UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DENISON MORENO COELHO

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS: UMA ANÁLISE DAS QUESTÕES DE GEOMETRIA NOS EXAMES ENQ E ENA

SÃO LUÍS/ MA

2019

DENISON MORENO COELHO

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS: UMA ANÁLISE DAS QUESTÕES DE GEOMETRIA NOS EXAMES ENQ E ENA

Dissertação apresentada ao Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio José da Silva

SÃO LUÍS - MA

2019

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

MORENO COELHO, DENISON.
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS: UMA ANÁLISE DAS QUESTÕES DE GEOMETRIA NOS EXAMES ENQ E ENA / DENISON MORENO COELHO. - 2019.
66 p.
Orientador(a): Prof. Dr. Antonio José da Silva.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luis - MA, 2019.
1. Construção. 2. Geometria. 3. Problema. 4. Resolução. I. José da Silva, Prof. Dr. Antonio. II. Título.

DENISON MORENO COELHO

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS: UMA ANÁLISE DAS QUESTÕES DE GEOMETRIA NOS EXAMES ENQ E ENA

Dissertação apresentada ao Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio José da Silva

Aprovada em:

Banca Examinadora

____

Prof. Dr. Antonio José da Silva (Orientador)
Universidade Federal do Maranhão – UFMA

____

Prof. Dr. Nilson Santos Costa (Examinador Externo)
Universidade Federal do Maranhão UFMA

____

Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo (Examinador Interno)
Universidade Federal do Maranhão UFMA

.

“Salomão, fez mais o mar de fundição,
de dez côvados de uma borda até à outra borda,
perfeitamente redondo, e de cinco côvados de alto;
e um cordão de trinta côvados o cingia em redor.”
(1Reis, 7:23)

Dedico este trabalho acima de tudo a Deus.

A minha família por sempre está ao meu lado.

A meus pais Deuselina e Raimundo e à minha esposa Iranilde.

AGRADECIMENTOS

Deus, agradeço a ti por me dá a vida e me conduzir nas dificuldades.

Aos meus pais Raimundo das Mercês e Deuselina Moreno por me proporcionar sempre educação e incentivo aos estudos.

À minha esposa Iranilde por me acompanhar nessa jornada de estudos, desde a Graduação.

Aos meus filhos Deliane e Iorran por me alegrar e me inspirar a caminhar.

Aos meus amigos, Joaquim, Ivan, Maria de Ribamar, Jailson, Edigerson, Felipe, Letícia, Daniara, Tássia, Josy, Lucijane, Indiágila, Mirian, Adenildo, Rosimar, Kleyton, Clei Márcia, Jociane, Oziel, Rubens, Antônio Pedro, Wellington, Irama, Silvana, Cleilson e Sônia, pelo apoio.

À minha família, Deusilene, Deusiane, Raimundo Neto, Deusinete, Miguel, Maria Auxiliadora, Fabiana, Cristina, Flávia, Natan, Cláudio, Fernando, Silvana e Silvan, por estarem sempre ao meu lado.

Aos meus irmãos da UFMA, Gabriela, Clenilton, Aldivan, Anselmo, Arnaldo, Alvimar, Laércio, Alison, Wallace, Lenildo, Anacleto e Ravilson, pelo conhecimento e aprendizagem repassados, e em especial, a Gabriela, Clenilton e Aldivan pois sem eles não teria prosseguido no curso.

Ao meu orientador Antonio José, pela orientação na dissertação e dedicação aos alunos do curso do PROFMAT.

Aos municípios de Vitória do Mearim e Cajari, pela confiança na melhoria da educação em nossa região.

Aos professores do PROFMAT pelo compartilhamento de conhecimentos, em especial ao professor Anselmo e Jairo.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo mostrar um estudo sobre as resoluções que envolvam construções geométricas com base nos estudos realizados na disciplina MA-13 do PROFMAT e de autores conceituados que pesquisaram sobre o assunto. Será apresentado um breve estudo sobre a história da geometria desde o antigo Egito até os dias atuais e a história do desenho geométrico no ensino. Logo após será vista algumas construções básicas e suas aplicações no exame ENQ e ENA. Será realizado uma análise quantitativa por conteúdo, sobre as questões que envolvem construções geométricas em suas resoluções nos exames do ENA e ENQ nos últimos 3 anos servindo de base para avaliar o uso a nível nacional destas respostas criativas, para assim relacionar os conceitos e aplicações com sua devida visualização.

Palavras-chave: Geometria, construção, resolução e problema.

ABSTRACT

This work aims to present a study on the resolutions involving geometric constructions based on the studies carried out in the MA-13 PROFMAT discipline and from reputable authors who researched on the subject. A brief study will be presented on the history of geometry from ancient Egypt to the present day and the history of geometric design in teaching. Soon after will be seen some basic constructions and their applications in the ENQ and ENA exam. A quantitative content analysis will be performed on the issues involving geometric constructions in their resolutions in the ENA and ENQ exams over the past 3 years, serving as a basis for assessing the national use of these creative responses, in order to relate concepts and applications to your due visualization.

Keyword: Geometry, construction, resolution and problem

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

SBM – Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

UFMA – Universidade Federal do Maranhão

CCET – Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática

MA-13 – Disciplina de Geometria

ENA – Exame Nacional de Acesso

ENQ – Exame nacional de Qualificação

OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas

a.C – Antes de Cristo

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como finalidade fazer uma análise nas resoluções de problemas que envolvem construções geométricas nos exames do ENA e do ENQ nos anos de 2016 a 2019, afim de se tornar uma ferramenta de apoio para a preparação dos próximos candidatos que serão submetidos a esses exames nacionais. Além, disso pretende-se justificar a necessidade da apreensão desse assunto pelo menos no nível aqui exposto, para um desenvolvimento pleno de uma cultura de construções geométricas básicas com aplicações em diversos ramos da matemática e áreas afins.

Faremos uma fundamentação teórica a respeito da definição do que é um problema, quais são as etapas das resoluções de problemas segundo a ótica de George Polya, e em seguida faremos algumas construções geométricas básicas e logo apresentaremos os problemas clássicos de construções. Trataremos do famoso teorema de Pitágoras, das relações métricas nos triângulos retângulos sob a ótica das construções geométricas.

Faremos uma definição da metodológica, mostrando de que forma se deu esse trabalho, direcionando para aplicação nas resoluções de problemas de geometria nos exames do ENQ e ENA. Logo em seguida, faremos uma analises das questões do ENA 2017, 2018 e 2019, ENQ 2016.1, 2017.1 e 2019.1 e dando continuidade com a analises desses exames, mostraremos na forma tabular os resulta do obtido.

E por fim, mostraremos as conclusões obtidas após a análise dos dados e gráficos referente ao comportamento das questões que envolvem as resoluções com o uso das construções geometrias nos exames nacionais em exames nos anos de 2016 a 2017.

Desde o ensino fundamental a matéria mais interessante para mim era a geometria, pois ela trabalhava a observação e a criatividade. Quando eu observava algumas verificações geométricas simples, eu despertava cada vez mais interesse pela matemática. Como exemplo dessas demonstrações em vários livros víamos a prova que “a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º” em que um simples recorte de papel ou o traçado de uma linha paralela a base revelava o que se queria demonstrar.

