-1}QG_{i-1}^T \end{aligned} \quad (2.16)$$

Nota-se que $E[x_{i-1}w_{i-1}] = 0$, desde que x_{i-1} seja uma função de x_0 e de w_0, w_1, \dots, w_{i-2} , mas não de w_{i-1} . Na soma w_{i-1} tem média zero e também:

$$E[\hat{x}_{i-1/i-1}w_{i-1}^T / Y_{i-1}] = \hat{x}_{i-1/i-1}E[w_{i-1}^T] = \hat{x}_{i-1/i-1}E[w_{i-1}^T] = 0$$

Observa-se que o termo $F_{i-1}P_{i-1/i-1}F_{i-1}^T$ da equação (2.16) é dado pela seguinte simplificação

$$F_{i-1}P_{i-1/i-1}F_{i-1}^T = F_{i-1}E\{[x_{i-1}(x_{i-1} - \hat{x}_{i-1/i-1})]F_{i-1}^T - F_{i-1}[\hat{x}_{i-1/i-1}(x_{i-1} - \hat{x}_{i-1/i-1})^T]F_{i-1}^T\}$$

que resulta em

$$F_{i-1}P_{i-1/i-1}F_{i-1}^T = F_{i-1}E[(x_{i-1} - \hat{x}_{i-1/i-1})(x_{i-1} - \hat{x}_{i-1/i-1})^T]F_{i-1}^T.$$

sendo que o termo

$$E[(x_{i-1} - \hat{x}_{i-1/i-1})(x_{i-1} - \hat{x}_{i-1/i-1})^T] = P_{i-1/i-1}$$

tal que a **matriz covariância do erro de predição** de 1 passo, possa ser determinada pela expressão abaixo, chamada de **Recursão de Riccati**.

$$P_{i/i-1} = F_{i-1}P_{i-1/i-1}F_{i-1}^T + G_{i-1}QG_{i-1}^T \quad (2.17)$$

A equação acima serve para determinar o “**Erro de Predição médio quadrático**”.

Passo 2 – Predição de um passo da estimativa filtrada (*a posteriori*).

Neste passo deseja-se expressar a estimativa de x_i dado as medidas até t_i , ou seja, dado a seqüência de medidas de saída $\{y_0, y_1, \dots, y_{i-1}, y_i\} = Y_i$. Para fazer isto, determina-se a densidade de probabilidade condicional

$$p(x_i / y_0, y_1, \dots, y_{i-1}, y_i) = p(x_i / Y_i)$$

Notando que pode-se reescrever esta densidade de probabilidade condicional como

$$p(x_i / Y_i) = p(x_i / Y_{i-1}, y_i)$$

onde separa-se a saída da última medição de todas as medidas da seqüência Y_{i-1} . Aplicando o teorema de *BAYES* para esta expressão, isto conduz para a seguinte relação:

$$p(x_i / Y_i) = p(x_i / Y_{i-1}, y_i) = \frac{p(x_i, Y_{i-1}, y_i)}{p(Y_{i-1}, y_i)} = p(y_i / x_{i-1}) \frac{p(x_i, Y_{i-1})}{p(Y_{i-1}, y_i)} = p(y_i / x_i, Y_{i-1}) \frac{p(x_i / Y_{i-1})}{p(y_i / Y_{i-1})} \quad (2.18)$$

Considerando a equação de observação (2.2) e observando que o conhecimento de x_i implica que a única quantidade aleatória é v_i que é independente de

$\{y_0, y_1, \dots, y_{i-1}\}$ (desde que $\{v_i\}$ seja uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e v_i seja independente de x_0 e w_0, w_1, \dots, w_i), pode-se então escrever:

$$p(y_i / x_i, Y_{i-1}) = p(y_i / x_i)$$

Substituindo em (2.18) obtém-se

$$p(x_i / Y_i) = \frac{p(y_i / x_i) p(x_i / Y_{i-1})}{p(y_i / Y_{i-1})} \quad (2.19)$$

Nesta ordem, para determinar a **máxima estimativa a posteriori** usando a expressão acima, somente será necessário avaliar a densidade de probabilidade do numerador desde que o denominador não seja uma função explícita de x_i .

Para avaliar a densidade de probabilidade condicional $p(y_i / x_i)$, considera-se a equação de observação (2.2). Para um dado x_i , y_i é um vetor aleatório Gaussiano de média

$$E[y_i / x_i] = H_i[x_i / x_i] + E[v_i / x_i].$$

que resulta

$$E[y_i / x_i] = H_i[x_i]$$

desde que

$$E[v_i / x_i] = E[v_i] = 0$$

A matriz covariância do erro é dada por:

$$E[(y_i - H_i x_i)(y_i - H_i x_i)^T] = E[v_i v_i^T] = R$$

podendo então escrever a densidade de probabilidade $p(y_i / x_i)$ da seguinte forma

$$p(y_i / x_i) = K e^{-\frac{1}{2}(y_i - H_i x_i)^T R^{-1} (y_i - H_i x_i)} \quad (2.20)$$

onde K é uma constante de normalização apropriada.

Para avaliar a densidade de probabilidade, *a priori*, $p(x_i / y_{i-1})$, nota-se que da Propriedade 1.3 da Seção 1.3.1, esta densidade de probabilidade é Gaussiana de média $\hat{x}_{i/i-1}$ e covariância $P_{i/i-1}$ tal que tem-se

$$p(x_i / Y_{i-1}) = K' e^{-\frac{1}{2}(x_i - \hat{x}_{i/i-1})^T P_{i/i-1}^{-1} (x_i - \hat{x}_{i/i-1})} \quad (2.21)$$

de tal forma que a densidade de probabilidade a posteriori $p(x_i / Y_i)$ pode ser escrita assim

$$p(x_i / Y_i) = K'' e^{-\frac{1}{2}[(y_i - H_i x_i)^T R^{-1} (y_i - H_i x_i) + (x_i - \hat{x}_{i/i-1})^T P_{i/i-1}^{-1} (x_i - \hat{x}_{i/i-1})]} \quad (2.22)$$

Aqui, K'' também leva em conta o denominador $p(y_i / Y_{i-1})$ da Eq. (2.19).

A fim de desenvolver a estimativa máxima a posteriori (que é o mesmo que a estimativa média condicional para este caso), pode-se derivar o logaritmo de (2.22) em relação a x_i , através da regra C_6 do Apêndice C, e igualar a zero para obter a estimativa ótima $\hat{x}_{i/i}$. Assim, obtém-se:

$$H_i^T R^{-1} (y_i - H_i x_i) - P_{i/i-1}^{-1} (x_i - \hat{x}_{i/i-1}) = 0$$

para $x_i = \hat{x}_{i/i}$

$$(H_i^T R^{-1} H_i + P_{i/i-1}^{-1}) \hat{x}_{i/i} = H_i^T R^{-1} y_i + P_{i/i-1}^{-1} \hat{x}_{i/i-1}$$

$$\hat{x}_{i/i} = (H_i^T R^{-1} H_i + P_{i/i-1}^{-1})^{-1} (H_i^T R^{-1} y_i + P_{i/i-1}^{-1} \hat{x}_{i/i-1})$$

$$\hat{x}_{i/i} = (H_i^T R^{-1} H_i + P_{i/i-1}^{-1})^{-1} H_i^T R^{-1} y_i + (H_i^T R^{-1} H_i + P_{i/i-1}^{-1})^{-1} P_{i/i-1}^{-1} \hat{x}_{i/i-1} \quad (2.23)$$

chamando $(H_i^T R^{-1} H_i + P_{i/i-1}^{-1})^{-1} = M$ e usando o Lema da Inversão de Matriz, Apêndice B, o segundo termo da Eq. (2.23) fica:

$$\begin{aligned} MP_{i/i-1}^{-1} \hat{x}_{i/i-1} &= (I - MH_i^T R^{-1} H_i) \hat{x}_{i/i-1} \\ &= (MM^{-1} - MH_i^T R^{-1} H_i) \hat{x}_{i/i-1} \\ &= MM^{-1} \hat{x}_{i/i-1} - MH_i^T R^{-1} H_i \hat{x}_{i/i-1} \\ &= \hat{x}_{i/i-1} - (H_i^T R^{-1} H_i + P_{i/i-1}^{-1})^{-1} H_i^T R^{-1} H_i \hat{x}_{i/i-1} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Substituir (2.24) em (2.23) vem:

$$\hat{x}_{i/i} = (H_i^T R^{-1} H_i + P_{i/i-1}^{-1})^{-1} H_i^T R^{-1} y_i + \hat{x}_{i/i-1} - (H_i^T R^{-1} H_i + P_{i/i-1}^{-1})^{-1} H_i^T R^{-1} H_i \hat{x}_{i/i-1}$$

que pode ser reescrito assim

$$\hat{x}_{i/i} = \hat{x}_{i/i-1} + (H_i^T R^{-1} H_i + P_{i/i-1}^{-1})^{-1} H_i^T R^{-1} (y_i - H_i \hat{x}_{i/i-1}) \quad (2.25)$$

Esta expressão nos habilita a obter o novo valor de estimação de estado dado uma nova observação.

Finalmente, calcula-se a variância do erro de estimação. Nota-se que

$$\hat{x}_{i/i} = (H_i^T R^{-1} H_i + P_{i/i-1}^{-1})^{-1} (H_i^T R^{-1} y_i + P_{i/i-1}^{-1} \hat{x}_{i/i-1})$$

e

$$y_i = H_i x_i + v_i$$

logo

$$x_i - \hat{x}_{i/i} = x_i - (H_i^T R^{-1} H_i + P_{i/i-1}^{-1})^{-1} (H_i^T R^{-1} H_i x_i + H_i^T R^{-1} v_i + P_{i/i-1}^{-1} \hat{x}_{i/i-1} + P_{i/i-1}^{-1} x_i - P_{i/i-1}^{-1} x_i)$$

que simplificando dá

$$x_i - \hat{x}_{i/i} = -(H_i^T R^{-1} H_i + P_{i/i-1}^{-1})^{-1} [H_i^T R^{-1} v_i - P_{i/i-1}^{-1} (x_i - \hat{x}_{i/i-1})]$$

e

$$P_{i/i} = E[(x_i - \hat{x}_{i/i})^T (x_i - \hat{x}_{i/i})]$$

Usando as expressões acima e notando que v_i e x_i são independentes, sendo v_i um ruído de média zero e, também, que v_i e $\hat{x}_{i/i-1}$ são independentes, obtém-se

$$P_{i/i} = (H_i^T R^{-1} H_i + P_{i/i-1}^{-1})^{-1} \quad (2.26)$$

As expressões (2.25) e (2.26) envolvem a inversão de matrizes $n \times n$, onde n é a ordem do vetor de estado. Porém, desde que o vetor observação seja usualmente de ordem baixa, é possível converter estas inversões de matrizes para ordens menores de si mesma, usando o Lema de inversão de matrizes, Apêndice **B**, que se tem usado no método recursivo mínimo quadrado.

Assim, usando o Lema citado acima, pode-se reescrever a expressão da Eq. (2.26) da seguinte maneira

$$(H_i^T R^{-1} H_i + P_{i/i-1}^{-1})^{-1} = P_{i/i-1} - P_{i/i-1} H_i^T (H_i P_{i/i-1} H_i^T + R)^{-1} H_i P_{i/i-1}$$

e para a expressão (2.25) precisa-se avaliar que a igualdade abaixo é verdadeira

$$(H_i^T R^{-1} H_i + P_{i/i-1}^{-1})^{-1} H_i^T R^{-1} = P_{i/i-1} H_i^T (H_i P_{i/i-1} H_i^T + R)^{-1} \quad (2.27)$$

O segundo membro da Eq. (2.27) foi obtido como visto na demonstração abaixo:

$$\begin{aligned} M &= (H_i^T R^{-1} H_i + P_{i/i-1}^{-1})^{-1} H_i^T R^{-1} && \times (H_i^T R^{-1})^{-1} \\ M \cdot (H_i^T R^{-1})^{-1} &= (H_i^T R^{-1} H_i + P_{i/i-1}^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Elevando à potência negativa vem

$$\begin{aligned} M^{-1} \cdot H_i^T R^{-1} &= H_i^T R^{-1} H_i + P_{i/i-1}^{-1} && \times (P_{i/i-1}) \\ M^{-1} \cdot H_i^T R^{-1} P_{i/i-1} &= H_i^T P_{i/i-1} R^{-1} H_i + I && \times (R) \\ M^{-1} \cdot H_i^T P_{i/i-1} &= H_i^T P_{i/i-1} H_i + R \end{aligned}$$

Elevando à potência negativa vem

$$\begin{aligned} (M^{-1} H_i^T P_{i/i-1})^{-1} &= (H_i^T P_{i/i-1} H_i + R)^{-1} && \times (H_i^T P_{i/i-1}) \\ M &= (H_i^T P_{i/i-1} H_i + R)^{-1} H_i^T P_{i/i-1} \end{aligned}$$

Como pode ser visto, a equação acima é o segundo membro da Eq. (2.27).

Usando a igualdade acima, obtêm-se as duas novas relações a seguir.

$$\hat{x}_{i/i} = \hat{x}_{i/i-1} + P_{i/i-1} H_i^T (H_i P_{i/i-1} H_i^T + R)^{-1} (y_i - H_i \hat{x}_{i/i-1}) \quad (2.28)$$

e

$$P_{i/i} = P_{i/i-1} - P_{i/i-1} H_i^T (H_i P_{i/i-1} H_i^T + R)^{-1} H_i P_{i/i-1} \quad (2.29)$$

As Eqs. (2.12), (2.17), (2.28), (2.29) constituem as equações do filtro ótimo de variância mínima linear desenvolvido por Kalman e Bucy.

A Eq. (2.28) nos habilita calcular a estimativa ótima no instante i , dadas as medidas $\{y_0, y_1, \dots, y_i\}$ usando a predição de um passo e a diferença entre a **saída atual** y_i e a **saída predita** $H_i \hat{x}_{i/i-1}$. A diferença $(y_i - H_i \hat{x}_{i/i-1})$ é chamado de “**Processo de**

Inovação” ou **resíduo** e reflete a discrepância entre as medidas previstas $H_i \hat{x}_{i/i-1}$ e a medida atual y_i . Em um resíduo de média zero, as duas medidas estão em completo acordo. A diferença ($y_i - H_i \hat{x}_{i/i-1}$) é ponderada pelo seguinte termo:

$$K_i = P_{i/i-1} H_i^T (H_i P_{i/i-1} H_i^T + R)^{-1} \quad (2.30)$$

A matriz (ou vetor) K_i é o fator de ponderação e usualmente chamado de “**Ganho do Filtro de Kalman**”, que minimiza o erro de covariância *a posteriori*. O fator K_i minimiza os termos individuais da diagonal principal de P_i , pois estes termos representam as variâncias dos erros de estimação dos elementos do vetor de estado que está sendo estimado.

Uma forma do resultado de K que minimiza (2.29) é determinado por (GREG 2001):

$$\begin{aligned} K_i &= P_{i/i-1} H_i^T (H_i P_{i/i-1} H_i^T + R)^{-1} \\ &= \frac{P_{i/i-1} H_i^T}{H_i P_{i/i-1} H_i^T + R} \end{aligned}$$

Analisando a equação acima vê-se que, quando o erro de covariância das medidas R se aproxima de zero, o ganho K pesa mais fortemente no resíduo (erro de estimação), ou seja,

$$\lim_{R_i \rightarrow 0} K_i = H_i^{-1}.$$

Por outro lado, quando o erro de covariância da estimativa *a priori* $P_{i/i-1}$ se aproxima de zero, o ganho K pesa menos fortemente no resíduo (erro de estimação), ou seja,

$$\lim_{P_{i/i-1} \rightarrow 0} K_i = 0.$$

Outro modo de analisar a contribuição de K é que, quando a covariância do erro da medida R se aproxima de zero, a medida atual y_i é cada vez mais confiável, enquanto a medida prevista $H_i \hat{x}_{i/i-1}$ cada vez menos confiável. Por outro lado, quando a matriz de covariância do erro de estimação *a priori* $P_{i/i-1}$ se aproxima de zero, a medida atual y_i é cada vez menos confiável, enquanto a medida prevista $H_i \hat{x}_{i/i-1}$ é cada vez mais confiável.

A Tabela abaixo resume as principais equações demonstradas acima.

| Equações do Filtro de Kalman Discreto | | Nº |
|---------------------------------------|---|------|
| Preditor de 1 passo | $\hat{x}_{i/i-1} = F_{i-1}\hat{x}_{i-1/i-1}$ | 2.12 |
| Recursão de Riccati | $P_{i/i-1} = F_{i-1}P_{i-1/i-1}F_{i-1}^T + G_{i-1}QG_{i-1}^T$ | 2.17 |
| Cálculo da estimativa | $\hat{x}_{i/i} = \hat{x}_{i/i-1} + K_i(y_i - H_i\hat{x}_{i/i-1})$ | 2.28 |
| Cálculo da covariância | $P_{i/i} = (I - K_iH_i)P_{i/i-1}$ | 2.29 |
| Ganho de Kalman | $K_i = P_{i/i-1}H_i^T (H_iP_{i/i-1}H_i^T + R)^{-1}$ | 2.30 |

Tabela 2.1 – Resumo das Equações do Filtro de Kalman

Desta forma foram encontrados todas as equações necessárias para a obtenção do Filtro de Kalman Discreto – FKD.

Estas expressões podem ser representadas através do diagrama de blocos que representa o processo (planta), a saída (medidas) e o estimador (filtro), como visto na Fig. 2.2.

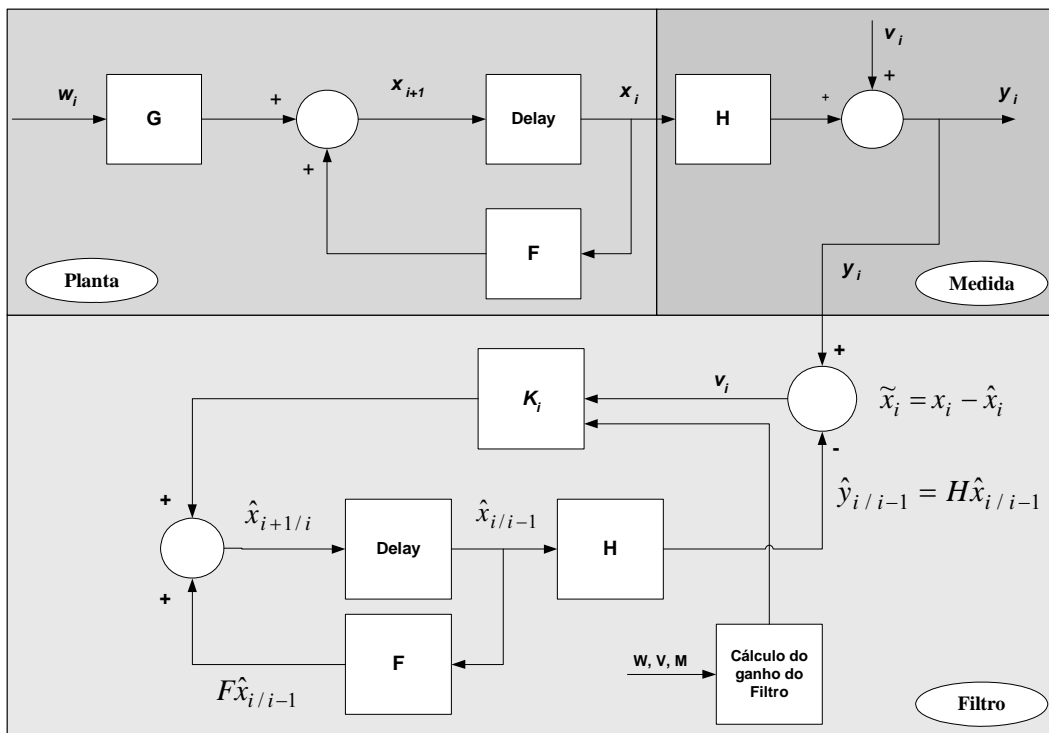


Figura 2.2 – Diagrama de blocos dos modelos de Planta, Medidas e Filtro.

Nota-se que o filtro tem a mesma estrutura do processo. A Eq. (2.29) que habilita o **cálculo do erro de covariância** é uma matriz do tipo Equação de Riccati, e que esta equação, assim como, a Eq. (2.17) são independentes das observações, de tal forma que estas equações, juntamente com o Ganho do Filtro de Kalman (2.30) podem ser pré-calculadas.

2.6 Algoritmo do filtro de Kalman

O diagrama de blocos de um sistema que utiliza o Filtro de Kalman e onde este é inserido no processo de filtragem é mostrado na Fig. (2.3).

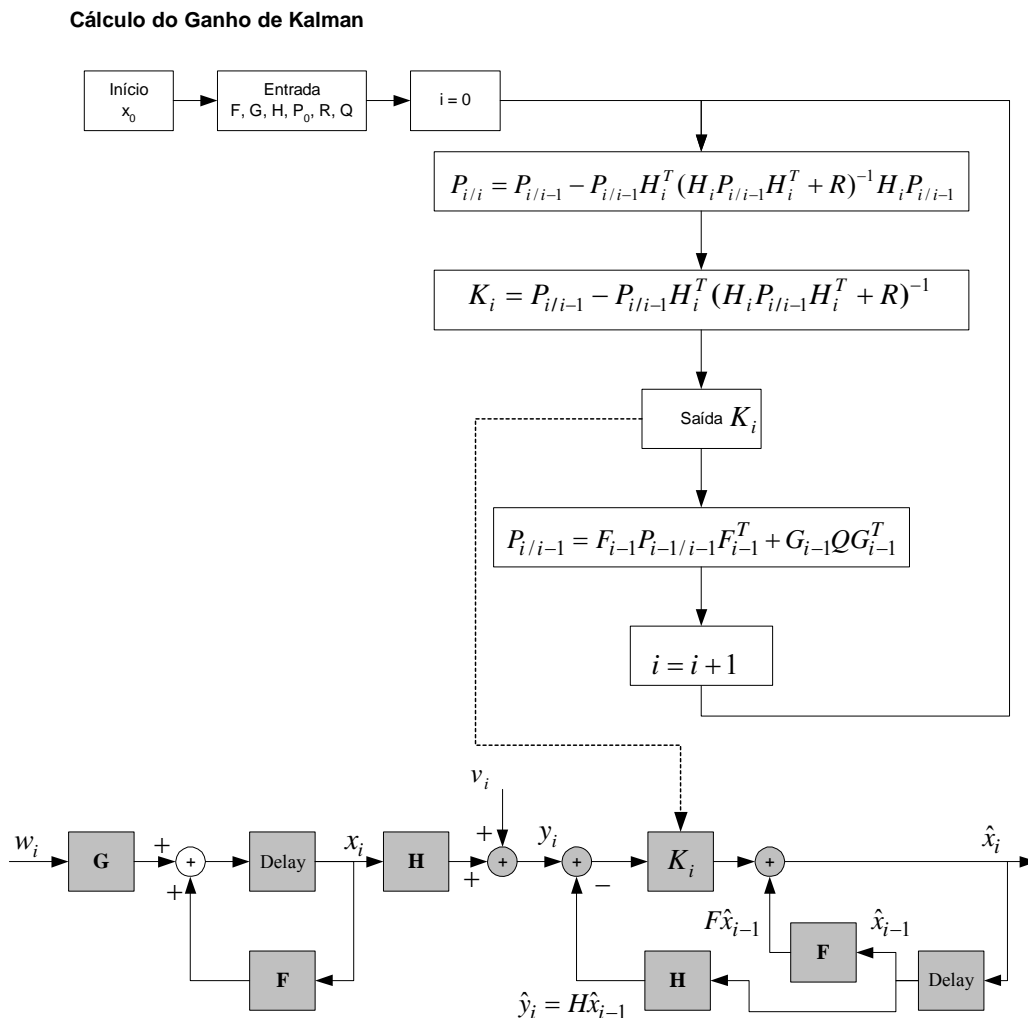


Figura 2.3 – Fluxograma e algoritmo do vetor Filtro de Kalman.

Nesta figura pode-se perceber a relação existente entre o Filtro e o sistema cujos estados estão sendo estimados.

A partir das equações da seção anterior tem-se o seguinte algoritmo:

1. Escolher os valores iniciais \hat{x}_0 e P_0 e fazer $i = 1$. Se não houver nenhum conhecimento sobre as condições iniciais do sistema, a Eq. (2.17) sugere que a **covariância do erro de predição** seja grande para favorecer a convergência.

2. Calcular os estados estimados *a priori*: (predição)

$$\hat{x}_{i/i-1} = F_{i-1} \hat{x}_{i-1/i-1}$$

3. Obter o novo vetor de medidas y_i

4. Estimar as matrizes de covariância dos erros de processo e medição, Q_{i-1} e R_i respectivamente.

5. Calcular a covariância dos resíduos de estimação *a priori*:

$$P_{i/i-1} = F_{i-1} P_{i-1/i-1} F_{i-1}^T + G_{i-1} Q G_{i-1}^T$$

6. Calcular o ganho do Filtro de Kalman:

$$K_i = P_{i/i-1} H_i^T (H_i P_{i/i-1} H_i^T + R)^{-1}$$

7. Estimar o vetor de estados: (correção)

$$\hat{x}_{i/i} = \hat{x}_{i/i-1} + K_i (y_i - H_i \hat{x}_{i/i-1})$$

8. Calcular a covariância do erro:

$$P_{i/i} = [I - K_i C_i] P_{i/i-1}$$

9. Incrementar i e voltar ao item 2.

2.7 Observações na implementação prática

O algoritmo do Filtro de Kalman é bem geral e direto, porém, muitas vezes sua implementação requer alguma prática, bom senso e conhecimento prévio sobre o sistema. Desta forma, além de se obter e sintonizar o modelo do processo deve-se descobrir se o conjunto de sensores disponíveis é suficiente ou não para observar todos os estados de interesse. Finalmente, uma importante observação que deve ser feita para qualquer sistema de estimação em tempo real é o custo computacional. Em função disso, se algum processo puder ser feito para reduzir o tempo de computação *on-line*, deve ser considerado. A seguir serão feitos alguns comentários sobre a implementação do Filtro de Kalman.

2.8 Sintonia do sistema e obtenção das matrizes de covariância

Apesar de existirem métodos analíticos para a obtenção da matriz de covariância Q_i , a implementação destes métodos é muito difícil. Na prática, esta matriz é estimada por

experimentação e intuição. Uma vez que o filtro de Kalman já foi implementado esta matriz pode ser ajustada por tentativa e erro através da comparação entre os resultados obtidos, sendo que o seu valor inicial é escolhido intuitivamente. A matriz de covariância final, é então, aquela que forneceu os melhores resultados durante a fase de experimentação. Duas possíveis simplificações em relação à estrutura da matriz podem ser feitas a fim de facilitar a obtenção do valor final. A primeira é assumir que esta é constante e a outra é considerar que não existe correlação entre os erros das variáveis de processo. Esta última consideração, reduz Q_i a uma matriz diagonal. O conhecimento de como os estados estão se comportando em relação aos valores reais também pode ser útil na determinação desta matriz. Isto significa que devem ser atribuídos menores valores de covariância aos estados que foram modelados mais precisamente. Deve ser lembrado também, mesmo que a matriz não seja diagonal, que toda matriz de covariância é simétrica.

Para a determinação da matriz R_i não existem métodos analíticos. Novamente, é necessária uma determinação empírica da mesma, considerando que a matriz é diagonal. Neste caso esta consideração reflete bem a realidade, principalmente quando consideramos que as medições vêm de sensores distintos. Novamente, a matriz pode ser considerada constante e permitindo, assim, que os valores das covariâncias possam ser derivados, pelo menos aproximadamente, através dos dados fornecidos pelos fabricantes dos sensores já que os sensores mais precisos possuem covariância menor.

Apesar de não ser muito trivial encontrar os valores das matrizes Q_i e R_i é importante que estas reflitam a precisão relativa existente entre o modelo dinâmico e o modelo de medição. Isto significa, por exemplo, que se as medições são precisas e o modelo dinâmico é impreciso, os elementos da matriz Q_i devem ser maiores que aqueles de R_i . Em particular se as medições são perfeitas, $R_i = 0$ e se o modelo dinâmico é perfeito, $Q_i = 0$. Obviamente, isto não acontece na prática e mesmo se ocorresse, um Filtro de Kalman não seria a ferramenta mais apropriada para resolver este problema, já que este filtra sistemas contaminados.

2.9 Aplicação nº 1: Filtragem da trajetória de um foguete

Conhecidas, nas seções anteriores, todas as técnicas de filtragem linear de dados discretos (estimação de estado H_2), inicia-se aqui a criação de um programa computacional

de filtragem para estimação da trajetória de um foguete de sondagem de um estágio e duas fases: uma propulsada e uma balística.

Neste trabalho, o objetivo principal é verificar a capacidade de operação do Filtro de Kalman, através da estimação de dados de posição, velocidade e aceleração de um veículo espacial.