Durante estudos no curso do PROFMAT na disciplina MA13-Geometria utilizamos o livro de Geometria do PROFMAT de Antonio Caminha Muniz Neto. Neste livro foi observado através de construções geométricas a demonstração de vários proposições e corolários de forma simples com uso de conceitos simples como prolongamento de segmento entre esses, o encantador Problema de Langley.

Nesse sentido, é conveniente apresentar a problemática que trata esta pesquisa, em que se quer saber: Qual a ocorrência de construções geométricas nas questões do ENA e ENQ nos últimos 3 anos? Qual a relevância dessas construções frente à resolução de problemas e os conceitos matemáticos tratados?

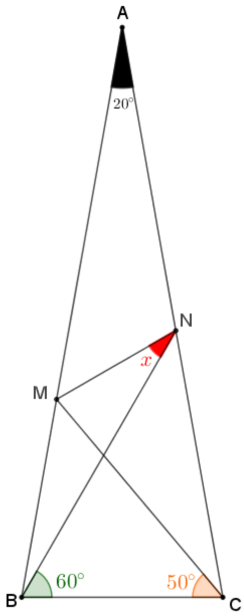
Esta pesquisa tem como objetivo identificar as construções geométricas em questões do ENA e ENQ nos últimos 3 (três anos). Especificamente pretende-se: identificar as construções geométricas em questões do ENQ e ENA pela perspectiva da resolução de problemas; dimensionar a aplicação das construções geométricas nas resoluções de questões do ENA e ENQ e apresentar aos professores e um mapeamento/um retrato da utilização das construções geométricas em exames associados ao PROFMAT;

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O primeiro grande problema, que este pesquisador teve o prazer de observar, que pedia resolução por construção, foi o "Problema de Langley" em homenagem ao autor Edward Mann Langley (1851-1933), outros o conhecem por "Triângulo de Lidskii" devido a sua publicação feita por Victor Borisovich Lidskii (1924-2008), em um livro que foi lançado na Rússia, e devido a esta origem é bastante conhecido por "Triângulo Russo" (Clube de Matemática da OBMEP, 2019). Ele possui enunciado simples seguido por uma figura, como segue abaixo:

Na figura abaixo, sabendo que os segmentos AB e AC têm o mesmo comprimento, determine a medida x, em graus, do ângulo BNM.

Figura 1: Triângulo ABC



Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/desafio-triangulo-russo/

Este triângulo apesar de aparentar ter resolução simples ele esgota as possibilidades triviais de resolução devido a algumas informações que fazem falta para concluí-lo. Ao tentar resolvê-lo o explorador de início faz uso das relações usuais como soma dos ângulos internos, externos suplementares entre outros sempre chegando a mais de uma incógnita.

Tamanho é o sobressalto do observador quando observa a necessidade de novas informações leva a construção um ponto P pertencente a AC tal que o ângulo $C\widehat{B}P$ seja igual a $20°$. Assim este pode ser resolvido de maneira astuta como podemos observar na sequência de passos disponível no link http://clubes.obmep.org.br/blog/desafio-triangulo-russo/.

Assim, surgiu a ideia de pesquisar em outras questões o uso de construções para resolução de problemas. Como norteamento e delimitação tomamos as questões do ENA e ENQ, visto que estes são aplicados pela SBM que tem grande prestígio nacional, tendo assim, um banco de dados confiável para esta pesquisa.

As resoluções que envolvem construção mostram uma beleza impressionante, devido a surpreendente criatividade em marcar novos pontos e traçar retas que antes eram inesperadas para a construção da estratégia para resolução do problema. Após aplicar a devida construção a solução provém com uma simplicidade encantadora, sempre reduzindo os problemas à menor dificuldade possível.

Este trabalho é importante a todos os estudantes e pesquisadores que buscam explorar a aplicação de métodos de resolução de problemas com o uso de construções geométricas. Estas construções podem ser feitas do modo mais simples e usual como por exemplo baixar a altura de um polígono, ou com uso de meios mais criativos, como estabelecer comparações usando semelhança de triângulos entre segmentos e ainda visualizar um arco capaz numa figura triangular.

Este trabalho vem ainda, trazer uma análise sobre o uso de construções geométricas na resolução de problemas nos últimos 3 anos dos Exames da SBM por meio do ENA e ENQ. Estas resoluções são de fácil entendimento pois tendo um breve conhecimento sobre conceitos geométricos, observação e criatividade o método pode ser usado. Servindo assim de base para futuros estudantes que buscarem traçar uma estratégia de estudos para a resolução de problemas nestes exames que envolvam a geometria.

2.1 O QUE É UM PROBLEMA?

O problema é uma situação que podemos descrever como o uso das habilidades intelectuais para encontrar uma solução, por meio de estratégias a serem traçadas para o percurso que era antes desconhecida. Muitos problemas exigem dedicação e persistência para encontrar um plano para encontrar a solução (SANTOS, 2019, p.5). Segundo Silva Júnior (2019, p.13) o problema de início, traz uma dúvida, um questionamento, algo a ser resolvido através de observações e investigações. Então, um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado, ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível “construí-la”.

É possível observar que nas questões da Olímpiada brasileira de matemática – OBMEP, que é realizada anualmente pela SBM, vemos questões que apresentam uma observação maior, saindo assim do modelo usual de perguntas e respostas modelos e que buscam no aluno uma nova mentes criativas, estimulando-os a pensar em sequência, e resolver problemas aparentemente difíceis, porém, “servem para despertar a genialidade na construção do pensamento matemático (ALBUQUERQUE, 2019 p.11). A solução de um problema motivador é o ponto de partida para iniciar um conteúdo matemático em sala de aula. Segundo Santos (2019), uma questão motivadora, serve de base para discussões e abre um leque para uma abordagem diferenciada, deixando o aluno pensar, perguntar e agir.

Os problemas devem ser relacionados com vivencias anteriores do educando de forma a construir em sequência novos aprendizados, tornando-os capazes de interferir no mundo a sua volta, como sujeito pesquisador. Muitos pesquisadores corroboram neste pensamento, dizendo:

> As raízes da aprendizagem baseada em problemas podem ser encontradas em Dewey (1929), num apelo à promoção da aprendizagem independente em crianças. E na noção de Bruner (1959 a 1971) da motivação intrínseca como força interna que leva as pessoas a saber mais sobre seu mundo. [...] o papel do problema como o ponto de partida para a aprendizagem pode ser atribuído a Dewey que enfatizou a importância da aprendizagem, em interação com eventos da vida real (SCHMIDT, 1993, v.27, p.423).

É notório que os autores defendem, problemas que desenvolvam o auto aprendizado, assim como também defendem a importância de questões voltadas para o cotidiano e a realidade do aluno (RIBEIRO, 2019, p.25). Também é conveniente ressaltar as diferenças entre "exercício e problema", pois:

> Um exercício é uma questão que requer para sua solução a aplicação de técnicas específicas e focadas no que foi alvo de discussões recentes, em outras palavras, um exercício é de imediata resolução. Um problema não apresenta um caminho imediato para sua solução. Este, requer que o interessado em resolvê-lo invista tempo e um certo esforço mental para encontrar uma forma de abordá-lo, mesmo sem a garantia de que esta conduzirá à solução. (SILVA JUNIOR, 2019 pg.14)

A criatividade é importante para resolver problemas que demandam observação e investigação. Segundo Silva Junior "a solução para muitos problemas surge, algumas vezes, sem uma explicação lógica, embora a solução em si tenha todo sentido". Nesse caso, parece que foi inventada, criada a partir de elementos que não indicavam para os olhos comuns que dali poderia ser obtida.