Considerando uma variância do processo pequena, assume-se que $Q = 2$. O valor da

estimativa inicial é dado pelo vetor $\hat{x}_{0/-1} = \begin{bmatrix} -10 \\ 1 \\ 0,1 \end{bmatrix}$. Por este motivo, a covariância do

resíduo deve ser grande, de forma a proporcionar uma convergência rápida do filtro. Consideram-se as Eqs. (1.12), (1.13), (1.14) e (1.15) que descrevem a dinâmica do foguete e as Eqs. (1.16) e (1.17) que dão o modelo das medidas de posição em uma direção específica. Para iniciar o algoritmo, atribuiu-se um valor inicial à covariância do resíduo, dada pela

matriz diagonal
$$P_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}.$$

A implementação do algoritmo de filtragem de Kalman se desenvolveu baseada no fluxograma da Fig. (2.3) e nas Eqs. da Tabela (2.1). Os dados brutos, da trajetória, usados no programa foram obtidos através do rastreamento de um foguete de sondagem. Os resultados são apresentados através das Fig. (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) e (2.8).

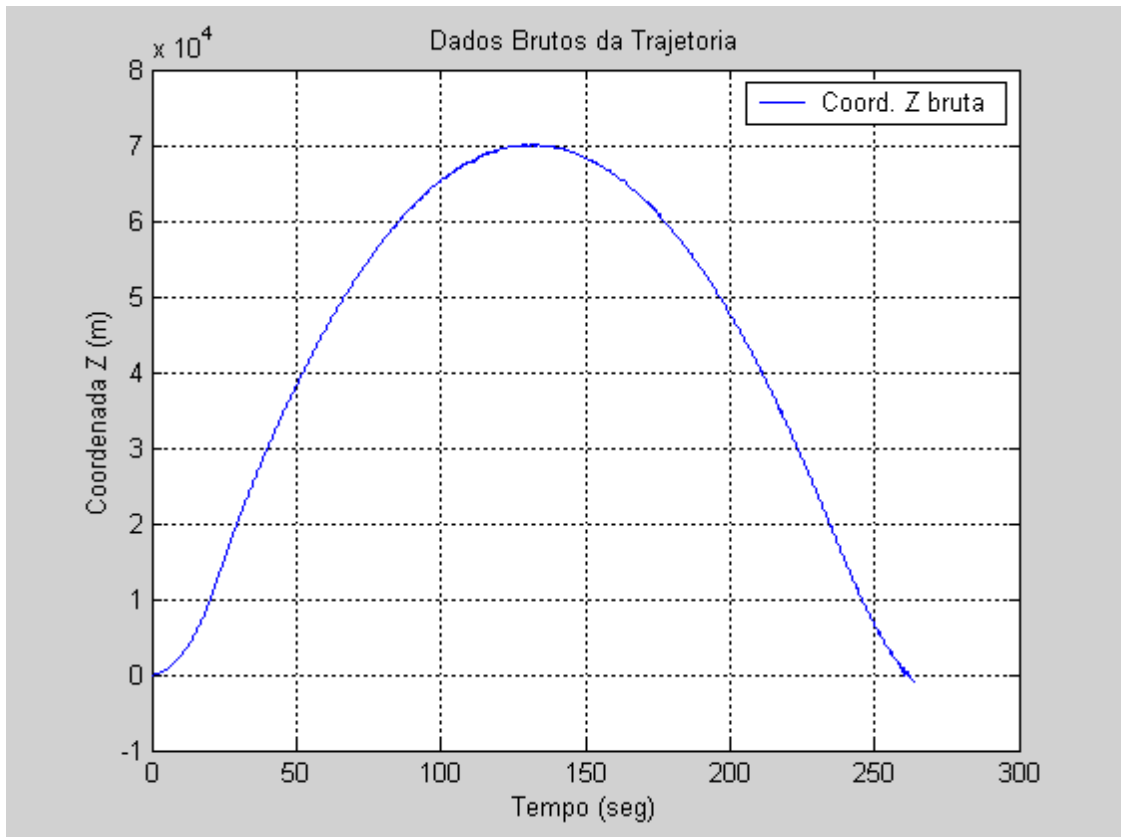


Figura 2.4 – Dados não filtrados da trajetória do vôo de um foguete.

A Fig. 2.4 mostra os dados brutos da trajetória do foguete, através da coordenada z (zênite), onde observa-se que este atingiu um apogeu de 70 Km e teve uma duração de vôo de aproximadamente 264 segundos.

Submetendo os dados brutos ao algoritmo de filtragem de Kalman obtém-se os dados filtrados visto na Fig. (2.5). Observa-se nesta figura que os dados filtrados estão sobrepondo os dados brutos e não se tem muita clareza do resultado da filtragem. Para se ter uma melhor visualização do efeito da filtragem sobre os dados brutos foi necessário selecionar uma parte da trajetória, como visto no **Detalhe 1** da Fig. (2.5) e mostrar na Fig. (2.6).

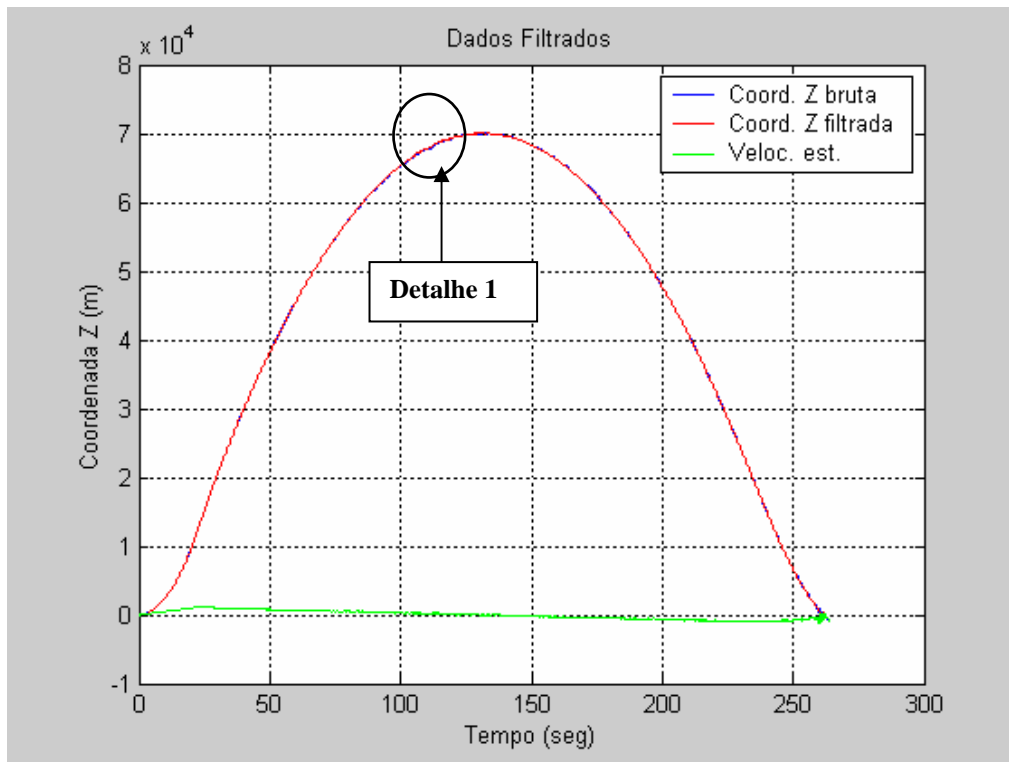


Figura 2.5 – Dados brutos e filtrados da trajetória de um foguete.

A Fig. (2.6) mostra a resposta do filtro de Kalman às variações das medidas ruidosas feitas pelo radar.

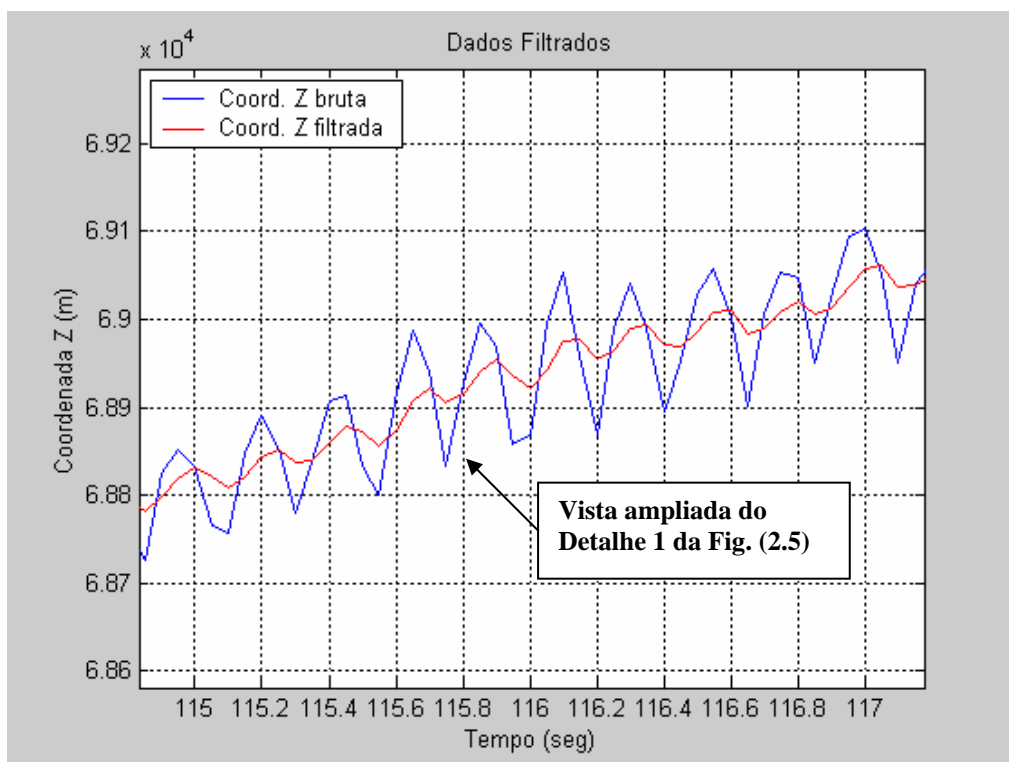


Figura 2.6 – Vista ampliada da resposta à filtragem de Kalman.

A Fig. (2.7) mostra o erro entre a medida atual y_i e a medida predita $H_i \hat{x}_{i/i-1}$.

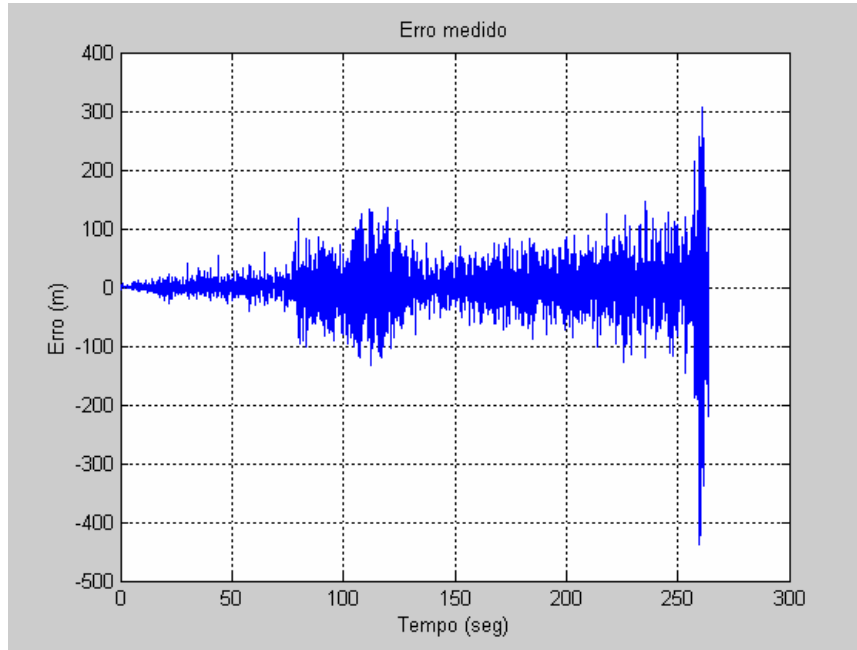


Figura 2.7 – Desempenho do FGD em função dos parâmetros P, Q e R.

Analisando a Fig. (2.7) observa-se um comportamento anômalo nos intervalos de tempo compreendidos entre 65 a 120 e 260 a 264 segundos. No primeiro intervalo o erro residual aumenta em decorrência da separação de estágios e início do processo de ativação do sistema de controle de atitude, já no segundo intervalo do rastreamento o erro aumenta em virtude do sensor radar está com visibilidade praticamente na linha do horizonte, notadamente, captando alvos indesejáveis.

A Fig. (2.8) mostra o ganho do filtro de Kalman para o vetor posição.

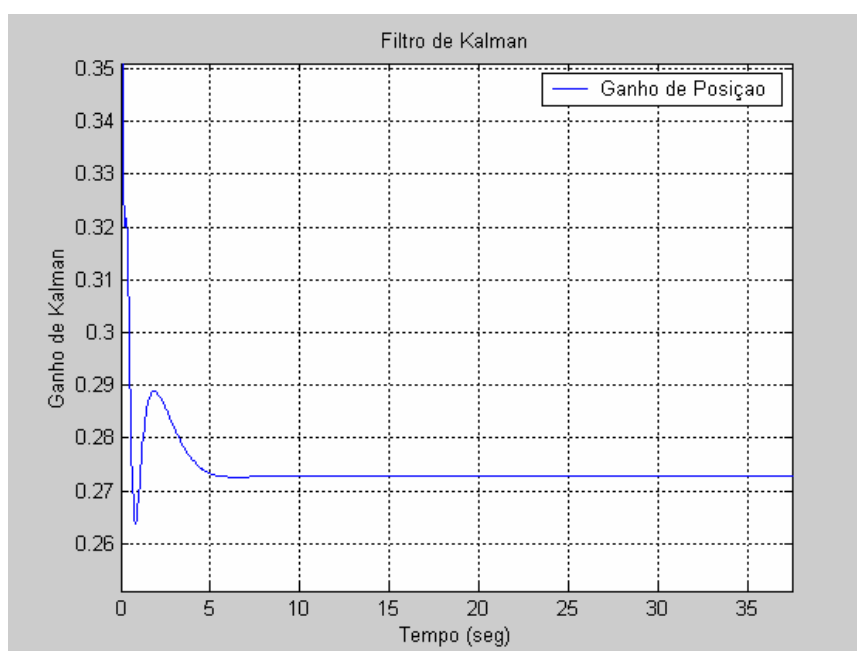


Figura 2.8 – Ganho do filtro de Kalman

O filtro oscila inicialmente devido aos valores iniciais estimados \hat{x}_0 e P_0 não serem os mais precisos, porém, este entra em regime aos 5 segundos.

Resultados

Para simular o processo, primeiramente foram adquiridos os dados brutos da coordenada cartesiana z . Adotando uma variância da perturbação de $Q = 2$, foram obtidas as medidas y do sistema. Na simulação, cujos resultados podem ser vistos nas Figs. (2.4) a (2.8), o parâmetro de ajuste, referente à variância do ruído de medição, foi fixado em $R = 6$. Como este é o valor real da variância deste ruído, espera-se que o filtro forneça os melhores resultados para esta situação. Para valores muito grandes observa-se que o filtro não consegue eliminar totalmente o ruído e não há convergência. Os resultados para R muito grande mostraram que o filtro tornou-se muito lento. Observou-se, também, que o comportamento do Filtro de Kalman é influenciado pelas condições iniciais. A convergência do filtro se tornou lenta quando o valor inicial da covariância do resíduo foi reduzido de 100.

Discussão dos resultados e conclusões

Observou-se, através do programa computacional de filtragem, que a posição estimada é mais precisa que a velocidade estimada, lembrando que somente a posição do veículo é medida, enquanto sua velocidade é somente estimada. Além dos testes feitos e apresentados através de gráficos, foram feitos outros onde os valores de Q e R variaram. Mesmo assim a relação entre os erros se manteve praticamente a mesma. Neste exemplo mostrou-se o funcionamento do filtro de Kalman Discreto, onde foi possível observar a influência de alguns parâmetros no desempenho do sistema. Durante os testes observou-se que a escolha dos parâmetros iniciais não é muito crítica, pois pequenas variações em torno do valor ideal não provocaram variações significativas nos resultados. Apesar disso, verificou-se que valores muito diferentes dos ideais (na ordem de 10 vezes maior ou menor) provocam variações no desempenho do Filtro de Kalman. A **covariância do resíduo**, por exemplo, que determina diretamente a correção dos estados na equação do filtro, deve ser inicializada corretamente em função dos valores iniciais dos parâmetros. Caso contrário, o filtro pode apresentar um tempo de resposta insatisfatório.

2.10 Aplicação nº 2: Filtragem da trajetória de uma aeronave.

Para dar mais ênfase à grande aplicação da filtragem de Kalman na atividade espacial, nesta seção mostra-se a formulação e os resultados da aplicação do Filtro de Kalman na filtragem de dados de trajetórias de Aeronaves. Estes dados foram medidos com outro tipo de radar de rastreamento, chamado “radar de vigilância” (BOZIC, 1979; GREWAL, 2001). Observa-se, inicialmente, o que deve ser entendido antes da aplicação do algoritmo do filtro de Kalman para radar de rastreamento.

Para estes radares, o tempo de retardo entre transmissão e recepção dos pulsos fornece uma estimativa da posição do veículo espacial (distância radial), enquanto a localização da antena se movimentando no tempo de detecção fornece o azimute e a elevação do veículo.

Assume-se que um veículo sendo rastreado esteja na posição $R + \rho_i$ no tempo i , e na posição $R + \rho_{i+1}$ no tempo $i + 1$, T segundos após. Usa-se T para representar no tempo o intervalo entre amostras. O alcance médio é denotado por R , enquanto que ρ_i e ρ_{i+1} representam divergências da média. O objetivo aqui é estimar estas divergências, as quais são estatisticamente aleatórias com valor médio zero.

Em uma primeira aproximação, se o veículo está se movimentando com velocidade radial $\dot{\rho}_i$ e T não é muito grande, então:

$$\rho_{i+1} = \rho_i + T\dot{\rho}_i \quad (2.31)$$

que é a equação da posição. Similarmente, considerando a aceleração u_i tem-se

$$Tu_{i+1} = \dot{\rho}_{i+1} - \dot{\rho}_i \quad (2.32)$$

que é a equação da aceleração. Assumindo que u_i é um processo de ruído branco, estacionário, de média zero, a aceleração é, em média, zero e não correlacionada entre intervalos, ou seja, $E[u_{i+1}u_i] = 0$, porém, tem variância conhecida $E[u_i^2] = \rho_u^2$. Tal aceleração pode ser causada por súbitas rajadas de vento ou pequenos períodos de irregularidades no veículo. A quantidade $u_{i+1}^1 = Tu_i$ é também um processo de ruído branco, e tem-se no lugar da Eq. (2.32), a seguinte equação:

$$\dot{\rho}_{i+1} = \dot{\rho}_i + u_i^1 \quad (2.33)$$

O estado é observado por meio de um modelo de observação escalar. A equação diferença para o modelo do sistema dado é:

$$x_{i+1} = Fx_i + w_i$$

ou

$$\begin{bmatrix} x_{i+1}^1 \\ x_{i+1}^2 \\ x_{i+1}^3 \\ x_{i+1}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \\ x_i^3 \\ x_i^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_i^1 \\ 0 \\ u_i^2 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

sendo que o estado x_i^1 representa a posição do veículo, o estado x_i^2 representa a velocidade radial, o estado x_i^3 representa o azimute, o estado x_i^4 representa a velocidade angular, u_{1_i} e u_{2_i} representam as perturbações aleatórias, estatisticamente independentes, estacionárias de média-zero e F representa a matriz de transição de estado.

O estado é observado por meio de um modelo de observação

$$y_i = Hx_i + v_i$$

sendo que H é a matriz de observação.

No caso específico desta simulação, as equações das medidas de saída são dadas por:

$$\begin{aligned} y_i^1 &= x_i^1 + v_i^1 \\ y_i^2 &= x_i^3 + v_i^2 \end{aligned}$$

Para a simulação considera-se os seguintes valores da saída

$$\begin{bmatrix} y_i^1 \\ y_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \\ x_i^3 \\ x_i^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_i^1 \\ v_i^2 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

onde v_i^1 e v_i^2 são ruídos aleatórias, estatisticamente independentes de média-zero e variâncias $\sigma_p^2(i)$ e $\sigma_\theta^2(i)$.

O próximo passo é formular a matriz covariância Q da perturbação para o sistema e a matriz covariância R do ruído para o modelo de medição, o que resulta nas seguintes matrizes

$$Q_i = E[w_i w_i^T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

e

$$R_i = E[v_i v_i^T] = \begin{bmatrix} \sigma_\rho^2(i) & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2(i) \end{bmatrix}$$

onde $\sigma_1^2 = E[u_1^2]$ e $\sigma_2^2 = E[u_2^2]$ representam, respectivamente, as variâncias das acelerações angular e radial no tempo T , relativas às perturbações, enquanto que, $\sigma_\rho^2 = E[v_1^2]$ e $\sigma_\theta^2 = E[v_2^2]$ representam, respectivamente, as variâncias das acelerações angular e radial no tempo T , relativas ao ruído de medidas.

Para começar o processamento do filtro de Kalman, o primeiro passo é inicializar a matriz ganho K_i . Para este fim, a matriz covariância do resíduo P_i tem de ser especificada. Usa-se as medidas de posição e azimuth, nos tempos $i=1$ e $i=2$, para estabelecer o método de inicialização. Para os quatro valores de medidas pode-se fazer as seguintes estimativas.

$$\hat{x}_2 = \begin{bmatrix} \hat{x}_2^1 = \hat{\rho}_2 = y_2^1 \\ \hat{x}_2^2 = \hat{\rho}_2 = \frac{1}{T}[y_2^1 - y_1^1] \\ \hat{x}_2^3 = \hat{\theta}_2 = y_2^2 \\ \hat{x}_2^4 = \hat{\theta}_2 = \frac{1}{T}[y_2^2 - y_1^2] \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Para calcular P_2 , usa-se a expressão geral da matriz covariância do resíduo

$$P_i = E[(x_i - \hat{x}_i)(x_i - \hat{x}_i)^T]$$

onde para $i=2$, tem-se

$$P_2 = E[(x_2 - \hat{x}_2)(x_2 - \hat{x}_2)^T]$$

Os valores de \hat{x}_2 são obtidos pela Eq. (2.36), enquanto que, os valores de x_2 são obtidos pelas Eq. (2.34) e (2.35) e a diferença oferece o seguinte resultado:

$$x_2 - \hat{x}_2 = \begin{bmatrix} -v_2^1 \\ u_1^1 - (v_2^1 - v_1^1)/T \\ -v_2^2 \\ u_1^2 - (v_2^2 - v_1^2)/T \end{bmatrix}$$

que é um vetor coluna (4x1) e neste caso a matriz covariância do erro deve ser uma matriz (4x4).

Considerando a independência dos ruídos u_i e v_i , a matriz covariância do erro inicial (ou estado inicial) é dada por:

$$P_0 = \begin{bmatrix} \sigma_\rho^2 & \sigma_\rho^2/T & 0 & 0 \\ \sigma_\rho^2/T & 2\sigma_\rho^2/T^2 + \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\theta^2 & \sigma_\theta^2/T \\ 0 & 0 & \sigma_\theta^2/T & 2\sigma_\theta^2/T^2 + \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Valores específicos podem ser substituídos por estas variâncias para definir numericamente o filtro de Kalman. No caso específico desta simulação os valores numéricos atribuídos são: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0,005$, $\sigma_\rho^2 = (300)^2$ e $\sigma_\theta^2 = (0,001)^2$, ou seja:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,005 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} (300)^2 & 0 \\ 0 & (0,001)^2 \end{bmatrix}, \quad T = 1s \text{ e } g = 9,8 m/s^2.$$

Usando os valores de σ na Eq. (2.37), obtém-se o valor inicial da matriz covariância do erro da estimação P_2 , ou na notação alternativa $P_{2/2}$,

$$P_{2/2} = \begin{bmatrix} 90000 & 90000 & 0 & 0 \\ 90000 & 90000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,000001 & 0,000001 \\ 0 & 0 & 0,000001 & 0,000027 \end{bmatrix}$$

Tendo a matriz covariância do erro no tempo $i = 2$, pode-se calcular o ganho preditor G_3 em $i = 3$, que é dado por

$$G_3 = FP_{3/2}H^T [HP_{3/2}H^T + R]^{-1} \quad (2.38)$$

onde as quantidades F , H e R são conhecidas, exceto $P_{3/2}$. Para calcular este valor usa-se, para $i = 2$, a equação

$$P_{3/2} = [F - G_2 H] P_{2/1} F^T + Q$$

porém, as quantidades G_2 e $P_{2/1}$ não são conhecidas. Para calcular estas quantidades usa-se a equação

$$P_{i/i-1} = F P_{i-1/i-1} F^T + Q$$

que para $i = 3$ vem

$$P_{3/2} = F P_{2/2} F^T + Q \quad (2.39)$$

onde o valor de $P_{2/2}$ já é conhecida. Substituindo as quantidades conhecidas na Eq. (2.39) vem

$$P_{3/2} = \begin{bmatrix} 4,5 \times 10^5 & 2,7 \times 10^5 & 0 & 0 \\ 2,7 \times 10^5 & 1,8 \times 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5,4 \times 10^{-11} & 5,2 \times 10^{-11} \\ 0 & 0 & 5,2 \times 10^{-11} & 1,01 \times 10^{-10} \end{bmatrix}$$

O valor da diagonal principal dá o erro de predição. O primeiro e o terceiro elemento desta diagonal são, respectivamente, erro de predição da posição quadrática média e erro de azimute quadrático médio para $i = 3$.

Após os cálculos acima, é possível calcular o ganho preditor G_3 usando a quantidade $P_{3/2}$ na Eq. (2.38) que dá, após os cálculos das matrizes, o seguinte resultado:

$$G_3 = \begin{bmatrix} 1,33 & 0 \\ 0,5 & 0 \\ 0 & 1,92 \\ 0 & 0,94 \end{bmatrix}$$

O próximo passo é encontrar $P_{3/3}$ usando a equação

$$P_i = P_{1i} - K_i H_i P_{1i} \quad (2.40)$$

para $i = 3$, logo

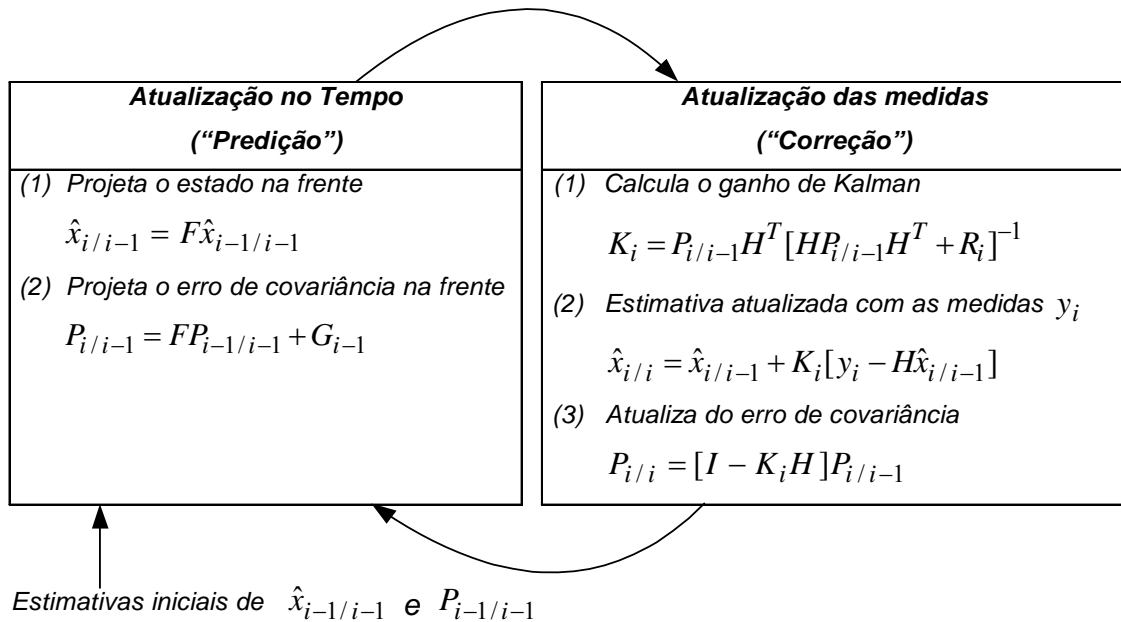
$$P_{3/3} = P_{3/2} - K_3 H P_{3/2}$$

onde

$$K_3 = A^{-1} G_3.$$

O processo é então repetido encontrando $P_{4/3}$, G_4 e assim sucessivamente.

Conclui-se que o Filtro de Kalman exerce duas funções preciosas: uma de predição e outra de correção, como visto através dos dois grupos de equações a seguir.



A seguir é feita a representação gráfica da **Filtragem de dados de rastreamento de uma aeronave**, usando o Algoritmo de Filtragem Discreta de Kalman, da seguinte forma:

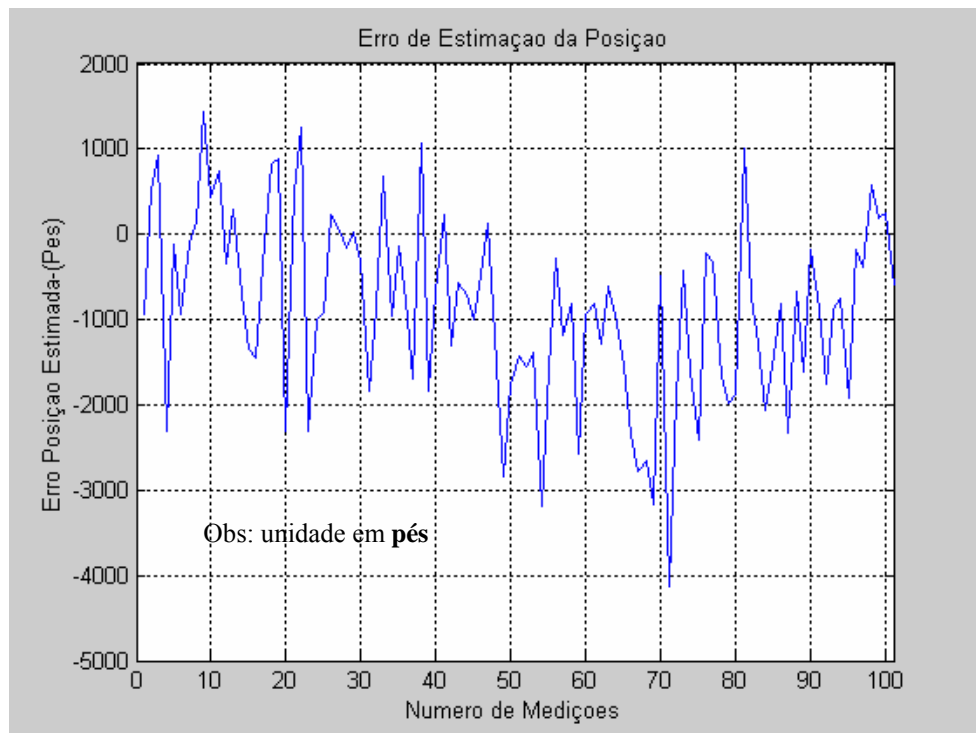


Figura 2.9 – Erro de Estimação Residual.

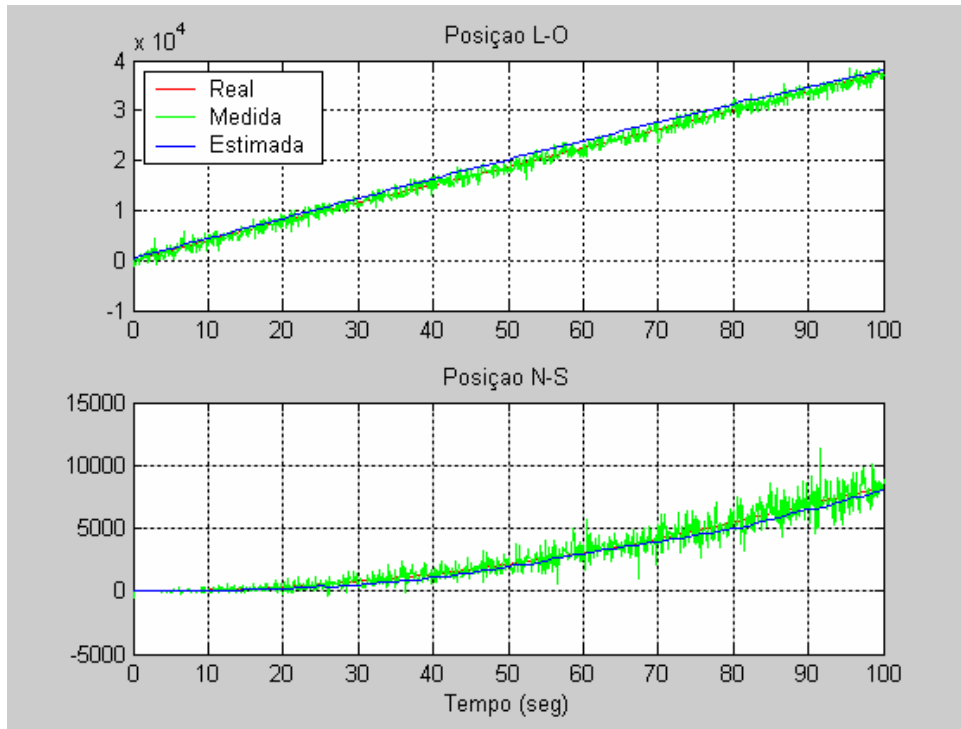


Figura 2.10 – Estimativa Ótima da Posição.

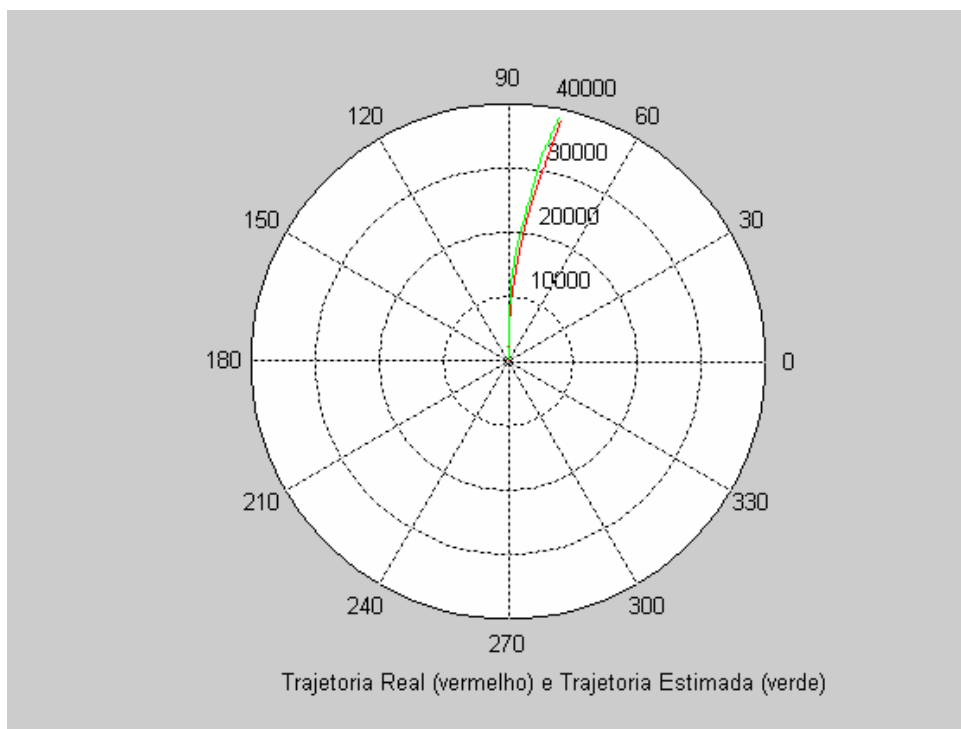


Figura 2.11 – Visualização das trajetórias medida e estimativa da posição.

CAPÍTULO III

3 Filtragem de dados via estimação de estado H_∞

3.1 Introdução

Vários algoritmos de estimação H_∞ , estão sendo pesquisados e empregados atualmente em uma grande variedade de métodos, em ambos os casos de tempo contínuo e discreto. Na literatura de controle alguns autores denominam a estimação H_∞ por filtragem H_∞ ou filtragem robusta, referindo-se ao mesmo conceito.

Neste capítulo será desenvolvido um novo procedimento de solução para o problema de estimação, no caso discreto, chamado de estimação ótima H_∞ . Os filtros H_∞ , aqui apresentados, são alternativas interessantes para a maioria dos problemas de estimação do filtro de Kalman (estimação H_2). Como será visto no decorrer do capítulo, as equações do filtro H_∞ são muito similares às do filtro de H_2 , porém concebidas através de idéias diferentes. Existem algumas similaridades formais entre o filtro H_∞ e o filtro convencional de Kalman (ou filtro H_2), porém, será esclarecido no decorrer deste capítulo esta relação, mostrando que o filtro H_∞ nada mais é do que uma versão modificada do filtro de Kalman, pelo uso de um parâmetro γ , constante positiva, que representa a magnitude de uma penalidade ou fator de robustez. Em outras palavras, os filtros H_∞ podem ser vistos como um procedimento de recursividade desempenhando uma ortogonalização sobre um conjunto conveniente de dados de observações (medidas) que obedecem um modelo dinâmico de espaço de estado.

No Capítulo II viu-se que a otimalidade do filtro de Kalman ajuda no conhecimento de matrizes covariância Q_i e R_i . Na maioria das aplicações práticas este tipo de informação, *a priori*, não é disponível para uso, sendo necessário atribuir escolhas para Q_i e R_i . Faz-se então a seguinte questão. É garantido o resultado do filtro de Kalman para atingir um certo nível de desempenho? A resposta é não, embora os resultados de diferentes escolhas de Q_i e R_i sejam bem entendidos e freqüentemente utilizados.

Por outro lado, os filtros H_∞ dão valiosas contribuições sobre a determinação dos erros de estimação, não importando quais sejam as perturbações, desde que elas tenham energia finita.

O próximo passo é formular o problema H_∞ e apresentar o filtro ótimo H_∞ (HASSIBI, Vol. 44, n° 2, 1996; HASSIBI, Vol. 41, n° 1, 1996; TAKABA, 1996; SHAKED, 1992; YAESH, 1991), onde será desenvolvido um procedimento de solução para o problema de estimação H_∞ . A metodologia proposta para esta solução assegura que a partir do índice de desempenho derivado da norma H_∞ , obtêm-se uma lei de estimação.

A atenuação de sinais externos de perturbações no pior caso é formulada de forma conveniente como um problema de minimização da norma H_∞ , ou seja, para um dado número γ , encontrar um estimador tal que a norma H_∞ da função de transferência da perturbação para a saída seja menor do que γ .

3.2 Filtragem via estimação de estado H_∞ .

Nesta seção desenvolve-se um novo procedimento de solução para o problema de estimação de estado, no caso discreto, chamado de “Estimação Ótima H_∞ ”, com o intuito de observar que apesar do algoritmo implementado no capítulo II fornecer solução aproximada para o problema de mínimos quadrados, é interessante observar que outros algoritmos, atualmente, geram soluções exatas para outro tipo de problema, a saber, problema de estimação *minimax* (HASSIBI, Vol. 44, n° 2, 1996; HASSIBI, Vol. 41, n° 1, 1996; TAKABA, 1996). A denominação padrão para este tipo de problema, na literatura atual, é denominado de “problema de estimação de estado H_∞ ”. O objetivo do problema de estimação de estado H_∞ é minimizar o ganho de energia máxima das perturbações para o erro de estimação. O critério H_∞ pode, então, ser entendido como um critério para o pior caso, ou seja, o estimador será robusto para a pior perturbação possível.

Praticamente todas as buscas na solução de problemas de estimação H_∞ são direcionadas para uma versão sub-ótima do problema. O principal objetivo da versão sub-ótima é encontrar estimadores que tornam a norma H_∞ menor que algum limite preestabelecido, mas não necessariamente minimize a norma H_∞ . A razão em se abordar problemas de estimação sub-ótimo vem das dificuldades matemáticas encontradas quando se tenta resolver o caso ótimo.

Esta nova abordagem é completamente diferente, e não muito bem conhecida, para solução de problemas de estimação de estado em comparação com o método padrão chamado de Método dos Mínimos Quadrados - MMQ ou H_2 .

3.3 Formulação do Problema de filtragem H_∞

Seguindo a notação do capítulo II, considera-se o seguinte sistema dinâmico linear variante no tempo:

$$\begin{cases} x_{i+1} = F_i x_i + G_i w_i, & x_0 \\ y_i = H_i x_i + D_i v_i, & i \geq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

em que $x_i \in \mathfrak{R}^n$ e $y_i \in \mathfrak{R}^q$ representam os vetores de estado e de medidas, respectivamente. As entradas $w_i \in \mathfrak{R}^m$, $v_i \in \mathfrak{R}^q$ representam a perturbação da entrada e medidas de ruído na saída, respectivamente. Nota-se que x_0 , $\{w_i\}$ e $\{v_i\}$ são vetores desconhecidos, $\{y_i\}$ é a seqüência de medidas de saída e $\{F_i, G_i, H_i, D_i\}$ são matrizes conhecidas de tamanhos apropriados que neste trabalho, dependem do modelo cinemático. Além disso, assume-se que D_i é não singular, tal que $R_i = D_i D_i^T > 0$ (definida positiva) é assegurado.

Diante dos dados acima, pode-se apresentar o seguinte problema: estimar uma combinação linear dos estados, tal como

$$z_{i/i} = L_i x_{i/i} \quad (3.2)$$

em que L_i representa um estimador, dado que ocorreu uma medida de saída $\{y_i\}$.

As expressões (3.1) e (3.2) representam o **modelo de espaço de estado, discreto, variante no tempo** e podem ser interpretadas através do diagrama de blocos que representa o processo (planta) e a saída (medida), como visto na Fig. 3.1.

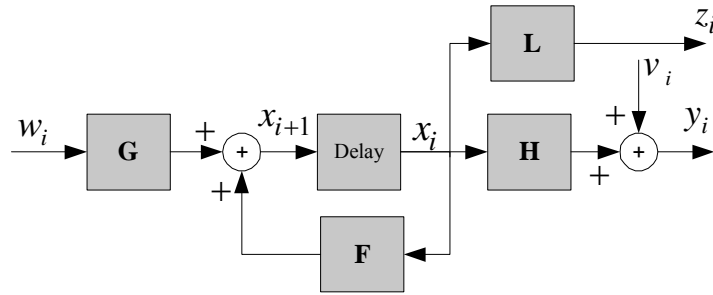


Figura 3.1 – Diagrama de blocos do modelo da planta e da medida.

Observando as definições acima têm-se, então, o seguinte erro de estimação (filtragem H_∞):

$$\tilde{z}_i = z_i - \hat{z}_{i/i} = L_i x_i - \hat{z}_{i/i} \quad (3.3)$$

onde $\hat{z}_{i/i} = K(y_0, \dots, y_i)$ representa o valor filtrado, ou estimativa *a posteriori*, dado que ocorreu medidas até $\{y_i\}$ com $i = 0, 1, 2, \dots$.

Chamando $T_N(K)$ o operador de transferência que mapeia as perturbações $\{\Pi_0^{-1/2}(x_0 - \hat{x}_0)\}$, $\{w_i\}_{i=0}^{N-1}$, $\{v_i\}_{i=0}^{N-1}$ (Π_0 é uma matriz de ponderação, definida positiva, denotando a incerteza sobre o estado inicial) sobre os erros de estimação $\{z_i - \hat{z}_i\}_{i=0}^N$. O estimador H_∞ ótimo minimiza a norma H_∞ do operador $T_N(K)$. O operador de transferência H_∞ ótimo correspondente, será denotado $T_N(K^\infty)$, como visto na Fig. (3.2) com perturbações (entradas) para erros de estimação (saída). Pode-se interpretar a norma H_∞ como o ganho de energia máxima das perturbações para os erros de estimação. Daí, os estimadores H_∞ poderem ser vistos como estimadores de pior caso que será robusto contra as piores perturbações possíveis.

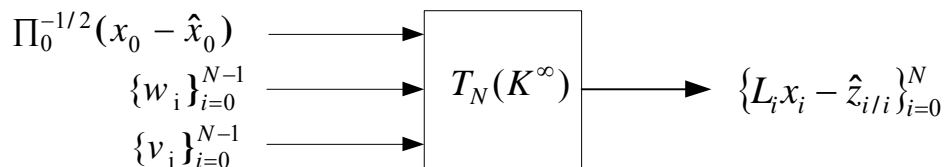


Figura 3.2 – Operador de transferência H_∞ ótimo.

Agora o problema de estimação (filtragem) H_∞ pode ser formalmente determinado, como a seguir.

3.4 Problema de Filtragem H_∞ ótimo

Nesta seção, a partir da formulação do problema de Filtragem H_∞ , objetiva-se encontrar as estratégias de estimação H_∞ ótimo, $\hat{z}_{i/i} = K(y_0, y_1, \dots, y_i)$, que minimize a norma H_∞ do operador de transferência $T_N(K_f)$. Desta forma, considere o seguinte problema:

$$\gamma_{ot}^2 = \min_K \|T_N(K_f)\|_\infty^2 \quad (3.4)$$

Este problema pode ser reescrito como:

$$\gamma_{ot}^2 = \min_K \max_{x_0, w \in l_2, v \in l_2} \frac{\sum_{i=0}^N |z_i - \hat{z}_{i/i}|^2}{(x_0 - \hat{x}_0)^T \Pi_0^{-1} (x_0 - \hat{x}_0) + \sum_{i=0}^N |w_i|^2 + \sum_{i=0}^N |v_i|^2} \quad (3.5)$$

Nota-se que o mínimo em (3.5) é considerado para todos os estimadores K , causais, desde que eles tenham acesso adicional para y_i . Isto tem relevância desde que a solução para o problema H_∞ , como será visto, dependa da estrutura da informação disponível para o estimador. A formulação do problema acima mostra que os estimadores H_∞ ótimo garantem a **menor energia** para o erro de estimação sobre todas as perturbações possíveis de energia fixa. Eles são, portanto, muito conservadores, os quais resultam em um melhor comportamento para variações de perturbação.

Do exposto acima e a partir da definição de $T_N(K^\infty)$ em (3.5), podemos considerar a seguinte norma:

$$\gamma_{ot}^2 = \|T_N(K^\infty)\|_\infty^2$$

As soluções de forma fechada para o problema de estimação H_∞ ótimo são disponíveis somente em alguns casos especiais. Em conseqüência, é mais conveniente adequar o problema de estimação H_∞ ótimo para o caso sub-ótimo.

3.5 Problema de filtragem H_∞ sub-ótimo.

Fixado o escalar $\gamma_f > 0$, o objetivo do problema de filtragem H_∞ sub-ótimo é encontrar a estratégia de estimação H_∞ sub-ótima $\hat{z}_{i/i} = K(y_0, y_1, \dots, y_i)$, também conhecido como um filtro *a posteriori*, que minimiza a norma H_∞ do operador de transferência $T_N(K)$, ou seja, obter $\|T_N(K)\|_\infty < \gamma$ cuja desigualdade pode ser reescrita como:

$$\max_{x_0, w \in l_2, v \in l_2} \frac{\sum_{i=0}^N |z_i - \hat{z}_{i/i}|^2}{(x_0 - \hat{x}_0)^T \Pi_0^{-1} (x_0 - \hat{x}_0) + \sum_{i=0}^N |w_i|^2 + \sum_{i=0}^N |v_i|^2} < \gamma^2 \quad (3.6)$$

Fica claro a verificação de $\gamma \geq \gamma_{ot}$.

Nota-se que as soluções do problema H_∞ ótimo podem ser obtidas para uma precisão desejada através do ajuste iterativo do escalar γ do problema H_∞ sub-ótimo.

Nota-se, também, que os problemas definidos acima são problemas de horizonte finito. O problema denominado de horizonte infinito pode ser considerado se definirmos $T(K)$ como o operador de transferência que mapeia $\{x_0 - \hat{x}_0, \{w_i\}_{i=0}^\infty, \{v_i\}_{i=0}^\infty\}$ para $\{z_i - \hat{z}_{i/i}\}_{i=0}^\infty$. Então, garantindo $\|T_i(K)\|_\infty < \gamma$ para todo i , pode-se resolver o problema de horizonte infinito $\|T(K)\|_\infty < \gamma$.

3.6 Formulação e solução do problema de filtragem H_∞ sub-ótimo

O objetivo desta seção é garantir da existência de soluções para o problema de filtragem H_∞ sub-ótimo proposto na seção 3.5 e observar que estes filtros são muito similares em vários aspectos ao filtro convencional de Kalman (HASSIBI², 1996; TAKABA, 1996).

Buscando a solução, considera-se o problema de estimação de estado *Minimax* no horizonte finito, que está intimamente relacionado com o problema de filtragem H_∞ . Obtém-se, inicialmente, as condições para a existência da solução *Minimax* usando um método de otimização baseado na técnica do multiplicador de Lagrange (LEWIS, 1995).

Seguindo a notação do capítulo II, considera-se o sistema dinâmico linear variante no tempo, visto na Eq. (3.1), em que D_i é uma matriz não-singular, de forma que $R_i = D_i D_i^T > 0$ (definida positiva) é assegurada. Assume-se que os valores de w_i e v_i são desconhecidos.

Da mesma forma que no problema de estimação de x_i , deseja-se estimar um vetor saída de referência $z_i \in \mathfrak{R}^p$ definido como uma combinação linear do vetor de estado a ser estimado, visto na Eq. (3.2) onde a matriz $L \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ é dada a partir do vetor de medida y_i .

No problema de filtragem, são considerados as medidas $y_i = \{y_k, k \leq i\}$, de tal forma que a estimativa \hat{z}_i de z_i depende da seqüência das medidas $\{y_0, y_1, \dots, y_i\}$. Em adição, sem perda de generalidade, será considerado que a estimativa do estado inicial x_0 é dada *a priori* por \hat{x}_0 . A estimativa \hat{z}_i é chamada de filtro H_∞ (FUJITA, 1993).

No contexto do problema de filtragem H_∞ , inicialmente será definida a função objetivo para o problema de filtragem *Minimax*. A estimativa \hat{z}_i tenta minimizar o erro de estimação quadrático $\sum_{i=0}^N \|z_i - \hat{z}_i\|^2$, enquanto que as variáveis (\hat{x}_0, w_i, v_i) tentam maximizar a energia do erro de estimação quadrática. Uma vez que, os valores arbitrariamente grandes de $\|w_i\|$, $\|v_i\|$ e $\|x_0\|$ implicam valores arbitrariamente grandes para o erro de estimação, a função custo J será definida como (SHAKED, 1992):

$$J(\hat{z}; x_0, w, v) = \sum_{i=0}^N \|z_i - \hat{z}_i\|^2 - \gamma^2 \left[\sum_{i=0}^N \|w_i\|^2 + \sum_{i=0}^N \|v_i\|^2 + \|x_0 - \hat{x}_0\|_{\Pi_0^{-1}}^2 \right] \quad (3.7)$$

O segundo termo do lado direito da equação (3.7) é o termo da penalidade sobre w_i , v_i e x_0 ; o termo γ (fator de robustez) é uma constante positiva que representa a magnitude da penalidade. Do ponto de vista teórico, pode-se dizer que a estimativa \hat{z}_i e as variáveis (w_i, v_i, x_0) são, respectivamente, as políticas de minimização e maximização da função custo J .

O problema de filtragem H_∞ sub-ótimo de horizonte finito é encontrar as estimativas \hat{x}_i e \hat{z}_i , tal que $J < 0$, satisfazendo a seguinte desigualdade:

$$\max_{x_0, w \in l_2, v \in l_2} \frac{\sum_{i=0}^N \|z_i - \hat{z}_{i/i}\|^2}{\sum_{i=0}^N \|w_i\|^2 + \sum_{i=0}^N \|v_i\|^2 + \|x_0 - \hat{x}_0\|_{\Pi^{-1}}^2} < \gamma^2 \quad (3.8)$$

Esta condição é equivalente a:

$$J(\hat{z}; x_0, w, v) < 0, \quad \forall (x_0, w_i, v_i).$$

Tal que:

$$\sum_{i=0}^N |w_i|^2 + \sum_{i=0}^N |v_i|^2 + \|x_0 - \hat{x}_0\|_{\Pi^{-1}}^2 \neq 0 \quad (3.9)$$

Fica claro, portanto, que os problemas de estimação *Minimax* formulados nesta seção estão intimamente relacionados com o problema de filtragem H_∞ para horizonte finito.

Da Eq. (3.1), observe que:

$$v_i = D_i^{-1}(y_i - H_i x_i) \quad (3.10)$$

Assim, a função custo J será reescrita como:

$$J(\hat{z}; x_0, w, v) = \sum_{i=0}^N \|z_i - \hat{z}_i\|^2 - \gamma^2 \left[\sum_{i=0}^N \|w_i\|^2 + \sum_{i=0}^N \|y_i - H_i x_i\|_{R_i^{-1}}^2 + \|x_0 - \hat{x}_0\|_{\Pi^{-1}}^2 \right] \quad (3.11)$$

Desta forma, o problema *Minimax* entre \hat{z}_i e (x_0, w_i, v_i) se reduz ao problema entre \hat{z}_i e (x_0, w_i, y_i) .

Sejam os valores \hat{z}_i^* e (x_0^*, w_i^*, y_i^*) , as decisões ótimas respectivamente ao problema *Minimax*, onde w_i^* e v_i^* são, respectivamente, a perturbação e o ruído no pior caso. A quádrupla $(\hat{z}_i^*, x_0^*, w_i^*, v_i^*)$ refere-se à solução ótima do problema *Minimax*, onde o conjunto de medidas $\{y_0, \dots, y_{i-1}, y_i\}$ está disponível para a estimação no instante de tempo i . Este problema *Minimax* é o problema de filtragem. Neste caso, dado que y_i seja disponível para estimativa \hat{z}_i , a ordem da otimização *Minimax* é:

$$\max_{y_N} (\min_{\hat{z}_N} (\max_{w_N} (\dots \max_{y_i} (\min_{\hat{z}_i} (\max_{w_i} (\dots \max_{y_0} (\min_{\hat{z}_i} (\max_{w_0, x_0} J)) \dots)) \dots))) \dots)) \quad (3.12)$$

3.7 Condições necessárias para solução do problema do filtro H_∞

Nesta seção, serão estabelecidas as condições necessárias de otimalidade em duas etapas. A primeira etapa compreende a maximização em relação a x_0 e w . Na segunda, a otimização *Minimax* com relação a \hat{z} e y_i .

Maximizando em relação a x_0 e w_i

Desde que w_i seja um sinal arbitrário em $L_2[0, N]$, sem perda de generalidade, pode-se assumir que w_i pode utilizar todos os dados de $\{y_0, \dots, y_N\}$ e $\{\hat{z}_0, \dots, \hat{z}_N\}$. Portanto, pode-se desempenhar primeiro a otimização em relação a x_0 e $\{w_0, \dots, w_N\}$. Para maximizar J em relação a x_0 e w_i , aplica-se o Hamiltoniano (LEWIS, 1995). Aplicando as condições de otimalidade para a filtragem *a posteriori* e definindo o Hamiltoniano temos:

$$H_i = \frac{1}{2} \gamma^{-2} \left\{ \|L_i x_i - \hat{z}_i\|^2 - \gamma^2 \left(\|w_i\|^2 + \|y_i - H_i x_i\|_{R_i^{-1}}^2 \right) \right\} + \lambda_{i+1}^T (F x_i + G w_i - x_{i+1}) \quad (3.13)$$

onde λ_i é o vetor co-estado. A relação entre a função objetivo J e a função Hamiltoniana H_i é dada como:

$$\frac{1}{2} \gamma^{-2} J = \sum_{i=0}^N H_i - \frac{1}{2} \|x_0 - \hat{x}_0\|_{\Pi_0^{-1}}^2 - \sum_{i=0}^N \lambda_{i+1}^T (F x_i + G w_i - x_{i+1}) \quad (3.14)$$

As trajetórias ótimas (x_i^*, λ_i^*) correspondem aos valores de (x_i, λ_i) para a perturbação w_i^* no pior caso.