2.2 ETAPAS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

As etapas de resolução de problemas foram desenvolvidas por George Polya, nascido em 13 de dezembro de 18887 em Budapeste na Hungria, de origem judaica (SANTOS, 2019). Podemos ver que Polya (1995), descreveu algumas estratégias para resolver os problemas matemáticos encontrados que foram publicados, entre outras, ele citou as etapas para a resolução de problemas tendo a como sequência: 1º Compreensão do enunciado; 2º construir uma estratégia de resolução; 3º executar o plano e 4º verificar se a resposta encontrada atende a resposta pedida.

Assim a primeira fase na resolução de um problema a compreensão do enunciado. A investigação do problema é a etapa central na sua abordagem, pois ela proporcionará a obtenção das informações que subsidiarão as tomadas de decisões posteriores. Sendo a orientação a estratégia inicial, dando a condição necessária para o ponto de partida que, juntamente com outras estratégias como o penúltimo passo, pôr as mãos na massa e tornar o problema mais fácil, municiarão o resolvedor para solucionar os mais diversos problemas. (SILVA JÚNIOR, 2019 p.27). Após estes passos é necessária uma verificação se a resposta é realmente verdadeira ou se ela possui unicidade, o que pode ser feito por substituição, demonstração, contradição (absurdo) entre outros.

Uma descrição dos quatro passos para resolução de problemas segundo Polya, (1995, apud SANTOS 2019, p.42) segue no quadro abaixo:

Tabela de Passos de Polya para resolução de problemas

Tabela 1: Passos para Resolução de Problemas

Passos	Análises
Compreender o Problema	1- Para que exista uma boa compreensão do problema são necessários: • Entendimento do enunciado do problema, ou seja, o estudante deve entender tudo o que foi escrito ou dito e conseguir reescrever com suas próprias palavras; • Conseguir identificar os dados do problema; • As informações são suficientes; • Encontrar objetivos, ou melhor, saber onde chegar; • Conceder atenção aos problemas estimulando a memória e as recordações de problemas similares.
Estabelecer um Plano	2- Para que se estabeleça um bom plano temos que: • Usar um modelo de problemas semelhantes; • Resolver problemas conhecidos que sejam equivalentes; • Buscar padrões; • Desenhar figuras; • Usar propriedades conhecidas anteriormente.
Executar o plano	3- A execução de um plano é trabalhosa e exige conhecimentos prévios, bons hábitos, concentrar no objetivo e paciência. Segue alguns requisitos que ajudar nessa tarefa: • Examinar os detalhes antes estabelecidos para que fique o melhor possível; • Utilizar diferentes estratégias, realizando detalhadamente as operações algébricas e geométricas; • Conceder o tempo suficiente; • Recomeçar sempre que preciso; • Verificar se todo o processo está correto.
Retrospecto do Plano	O retrospecto sempre deve ser feito de forma a consolidar e aperfeiçoar na resolução de problemas. O estudante precisa ser ensinado que todo problema poderá contribuir com seu aperfeiçoamento, que toda resolução poderá ser melhorada. Segue alguns requisitos: • Verificar se o problema está realmente correto considerando refazer todas as operações já executadas; • Analisar com outros possíveis caminhos as soluções; • Oportunizar ao estudante relações com outros problemas; • Melhorar as soluções dos problemas sempre que possível.

Fonte: (SANTOS, 2019, p.42)

Após analisarmos os requisitos necessários a cada etapas vemos a importância de cada uma. Então, assim que o aluno tiver uma bela ideia ele poderá colocá-la em execução e resolver o problema, mesmo que ele necessite pular uma das fases. Após conseguir com autonomia o problema o aluno sentirá uma grande realização pessoal de forma a buscar cada vez mais resolver outros problemas (SANTOS, 2019, p.42).

2.3 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

A divisão da geometria ocorre em várias, novas, subdivisões e estuda a parte da matemática que relaciona as formas, figuras, construções entre outros. Sendo a área mais antiga da matemática, segundo Cardoso (2019, p.45), temos a geometria como uma matéria importante do ensino básico até o superior fazendo uma transição entre várias outras subáreas, entre elas com a Análise Combinatória.

Zuin (2007, p.14) fala que a geometria ensinada em sala de aula, não pode estar desconectada da Geometria Euclidiana, sem demonstrar de onde surgiu. Da mesma forma, o desenho geométrico não pode ser ensinado somente como “passos de construção”, como uma receita para chegar ao resultado. A história da matemática nos mostra que:

> Euclides tinha partido de algumas definições e conceitos primitivos – os axiomas – para chegar aos conceitos derivados – os teoremas – tendo as construções geométricas integradas á teoria. O vínculo entre as duas “matérias” era evidente, apesar de os professores não fazerem menção a este fato, talvez por já ter se criado uma tradição de se apresentarem as construções geométricas como um campo autônomo. (ZUIN, 2007 p.14).

Antigamente, no Brasil as construções faziam parte das disciplinas escolares na disciplina conhecida como “Fortificação” que incluíam aulas de desenho geométrico, sendo considerado obrigatório nas academias militares a partir de 1738 e visava formar cartógrafos matemáticos formuladores de mapas que conseguissem aplicar os novos métodos desenvolvidos na França e Inglaterra, e engenheiros capazes de construir fortalezas usadas na defesa do país, daí o nome fortificações (VALENTE, 2007, p. 46). Mais tarde, o desenho geométrico, foi introduzido na escola para que os alunos pudessem estabelecer conceitos que partiam da prática até os axiomas. Estes posteriormente poderiam ser provados pela prática construtiva e assim geravam um novo ciclo de pesquisa. Assim, desenho geométrico até meados de 1950 era considerado como “disciplina escolar no currículo brasileiro. Pode-se inferir, inclusive, que as décadas de 1930 a 1950 constituíram os anos de ouro dessa disciplina em nosso país, dada sua visibilidade em meio aos documentos educacionais oficiais" (MACHADO, 2012, p.68).

Hoje, os métodos de resolução são poucos utilizados nos livros de matemática. Temos poucas escolas que mantém em seu currículo. E alguns professores não utilizam as construções antes de inserir os conceitos, as teorias ou teoremas na geometria. Porém algumas escolas ainda:

> [...] mantêm a disciplina Desenho Geométrico; escolas que tratam das construções geométricas dentro da disciplina de Artes; escolas que não possuem a disciplina Desenho Geométrico em suas grades curriculares e não abordam as construções geométricas em nenhum momento, nem mesmo dentro do conteúdo de Geometria, desenvolvido em Matemática; e, uma outra classe de escolas que trazem a disciplina em questão em sua grade curricular, mas o conteúdo não é cumprido, sendo estas aulas preenchidas com o conteúdo de Matemática, sem nem sequer se mencionarem as construções geométricas (ZUIN, 2001, p.99).

É importante que o aluno tenha acesso a disciplina "Desenho Geométrico" por ser de grande utilidade ao desenvolvimento técnico científico do aluno além de desenvolver a criatividade ao buscar soluções. Entre outras habilidades, a construção desenvolve também a precisão, o raciocínio lógico, a organização matemática e atribuem autonomia e sensibilidade na observação da geometria na natureza (JORGE, 1998 apud costa p.2).

2.3 CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A parte da matemática que mais relaciona o estudo com a realidade é a geometria. Assim, esta área estimula a criatividade e o conhecimento científico de forma a tentar observar e tentar transformar o mundo a sua volta. Mas devemos ir além do ensino de propriedades fórmulas e teoremas, sendo necessário a observação dos elementos que se relacionam a prática e que levem o aluno a produzir novos conhecimentos. (CASTRO, 2018 p.11). Assim estes problemas de construção geométrica tornam-se cada vez mais necessários ao estudante, pois:

> Os problemas de construção geométricas são motivadores, às vezes intrigantes e frequentemente conduzem à descoberta de novas propriedades. São educativos no sentido que em cada um é necessária uma análise da situação onde se faz o planejamento da construção, seguindo-se a execução dessa construção, a posterior conclusão sobre o número de soluções distintas e também sobre a compatibilidade dos dados. (WAGNER, 2007, p.5).

Segundo França (2018, p.21), ao realizarmos construções geométricas estamos trabalhando com precisão, sendo necessário atenção e paciência, desenvolvendo assim as habilidades psicomotoras e a lateralidade de forma ao Jovem poder se localizar no espaço. O desenho geométrico também nos ensina como trabalhar a linguagem gráfica, universal para que o pesquisador possa trabalhar de forma culta e científica. A resolução por construção é envolve o estudante e aumenta seus conhecimentos pois:

> Quando o estudante encara o desafio de realizar alguma construção, antes mesmo de iniciar ele imagina diversas possibilidades, diversos caminhos são criados na mente até o início, quando inicia a construção, ele explora diversos caminhos são criados na mente até o início, quando inicia a construção, ele explora diversas alternativas até concretizá-la, sendo assim um processo com grande poder de enriquecer o desenvolvimento criativo. (FRANÇA, 2018 p.22).

Por isso, é necessário que as construções sejam mantidas junto aos conteúdos geométricos, como está ocorrendo no curso do PROFMAT, onde existe a disciplina de Desenho Geométrico como optativa. Também temos a disciplina MA-13 que veio abordando a geometria plana em conjunto com as construções geométricas de forma a relacionar as definições com a sua devida visualização feita pelo próprio aluno com régua e compasso.

2.4 OS 3 PROBLEMAS CLÁSSICOS DE CONSTRUÇÃO

Na Grécia existiam três problemas que pediam uma construção com régua e compasso, aparentemente fácil, mais que não foi encontrada a solução com a geometria euclidiana. Segundo Batista (2018 p.29), os problemas são os seguintes:

1- Duplicar o volume do cubo.

2- Trissecção do ângulo.

3- A quadratura do círculo.

O primeiro encontra uma dificuldade que aparentemente inexistiria. Pois segundo a lenda, após surgir uma praga em Atenas na Grécia antiga (430 a.C), povo foi buscar por solução. Surgiu a ideia de agradar ao Deus Apolo, que ordenou que fosse duplicado o seu altar que tinha formato cúbico de lado l. Nisso os gregos dobraram as medidas de tamanho do altar, e este aumentou em 8 vezes o seu volume. Como a exigência não foi atendida, Apolo ficou insatisfeito e a praga perdurou. Esta medida encontra dificuldade até hoje na sua resolução, pois deve ser usado como medida, uma nova aresta que meça $l\sqrt[3]{2}$.

O segundo exige que venhamos a dividir o ângulo em 3 partes iguais. Surgiu quando os egípcios queriam medir ângulos estelares, tempo ou trisseccionar 60º. Porém, hoje temos um método que dá um valor aproximado da trissecção do ângulo. (Veja os passos em como Dividir um Ângulo em Três Partes Iguais com Régua e Compasso, publicado por Kleber Kilhian em

12/08/2011. Disponível em: URL: https://www.obaricentrodamente .com/2011/08/como-dividir-um-angulo-em-tres-partes).

O terceiro pede para determinar um quadrado que tivesse a mesma área do círculo de raio r. Tentaram resolvê-lo por muitos anos, desde 1800 a. C passando pelos gregos, até hoje. O maior desafio deste, é encontrar um lado de tamanho $r\sqrt{\pi}$.

Devido à dificuldade em resolver esses problemas com régua e compasso, aumentou a atenção de muitos curiosos e estudiosos que ao ser atraídos para os problemas conseguiam fazer outras descobertas impressionantes (BATISTA, 2018 p.35).

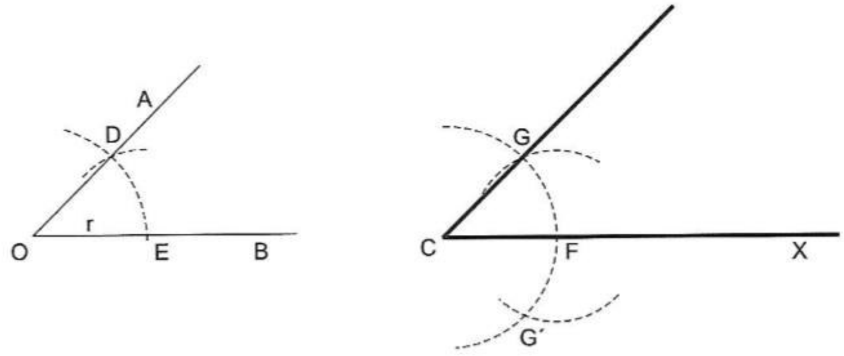
2.5 ALGUMAS CONSTRUÇÔES GEOMÉTRICAS BÁSICAS

Antes de falarmos sobre a aplicação das construções geométricas na resolução de problemas, veremos de maneira breve, alguns meios de construção que foram selecionados para poder contribuir no entendimento quando formos dissertar sobre alguns problemas que foram utilizados nas provas do ENA e ENQ. Estas construções são baseadas no método Euclidiano que foi citado por Batista (2018) e, também constam em Muniz Neto (2012).

Transporte de ângulos: Consiste em construir um ângulo congruente a um ângulo dado, em um dos semiplanos determinado pela reta que contém tal semirreta, e tendo esta semirreta como um de seus lados.

Centra-se o compasso no vértice do ângulo AOB a ser transportado e, com um raio arbitrário descreve-se um arco que corta os dois lados do ângulo, gerando os pontos D e E. Em seguida, traça-se uma semirreta CX como lado do ângulo a ser construído. Com a mesma abertura do compasso e centro no ponto C, descreve-se um arco, igual ao primeiro e que corta o lado já traçado, definindo um ponto F que corresponde ao ponto E do primeiro ângulo. Retornando ao ângulo AOB e mede uma abertura no compasso correspondente a distância entre os pontos D e E. Aplica-se esta distância na construção do segundo ângulo a partir do ponto F, definindo o ponto G correspondente ao ponto D. Por fim, será traçada uma semirreta de origem passando por G. Daí, teremos o ângulo AOB congruente ao angulo GCF.