Então, as condições necessárias de otimalidade são:

$$0 = \frac{\partial H_i}{\partial \lambda_{i+1}} \Bigg|_{(w_i, x_i, \lambda_{i+1}) = (w_i^*, x_i^*, \lambda_{i+1}^*)} \quad (3.15)$$

$$0 = \frac{\partial H_i}{\partial w_i} \Bigg|_{(w_i, x_i, \lambda_{i+1}) = (w_i^*, x_i^*, \lambda_{i+1}^*)} \quad (3.16)$$

$$\lambda_i^* = \frac{\partial H_i}{\partial x_i} \Big|_{(w_i, x_i, \lambda_{i+1})=(w_i^*, x_i^*, \lambda_{i+1}^*)}, \quad \lambda_{N+1}^* = 0 \quad (3.17)$$

$$\Pi_0^{-1}(x_0^* - \hat{x}_0) = \frac{\partial H_0}{\partial x_0} \Big|_{(w_0, x_0, \lambda_1)=(w_0^*, x_0^*, \lambda_1^*)} = \lambda_0^* \quad (3.18)$$

Logo, de (3.15) e (3.16) tem-se:

$$x_{i+1}^* = F_i x_i^* + G_i w_i^*, \quad x_0^* = \hat{x}_0 + \Pi_0 \lambda_0^*. \quad (3.19)$$

$$w_i^* = G_i^T \lambda_{i+1}^* \quad (3.20)$$

Substituindo (3.20) em (3.19) vem:

$$x_{i+1}^* = F_i x_i^* + G_i G_i^T \lambda_{i+1}^*, \quad (3.21)$$

De (3.17) tem-se

$$F_i^T \lambda_{i+1}^* = \lambda_i^* + (H_i^T R_i^{-1} H_i - \gamma^{-2} L_i^T L_i) x_i^* - H_i^T R_i^{-1} y_i + \gamma^{-2} L_i^T \hat{z}_i \quad (3.22)$$

$$= \lambda_i^* + H_i^T R_i^{-1} H_i x_i^* - \gamma^{-2} L_i^T L_i x_i^* - H_i^T R_i^{-1} y_i + \gamma^{-2} L_i^T \hat{z}_i \quad (3.23)$$

Logo

$$F_i^T \lambda_{i+1}^* = \lambda_i^* - H_i^T R_i^{-1} (y_i - H_i x_i^*) + \gamma^{-2} L_i^T (\hat{z}_i - L_i x_i^*), \quad \lambda_{N+1}^* = 0 \quad (3.24)$$

Das equações (3.19) a (3.24), tem-se o problema com dupla condição de contorno:

$$\begin{bmatrix} I_n & -G_i G_i^T \\ 0 & F_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1}^* \\ \lambda_{i+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i & 0 \\ H_i^T R_i^{-1} H_i - \gamma^{-2} L_i^T L_i & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i^* \\ \lambda_i^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -H_i^T R_i^{-1} y_i + \gamma^{-2} L_i^T \hat{z}_i \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_0^* = x_0 + \Pi \lambda_0^* \\ \lambda_{N+1}^* = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

Uma vez que o problema com dupla condição de contorno é não homogêneo e linear com relação a x_i^* e λ_i^* , x_i^* pode ser expresso como:

$$x_i^* = \hat{x}_i + P_i \lambda_i^* \quad (3.26)$$

Então, das Eq. (3.25) e (3.26), obtém-se:

$$\begin{aligned} x_{i+1}^* &= F_i x_i^* + G_i w_i^* \\ \hat{x}_{i+1} + P_{i+1} \lambda_{i+1}^* &= F_i (\hat{x}_i + P_i \lambda_i^*) + G_i G_i^T \lambda_{i+1}^* \\ \hat{x}_{i+1} + P_{i+1} \lambda_{i+1}^* &= F_i \hat{x}_i + F_i P_i \lambda_i^* + G_i G_i^T \lambda_{i+1}^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1} - F_i \hat{x}_i &= F_i P_i \lambda_i^* + G_i G_i^T \lambda_{i+1}^* - P_{i+1} \lambda_{i+1}^* \\
\hat{x}_{i+1} - F_i \hat{x}_i &= (G_i G_i^T - P_{i+1}) \lambda_{i+1}^* + F_i P_i \lambda_i^*
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Novamente, da Eq. (3.25) tem-se

$$F_i^T \lambda_{i+1}^* = (H_i^T R_i^{-1} H_i - \gamma^{-2} L_i^T L_i) x_i^* + I_n \lambda_i^* - H_i^T R_i^{-1} y_i + \gamma^{-2} L_i^T \hat{z}_i$$

substituindo x_i^* da Eq. (3.26) na equação acima, verifica-se:

$$\begin{aligned}
F_i^T \lambda_{i+1}^* &= (H_i^T R_i^{-1} H_i - \gamma^{-2} L_i^T L_i) (\hat{x}_i + P_i \lambda_i^*) + I_n \lambda_i^* - H_i^T R_i^{-1} y_i + \gamma^{-2} L_i^T \hat{z}_i \\
&= H_i^T R_i^{-1} H_i \hat{x}_i + H_i^T R_i^{-1} H_i P_i \lambda_i^* - \gamma^{-2} L_i^T L_i \hat{x}_i - \gamma^{-2} L_i^T L_i P_i \lambda_i^* + I_n \lambda_i^* - H_i^T R_i^{-1} y_i + \gamma^{-2} L_i^T \hat{z}_i \\
&= -H_i^T R_i^{-1} (y_i - H_i \hat{x}_i) + \gamma^{-2} L_i^T (\hat{z}_i - L_i \hat{x}_i) + \lambda_i^* (I_n + H_i^T R_i^{-1} H_i P_i - \gamma^{-2} L_i^T L_i P_i) \\
&= -H_i^T R_i^{-1} (y_i - H_i \hat{x}_i) + \gamma^{-2} L_i^T (\hat{z}_i - L_i \hat{x}_i) + \lambda_i^* [I_n + (H_i^T R_i^{-1} H_i - \gamma^{-2} L_i^T L_i) P_i]
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Sigma_i &= I_n + (H_i^T R_i^{-1} H_i - \gamma^{-2} L_i^T L_i) P_i \\
F_i^T \lambda_{i+1}^* &= \Sigma_i \lambda_i^* - H_i^T R_i^{-1} (y_i - H_i \hat{x}_i) + \gamma^{-2} L_i^T (\hat{z}_i - L_i \hat{x}_i)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

E por fim, obtém-se:

$$\lambda_i^* = \Sigma_i^{-1} F_i^T \lambda_{i+1}^* + \Sigma_i^{-1} H_i^T R_i^{-1} (y_i - H_i \hat{x}_i) + \gamma^{-2} \Sigma_i^{-1} L_i^T (\hat{z}_i - L_i \hat{x}_i)$$

Uma vez que λ_i^* é finito, Σ_i é não singular. Assim, substituindo λ_i^* de (3.27) em (3.28) vem

$$\hat{x}_{i+1} - F_i \hat{x}_i - F_i P_i [\Sigma_i^{-1} F_i^T \lambda_{i+1}^* + \Sigma_i^{-1} H_i^T R_i^{-1} (y_i - H_i \hat{x}_i) + \gamma^{-2} \Sigma_i^{-1} L_i^T (\hat{z}_i - L_i \hat{x}_i)] = (G_i G_i^T - P_{i+1}) \lambda_{i+1}^*$$

reescrevendo, tem-se:

$$\hat{x}_{i+1} - F_i \hat{x}_i - F_i P_i \Sigma_i^{-1} H_i^T R_i^{-1} (y_i - H_i \hat{x}_i) + \gamma^{-2} F_i P_i \Sigma_i^{-1} L_i^T (\hat{z}_i - L_i \hat{x}_i) = (F_i P_i \Sigma_i^{-1} H_i^T + G_i G_i^T - P_{i+1}) \lambda_{i+1}^*$$

Desde que a equação acima é verdadeira para λ_i^* arbitrário, obtém-se

$$P_{i+1} = F_i P_i \Sigma_i^{-1} H_i^T + G_i G_i^T, \quad P_0 = \Pi_0 \tag{3.29}$$

$$\hat{x}_{i+1} = F_i \hat{x}_i + F_i P_i \Sigma_i^{-1} H_i^T R_i^{-1} (y_i - H_i \hat{x}_i) - \gamma^{-2} F_i P_i \Sigma_i^{-1} L_i^T (\hat{z}_i - L_i \hat{x}_i), \quad \hat{x}_0 = \bar{x}_0 \tag{3.30}$$

onde $\Sigma_i = I_n + (H_i^T R_i^{-1} H_i - \gamma^{-2} L_i^T L_i) P_i$

A Eq. (3.29) é a Equação Discreta de Riccati (EDR) modificada para o problema H_∞ .

Cr terio de Otimiza o Minimax em rela o a \hat{z}_i e y_i

A partir da manipula o (TAKABA, 1996) das Eqs. (3.19) a (3.30), obt m-se:

$$\begin{aligned} \gamma^2 (\lambda_{i+1}^{*T} P_{i+1} \lambda_{i+1}^* - \lambda_i^{*T} P_i \lambda_i^*) = & -\|\hat{z}_i - L_i x_i^*\|^2 + \gamma^2 (\|w_i^*\|^2 + \|y_i - H_i x_i^*\|^2) \\ & + \begin{bmatrix} \bar{z}_i \\ \bar{y}_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Omega_i & -L_i \Xi_i H_i^T R_i^{-1} \\ -R_i^{-1} H_i \Xi_i L_i^T & -R_i^{-1} \bar{\Omega}_i R_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_i \\ \bar{y}_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde:

$$\begin{aligned} \Omega_i &= I_p + \gamma^{-2} L_i \Xi_i L_i^T \\ \bar{\Omega}_i &= \gamma^2 (I_p + H_i \Xi_i H_i^T) \\ \bar{y}_i &= y_i - H_i \hat{x}_i \\ \bar{z}_i &= \hat{z}_i - L_i \hat{x}_i \\ \Xi_i &= P_i \Sigma_i^{-1} \end{aligned}$$

substituindo Ω , $\bar{\Omega}$, \bar{y}_i , \bar{z}_i e Ξ_i na equa o (3.31), tem-se:

$$\begin{aligned} \gamma^2 (\lambda_{i+1}^{*T} P_{i+1} \lambda_{i+1}^* - \lambda_i^{*T} P_i \lambda_i^*) = & -\|\hat{z}_i - L_i x_i^*\|^2 + \gamma^2 (\|w_i^*\|^2 + \|y_i - H_i x_i^*\|^2) \\ & + \begin{bmatrix} \hat{z}_i - L_i \hat{x}_i \\ y_i - H_i \hat{x}_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_p + \gamma^{-2} L_i P_i \Sigma_i^{-1} L_i^T & -L_i P_i \Sigma_i^{-1} H_i^T R_i^{-1} \\ -H_i P_i \Sigma_i^{-1} L_i^T & -\gamma^{-2} (I_p + H_i P_i \Sigma_i^{-1} H_i^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_i - L_i \hat{x}_i \\ y_i - H_i \hat{x}_i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Substituindo Σ na equa o acima, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \gamma^2 (\lambda_{i+1}^{*T} P_{i+1} \lambda_{i+1}^* - \lambda_i^{*T} P_i \lambda_i^*) = \|\hat{z}_i - L_i x_i^*\|^2 + \gamma^2 (\|w_i^*\|^2 + \|y_i - H_i x_i^*\|^2) \\
& + \begin{bmatrix} \hat{z}_i - L_i \hat{x}_i \\ y_i - H_i \hat{x}_i \end{bmatrix}^T \\
& \begin{bmatrix} I_p + \gamma^{-2} L_i P_i [I_n + (H_i^T R_i^{-1} H_i - \gamma^{-2} L_i^T L_i) P_i]^{-1} L_i^T & -L_i P_i [I_n + (H_i^T R_i^{-1} H_i - \gamma^{-2} L_i^T L_i) P_i]^{-1} H_i^T R_i^{-1} \\ -R_i^{-1} H_i P_i [I_n + (H_i^T R_i^{-1} H_i - \gamma^{-2} L_i^T L_i) P_i]^{-1} L_i^T & -R_i^{-1} \gamma^2 (I_p + H_i P_i [I_n + (H_i^T R_i^{-1} H_i - \gamma^{-2} L_i^T L_i) P_i]^{-1} H_i^T R_i^{-1}) \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} \hat{z}_i - L_i \hat{x}_i \\ y_i - H_i \hat{x}_i \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Dado que $\lambda_{N+1}^* = 0$, $x_0^* = \hat{x}_0 + \Pi_0 \lambda_0^*$ e $P_0 = \Pi_0$, obtém-se

$$\sum_{i=0}^N \gamma^2 (\lambda_{i+1}^{*T} P_{i+1} \lambda_{i+1}^* - \lambda_i^{*T} P_i \lambda_i^*) = \gamma^2 (\lambda_{N+1}^{*T} P_{N+1} \lambda_{N+1}^* - \lambda_0^{*T} P_0 \lambda_0^*) = -\gamma^2 \|x_0^* - \bar{x}_0\|_{\Pi_0^{-1}}^2$$

Assim, segue que:

$$\begin{aligned}
\max_{w, x_0} J(\hat{z}; x_0, w, v) &= J(\hat{z}; x_0^*, w^*, v^*) \\
&= \sum_{i=0}^N \left\{ \|L_i x_i^* - \hat{z}_i\|^2 - \gamma^2 (\|w_i^*\|^2 + \|y_i - H_i x_i^*\|_{R_i^{-1}}^2) \right\} - \gamma^2 \|x_0^* - \bar{x}_0\|_{\Pi_0^{-1}}^2 \quad (3.32) \\
&= \sum_{i=0}^N \begin{bmatrix} \bar{z}_i \\ \bar{y}_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Omega_i & -L_i \Xi_i H_i^T R_i^{-1} \\ -R_i^{-1} H_i \Xi_i L_i^T & -R_i^{-1} \bar{\Omega}_i R_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_i \\ \bar{y}_i \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Observa-se pela Eq. (3.32) que existe uma única solução (decisão ótima) de minimização de \hat{z}_i^* , se e somente se, a matriz Ω_i é definida positiva, logo

$$\Omega_i = I_p + \gamma^{-2} L_i \Xi_i L_i^T > 0 \quad \forall i \in [0, N] \quad (3.33)$$

substituindo Ξ vem

$$\Omega_i = I_p + \gamma^{-2} L_i P_i \Sigma_i^{-1} L_i^T > 0$$

substituindo Σ vem

$$\Omega_i = I_p + \gamma^{-2} L_i P_i [I_n + (H_i^T R_i^{-1} H_i - \gamma^{-2} L_i^T L_i) P_i]^{-1} L_i^T > 0 \quad (3.34)$$

Lema 3.1 (TAKABA, 1996; FORSELL, 1996): *Supondo que $\Omega_i > 0$ e $P_i \geq 0$ (semidefinida positiva) satisfaça a EDR (3.29), então $P_{i+1} \geq 0$ (semidefinida positiva).*

Prova: Uma vez que P_i é uma matriz semi-definida positiva, existe uma matriz:

$$\bar{P}_i := P_i(I_n + H_i^T R_i^{-1} H_i P_i)^{-1} \quad (3.35)$$

Substituindo \bar{P}_i da equação acima em (3.34) fica:

$$\Omega_i = I_p + \gamma^{-2} L_i \bar{P}_i L_i^T$$

e usando o Lema de inversão de matriz, demonstrado no Apêndice **B**, Ω_i pode ser expresso como:

$$\Omega_i = (I_p - \gamma^{-2} L_i \bar{P}_i L_i^T)^{-1} > 0$$

O Lema 3.1 dá as condições de existência do filtro H_∞ .

Portanto, pode se observar das equações acima que, para um dado número $\gamma > 0$, se $[F_i \ G_i]$ tem *rank* completo, então um estimador que consegue $\|T_N(K)\|_\infty < \gamma$ existe se, e somente se,

$$P_i^{-1} + H_i R_i^{-1} H_i^T - \gamma^{-2} L_i^T L_i > 0, \quad i = 0, \dots, N \quad (3.36)$$

Além disso, do segundo termo da diagonal principal da matriz da Eq. (3.31), tem-se:

$$\bar{\Omega}_i = \gamma^2 (R_i - H_i^T \Xi_i H_i)$$

substituindo Ξ tem-se:

$$\bar{\Omega}_i = \gamma^2 \{R_i - H_i^T P_i [I_n + (H_i^T R_i^{-1} H_i - \gamma^{-2} L_i^T L_i) P_i]^{-1} H_i\}$$

desprezando o termo $\gamma^{-2} L_i^T L_i$ tem-se

$$\bar{\Omega}_i = \gamma^2 \{R_i - H_i^T P_i [I_n + H_i^T R_i^{-1} H_i P_i]^{-1} H_i\}$$

$$\bar{\Omega}_i = \gamma^2 \{R_i - P_i H_i^T [R_i + H_i^T P_i H_i]^{-1} H_i\}$$

onde define-se, uma parte da equação acima como o ganho de Kalman Robusto

$$K_i = P_i H_i^T (R_i + H_i P_i H_i^T)^{-1} \quad (3.37)$$

para conseguir

$$\bar{P}_i = (I_n - K_i H_i) P_i (I_n - K_i H_i)^T + K_i^T K_i \geq 0 \quad (3.38)$$

O Apêndice E mostra a relação entre Eq. (3.35) e a Eq. (3.38), com a implementação da Eq. (3.37) do ganho.

Conseqüentemente, da suposição anterior de que $\Omega_i > 0$ obtém-se

$$P_{i+1} = F_i P_i \Sigma_i^{-1} F_i^T + G_i G_i^T \quad (3.39)$$

logo

$$P_{i+1} = F_i (\bar{P}_i + \gamma^{-2} \bar{P}_i L_i^T \Omega_i L_i \bar{P}_i) F_i^T + G_i G_i^T \geq 0 \quad (3.40)$$

Isto completa a prova do Lema 3.1.

De acordo com as referências (HASSIBI¹, 1996; HASSIBI², 1996; FORSSELL, 1996), a equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$P_{i+1} = F_i P_i F_i^T + G_i G_i^T - F_i P_i \begin{bmatrix} H_i^T & L_i^T \end{bmatrix} R_{e,i}^{-1} \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix} P_i F_i^T \geq 0 \quad (3.41)$$

com

$$R_{e,i}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix} P_i \begin{bmatrix} H_i^T & L_i^T \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

A seguir assume-se que $\Omega_i > 0$ (definida positiva) seja mantido para todo $i \in [0, N]$.

Completando o quádruplo em relação a \bar{z}_i , a Eq. (3.31) reduz para:

$$J(\hat{z}, x_0^*, w^*, y) = \sum_{i=0}^N (\bar{z}_i - \Omega_i^{-1} L_i \Xi_i H_i^T R_i^{-1} \bar{y}_i)^T \Omega_i (\bar{z}_i - \Omega_i^{-1} L_i \Xi_i H_i^T R_i^{-1} \bar{y}_i) - \gamma^{-2} \sum_{i=0}^N \bar{y}_i^T (R_i + H_i P_i H_i^T)^{-1} \bar{y}_i \quad (3.43)$$

Igualando o termo $\bar{z}_i - \Omega_i^{-1} L_i \Xi_i H_i^T R_i^{-1} \bar{y}_i$ da Eq. (3.43) a zero tem-se:

$$\bar{z}_i - \Omega_i^{-1} L_i \Xi_i H_i^T R_i^{-1} \bar{y}_i = 0 \quad (3.44)$$

obtendo, assim, a estimativa ótima \hat{z}_i^* . Como visto anteriormente, o valor $\hat{x}_{i/i}$ é uma estimativa de x_i baseado no conjunto de medições $\{y_0, \dots, y_i\}$. Desde que \hat{x}_i possa ser visto como uma estimativa de x_i baseado nas medições $\{y_0, \dots, y_{i-1}\}$ na Eq. (3.30), reescreve-se a estimativa ótima como $\hat{x}_{i/i-1} = \hat{x}_i$. Então, segue que

$$\hat{z}_i^* = L_i \hat{x}_{i/i} \quad (3.45)$$

$$\hat{x}_{i/i} = \hat{x}_{i/i-1} + K_i (y_i - H_i \hat{x}_{i/i-1}) \quad (3.46)$$

$$\hat{x}_{i+1/i} = F_i \hat{x}_{i/i-1} + F_i K_i (y_i - H_i \hat{x}_{i/i-1}) \quad (3.47)$$

$$K_i = P_i H_i^T (R_i + H_i P_i H_i^T)^{-1} \quad (3.48)$$

Se for assegurado que $\Omega_i > 0$ (definida positiva), então, pelo Lema 3.1, também são assegurados que $P_i \geq 0$ e $(R_i + H_i P_i H_i^T) > 0$, sendo $P_0 = \Pi_0 > 0$ (definida positiva). Logo, fazendo $\bar{y}_i = 0$, consegue-se uma única medida no pior caso de y_i^* . Deste modo, o ruído no pior caso é dado por:

$$v_i^* = -D_i^{-1} H_i (x_i - \hat{x}_{i/i-1}) \quad (3.49)$$

A Eq. (3.49) é obtida seguindo os seguintes passos:

$$\bar{y}_i = y_i - H_i \hat{x}_{i/i-1}$$

fazendo $\bar{y}_i = 0$ tem-se que $y_i = H_i \hat{x}_{i/i-1}$

como $y_i = H_i x_i + D_i v_i^*$

$$H_i x_i + D_i v_i^* = H_i \hat{x}_{i/i-1}$$

$$v_i^* = D_i^{-1} H_i (\hat{x}_{i/i-1} - x_i)$$

$$v_i^* = -D_i^{-1} H_i (x_i - \hat{x}_{i/i-1})$$

Além disso, a função custo da solução ótima é dada por

$$J(\hat{z}^*; x_0^*, w^*, v^*) = 0$$

Teorema 3.1: *Considera-se o problema de filtragem Minimax da Eq. (3.12). Para a existência de uma única solução para o problema, é necessário que a Equação Diferença de Riccati – RDE, dada pela Eq. (3.29) tenha uma solução semi-definida positiva de P_i e $(\gamma^2 I_p - L_i \bar{P}_i L_i^T) > 0$ (definida positiva) seja mantido para todo $i \in [0, N]$. Logo a estimativa ótima \hat{z}_i^* é dada pelas Eqs. (3.45) a (3.48).*

3.8 Algoritmo do filtro de Kalman Robusto

O diagrama de blocos de um sistema que utiliza o Filtro de Kalman Robusto e onde este é inserido no processo de filtragem é mostrado na Fig. (3.3).

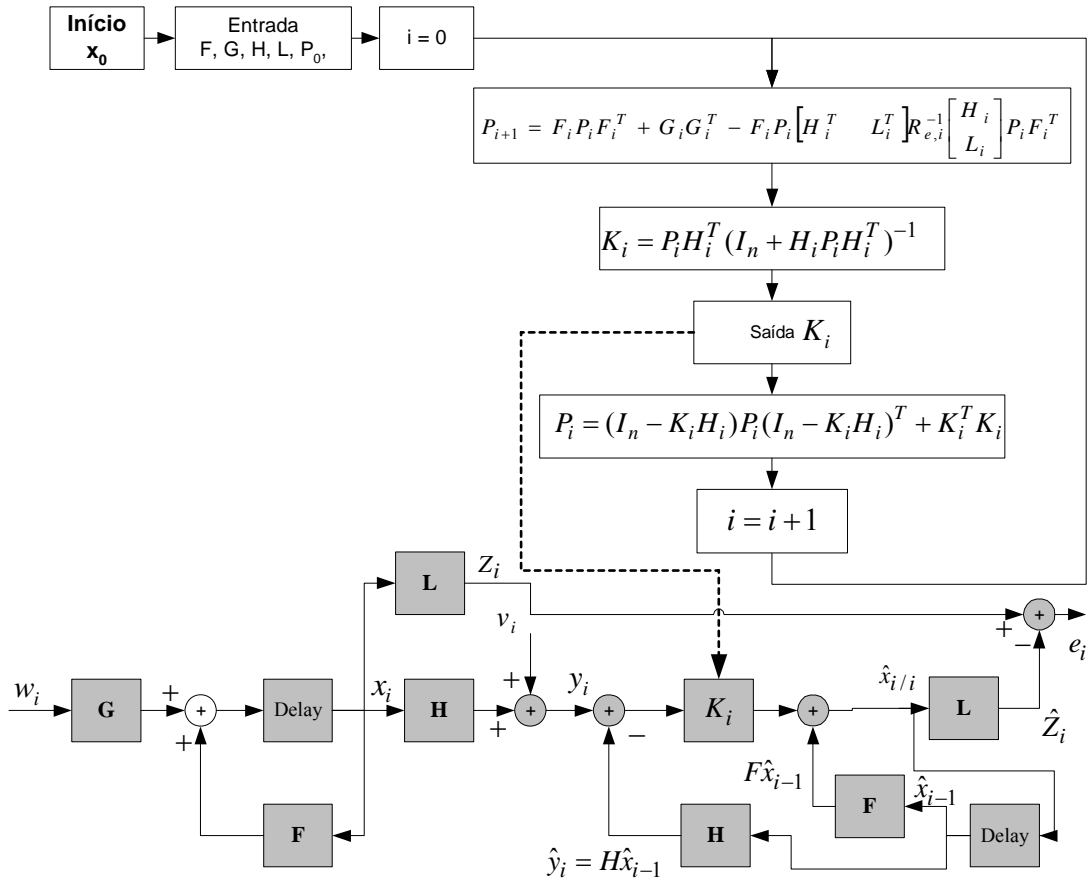


Figura 3.3 – Fluxograma e algoritmo do vetor Filtro de Kalman Robusto

3.9 Aplicação: Filtragem robusta da trajetória de um foguete

Considera-se a equação dinâmica do sistema dado por

$$x_{i+1} = F_i x_i + G_i w_i$$

$$y_i = H_i x_i + D_i v_i$$

$$z_i = L_i x_i$$

Conhecido, nesta seção, as técnicas de filtragem H_∞ , inicia-se aqui a criação, como contribuição desta tese, de um algoritmo computacional de filtragem robusta para estimação da trajetória de um foguete de sondagem com duas fases: uma propulsada e uma balística.

Neste trabalho, o objetivo principal é avaliar a capacidade de operação do Filtro de Kalman Robusto, através da estimação de dados de posição, velocidade e aceleração de um veículo espacial.

Consideram-se as Eqs. (1.12), (1.13), (1.14) e (1.15) que descrevem a dinâmica do foguete e as Eqs. (1.16) e (1.17) que dão o modelo das medidas de posição em uma direção

específica. O valor da estimativa inicial a ser estimada é dado pelo vetor $\hat{x}_{0/-1} = \begin{bmatrix} -10 \\ 1 \\ 0,1 \end{bmatrix}$.

Para iniciar o algoritmo, atribuiu-se um valor inicial à covariância do resíduo, dada pela

matriz diagonal $P_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$.

Usando as Eqs. (3.37), (3.38), (3.41), (3.45), (3.46) e (3.47) do filtro de Kalman Robusto, implementou-se um algoritmo computacional cujo resultado é visto a seguir.

A Fig. (3.4) mostra os dados não filtrados da coordenada Z da trajetória do foguete.

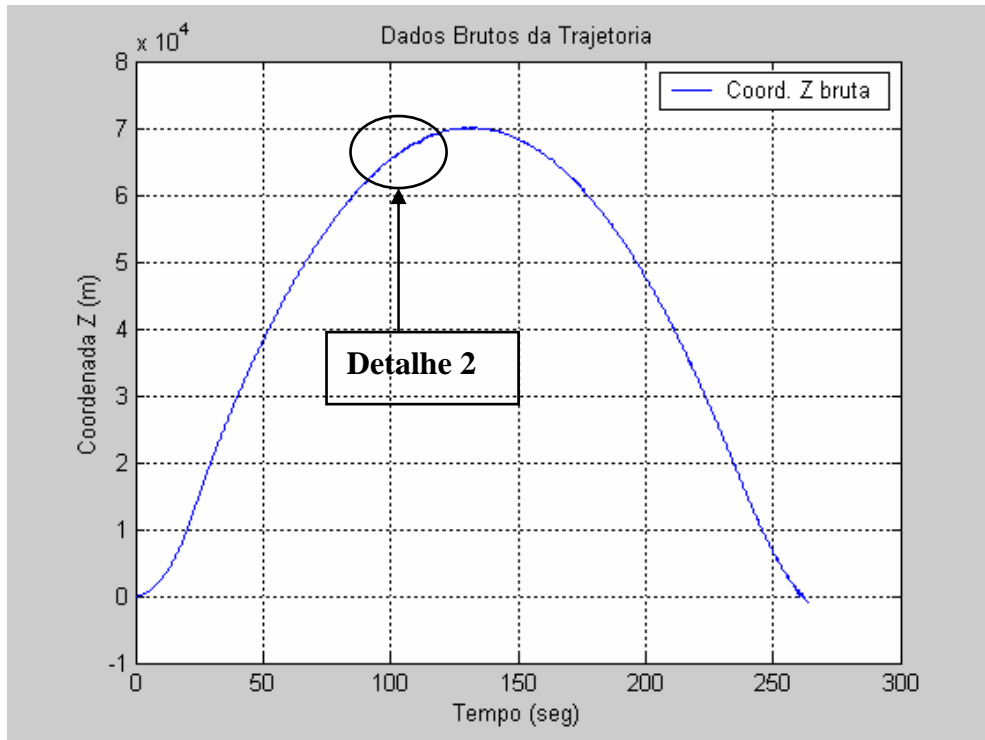


Figura 3.4 – Dados não filtrados da trajetória de um foguete.

Selecionando um menor intervalo de tempo da trajetória acima, como visto no **Detalhe 2** da Fig. (3.4), ampliada na Fig. (3.5), observa-se com mais clareza as variações das medidas ruidosas feitas pelo radar.