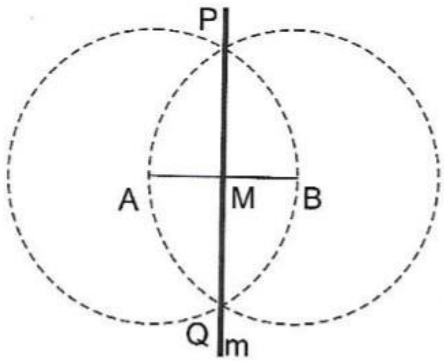
Figura 2: Transporte de ângulos.



Fonte: Batista (2018, p.12).

Mediatriz de um segmento: Com a ponta seca do compasso no ponto A, abra uma medida maior que a metade do segmento AB e trace um arco que corte o segmento. Repita o processo, mas agora pelo ponto B, utilizando a mesma medida no compasso. Trace a mediatriz m unindo as intersecções dos dois arcos, ou seja, unindo o ponto P e Q. Observe que o quadrilátero AQBP é um losango, logo suas diagonais são perpendiculares e encontram-se no seu ponto médio M. Assim, a reta m que passa por P e Q é a mediatriz do segmento AB.

Figura 3: Mediatriz de um segmento

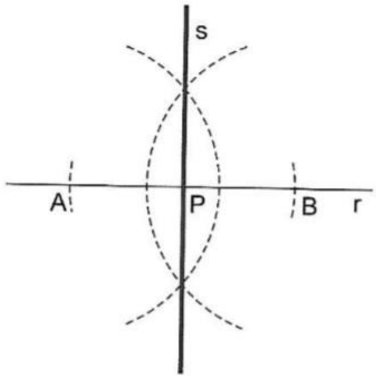


Fonte: (BATISTA, 2018, p.12).

Reta perpendicular a uma reta r dada e um ponto P dado: Temos dois casos a considerar:

Caso 1: Tomemos P pertencente a r. Com o compasso centrado em P e um raio r arbitrário, trace uma circunferência e na intersecção entre a circunferência e a reta marque os pontos A e B, determinando assim um segmento AB, o qual P é o ponto médio. A partir dos pontos A e B trace a mediatriz passando por P. Esta é a reta procurada.

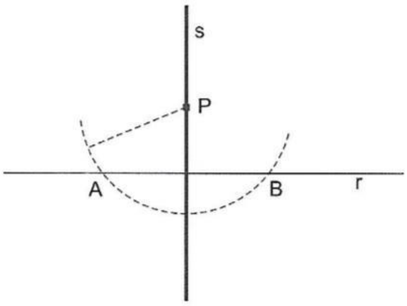
Figura 4:Reta s perpendicular à reta r com P pertencente a r.



Fonte: (BATISTA, 2018, p.13)

Caso 2: Tomemos P não pertencente a r. (Semelhante a baixar uma altura). Sobre uma reta r marque um ponto A. Com o compasso centrado em P e abertura igual a PA trace uma circunferência e na intersecção da circunferência com a reta r assinale o ponto B. A reta s procurada será a mediatriz do segmento AB.

Figura 5: Reta s perpendicular a uma reta passando por P



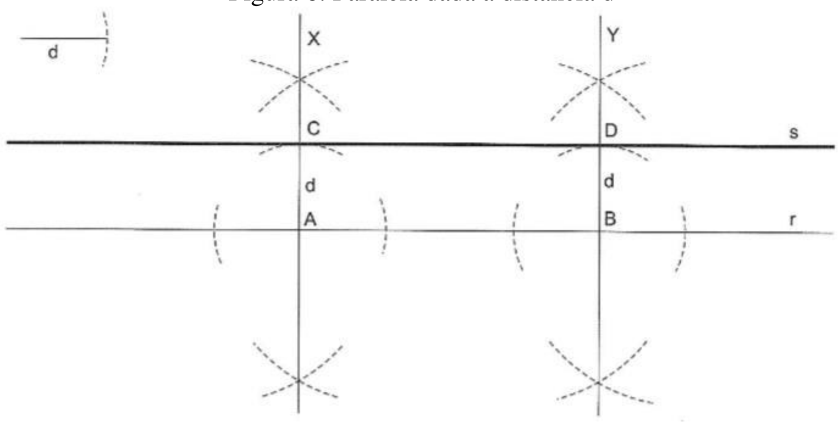
Fonte: (BATISTA, 2018, p.13).

Retas paralelas. Para traçar uma reta paralela a uma reta dada, também temos dois casos a analisar:

Caso 1: É dada a distância d entre as duas retas. Por dois pontos A e B trace duas retas perpendiculares à reta r, as quais serão chamadas de AX e BY. Transporte a medida d a partir de A e B sobre as semirretas AX e BY, obtendo os pontos C e D, respectivamente, à distância d de r.

Observe que, o quadrilátero ABCD é um paralelogramo pois seus lados AC e BD são paralelos e congruentes, logo as retas R e S são paralelas.

Figura 6: Paralela dada a distância d

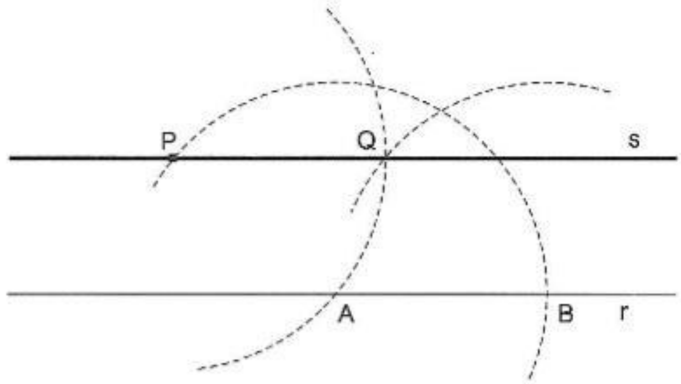


Fonte: BATISTA,2018, P.13)

Caso 2: É dado um ponto P pertencente à reta procurada.

Centre o compasso em P e trace um arco que encontre r no ponto A. Com centro em A e mesmo raio, trace outro arco que encontrará r no ponto B. Com centro em B e mesmo raio, trace outro arco que encontrará o primeiro arco no ponto Q.

Figura 7: Reta Paralela dado um ponto P



Fonte: (BATISTA, 2018, P.14

A reta PQ é paralela à reta r, pois o quadrilátero ABQP tem os quatro lados congruentes sendo, portanto, um paralelogramo.

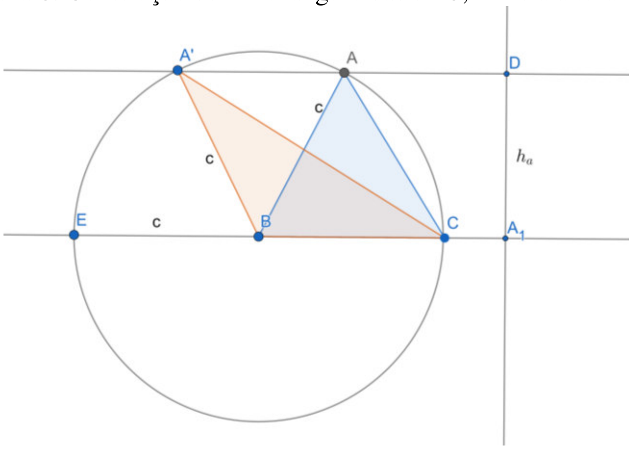
2.5.1 Construir Triângulo ABC

(Questão 3.6, Geometria de Antônio Caminha Neto) Construa com régua e compasso, o triângulo ABC, conhecidos os comprimentos $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e h_a da altura baixada a partir de A.