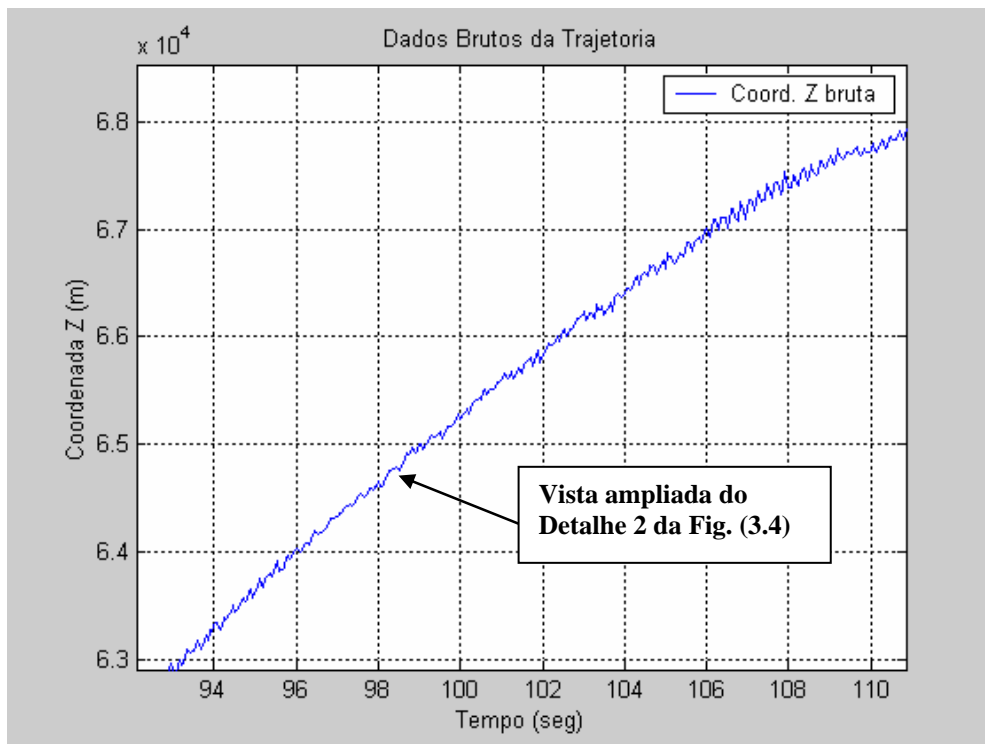


Figura 3.5 – Detalhe dos dados brutos da trajetória de um foguete.

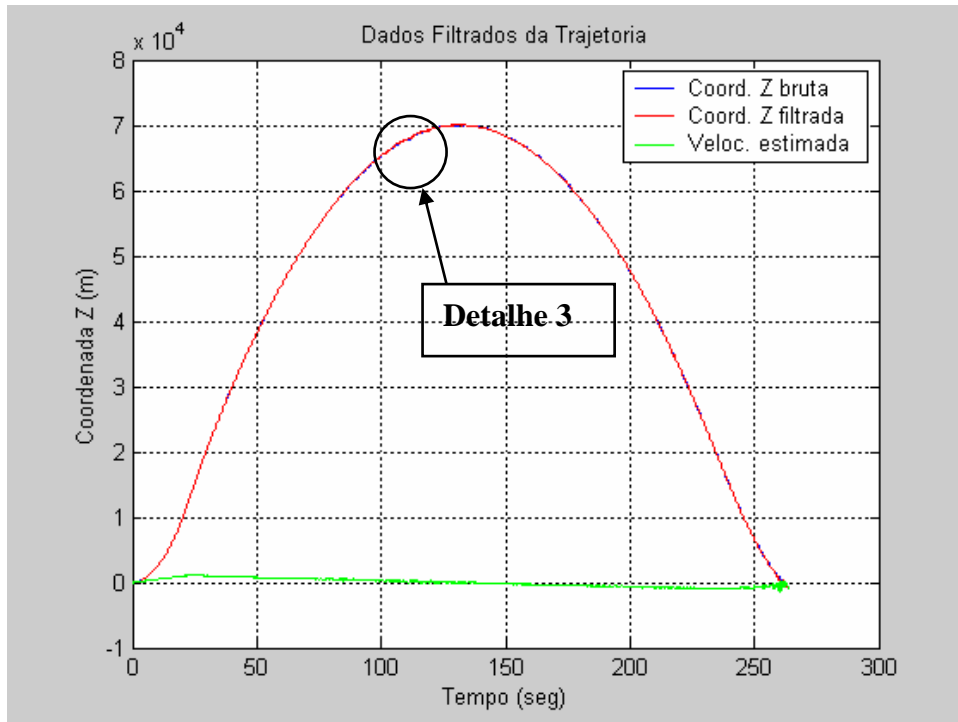


Figura 3.6 – Dados brutos e filtrados da trajetória de um foguete.

Selecionando um menor intervalo de tempo da trajetória acima, como visto no **Detalhe 3** da Fig. (3.6), ampliada na Fig. (3.7), observa-se com mais clareza a resposta do filtro de Kalman Robusto às variações das medidas feitas pelo radar.

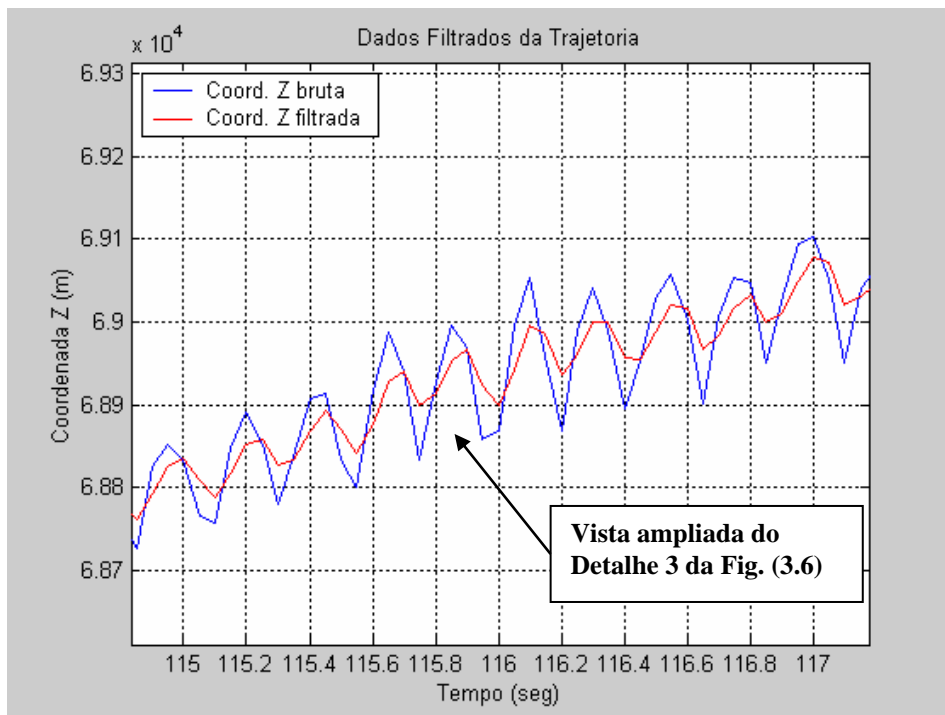


Figura 3.7 – Vista ampliada da resposta da filtragem Kalman Robusto.

A Fig. (3.8) mostra o erro entre a medida atual y_i e a medida prevista $H_i \hat{x}_{i/i-1}$.

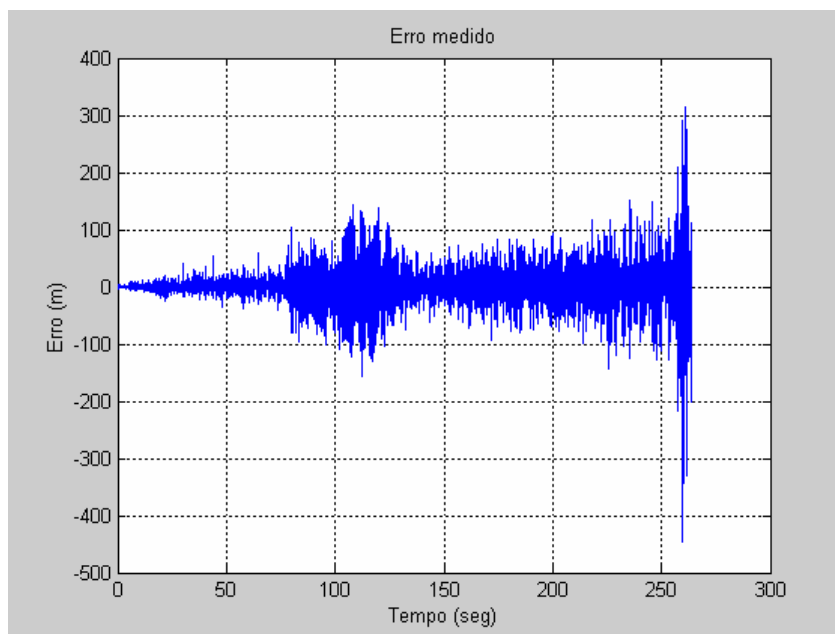


Figura 3.8 – Desempenho do Filtro de Kalman Robusto.

Analisando a Fig. (3.8) observa-se um comportamento anômalo nos intervalos de tempo compreendidos entre 65 a 120 e 260 a 264 segundos. No primeiro intervalo o erro residual aumenta em decorrência da separação de estágios e início do processo de ativação do sistema de controle de atitude, já no segundo intervalo do rastreamento o erro aumenta em virtude do sensor radar está com visibilidade praticamente na linha do horizonte, notadamente, captando alvos indesejáveis.

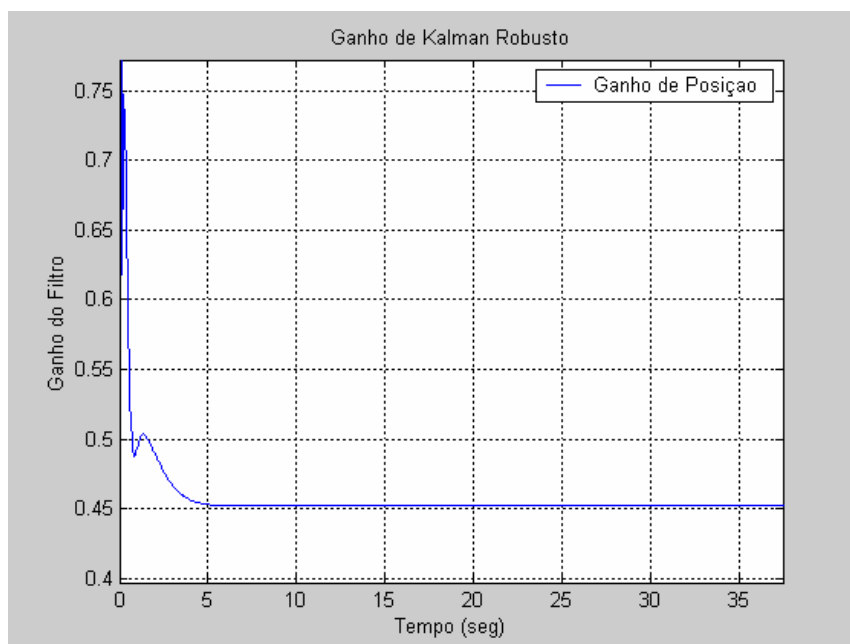


Figura 3.9 – Ganho do filtro de Kalman Robusto

Resultados

Para simular o processo, primeiramente, adquiriu-se os dados não filtrados da coordenada cartesiana z da trajetória de um foguete de sondagem. Os resultados são vistos nas Fig. (3.4) a (3.9). Para este filtro usou-se o menor fator de robustez possível ($\gamma = 0.8$), valor que ainda mantém suas características de robustez..

Discussão dos resultados e conclusões

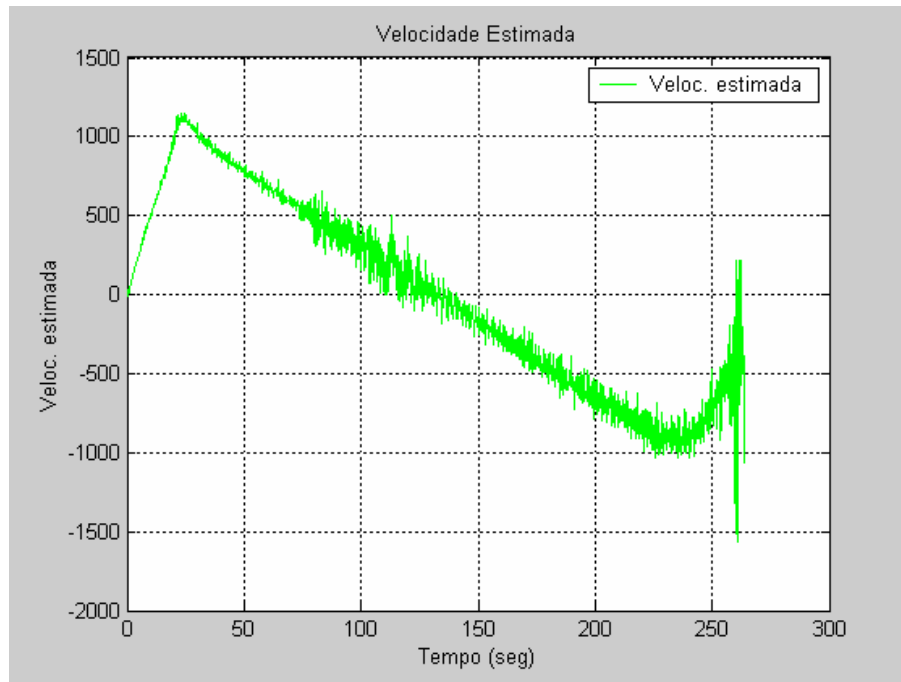


Figura 3.10 – Velocidade estimada

Observa-se, através das Figs. (3.7) e (3.10), que a posição estimada é mais precisa que a velocidade estimada, lembrando que somente a posição do veículo é medida, enquanto sua velocidade é somente estimada. A covariância do resíduo, por exemplo, que determina diretamente a correção dos estados na equação do filtro, deve ser inicializada corretamente em função dos valores iniciais dos parâmetros. Caso contrário, o filtro pode apresentar um tempo de resposta insatisfatório.

CAPÍTULO IV

4 Análise comparativa dos filtros H_2 e H_∞ aplicados ao problema de rastreamento

4.1 Introdução

Conforme já dito anteriormente, a motivação para a realização deste trabalho é estabelecer metodologias de cálculo de ganhos dos filtros de um radar usado para rastreamento de veículos espaciais. Para o caso específico deste trabalho, usou-se os dados reais da trajetória de um foguete balístico, ou seja, foguete com uma fase propulsada e uma fase balística.

4.2 Análise dos dados do radar

Nesta seção são apresentadas as técnicas utilizadas para obtenção do ruído de média zero e algumas observações que permitem identificar se os dados são brutos ou filtrados, assim como, se o referencial adotado é a rampa de lançamento ou o radar. Uma análise é realizada sobre os dados do lançamento e rastreamento de um foguete.

4.2.1 Extração de ruídos

Para o processo de filtragem dos dados brutos oriundos do sensor radar é necessário ter informações sobre técnicas de obtenção do ruído de média zero, como visto na Propriedade 2.1 da seção 1.3.2, que está incorporado ao sinal (CALDEIRA, 2000).

O ruído de média zero, em princípio, é obtido através da diferença entre o valor medido e o valor real para cada posição.

Dois tipos de ruído existem dentro de um arquivo de dados de um lançamento: ruído bruto e filtrado. Denomina-se ruído bruto, aquele que se origina diretamente do sinal medido, enquanto que o ruído filtrado é aquele que se origina do sinal medido, após ter passado pelo programa computacional de filtragem, incorporado ao sistema de tratamento de dados.

Os dados de rastreamento gerados são organizados da seguinte forma: ângulos de elevação (el) e de azimute (az), distância do foguete ao radar (d), coordenadas x , y , e z , e as velocidades v_x , v_y e v_z . Devido à coerência que deve ser mantida com o modelo

cinemático apresentado na Seção (1.3) do Cap. I, o interesse principal deste estudo está nos ruídos de medidas, em que os dados mais relevantes são os das coordenadas cartesianas de posição. No caso em que os dados são fornecidos em coordenadas esféricas (elevação, azimute e distância), estas são convertidas para coordenadas cartesianas (x, y, z) através das seguintes equações:

$$x = d \cdot \cos(el) \cdot \sin(az) \quad (4.1)$$

$$y = d \cdot \cos(el) \cdot \cos(az) \quad (4.2)$$

$$z = d \cdot \sin(el) \quad (4.3)$$

A Fig. 4.1, a seguir, mostra em detalhes a disposição das coordenadas polares e cartesianas.

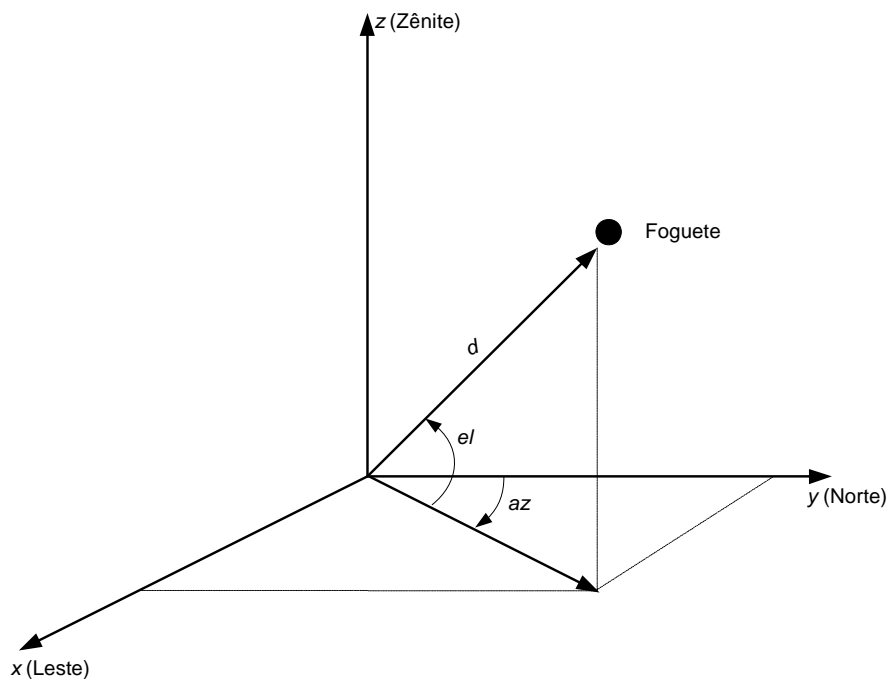


Figura 4.1 – Sistema de coordenadas cartesianas e esféricas para rastreamento.

É definido que: o eixo y aponta para o norte geográfico, o eixo x aponta para o leste e o eixo z para o zênite. O ângulo de elevação é medido a partir do plano horizontal xy e o ângulo de azimute é medido em relação ao eixo y , no sentido horário.

4.2.2 Análise de dados do rastreamento do foguete

Foram disponibilizados dados reais do foguete, com tempo de amostragem de 0,05 segundos (20 Hz). Os dados provenientes do sistema de tratamento local de dados e

radar incluem tempo, elevação, azimute, distância e coordenadas x , y e z , no intervalo de tempo compreendido entre 0,0 e 264 segundos. Os dados de elevação, azimute e distância foram convertidos em coordenadas cartesianas através das Eqs. (4.1) a (4.3). Considera-se, que os dados em coordenadas esféricas e retangulares pertencem aos referenciais radar e rampa, respectivamente. Segundo a referência (CALDEIRA, 2000), o ruído extraído do resultado da mudança de coordenadas esféricas para cartesianas, conforme descrito na Seção 4.2.1, apresenta as mesmas amplitudes que o ruído extraído das coordenadas cartesianas, isto é, dados provenientes das conversões de coordenadas esféricas para cartesianas não sofrem o efeito do filtro. Desta forma, estes dados passam a ser considerado como dados brutos.

4.3 Metodologias de cálculos de ganhos dos filtros.

O objetivo desta análise é estabelecer critérios de ganhos de filtros, para um radar de rastreamento de veículos espaciais. Como mencionado em seções anteriores, propõe-se duas maneiras de inferir os ganhos dos filtros: uma através do critério dos mínimos quadrados e outra através do critério de otimização *minimax* (minimizando o máximo da energia nos erros de estimação, para todas possíveis perturbações). Em ambos os casos, necessitam-se da informação sobre o ruído real bruto.

Este foguete é um veículo de sondagem com uma fase inicial propulsada de aproximadamente 30 segundos e o restante do vôo é balístico até aproximadamente 264 segundos. A Fig. 4.2, a seguir, mostra a evolução, no tempo, das coordenadas x , y e z da trajetória do foguete em referência. Verifica-se que os valores máximos para as coordenadas x , y e z são 68, 5 e 70 Km, respectivamente. Os dados da Fig. 4.2 são dados reais brutos, adquiridos pelo radar com uma taxa de amostragem de 20 Hz (0,05 segundos). Estando o radar configurado em modo *transponder*, a coleta dos dados iniciou no momento da aquisição, considerado como $t = 0,0$ segundo e terminou no instante $t = 264$ segundos.

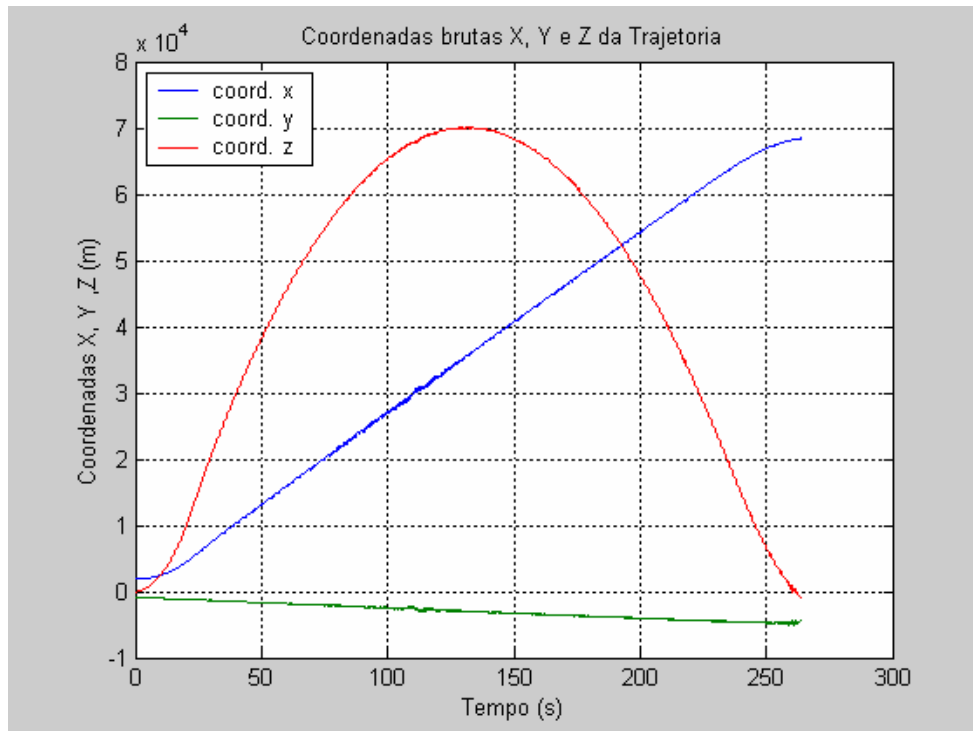


Figura 4.2 – Evolução temporal das coordenadas da trajetória do foguete.

4.4 Desempenho dos filtros propostos

Nesta seção apresenta-se uma avaliação dos algoritmos de rastreamento da trajetória do foguete de sondagem, utilizando as metodologias de filtragem apresentadas nos Caps. II e III, ou seja, “Filtragem de Kalman” e “Filtragem Robusta”.

Para realizar as avaliações, foram utilizados dados reais do lançamento de um foguete de um estágio, com duas fases: uma propulsada e uma balística. Os dados brutos são fornecidos nas coordenadas de azimute, elevação e distância, no referencial radar. Estes dados são convertidos para as coordenadas x , y e z , no referencial rampa de lançamento.

Adotando o modelo tridimensional da equação dinâmica, na sua versão discreta, vista nas Eqs. (1.18) e (1.19) e assumindo que cada coordenada de posição do veículo (posições horizontal e vertical do foguete em relação à base) é medida independentemente, as mesmas podem ser tratadas separadamente. Assim, para cada coordenada, o movimento do veículo pode ser descrito pelas Eqs. (1.9), (1.10) e (1.11) que descrevem o modelo dinâmico discreto do foguete e podem ser escritas, na forma matricial, pela equação de estado (1.12) e equação de saída (1.16).

4.4.1 Filtro de Kalman

O Filtro de Kalman, também chamado de Filtro H_2 , é um algoritmo de processamento de dados recursivo, que emprega a técnica de filtragem linear ótima. Um aspecto importante é que este incorpora todas as informações que lhe possa ser fornecida, processando todas as medidas disponíveis, independentemente de suas precisões, para estimar o valor atual das variáveis de interesse utilizando-se do conhecimento do sistema, da descrição estatística do ruído do sistema, dos erros de medição e das incertezas da dinâmica do modelo. Neste trabalho o filtro de Kalman processa as aplicações em tempo real.

O problema da estimação linear recursiva ótima numa abordagem estocástica consiste em determinar a melhor estimação possível $\hat{x}_{i/i}$ do vetor de estados x_i , quando são disponíveis as seguintes informações:

- modelo matemático do sistema (Capítulos I e II);
- propriedades estatísticas dos ruídos (Capítulos I e II);
- conjunto de medidas da saída até o instante t_i (Capítulos I e II);
- condições iniciais do estado estimado $\hat{x}_{0/0} = x_0$ e covariância associada $P_{0/0} = P_0$ (Capítulo II).

Teorema 4.1: *O Filtro de Kalman ótimo (variância mínima) para um sistema discreto consiste de equações de diferença para a média condicional e a matriz de covariância.*

Antes de cada observação tem-se a **predição** dos dados:

$$\begin{cases} \hat{x}_{i+1/i} = F_{i+1}\hat{x}_{i/i}; \\ P_{i+1/i} = F_{i+1}P_{i/i}F_{i+1}^T + G_iQ_{i+1}G_i^T. \end{cases} \quad (4.4)$$

Após cada observação tem-se a fórmula de **recursão (filtragem ou correção)** da estimativa do vetor de estado para o instante t_{i+1} , do sistema dinâmico, dado por:

$$\begin{cases} \hat{x}_{i+1/i+1} = \hat{x}_{i+1/i} + K_i[y_i - H_i\hat{x}_{i+1/i}]; \\ P_{i+1/i+1} = P_{i+1/i} - K_{i+1}H_{i+1}P_{i+1/i}. \end{cases} \quad (4.5)$$

com

$$K_i = P_{i/i-1}H_i^T[H_iP_{i/i-1} + R_i]^{-1} \quad (4.6)$$

em que $\hat{x}_{i+1/i+1}$ representa a atualização da estimativa do vetor de estado, $\hat{x}_{i+1/i}$ representa o valor predito da estimativa do vetor de estado, \hat{y}_{i+1} representa o valor predito da estimativa da

medida, K representa o vetor ganho do filtro de Kalman, P representa a matriz de covariância do erro e y_i representa a medida de observação realizada sobre o sistema.

Na implementação do filtro de Kalman é necessária a inversão da matriz da Eq. (4.6) a cada interação para se obter a matriz ganho K_{i+1} antes de se efetuar a estimativa ótima $\hat{x}_{i+1/i+1}$. Como já observado anteriormente, para aplicações em tempo real, muitas vezes esse processamento se torna inviável e é necessário substituir o ganho de Kalman variante no tempo, denominado de K_i por um ganho invariante no tempo, denominado de K , para otimizar o tempo de computação. Neste trabalho adotou-se o ganho de Kalman variante no tempo K_i .

O filtro fornece as coordenadas cartesianas da posição e as velocidades estimadas do veículo a cada vez que uma medição é disponível. Quando ocorrem medições inválidas o filtro fornece uma **predição** para as coordenadas da posição do veículo. Nestes casos a velocidade do veículo é considerada igual a sua última estimativa válida.

Com as variáveis do sistema e do filtro descritas acima, o algoritmo que implementa o filtro de Kalman, como visto na Fig. (3.2), pode então ser assim definido, através dos seguintes passos:

1. Armazenar o estado atual do filtro

$$\hat{x}_{i/i}, P_{i/i};$$

2. Computar o estado estimado

$$\hat{x}_{i+1/i} = F_{i+1,i} \hat{x}_{i/i};$$

3. Computar a matriz de covariância do erro estimado

$$P_{i+1/i} = F_{i+1,i} P_{i/i} F_{i+1,i}^T + G_i Q_{i+1} G_i^{-1};$$

4. Computar a matriz de ganho do filtro

$$K_{i+1} = P_{i+1/i} H_{i+1} [H_{i+1} P_{i+1/i} H_{i+1}^T + R_{i+1}]^{-1};$$

5. Processar a estimação a partir da nova medida y_{i+1}

$$\hat{x}_{i+1/i+1} = \hat{x}_{i+1/i} + K_{i+1} [y_{i+1} - H_{i+1} \hat{x}_{i+1/i}];$$

6. Computar a nova matriz de covariância do erro

$$P_{i+1/i+1} = [I - K_{i+1} H_{i+1}] P_{i+1/i};$$

7. Fazer $i = i + 1$ e retornar ao passo (1).

Para o caso em apreciação, usa-se os dados das Eqs. (1.13), (1.14), (1.15), (1.17), (1.18) e (1.19) juntamente com as equações de implementação do filtro de Kalman, descritas acima, para o desenvolvimento do algoritmo. Após várias experimentações, atribui-se os valores estimados de $Q=2$ e $R=6$ para as matrizes de covariância da perturbação do sistema e ruído nas medidas. Como já mencionado, o período de amostragem é de $T=0,02$ segundos.