Solução: Construa o segmento $\overline{BC} = a$ e trace uma reta r paralela a $\overline{BC}$, sendo que r tem distância h_a de $\overline{BC}$. Trace um círculo C de centro em B e raio $\overline{AB} = c$.

Marque o ponto A de intersecção com a reta r. O Triângulo ABC e $A'BC$ atendem ao enunciado.

Figura 8: Construção de um triângulo dada BC, BA e a altura ha. I



Fonte: Autoria Própria

Nesta questão convém responder a dúvida que surgiu ao construir, quando surgir 2 triângulos não congruentes. Quando isto ocorre?

Quando temos $c > h_a$ temos 2 soluções.

Quando temos $c = h_a$ temos 1 solução. O triângulo e retângulo.

Quando temos $c < h_a$ não há solução.

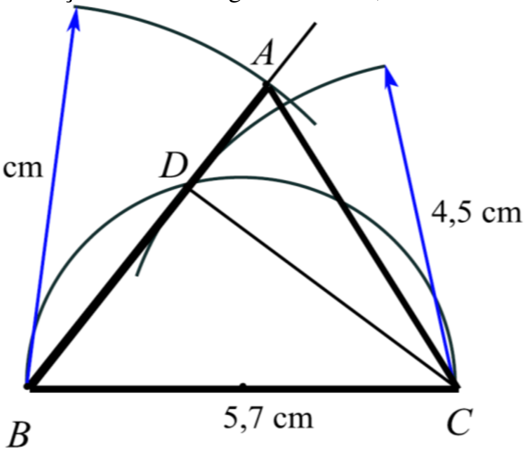
A questão acima é semelhante ao problema 13 da página 31, do livro "Uma Introdução as construções Geométricas" de Edward Wagner, mas que possuem uma pequena diferença e por isso, foram resolvidos por seus autores de modos diferentes. Compare a questão acima com a que segue:

(Problema 13) Construir o triângulo ABC conhecendo os lados $AB = 5{,}2$ cm, $BC = 5{,}7$ cm e a altura relativa ao lado AB, $h = 4{,}5$ cm (WAGNER, 2007).

Solução:

Faça um desenho imaginando o problema resolvido e seja $CD = h$ a altura relativa ao lado AB. Como o ângulo $B\widehat{D}C$ é reto, o ponto D pertence ao arco capaz de 90° construído sobre BC. Como CD é conhecido, determinamos o ponto D. Sobre a reta BD determinamos o ponto A e o problema está resolvido.

Figura 9: Construção de um triângulo dada BC, BA e a altura ha. II.



Fonte: (WAGNER, 2007)

2.5.2 Uso de fórmulas em problemas

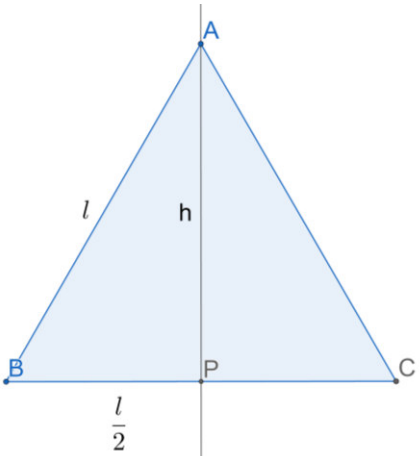
Em questões dissertativas, é necessário e "suficiente" provar que a descoberta levou realmente a uma resolução correta. Um estudante pesquisador deve ir além e testar a solução em outros problemas de forma a conseguir dominar o método adequando-o a cada problema ou incrementando dados e meios a cada novo nível de resolução.

> Ele já ficara convicto da fórmula estar certa porque a deduzira cuidadosamente. Mas agora está ainda mais convencido disso e o aumento da confiança provém de outra fonte: deve-se a uma espécie de "prova experimental". Então, graças às indagações precedentes, os detalhes da fórmula adquirem um novo significado e ficam ligados a vários factos. A fórmula tem, portanto, melhor probabilidade de ficar lembrada, o conhecimento do estudante consolida-se. Finalmente, as indagações podem facilmente ser transferidas para problemas semelhantes. Após algumas experiências com problemas semelhantes, um estudante inteligente poderá perceber as ideias básicas gerais: a utilização dos dados relevantes, a variação dos dados, a simetria, a analogia. Se ele adquirir o hábito de dirigir a sua atenção para estes pontos, a sua capacidade de resolver problemas poderá definitivamente melhorar. (POLYA, 1995, p.12).

Tendo domínio da fórmula encontrada, será quase intuitivo o uso em problemas que peçam o uso da mesma, como pode ser visto abaixo a fórmula que representa a altura h do triângulo equilátero de lado l. Ela pode ser encontrada utilizando a seguinte construção:

Construa o triângulo equilátero. Baixe a perpendicular a BC passando por A. Marque o ponto P pertencente a BC. Agora acharemos a altura $h = \overline{AP}$. Por construção obtivemos dois triângulos retângulos iguais. Usando Pitágoras em um desses triângulos temos:

Figura 10:Medidas no triângulo equilátero



Fonte: Autoria Própria

$$h^2 = l^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow$$

$$h^2 = \frac{4l^2}{4} + \frac{l^2}{4} \ \rightarrow \ h^2 = \frac{3l^2}{4} \ \rightarrow \ h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Agora tendo encontrado uma fórmula em função do lado do triângulo equilátero podemos aproveitar em problemas que peçam simplesmente sua aplicação ou que tenham enunciado parecido.

2.6 TEOREMA DE PITÁGORAS

Conhecido pelo seu enunciado, “A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa” ou por sua fórmula $c^2 + b^2 = a^2$, este teorema, tem solução fascinante, além de ser muito importante e usual na matemática. Leva o nome de seu dito criador “Pitágoras” (569 – 480 a.C.).

> Temos provas concretas que os babilônios antigos conheciam o Teorema de Pitágoras. Muitos tabletes de barro datados do período de 1800 a 1600 a.C. foram encontrados, decifrados e hoje se encontram em diversos museus. Um deles, chamado Plimpton 322 está na Universidade de Columbia e o fragmento que foi preservado mostra uma tabela de 15 linhas e 3 colunas de números. Os pesquisadores descobriram que esta tabela continha ternos pitagóricos, ou seja, lados de um triângulo retângulo. Como o que restou é apenas um pedaço de um tablete, que deveria fazer parte de um conjunto de tabletes, não se sabe como esses números foram encontrados. Mas uma pista, que os babilônios conheciam alguma forma de encontrar esses números, está em um tablete guardado hoje no Museu Britânico. Nesse tablete está escrito o seguinte: 4 é o comprimento 5 é a diagonal. Qual é a altura? 4 vezes 4 dá 16. 5 vezes 5 dá 25. Tirando 16 de 25 o resto é 9. Quantas vezes quanto devo tomar para ter 9? 3 vezes 3 dá 9. 3 é a altura. (WAGNER, 2005, p. 2)

Pitágoras, fez várias viagens ao Egito, Índia, Babilônia entre outros onde adquiriu vários conhecimentos. Nascido em Samos, uma ilha próxima a Mileto, local de nascimento de Tales. A partir destes dois grandes nomes foram divulgados a matemática como ciência.