A seguir usa-se o algoritmo do filtro de Kalman para filtrar a trajetória do foguete nas coordenadas x , y e z . Observa-se que no Cap. II foi implementado este algoritmo apenas com a coordenada z . Nesta seção, a filtragem é feita para cada coordenada, separadamente, para se obter uma melhor visualização e entendimento do efeito da correção sobre os dados brutos. O filtro memoriza as coordenadas cartesianas da posição do veículo.

Inicialmente, observa-se o resultado da filtragem de Kalman para a coordenada X , visto através das Figs. (4.3), (4.4) e (4.5).

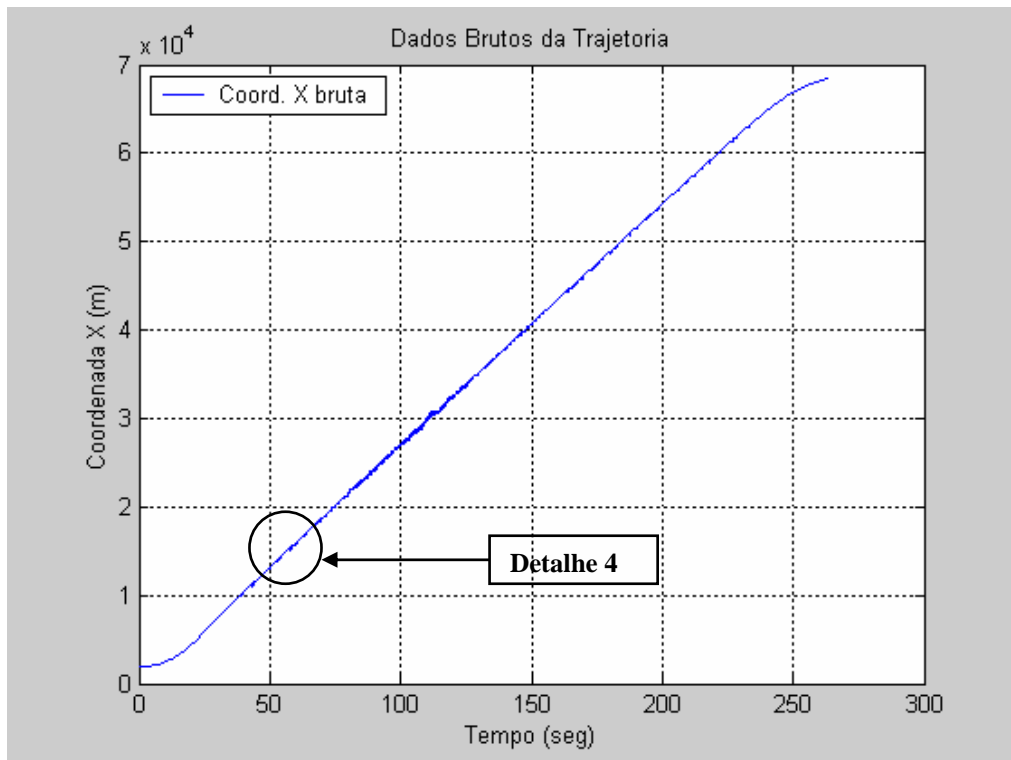


Figura 4.3 – Coordenada X não filtrada

Visualizando apenas um trecho da trajetória, como visto no **Detalhe 4** da Fig. (4.3), observa-se com mais clareza o efeito da filtragem, como visto na Fig. 4.4.

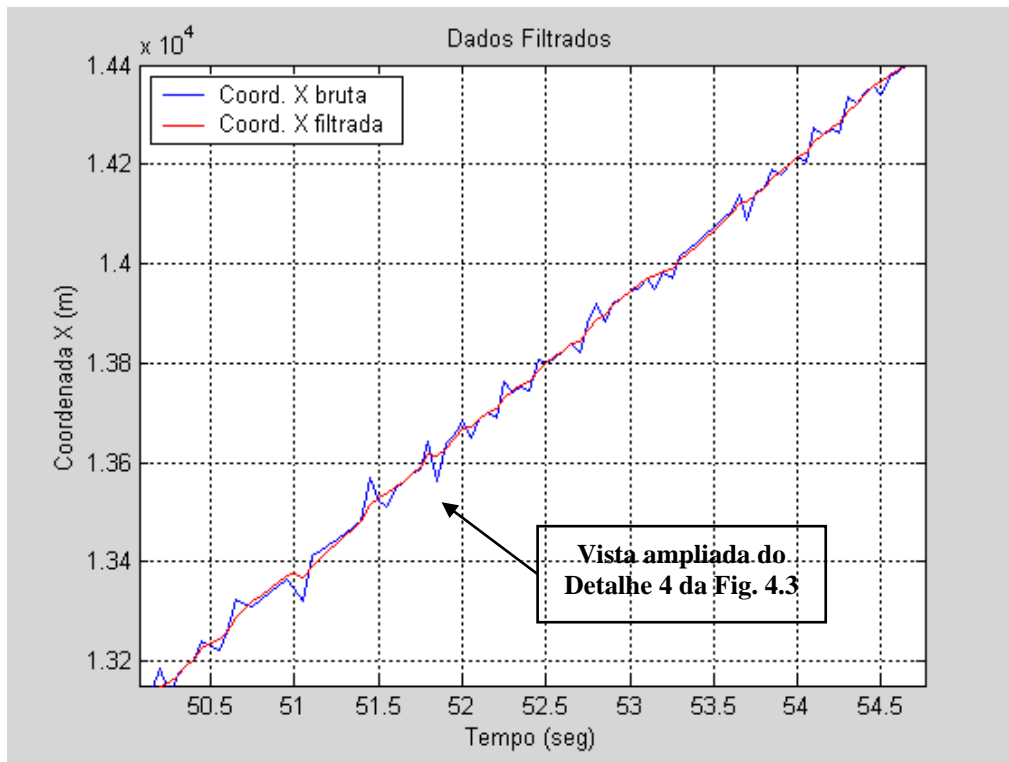


Figura 4.4 – Trecho da Coordenada X filtrada

A estimativa inicial causou um erro inicial grande que foi corrigido rapidamente pelo filtro, como visto na Fig. 4.5.

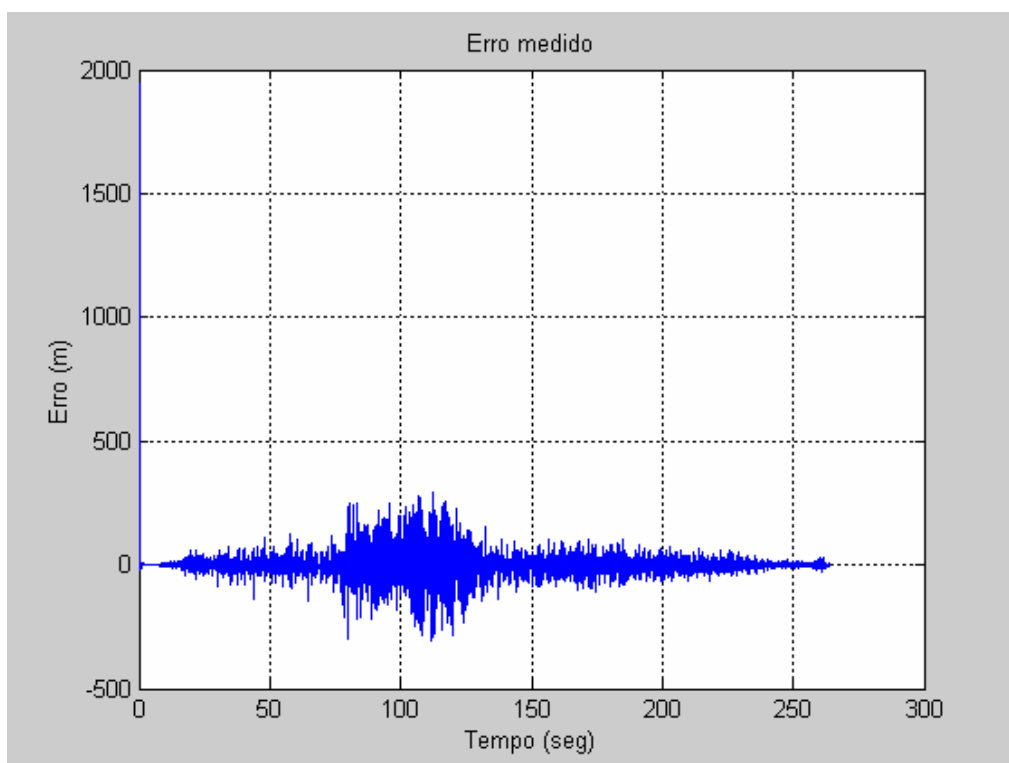


Figura 4.5 – Ruído de média zero da coordenada X

O resultado da filtragem de Kalman para a coordenada Y é visto nas Figs. (4.6), (4.7) e (4.8) seguintes.

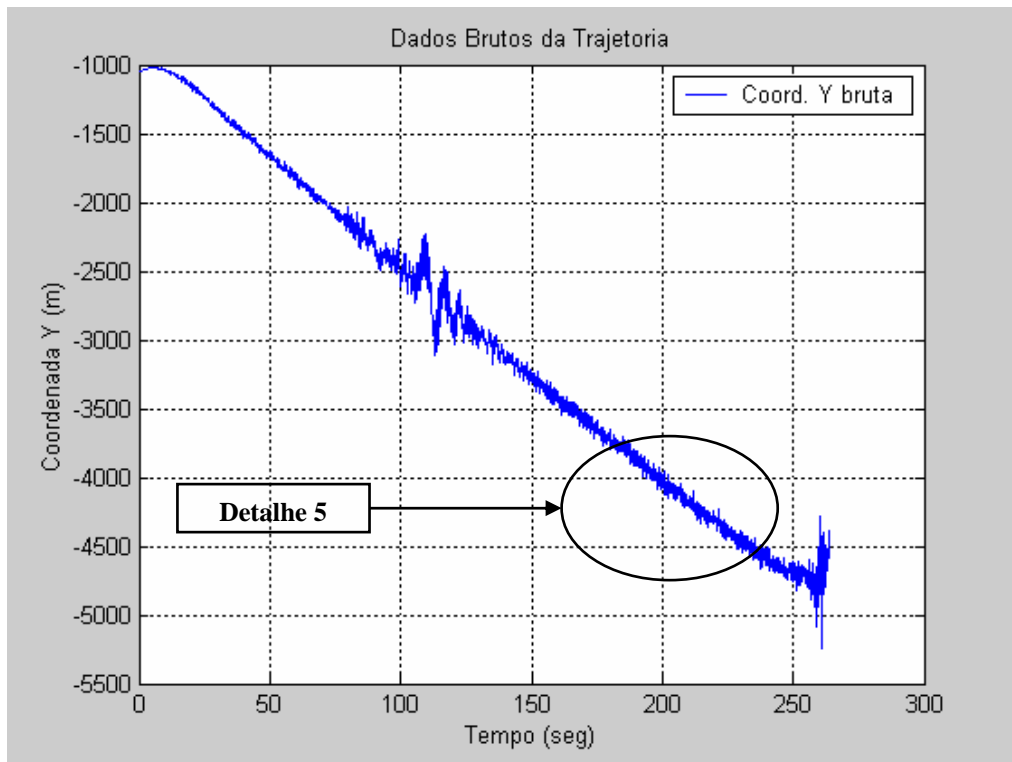


Figura 4.6 – Dados não filtrados da Coordenada Y

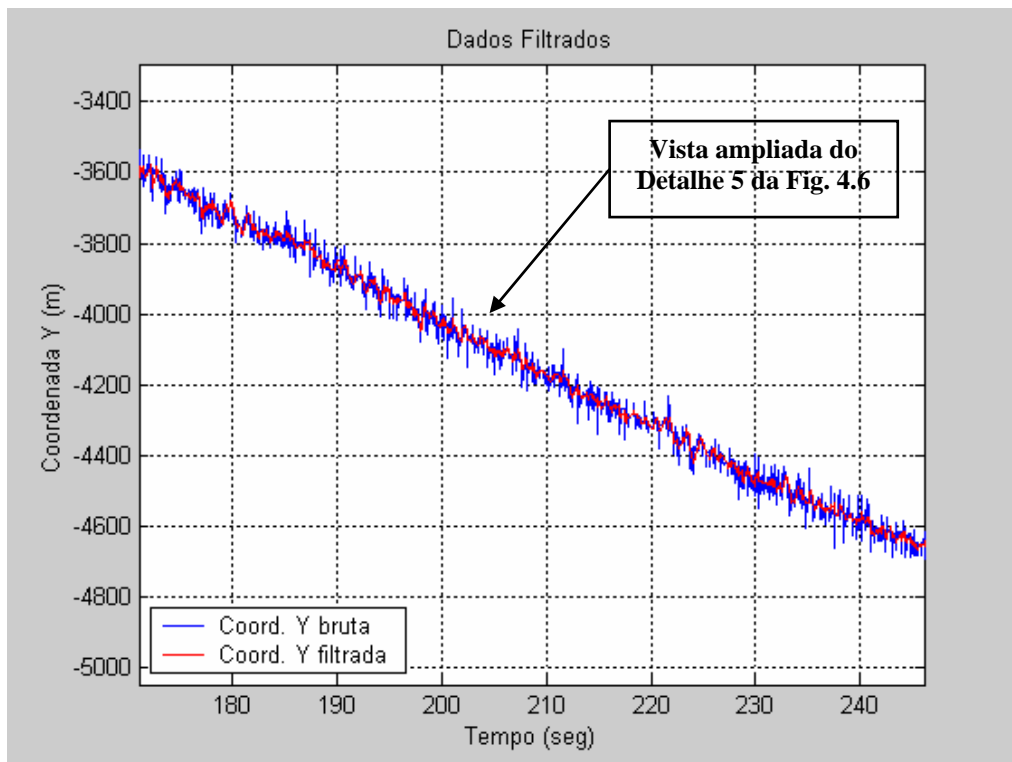


Figura 4.7 – Trecho da Coordenada Y filtrada

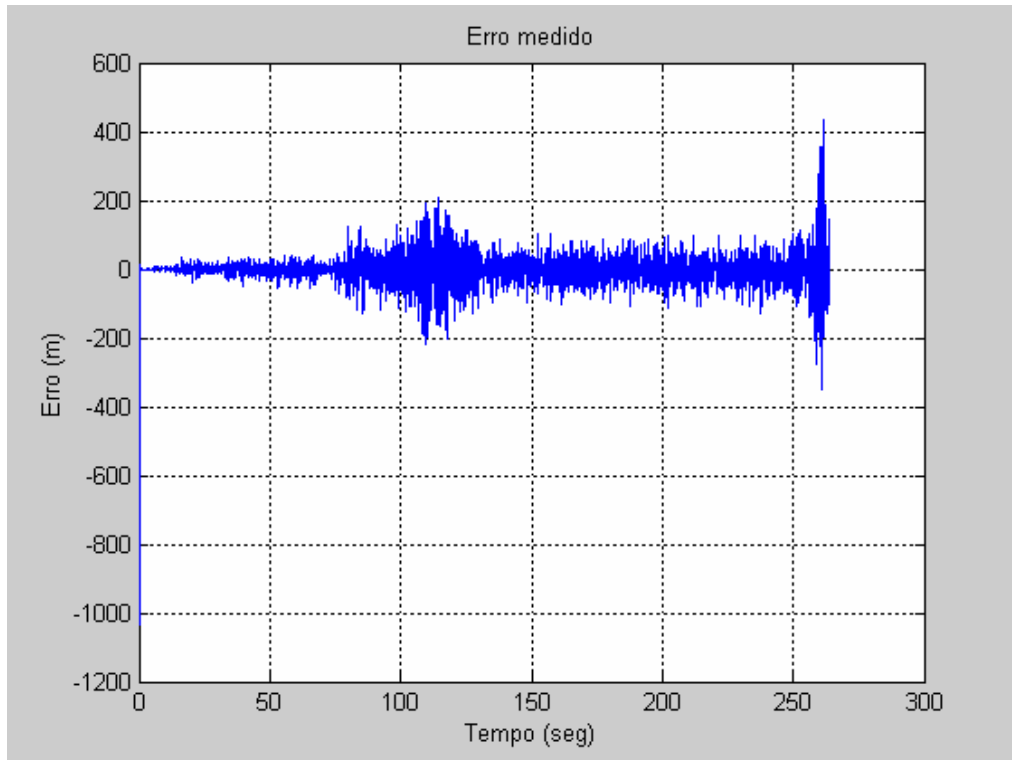


Figura 4.8 – Ruído de média zero da Coordenada Y

O resultado da filtragem de Kalman para a coordenada Z é visto nas Figs. (4.9), (4.10), (4.11) e (4.12).

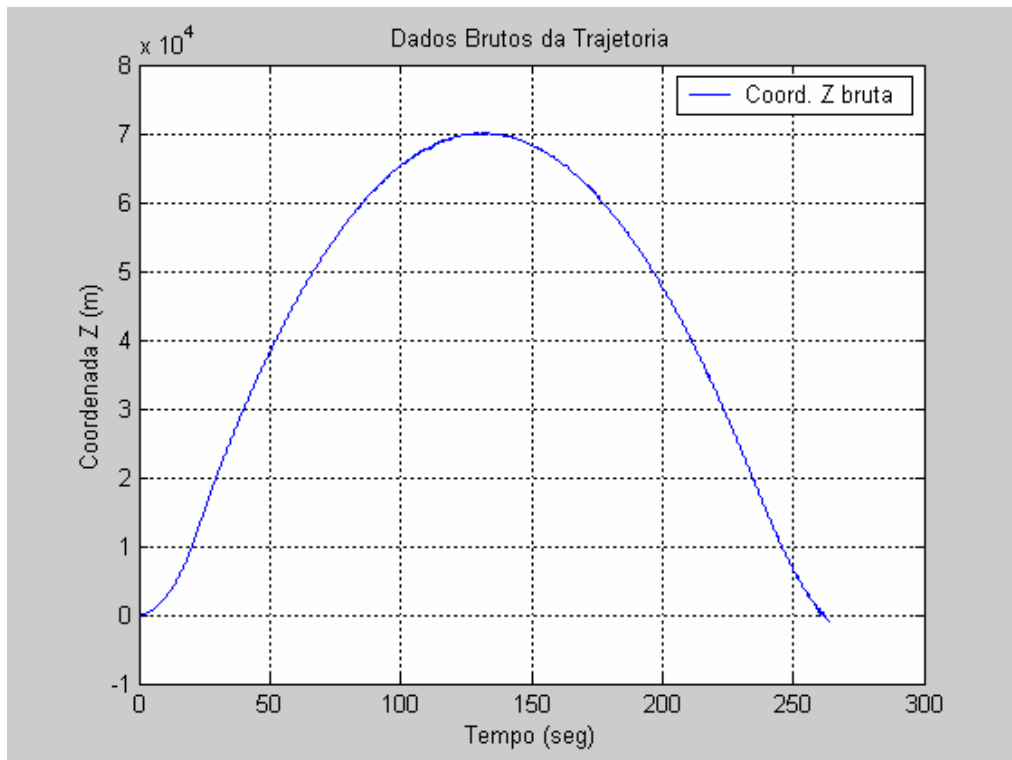


Figura 4.9 – Coordenada Z não filtrada

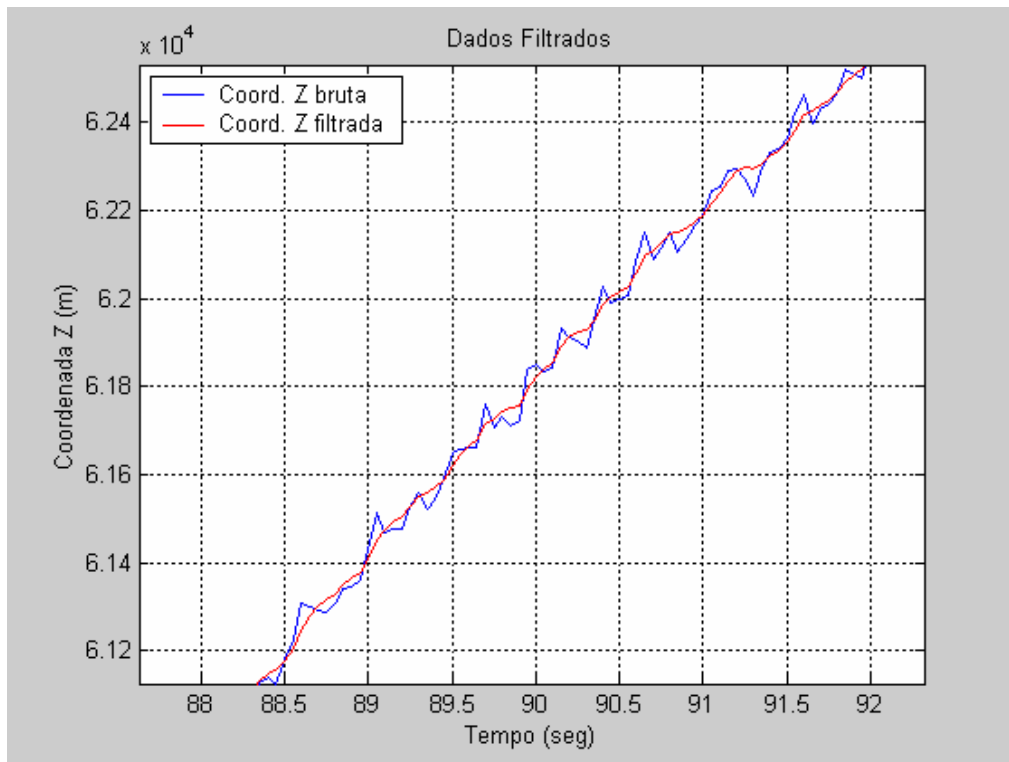


Figura 4.10 – Trecho da Coordenada Z filtrada

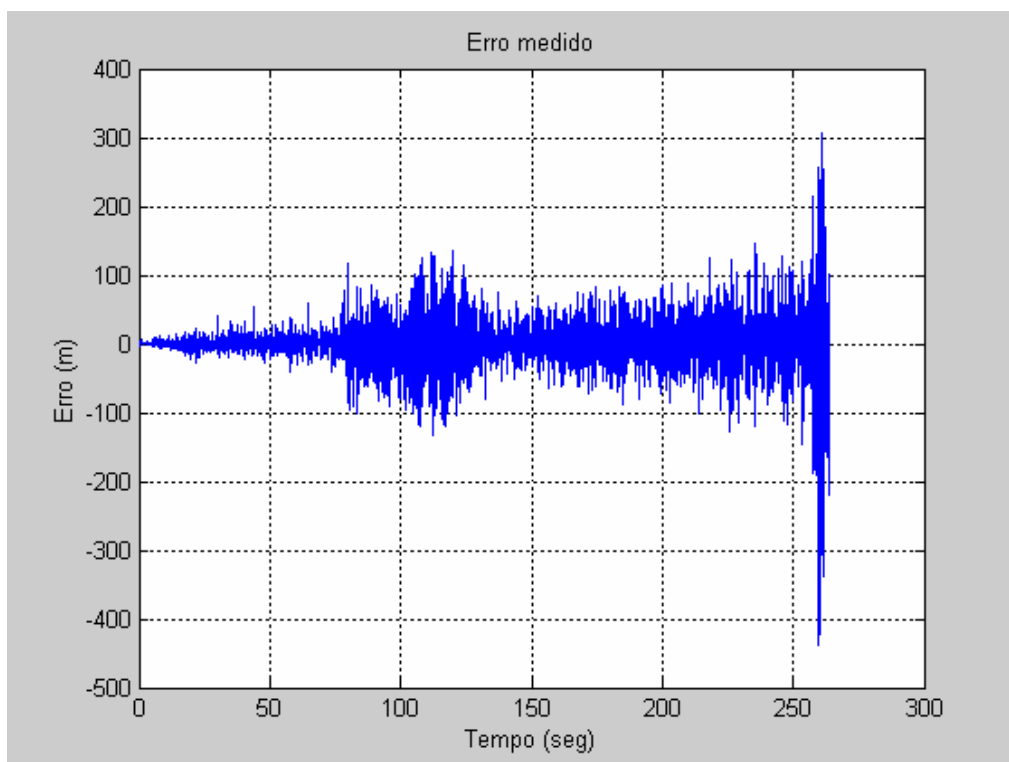


Figura 4.11 – Ruído de média zero da Coordenada Z

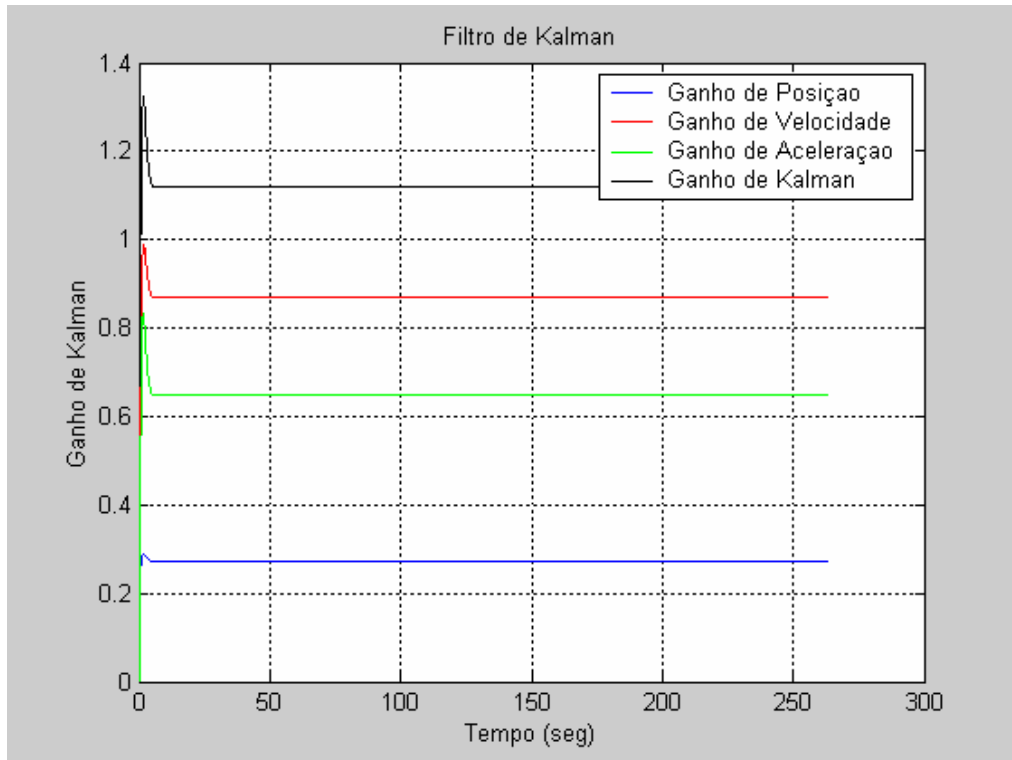


Figura 4.12 – Ganho do Filtro de Kalman

4.4.2 Filtro de Kalman Robusto

Como já descrito no Capítulo III, o objetivo da filtragem Robusta (estimação H_∞) é minimizar o ganho de energia máxima da perturbação para o erro de estimação, como demonstrado através da Eq. (3.9).

$$J = \sum_{i=0}^N \|z_i - \hat{z}_i\|^2 - \gamma^2 \left[\sum_{i=0}^N \|w_i\|^2 + \sum_{i=0}^N \|v_i\|^2 + \|x_0 - \hat{x}_0\|_{\Pi^{-1}}^2 \right] \quad (4.7)$$

O critério H_∞ pode, então, ser entendido como um critério para o pior caso, ou seja, o estimador será robusto para a pior perturbação possível.

O filtro H_∞ nada mais é do que uma versão modificada do filtro de Kalman pelo uso de um parâmetro γ , chamado de fator de robustez, como visto na Eq. (4.7).

O filtro Robusto para um sistema discreto consiste de equações de diferença para a média condicional e a matriz de covariância.

Antes de cada observação tem-se a **predição** dos dados, como visto no Capítulo III:

$$\hat{x}_{i+1/i} = F_{i+1} \hat{x}_{i/i} \quad (4.8)$$

$$P_{i+1/i} = F_{i+1}P_{i/i}F_{i+1}^T + G_iG_i^T - F_{i+1}P_{i/i}\begin{bmatrix} H_i^T & L_i^T \end{bmatrix}R_{e,i}^{-1}\begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

com

$$R_{e,i}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix}P_i\begin{bmatrix} H_i^T & L_i^T \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Após cada observação tem-se a fórmula de **recursão (filtragem ou correção)** da estimativa do vetor de estado para o instante t_{i+1} , do sistema dinâmico, dado por:

$$\hat{z}_i^* = L_i\hat{x}_{i/i-1} - L_iK_i(y_i - H_i\hat{x}_{i/i-1}) = L_i\hat{x}_{i/i} \quad (4.11)$$

$$\hat{x}_{i/i} = \hat{x}_{i/i-1} + K_i(y_i - H_i\hat{x}_{i/i-1}) \quad (4.12)$$

$$P_i = (I_n - K_iH_i)P_i(I_n - K_iH_i)^T + K_i^TK_i \quad (4.13)$$

$$K_i = P_iH_i^T(I + H_iP_iH_i^T)^{-1} \quad (4.14)$$

em que $\hat{x}_{i/i}$ representa a atualização da estimativa do vetor de estado, $\hat{x}_{i/i-1}$ representa o valor predito da estimativa do vetor de estado, \hat{z}_i representa o valor predito da estimativa da medida, K_i representa o vetor ganho do filtro de Kalman, P representa a matriz de covariância do erro e y_i representa a medida de observação realizada sobre o sistema.

Com as variáveis do sistema e do filtro descritos acima, o algoritmo que implementa o filtro de Kalman Robusto, visto na Fig. (3.3), pode então ser definido através dos seguintes passos:

- 1 Armazenar o estado atual do filtro;

$$\hat{x}_{i/i}, P_{i/i};$$

- 2 Computar o estado estimado;

$$\hat{x}_{i+1/i} = F_{i+1,i}\hat{x}_{i/i};$$

- 3 Computar a matriz de covariância do erro estimado;

$$P_{i+1/i} = F_{i+1}P_{i/i}F_{i+1}^T + G_iG_i^T - F_{i+1}P_{i/i}\begin{bmatrix} H_i^T & L_i^T \end{bmatrix}R_{e,i}^{-1}\begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix}$$

- 4 Computar a matriz de ganho do filtro;

$$K_{i+1} = P_{i+1/i} H_{i+1} [H_{i+1} P_{i+1/i} H_{i+1}^T + R_{i+1}]^{-1};$$

5 Processar a estimação a partir da nova medida y_{i+1} ;

$$\hat{x}_{i/i} = \hat{x}_{i/i-1} + K_i (y_i - H_i \hat{x}_{i/i-1})$$

6 Computar a nova matriz de covariância do erro;

$$P_i = (I_n - K_i H_i) P_i (I_n - K_i H_i)^T + K_i^T K_i$$

7 Fazer $i = i + 1$ e retornar ao passo (1).

Para o caso em apreciação, usa-se os dados das Eqs. (1.13), (1.14), (1.15), (1.17), (1.18) e (1.19) juntamente com as equações de implementação do filtro robusto, descritas acima, para o desenvolvimento do algoritmo computacional. Como já mencionado, o período de amostragem é de $T = 0,02$ segundos.

O resultado da filtragem Robusta para a coordenada X é visto nas Figs. (4.13) e (4.14) seguintes.

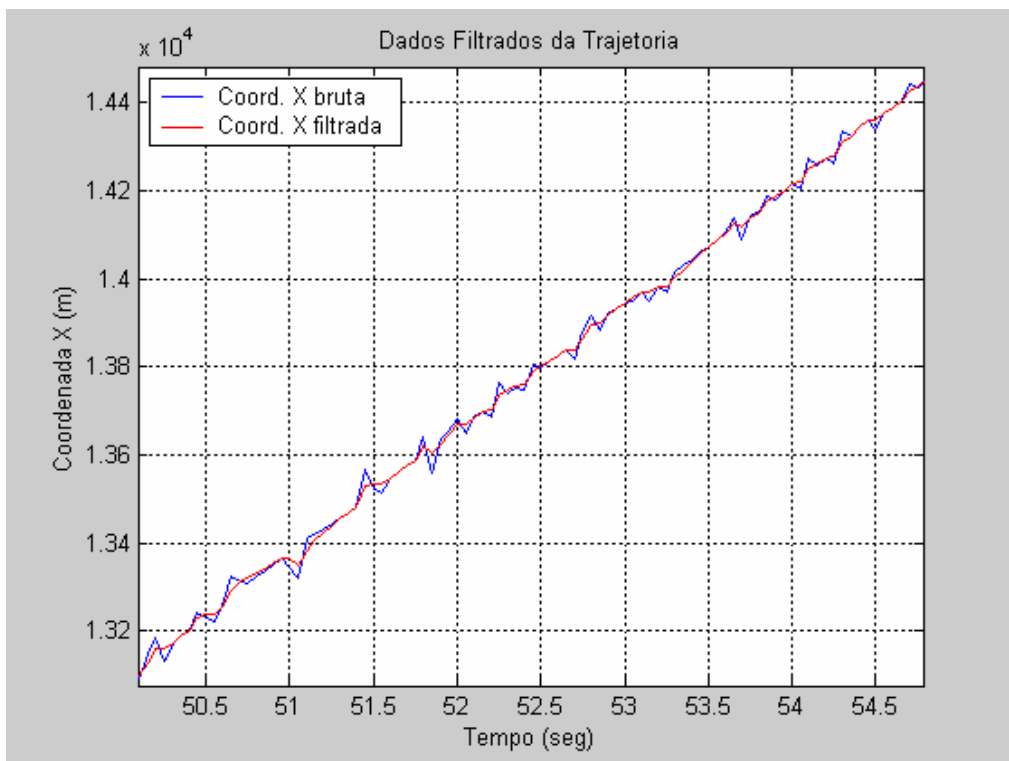


Figura 4.13 – Trecho da Coordenada X filtrada

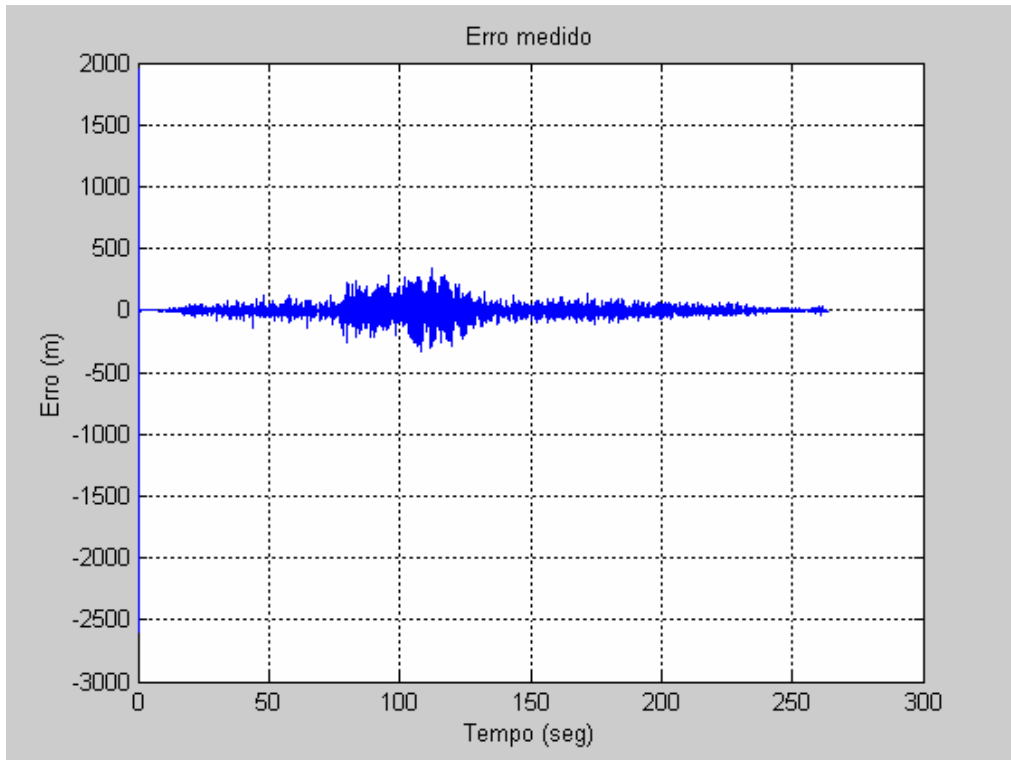


Figura 4.14 – Ruído de média zero em relação à Coordenada X

O resultado da filtragem Robusta para a coordenada Y é visto nas Figs. (4.15) e (4.16) seguintes.

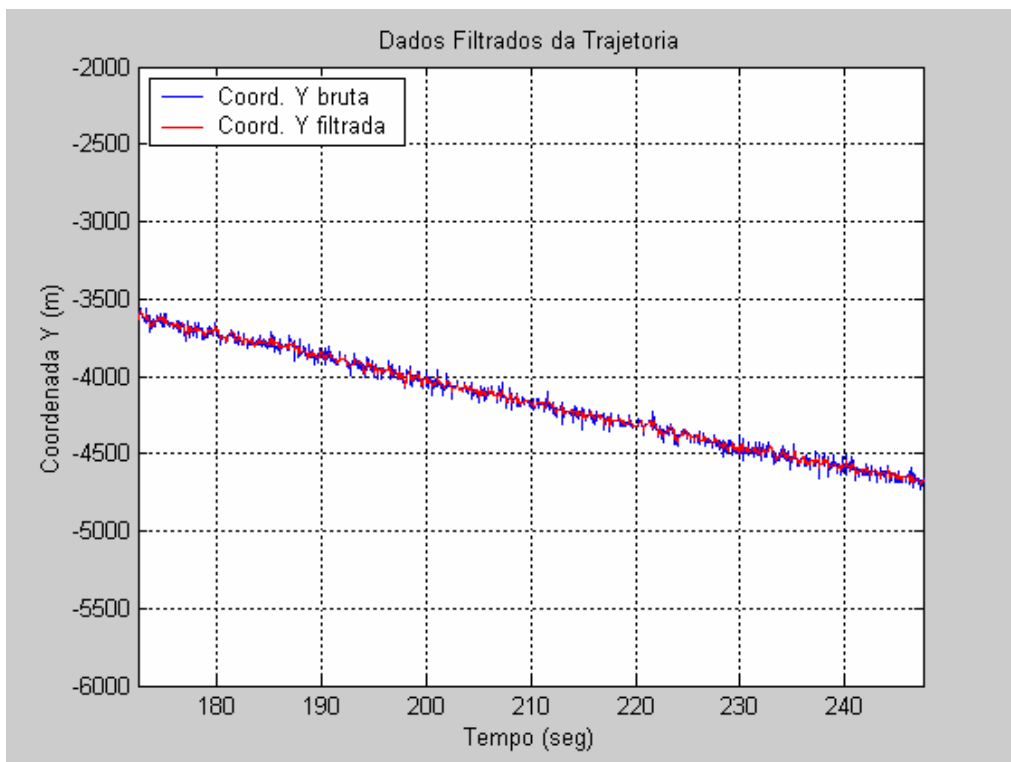


Figura 4.15 – Coordenada Y filtrada

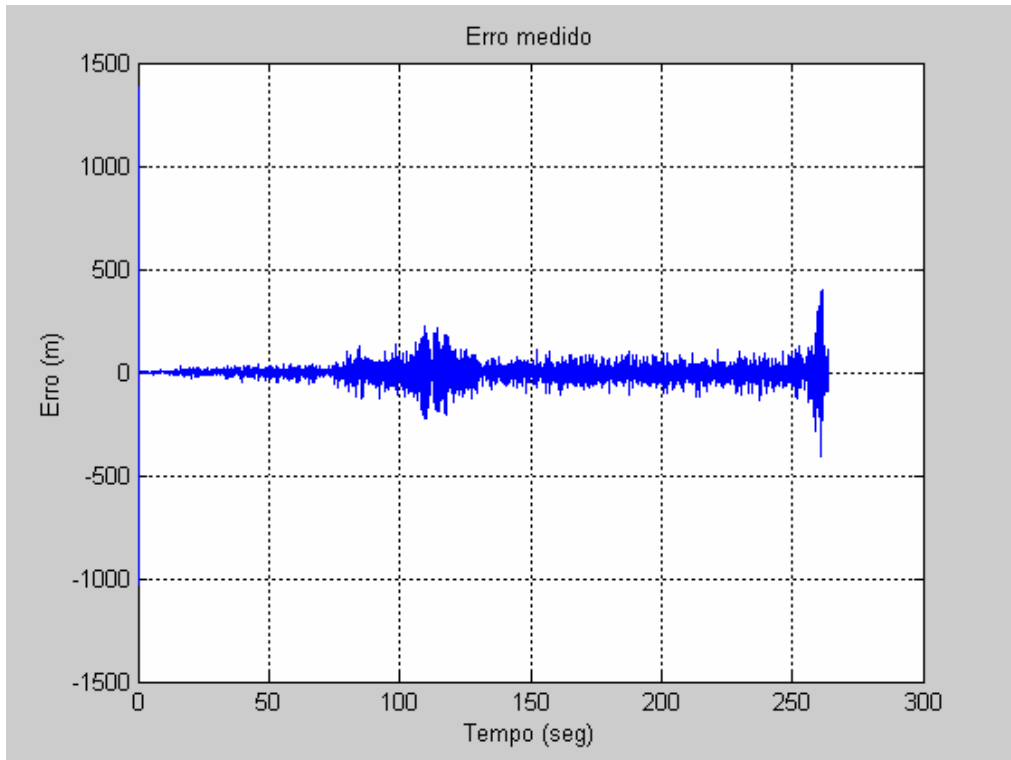


Figura 4.16 – Ruído de médio zero em relação à Coordenada Y

O resultado da filtragem Robusta para a coordenada Z é visto nas Figs. (4.17) a (4.19) seguintes.

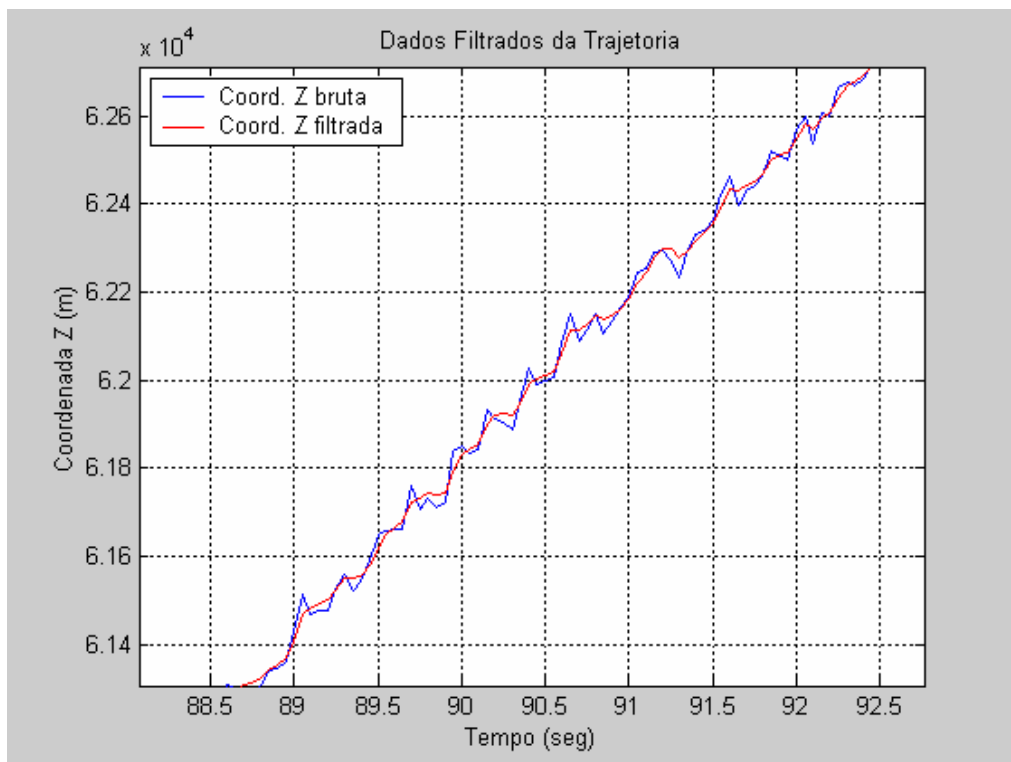


Figura 4.17 – Trecho da Coordenada Z filtrada

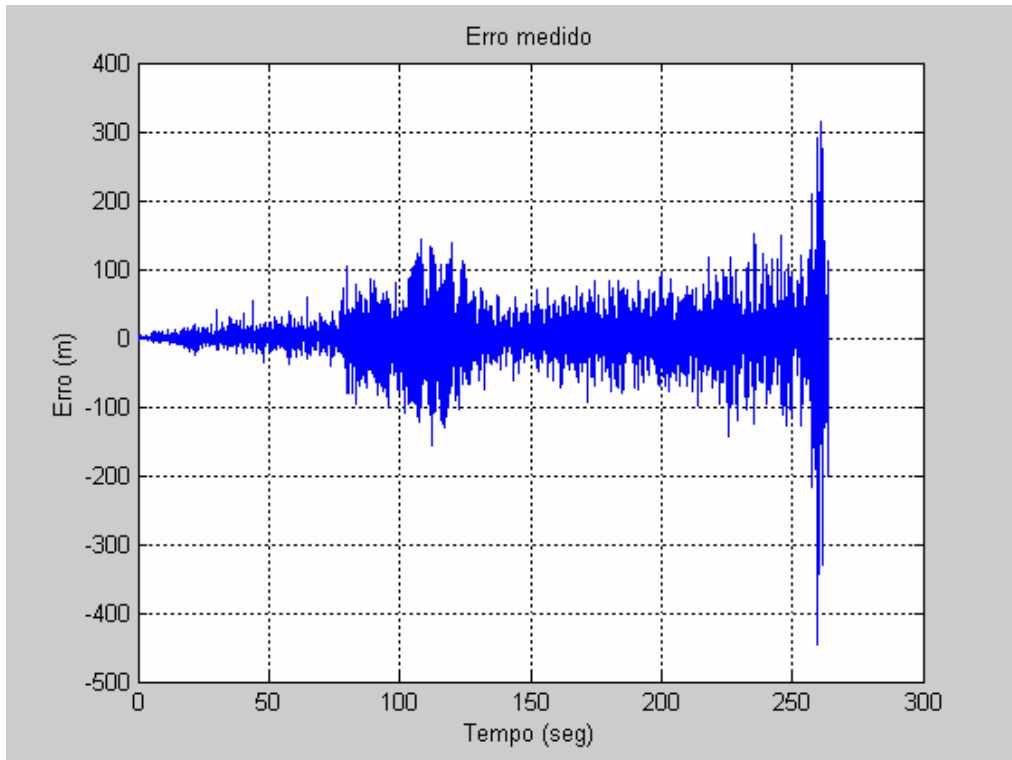


Figura 4.18 – Ruído de média zero em relação à Coordenada Z

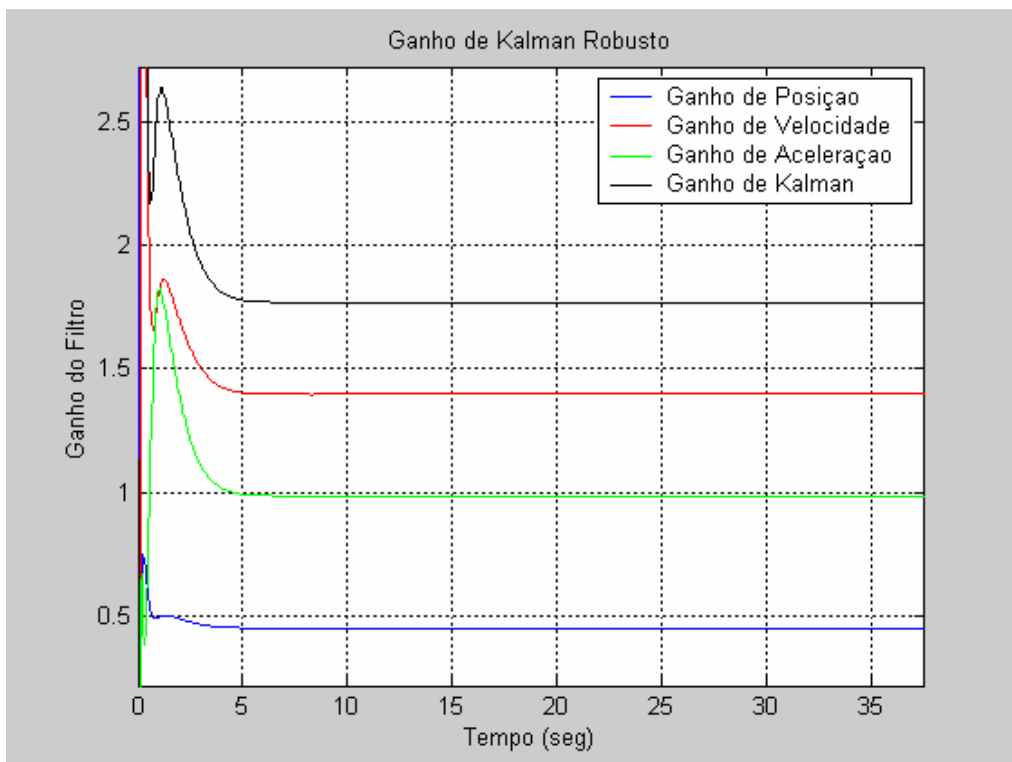


Figura 4.19 – Ganho do Filtro de Kalman Robusto em relação à Coordenada Z

4.5 Comparação entre os filtros de Kalman e Kalman robusto.

O algoritmo do Filtro de Kalman para estimação de estados em (3.1), assumindo que as seqüências $\{w_i\}$ e $\{v_i\}$ são unidades de variância independentes de processos de ruído branco, é:

$$\hat{x}_{i+1} = F_i \hat{x}_i + F_i P_i H_i^T (I + H_i P_i H_i^T)^{-1} (y_i - H_i \hat{x}_i)$$

ou

$$\hat{x}_{i+1/i+1} = F_i \hat{x}_{i/i} + F_i P_{i+1} H_{i+1}^T (I + H_{i+1} P_{i+1} H_{i+1}^T)^{-1} (y_{i+1} - H_{i+1} \hat{x}_{i+1})$$

onde

$$P_{i+1} = F_i P_i F_i^T + G_i G_i^T - F_i P_i (I + H_i P_i H_i^T)^{-1} P_i F_i^T, \quad P_0 = \Pi_0. \quad (3.50)$$

Como observado através dos autores (FORSSELL, 1996; HASSIBI², 1996) as soluções H_∞ são muito similares ao Filtro de Kalman convencional. As principais diferenças são as seguintes:

1. A estrutura dos estimadores H_∞ depende, via recursão de Riccati, Eq. (3.36), da combinação linear dos estados que pretende-se estimar, ou seja, de L_i . Já no Filtro de Kalman convencional, a estimativa de qualquer combinação linear de estado é determinada pela combinação linear da estimativa de estado.

2. Tem-se condições adicionais na Eq. (3.36), que pode ser satisfeita para que o filtro robusto exista; no problema do filtro de Kalman o estimador L_i não aparece, e a covariância P_i é definida positiva, a fim de que a Eq. (3.36) seja imediata.

3. Tem-se a matriz covariância indefinida, por exemplo, $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$ contra apenas I no filtro de Kalman.

4. Quando $\gamma \rightarrow \infty$, a recursão de Riccati, Eq. (3.41), se reduz para a recursão do filtro de Kalman, Eq. (3.50). Esta redução indica que a norma H_∞ do filtro de Kalman convencional pode ser muito ampla, e que o mesmo pode ter propriedades inferiores de robustez.

4.6 Resultados obtidos

Depois de observado a existência de soluções para o problema de filtragem de Kalman e Kalman Robusto, faz-se a análise comparativa entre os filtros, mostrando suas vantagens e desvantagens.

Relembrando o que já foi dito anteriormente, observa-se, nos dois filtros, que a posição estimada é bem mais precisa que a velocidade estimada, lembrando que, somente a posição do veículo é medida, enquanto sua velocidade é somente estimada.

Na filtragem de Kalman, além dos testes feitos e apresentados através dos gráficos, foram feitos outros onde os valores de Q e R variam, lembrando que para os gráficos acima usou-se os valores $Q=2$ e $R=6$.

Na filtragem H_∞ o melhor resultado de robustez ao pior caso das perturbações foi obtido com o parâmetro $\gamma = 0,8$. Foi observado, também, que quando o parâmetro γ se torna muito grande, como visto na Eq. (4.7), o filtro robusto se comporta como um filtro de Kalman convencional.

Outra constatação importante é que o filtro de Kalman tem uma resposta mais lenta que o filtro Robusto, como visto nas Figs. (4.10) e (4.17).

Por último, conclui-se que para nível de ruído pequeno, o filtro de Kalman Robusto (filtro H_∞) apresenta uma resposta transitória muito melhor que o filtro de Kalman (filtro H_2). Por outro lado, quando o nível de ruído é muito grande, o filtro H_∞ é mais sensível às medidas de ruído do que o Filtro de Kalman.

CAPITULO V

5 Conclusão

Neste trabalho foram investigadas algumas soluções para os problemas de filtragem H_2 e H_∞ , aplicados à trajetografia de veículos espaciais, com suas respectivas análises. As principais contribuições do trabalho estão resumidas a seguir.

Na introdução apresentou-se uma abordagem da configuração básica utilizada para rastreamento de veículos espaciais por radar, mostrando onde está inserido o sistema de tratamento de dados, desde a aquisição pelos radares, passando pelo sistema de filtragem e seguindo até ao sistema de visualização da trajetória do veículo. Ainda neste capítulo, fez-se um tratamento matemático do modelo cinemático e das medidas adotadas para os filtros.

Primeiramente, obteve-se uma solução para o problema de estimação de estado H_2 (filtragem de Kalman ou filtragem H_2), via recursão de Riccati. Esta solução se deu através da aplicação do Método dos Mínimos Quadrados - MMQ, uma metodologia de filtragem de Kalman aplicada na recuperação de trajetórias ruidosas de veículos espaciais. No caso especial deste trabalho o programa computacional foi utilizado para filtrar uma trajetória, contaminada por ruído, de um foguete de sondagem, sendo atribuídos por experimentação, valores para as matrizes de covariância da perturbação e do ruído. A filtragem utilizando esta metodologia apresentou boa estabilidade e bom desempenho nos resultados obtidos, como visto nos gráficos dos Capítulos II e IV.

Em seguida obteve-se uma solução para o problema de estimação de estado H_∞ (filtragem de Kalman Robusto ou filtragem H_∞), via recursão de Riccati. Esta solução foi obtida através do método *Minimax*, uma nova metodologia de filtragem aplicada na recuperação de trajetórias ruidosas de veículos espaciais. No caso específico deste trabalho o algoritmo computacional foi utilizado para filtrar a mesma trajetória do foguete balístico, mencionado na filtragem H_2 . O problema de estimação H_∞ apresentou uma função desempenho diferente do problema de estimação H_2 , portanto, houve a necessidade de resolver este novo problema de estimação, a saber problema *Minimax*. Na dedução da solução *Minimax* considerou-se o caso mais contaminado por ruído, maximizando a função custo, ou seja, maximizando o ganho de energia entre o erro de estimação e as perturbações. Através do

método *Minimax* buscou-se definir o parâmetro γ , fator de robustez, para o caso de estimação H_∞ sub-ótimo. Através dos resultados da análise dos gráficos gerados pelos programas de filtragem, o filtro H_∞ apresentou maior robustez para $\gamma = 0,8$. Para valores de γ menores que 0,8 o filtro tornou-se instável. Para valores de γ muito maiores que 0,8 o filtro robusto se comportou como o filtro convencional de Kalman.

Finalmente, de posse dos resultados das filtrações via estimação de estado H_2 e H_∞ , fez-se uma análise comparativa dos dois filtros submetidos a uma trajetória de mesmo nível de ruído e obteve-se desempenhos semelhantes, vistos nas figuras do Capítulo IV.

Trabalhos futuros

Com o objetivo de dar seqüência a este trabalho, fica como proposta para estudos futuros que envolvam desenvolvimento de algoritmos e projetos de filtros de Kalman, Kalman Robusto e Adaptativo para foguetes com mais de dois estágios e equipado com sistemas de manobrabilidade em sua trajetória.