Após viajar por várias cidades, ele voltou à região da Grécia e assim Pitágoras deu início a uma comunidade oculta que se dedicavam aos estudos da Filosofia e Matemática. Alguns estudiosos chamavam essa comunidade de Escola Pitagórica. Devido à falta de Preservação naquela época, não existem documentos que comprovem que realmente Pitágoras foi o criador do seu Famoso Teorema nem qual a demonstração original pois, naquele tempo, era costume dar o crédito ao mestre.

> O Teorema de Pitágoras, é um dos teoremas mais utilizados em toda a matemática, sendo a mais popular e imprescindível ferramenta nas resoluções de problemas, [...]. Para alguns historiadores, Pitágoras nunca existiu; Já para outros, foi um nome atribuído a um grupo de gregos e para uma terceira corrente de historiadores, o matemático e filósofo de fato existiu, embora nenhum registro sobre a sua vida ou seus trabalhos tenham chegado até os dias atuais. Contudo, apesar de toda a mística que envolve a sua existência ou não que se perpetua ainda hoje é inegável a contribuição da matemática pitagórica para as ciências até os dias atuais. (ALVES, 2019, p. 21).

Somente o matemático americano E. S. Loomis (1940) publicou 370 demonstrações deste Teorema. Entre centenas de demonstrações, alguns pesquisadores acreditam que a demonstração original foi feita usando áreas, que segue abaixo. Esta é a demonstração mais antiga, que se tem registro. Ela aparece no livro de Euclides (Os Elementos, século 3 a.C.)

Para a prova formal, precisamos de quatro lemas elementares:

1. Se dois triângulos tiverem dois lados de um igual a dois lados do outro, cada um para cada um e os ângulos incluídos por esses lados iguais, então os triângulos são congruentes (caso LAL).

2. A área de um triângulo é metade da área de qualquer paralelogramo na mesma base e tendo a mesma altitude.

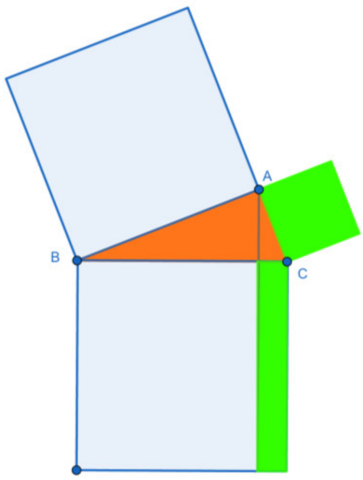
3. A área de um retângulo é igual ao produto de dois lados adjacentes.

4. A área de um quadrado é igual ao produto de dois dos seus lados.

Em seguida, cada quadrado superior é relacionado a um triângulo congruente com outro triângulo relacionado a um dos dois retângulos que compõem o quadrado inferior.

Prova: Deixe o ACB ser um triângulo retângulo com CAB de ângulo reto. Em cada um dos lados BC, AB e CA, os quadrados são desenhados, $CBDE$, $BAGF$ e $ACIH$, nessa ordem. A construção de quadrados requer os teoremas imediatamente precedentes em Euclides e depende do postulado paralelo. De A, desenhe uma linha paralela a BD e CE. Ele irá intersectar normalmente BC e DE em K e L, respectivamente.

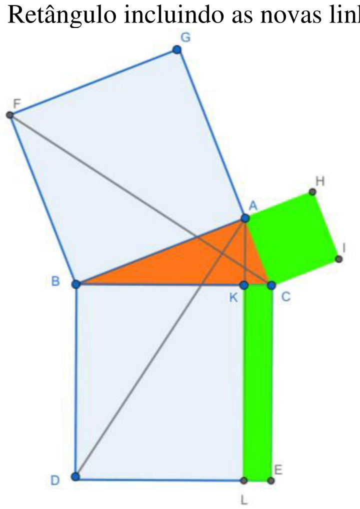
Figura 11: Prova de Euclides Elements



Fonte: Autoria Própria

Junte-se a CF e AD, para formar os triângulos BCF e BDA.

Figura 12: Retângulo incluindo as novas linhas I

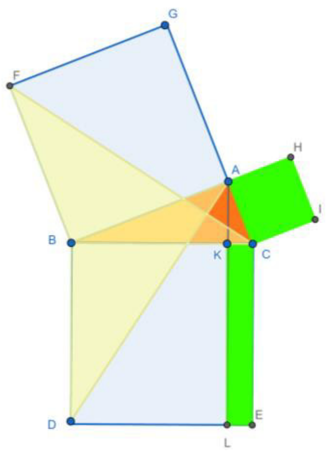


Fonte: Autoria Própria

Ângulos CAB e BAG são ambos ângulos retos; portanto, C, A e G são colineares. Similarmente para B, A e H. Os ângulos CBD e FBA são ambos ângulos retos; portanto, o ângulo ABD é igual ao ângulo FBC, pois ambos são a soma de um ângulo reto e ângulo ABC. Como AB é igual a FB e BD é igual a BC, o triângulo ABD deve ser congruente ao triângulo FBC. Como AKL é uma linha reta, paralela a BD, então o retângulo $BDLK$ tem duas vezes a área do triângulo ABD porque compartilham a base BD e têm a mesma altitude BK, ou seja, uma linha normal à sua base comum, conectando as linhas paralelas BD e AL (lema 2). Como C é colinear com A e G, o quadrado $BAGF$ deve ser duas vezes na área para o triângulo FBC.

Portanto, o retângulo $BDLK$ deve ter a mesma área que o quadrado $BAGF = AB^2$. Da mesma forma, pode ser mostrado que o retângulo $CKLE$ deve ter a mesma área que o quadrado $ACIH = AC^2$. Adicionando estes dois resultados, $AB^2 + AC^2 = BD \cdot BK + KL \cdot KC$. Como $BD = KL$, então $BD \cdot BK + KL \cdot KC = BD \cdot (BK + KC) = BD \times BC$.

Figura 13: Retângulo incluindo as novas linhas II



Fonte: Autoria Própria

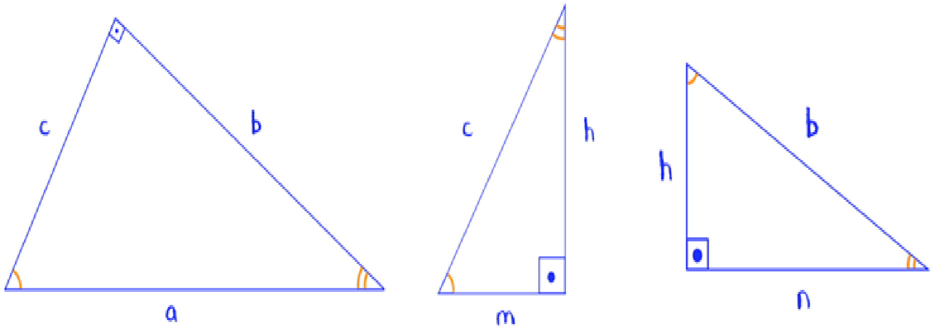
Mostrando os dois triângulos congruentes de metade da área do retângulo BDLK e quadrado $BAGF$. Portanto, AB^2 + AC ^{2} = BC ^{2} , uma vez que o CBDE é um quadrado.