Referências

- BARROSO, G. C. **Filtragem Digital para Rastreamento de Veículos Aéreos**, UFC, 1992.
- BOZIC, S. M. **Digital and Kalman filtering**. Edward Arnold, London, 1979.
- BROWN, R. G.; HWANG, P. Y. C. **Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering**, John Wiley & Sons, 1997.
- CAINES, P. E. **Linear Stochastic Systems**. John Wiley & Sons, 1987.
- CALDEIRA, A. D.; BORGES, E. M.; FILHO, F. A. B.; JUNIOR, J. R.; GUIMARÃES, L. N. F.; ROSA, M. P. **Avaliação e Análise dos Ganhos dos Filtros do Sistema de Rastreamento do CLA**, CTA/IEAv-RP-001/2000, Setembro, 2000.
- DOYLE, J. C.; GLOVER, K.; VHOV, K. **Robust Optmal and Control**. Prentice-Hall, 1996.
- FORSSELL, U. **On H_2 and H_∞ Optimal Estimation**, Linköping University, July, 1996.
- FUJITA, M.; MARUYAMA, A.; TANIGUCHI, T. UCHIDA, K. **Finite Horizon Discrete-Time H_∞ Filter with Application to Active Vision System**, Tokyo, Japan, December, 1993.
- GREG, W.; GARY, B. **An Introduction to the Kalman Filter**. University of North Carolina at Chapel Hill, Los Angeles, August, 2001.
- GREWAL, M. S.; ANDREWS, A. P. **Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB**. John Wiley & Sons, 2001.
- HASSIBI, B.; SAYED, A. H.; KAILATH, T. **Linear Estimation in Krein Spaces – Part I: Theory**, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 41, n° 1, January, 1996.
- HASSIBI, B; SAYED, A. H.; KAILATH, T. **Linear Estimation in Krein Spaces – Part II: Applications**, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 41, n° 1, January, 1996.

HASSIBI, B.; SAYED, A. H.; KAILATH, T. H_∞ **Optimality of the LMS Algorithm**: IEEE Transactions and Signal Processing, vol. 44, n° 2, February, 1996.

JACQUOT, R. G. **Modern Digital Control Systems**. Marcel Dekker, 1994.

KAILATH, T.; SAYED, A. H.; HASSIBI, B. **State Space Estimation Theory**. Prentice-Hall, 1996.

KALMAN, R. E.; BUCY, R. S. **A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems**. Transactions of the ASME – Journal of Basic Engineering, 1960.

KALMAN, R. E. **A New Results in Linear Filtering and Prediction Theory**. Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering, 1961.

LEWIS, F. L.; SYRMOS, V. L. **Optimal Control**, New York, John Wiley & Sons, 1995.

LUENBERGUE, B.G. **Optimization by Vector Space Methods**, John Wiley & Sons, New York, 1986.

MATSUMOTO, E. Y. **Matlab 6, Fundamentos de Programação**, Érica, 2001.

MENDEL, J. M. **Lessons in Estimation Theory for Signal Processing, Communications and Control**. Prentice Hall, 1995.

NISHIYAMA, K. **Robust Estimation of a Single Complex Sinusoid in White Noise: H_∞ Filtering Approach**, IEEE, 1999.

OLIVEIRA, M. C. de. **Controle de Sistemas Lineares Baseado nas Desigualdades Matriciais Lineares**. Tese de Doutorado, Unicamp, 1999.

PAPOULIS, A. **Probability, Random Variables, and Stochastic Processes**, MacGraw-Hill, 1984.

PEREIRA, G. A. S. **Filtro de Kalman: Teoria e Aplicações**. UFMG, 2000.

PHILLIPS, C. L.; Nagle, H. T. **Digital Control System, Analysis and Design**, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1990.

RUDIN, W. **Real and Complex Analysis**, McGraw Hill, Singapore, 1987.

RUYMGAART, P. A.; SOONG, T. T. **Mathematics of Kalman-Bucy Filtering**. Springer-Verlag, 1988.

SAYED, H. A. **A Framework for State-Space Estimation with Uncertain Models**, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 46, n° 7, July, 2001.

SHAKED, U.; THEODOR, Y. **H_∞ - Optimal Estimation: A Tutorial**. IEEE, December, 1992.

SINGH, M. G.; TITLI, A. **Systems: Decomposition, Optimization and Control**. Pergamon Press, 1978.

SORENSEN, H. W. **Kalman Filtering: Theory and Application**, IEEE Press, New York, 1985.

SOUZA, F. C. **Uma Proposta para Projeto de Controladores Robustos via Otimização Multinível**. São Luís: UFMA, 1997.

TAKABA, K. **Studies on H_∞ Filtering Problems for Linear Discrete-Time Systems**. Kyoto University, January, 1996.

VAUGHAN, D. R. **A Nonrecursive Algebraic Solution for the Discrete Riccati Equation**, IEEE Transactions on Automatic Control, October, 1970.

VIDYASAGAR, M. **Nonlinear Systems Analysis**, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1993.

YAAKOV, B. S.; XIAO-RONG, L. **Estimation and Tracking: Principles, Techniques and Software**, Artech House, 1993.

YAESH, I; SHAKED, U. **H_∞ Optimal Estimation: The Discrete Time Case**. Japan, 1991.

Apêndices

Apêndice A

Bibliografia de R. E. Kalman

Rudolf Emil Kalman, filho de Otto e Ursula Kalman nasceu em Budapest, Hungria, em maio de 1930. Sua família mudou-se para os Estados Unidos durante a segunda guerra mundial.

Kalman recebeu o grau de bacharel e mestre em Engenharia Elétrica no MIT (*Massachusetts Institute of Thechnology*) em 1953 e 1954 respectivamente. Seu orientador era Ernest Adolph Guillemin e o tema da sua dissertação era o comportamento das soluções de equações de diferença de segunda ordem. Depois disso, Kalman obteve o título de Doutor em Ciência na Universidade de Columbia em 1957. Nesta época, a Columbia era bem conhecida pelos trabalhos em teoria de controle liderados por John R. Ragazzini e Lotfi A. Zadeh.

Suas principais posições incluem: pesquisador no R.I.A.S. (*Research Institute for Advanced Study*) em Baltimore, entre 1958-1964, professor da Universidade de Stanford entre 1964-1971, e professor pesquisador e diretor do *Center for Mathematical System Theory* da Universidade da Flórida entre 1971 a 1992. Além disso, desde 1973, Kalman também lecionou a cadeira de Teoria Matemática de Sistemas no ETH (*Swiss Federal Institute of Technology*) em Zurich.

Ele foi merecedor de numerosos prêmios, incluindo a medalha de honra do IEEE (1974), a Medalha do Centenário do IEEE (1984), o Prêmio de Kyoto em Alta Tecnologia da Fundação Inamori do Japão (1985), o Prêmio Steele da Sociedade Americana de Matemática (1987) e o Prêmio Ballman (1997). Kalman é membro da Academia Nacional de Ciências (EUA), Academia Nacional de Engenharia (EUA) e Academia Americana de Artes e Ciências. Além disso, é membro estrangeiro das Academias Húngara, Francesa e Russa de Ciências e recebeu muitos doutorados honorários.

Kalman é casado com Constantina nee Stavrou com quem tem dois filhos, Andrew e Elisabeth.

Apêndice B

Lema da Inversão de Matriz

$$M = (P^{-1} + BR^{-1}B^T)^{-1} \quad \text{sendo} \quad \begin{cases} P_{n \times n} \\ R_{m \times m} \\ B_{n \times m} \end{cases}$$

Elevando a potência negativa vem

$$M^{-1} = (P^{-1} + BR^{-1}B^T) \quad \text{ou} \quad M^{-1} - P^{-1} = BR^{-1}B^T$$

$$MM^{-1} = M(P^{-1} + BR^{-1}B^T)$$

$$I = MP^{-1} + MBR^{-1}B^T \quad \times (P)$$

$$P = M + MBR^{-1}B^T P \quad \times (B)$$

$$PB = MB(I + R^{-1}B^T PB) \quad \text{ou} \quad PB = MB(R^{-1}R + R^{-1}B^T PB)$$

$$PB = MBR^{-1}(R + B^T PB) \quad \times (R + B^T PB)^{-1}$$

$$PB(R + B^T PB)^{-1} = MBR^{-1} \quad \times (B^T)$$

$$PB(R + B^T PB)^{-1} B^T = MBR^{-1} B^T$$

$$PB(R + B^T PB)^{-1} B^T = M(M^{-1} - P^{-1}) = MM^{-1} - MP^{-1}$$

$$PB(R + B^T PB)^{-1} B^T = I - MP^{-1} \quad \times (P)$$

$$PB(R + B^T PB)^{-1} B^T P = P - MP^{-1}P = P - M$$

$$M = P - PB(R + B^T PB)^{-1} B^T P$$

Apêndice C

Regras de derivação usadas

$$C1 \quad \frac{\partial f^T}{\partial x} \triangleq \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T$$

$$C2 \quad \frac{d(A^{-1})}{dt} = -A^{-1} \dot{A} A^{-1}$$

$$C3 \quad \frac{\partial (y^T x)}{\partial x} = \frac{\partial (x^T y)}{\partial x} = y$$

$$C4 \quad \frac{\partial (x^T A x)}{\partial x} = A x + A^T x$$

Se Q é simétrico vem

$$C5 \quad \frac{\partial (x^T Q x)}{\partial x} = 2Qx$$

$$C6 \quad \frac{\partial (x - y)^T Q (x - y)}{\partial x} = 2Q(x - y)$$

Regras de Transposição de Matrizes

$$C7 \quad (F x_i + G w_i)^T = x_i^T F^T + w_i^T G^T$$

$$(F x_i)^T = x_i^T F^T$$

Se $x^T H y$ é um escalar tem-se o seguinte: $x^T H y = (x^T H y)^T = y^T H^T x$

As condições de otimalidade fornecem

$$C8 \quad x_{i+1} = \frac{\partial H^i}{\partial p_{i+1}} \quad \text{equação de estado}$$

$$x_{i+1} = \frac{\partial H^i}{\partial p_{i+1}} = f = F_i x_i + G_i w_i \Rightarrow x_{i+1} = F_i x_i + G_i w_i, \dots, \text{com } x(0) = x_0$$

$$C9 \quad p_i = \frac{\partial H^i}{\partial x_i} = \frac{\partial f^T}{\partial x_i} p_{i+1} + \frac{\partial L^i}{\partial x_i} \quad \text{equação de co-estado}$$

$$C10 \quad 0 = \frac{\partial H^i}{\partial w_i^*} = \frac{\partial L^i}{\partial w_i^*} + \frac{\partial f^T}{\partial w_i^*} p_{i+1} \quad \text{condição de estacionariedade}$$

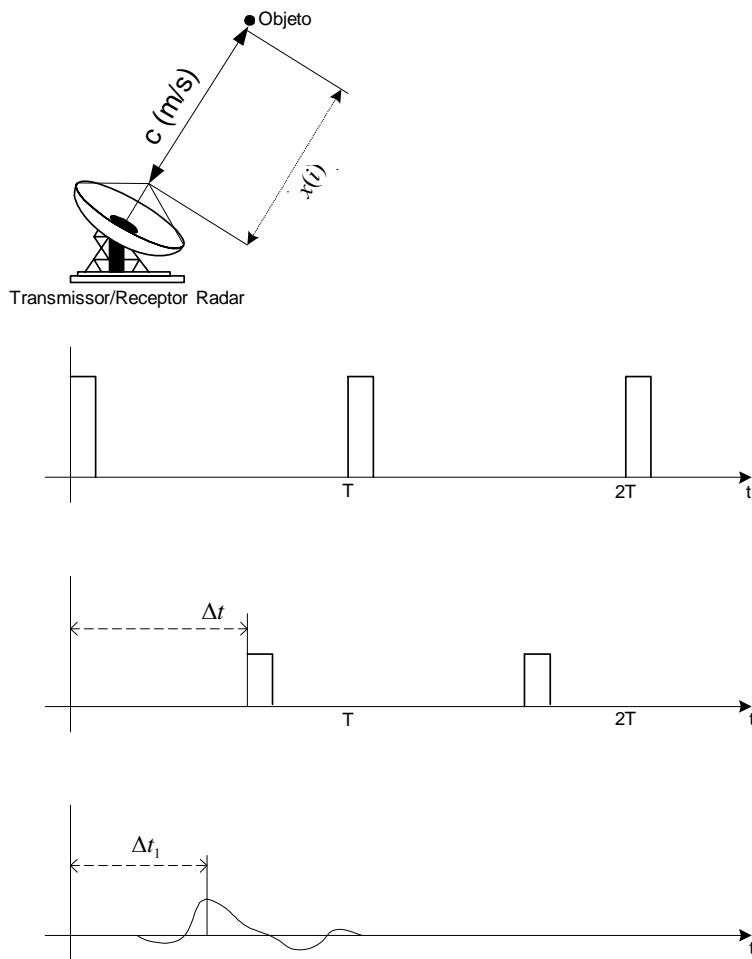
Apêndice D

Filtro $\alpha - \beta - \gamma$ Tracker

O filtro $\alpha - \beta - \gamma$ Tracker é um filtro “sub-ótimo” e pode ser assim descrito:

Processamento Discreto no Tempo para Radar de Rastreamento

Um radar de rastreamento é usado para determinar o alcance e velocidade de um objeto a uma distância x de um transmissor. A figura abaixo mostra o diagrama simplificado de um conjunto ideal de pulsos transmitido e recebido, junto a um pulso típico recebido.



A informação requerida é o valor do intervalo de tempo Δt , representando o tempo que leva a onda de rádio para ir ao objeto e voltar ao radar. O sinal recebido típico não tem uma forma ideal devido a diversas perturbações e então mede-se $\Delta t_1 = \Delta t$. O alcance estimado $x = c \Delta t_1 / 2$, de uma medida pode, portanto, causar grandes erros. A grandeza c é a velocidade de propagação do pulso no espaço. Para reduzir o erro, uma seqüência periódica

de pulsos é transmitida em um intervalo de tempo de T segundos, como indicado na figura acima, que produz uma seqüência x_0, x_1, \dots, x_i de valores medidos do alcance. Em muitos casos o objeto está em movimento e é necessário saber sua velocidade (taxa de variação da posição), junto com a posição do objeto no tempo de um pulso radar no futuro.

Para estabelecer um esquema de processamento para os dados de radar introduz-se as seguintes grandezas:

- x_i , medição da posição do objeto, obtida no i -ésimo retorno do pulso de radar;
- y_i , posição estimada do objeto no i -ésimo pulso de radar, depois do processamento de dados;
- \dot{y}_i , velocidade estimada do objeto no i -ésimo pulso de radar, depois do processamento de dados;
- y_{p_i} , posição predita do objeto no i -ésimo pulso de radar, obtida no $(i-1)$ -ésimo pulso de radar, depois do processamento de dados.

A grandeza y_{p_i} , acima, pode ser expressa como

$$y_{p_i} = y_{i-1} + T \dot{y}_{i-1}$$

onde T é o intervalo de tempo entre os pulsos transmitidos. A próxima relação é estabelecida do seguinte modo:

$$y_i = y_{p_i} + \alpha [x_i - y_{p_i}]$$

onde a posição predita é corrigida pelo erro entre os valores medidos e preditos, que é ponderado pelo fator $\alpha > 0$. De modo similar, tem-se para a velocidade:

$$\dot{y}_i = \dot{y}_{i-1} + \frac{\beta}{T} [x_i - y_{p_i}]$$

com $\beta > 0$.

Para a aceleração tem-se

$$\ddot{y}_i = \ddot{y}_{i-1} + \frac{\gamma}{2T^2} [x_i - y_{p_i}]$$

O conjunto de relações formadas pelas equações acima descrevem um esquema de processamento de sinal conhecido como equações de rastreamento $\alpha - \beta - \gamma$. O diagrama esquemático definido por estas equações é visto na figura seguinte:

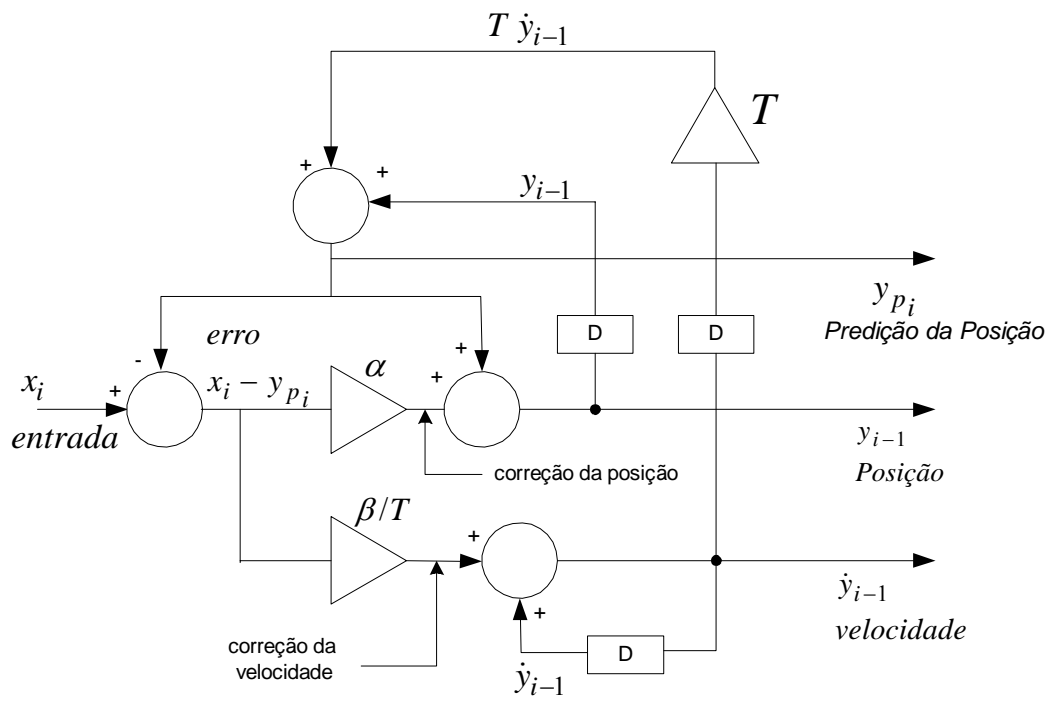


Figura – Processador de rastreamento $\alpha - \beta - \gamma$

Apêndice E

Matriz erro de covariância.

Demonstração das equações da **matriz erro de covariância filtrada** (Eq. 3.35 e 3.38). Da Eq. (3.38) tem-se:

$$\bar{P}_{i/i} = (I_n - K_i H_i) P_{i/i-1} (I_n - K_i H_i)^T + K_i^T K_i \geq 0$$

$$\bar{P}_{i/i} = (I_n - K_i H_i) P_{i/i-1} (I_n - H_i^T K_i^T) + K_i^T K_i \geq 0$$

$$\bar{P}_{i/i} = (I_n - K_i H_i) (P_{i/i-1} - P_{i/i-1} H_i^T K_i^T) + K_i^T K_i \geq 0$$

$$\bar{P}_{i/i} = (I_n - K_i H_i) P_{i/i-1} - (I_n - K_i H_i) P_{i/i-1} H_i^T K_i^T + K_i^T K_i \geq 0$$

$$\bar{P}_{i/i} = (I_n - K_i H_i) P_{i/i-1} - P_{i/i-1} H_i^T K_i^T + K_i H_i P_{i/i-1} H_i^T K_i^T + K_i^T K_i \geq 0$$

$$\bar{P}_{i/i} = (I_n - K_i H_i) P_{i/i-1} - P_{i/i-1} H_i^T K_i^T + K_i (H_i P_{i/i-1} H_i^T + I_n) K_i^T \geq 0$$

Da Eq. (3.37) tem-se que

$$K_i = P_i H_i^T (I_n + H_i P_i H_i^T)^{-1} = \frac{P_i H_i^T}{I_n + H_i P_i H_i^T}$$

logo

$$\bar{P}_{i/i} = (I_n - K_i H_i) P_{i/i-1} - P_{i/i-1} H_i^T K_i^T + P_i H_i^T \frac{I_n + H_i P_{i/i-1} H_i^T}{I_n + H_i P_{i/i-1} H_i^T} K_i^T \geq 0$$

$$\bar{P}_{i/i} = (I_n - K_i H_i) P_{i/i-1} - P_{i/i-1} H_i^T K_i^T + P_{i/i-1} H_i^T K_i^T \geq 0$$

$$\bar{P}_{i/i} = (I_n - K_i H_i) P_{i/i-1} \geq 0$$

Substituindo K_i na Eq. acima tem-se

$$\bar{P}_{i/i} = (I_n - \frac{H_i^T P_{i/i-1} H_i}{I_n + H_i P_{i/i-1} H_i^T}) P_{i/i-1} \geq 0$$

logo tem-se a Eq. (3.35)

$$\bar{P}_{i/i} = (I_n + H_i P_{i/i-1} H_i^T)^{-1} P_{i/i-1} \geq 0$$

Apêndice F

F-1 Normas e valores singulares

Normas são medidas do tamanho de um vetor ou de uma matriz.

F-1.1 Normas de vetores

Definição: Seja V um espaço vetorial e x e $y \in V$, a função $\|\bullet\|$ é dita ser uma norma em V se satisfaz as seguintes propriedades:

- 1) $\|x\| \geq 0$.
- 2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- 3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \forall \alpha \in \mathfrak{R}$.
- 4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Esta definição é geral e se aplica, não somente a vetores, mais também a matrizes.

Seja $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ um vetor de n elementos pertencentes aos números reais. A definição geral da norma deste vetor, também chamada de *norma-p* de x é:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq n.$$

Há três *normas-p*, também chamadas de normas *Holder*, obtidas pelo conjunto $p = 1, 2$ ou ∞ comumente usados:

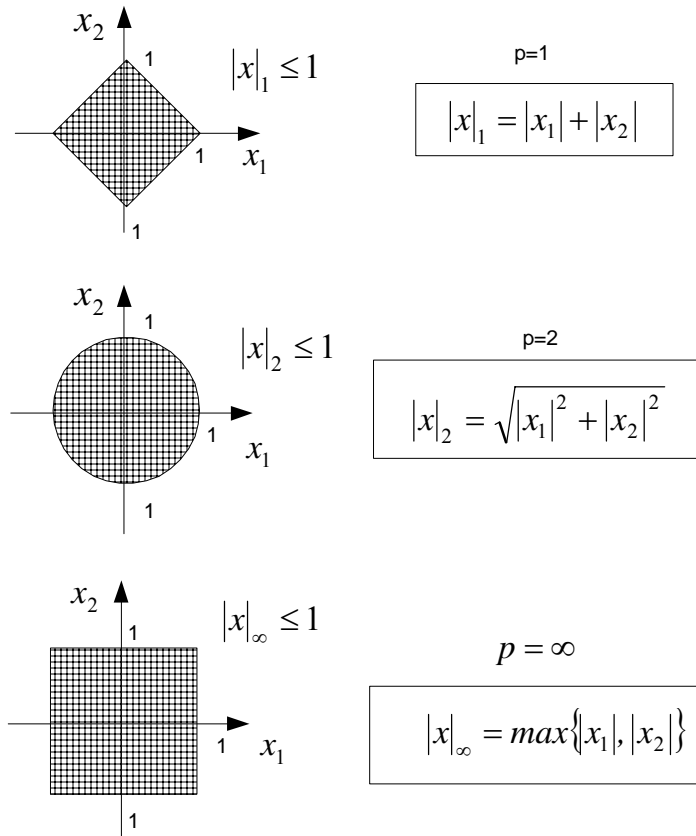
| Nome | Fórmula | Comentários |
|------------------|---|--|
| norma - 1 | $\ x\ _1 = \sum_{i=1}^n x_i $ | Somatório dos valores absolutos |
| norma - 2 | $\ x\ _2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i ^2}$ | Raiz quadrada do somatório dos valores absolutos elevados ao quadrado. |
| norma - ∞ | $\ x\ _\infty = \max_i x_i $ | Máximo valor absoluto |

As normas L_2 e $L_2[0, N]$ de um vetor x_i são definidas, respectivamente, por:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i^T x_i \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=0}^N x_i^T x_i \right)^{1/2}.$$

Ilustração geométrica:

Na Figura abaixo é visto uma ilustração geométrica das três normas para um vetor bidimensional ($n = 2$).



Considera-se, agora, um exemplo numérico com um vetor tridimensional ($n=3$) $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ em \mathfrak{R}^3 . Para um exemplo numérico tem-se $x = [1, -2, 3]^T$. As normas 1, 2 e ∞ de x são dadas abaixo.

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^3 |x_i| = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^3 |x_i|^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = 3,742$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| = 3$$

F-1.2 Normas de matrizes

Estendendo o alcance de normas de vetores para matrizes requer o entendimento do papel destas matrizes como *operador linear*, decisivo na teoria de estimação de estado com muitas variáveis.

Recordando a definição de multiplicação de matrizes tem-se: para uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

de m -linha e n -coluna no espaço $\mathfrak{R}^{m \times n}$ e para um vetor de saída $y \in \mathfrak{R}^m$ e um vetor de entrada $x \in \mathfrak{R}^n$, escreve-se $y = Ax$ onde cada elemento do vetor de entrada é dado por $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, sendo que a_{ij} é o elemento da matriz A na linha i e coluna j . Pode-se definir normas úteis para matrizes em termos do *ganho* do vetor norma de x para y . Isto é, a razão da norma de saída y e a entrada x mede o ganho de A como um operador linear, de entrada no espaço \mathfrak{R}^n e saída no espaço \mathfrak{R}^m . Como esta relação não é sempre fixa, mas depende da escolha de x , usa-se o *máximo ganho* possível da norma do vetor de entrada para o vetor de saída:

$$\|A\|_p = \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathfrak{R}^n}} \frac{|Ax|_p}{|x|_p}$$

A norma da matriz definida neste método é chamada de *norma induzida*, pois é induzida pela escolha da norma do vetor x . Existem três normas de matriz induzida comumente usadas, correspondentes a normas de vetores para $p = 1, 2$ e ∞ .

| Nome | Fórmula | Comentários |
|------------------|---|---|
| norma - 1 | $\ A\ _1 = \max_j \sum_{i=1}^m a_{ij} $ | Máximo somatório dos valores absolutos das colunas. |
| norma - 2 | $\ A\ _2 = \overline{\sigma}(A)$ ou $\ A\ _2 = [\lambda_M(A^T A)]^{1/2}$ | Máximo valor singular, denotado de $\overline{\sigma}(\cdot)$. λ_M é o maior autovalor de $(A^T A)$. Achar Autovalor λ_1, λ_2 : $\det(\lambda I - A) = 0$ |
| norma - ∞ | $\ A\ _\infty = \max_i \sum_j a_{ij} $ | Máxima soma da linha (valor absoluto). |

Do ponto de vista teórico, para um sistema, as normas induzidas tem a interpretação de ganhos de amplificação entrada/saída.

Para um exemplo numérico considera-se, agora, uma matriz $A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$,

em $\mathfrak{R}^{2 \times 3}$. As normas 1, 2 e ∞ de A são calculadas abaixo:

norma - 1: $\|A\|_1 = \max[(1+0), (2+3), (4+2)] = 6$

norma - 2:
$$\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_i(AA^T)} = \sqrt{\max \lambda_i \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \right)}$$

$$= \sqrt{\max \lambda_i \left(\begin{bmatrix} 21 & 2 \\ 2 & 13 \end{bmatrix} \right)} = \sqrt{\max(21,472, 12,528)} = 4,634$$

norma - ∞ : $\|A\|_\infty = \max[(1+2+4), (0+3+2)] = 7$

F-2 Valores singulares

O valor singular de uma matriz A é definido por:

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^*A)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

em que $\sigma_i(A)$ representa o i -ésimo autovalor de A^*A , e A^* é a transposta conjugada de A .

O máximo valor singular σ_M fornece a norma espectral de uma matriz, isto é, seja A uma matriz, então:

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_M(A^*A)}$$

Uma matriz é dita ser grande se seu menor valor singular σ_m for grande e pequena se seu maior valor singular σ_M é muito pequeno, isto é:

Matriz grande: $\sigma_m \gg 1$

Matriz pequena: $\sigma_M \ll 1$.

F-3 Normas de matriz de transferência

Duas normas são comumente usadas para matriz de transferência: a norma-2 e a norma- ∞ .

F-3.1 Norma H_2 para sistemas discretos

A norma H_2 de uma função de transferência da matriz $G(s)$ é definida por (VIDYASAGAR, 1993):

$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Tr} \{ G^T(e^{jw}) G(e^{jw}) \} dw \right)^{1/2}$$

e a correspondente temporal

$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \text{tr} (g_i^T g_i) \right)^{1/2}$$

em que a operação de integração utilizada no caso contínuo aparece substituída pelo somatório. As mesmas propriedades e interpretações discutidas no caso contínuo podem ser transpostas para o caso discreto.

F-3.2 Norma H_∞ para sistemas discretos

A norma- ∞ da função de transferência da matriz $G(s)$ pode ser definida por (LUENBERGUE, 1986; RUDIN, 1987):

$$\|G\|_\infty = \max_{w \in \mathfrak{R}} \|G(e^{jw})\|$$

e a correspondente temporal

$$\|G\|_\infty = \max_{w \in \mathfrak{R}} \frac{\|Gu(t)\|_2}{\|u(t)\|_2}$$

em que $u(t)$ é um vetor sinal de entrada e $(Gu)(t) = y(t)$ é o correspondente vetor sinal de saída de G . A norma-2 representa a energia do sinal. A norma- ∞ da função de transferência dá o ganho máximo possível se o ganho é medido usando a norma-2. A norma- ∞ é uma *norma induzida*.