Observa-se que no problema exposto por Polya página 8, foi resolvido com ajuda de um problema correlato onde foi inserida a construção de um triângulo retângulo dentro do Poliedro usando a diagonal da face e encontrando a sua medida por meio do teorema de Pitágoras. Este modelo de construção para resolução também foi utilizado nas questões do ENA como pode ser visto abaixo.

2.7 RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Tomando como referência o triângulo ABC e os outros dois triângulos criados a partir da altura baixada do ângulo reto, representados na imagem abaixo, a semelhança entre eles para encontrar algumas relações métricas no triângulo retângulo.

Figura 14: Triângulos retângulos semelhantes



Fonte: Site "Professor Ferreto"

"Vamos ver primeiro as semelhanças entre o 1º e o 2º triângulo. Por exemplo, ao pegarmos o lado *a* do 1º triângulo, ou seja, a hipotenusa, verificamos que ele está para o lado *c* do 2º triângulo, que é a hipotenusa também, e por isso estes dois lados são homólogos. E se pegarmos o cateto *b*, do 1º triângulo, veja que no 2º triângulo ele está para o cateto *h*, já que ambos se encontram entre o ângulo reto e o ângulo 2 linhas. Como chegamos em uma igualdade de frações, podemos multiplicar cruzado e teremos a primeira relação métrica dos triângulos retângulos:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \rightarrow a \cdot h = b \cdot c \qquad (1)$$

Poderiamos ter encontrado a ultima implicação acima usando a definição base vezes altura para encontrar a área no triângulo de duas formas e depois igualando.

Podemos encontrar mais três relações métricas fazendo comparações semelhantes entre o 2º triângulo e o 3º triângulo, novamente entre o 1º e o 2º, e por fim também entre o 1º e o 3º triângulo, todas apresentadas nas equações abaixo e seguidas do seu enunciado (site: Professor Ferreto site: https://www.professorferretto.com.br/relacoes-metricas-no-triangulo-retangulo)".

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \rightarrow h^2 = m \cdot n \qquad (2)$$

O quadrado da altura é igual ao produto das projeções.

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \rightarrow c^2 = a \cdot m \qquad (3)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \rightarrow b^2 = a \cdot n \qquad (4)$$

O quadrado do cateto é igual a sua projeção vezes a hipotenusa.

Somando as relações (3) e (4) acima, obtemos de modo mais prático e ágil o teorema de Pitágoras.

$$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n = a \cdot (m + n) = a \cdot a \rightarrow$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

2.8 LUGARES GEOMÉTRICOS

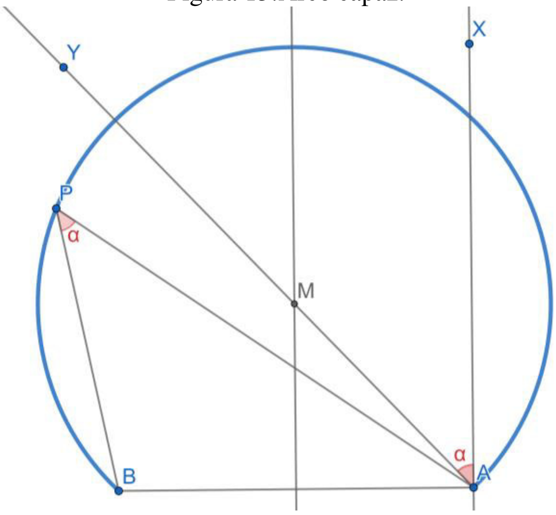
Na construção em que o leitor verifica que “falta uma informação” usa-se o lugar geométrico para definir a região que teremos a possível solução. Um Lugar geométrico pode ter um ponto, uma quantidade limitada de soluções, infinitas soluções ou até nenhuma solução. Lugar geométrico tem a seguinte definição: (MUNIZ NETO, 2012).

> Dada uma propriedade P relativa a pontos do plano, o lugar geométrico (abreviamos LG) dos pontos que possuem a propriedade P é o subconjunto L do plano que satisfaz as duas condições a seguir:
> a) Todo ponto de L possui a propriedade P.
> b) Todo ponto do plano que possui a propriedade P pertence a L.
> Em outras palavras, L é o LG da propriedade P se L for constituído exatamente pelos pontos do plano que têm a propriedade P, nem mais nem menos.

2.9 ARCO CAPAZ

Um dos mais conhecidos e usuais lugares geométricos é o “Arco Capaz”. Este “é o lugar geométrico de todos os pontos P tais que, dada a corda AB, o ângulo APB é igual a um certo ângulo dado”. pode ser construído da seguinte forma:

Figura 15:Arco capaz.



Fonte: Autoria Própria

Construa o segmento AB.

Trace AX perpendicular a AB.

Construa entre XAB o ângulo $XAY = \alpha$, tomando A como o vértice.

Trace a mediatriz de AB.

Marque M o ponto de intersecção de AY com a Mediatriz AB.

Construa o arco circular de centro M e raio AM.

Este é o arco capaz, pois temos $AMB = 2\alpha$, então qualquer que seja o ponto P no arco construído teremos o ângulo $APB = \alpha$.

2.10 MÉTODO DA OBSERVAÇÃO.

Para a resolução de problemas, Polya (1995) mostra o método do diálogo entre professor e aluno, que consiste na busca de meios já conhecidos anteriormente pelo educando, de forma que o docente faça uma intervenção indireta, com uso de perguntas que analisam o que conseguimos compreender do problema (dados e inferências) e os conhecimentos já adquiridos que possam vir a auxiliar na resolução.

A cada resposta é feita uma análise se esta análise direcionou a um novo caminho que o coloca mais próximo da resposta alvejada. Assim teremos a busca por resposta satisfeita de forma que o aluno use a solução em problemas futuros. Do método de questionamento de

Polya (1995), tem alguns questionamentos importantes. Do problema: “Calcular a diagonal de um paralelepípedo retângulo do qual são conhecidos o comprimento, a largura e a altura”, segue o questionário feito por Polya (1995):

> O diálogo entre o professor e seus alunos pode principiar da seguinte maneira: - Qual é a incógnita? Quais são os dados? Adote uma notação adequada. Qual a letra que deve denotar a incógnita? Quais as letras que escolheria para o comprimento, a largura e a altura? Qual é a condicionante que relaciona a, b e c com x? Trata-se de um problema razoável? Ou seja, a condicionante é suficiente para determinar a incógnita? (POLYA, 1995, p. 77).

Logo em seguida é feita uma análise a respeito de problemas correlatos usando como base conhecimentos adquiridos anteriormente pelos alunos: “O aluno conseguiu, afinal, ter a ideia da resolução. Ele percebe o triângulo do qual a incógnita x é a hipotenusa e a altura dada c é um dos catetos; o outro cateto é a diagonal de uma face.” (POLYA, 1995, p.77)

Usaremos este método como base para a resolução do problema a seguir adotando as adequações didáticas-geométricas necessárias.

3 METODOLOGIA

Este trabalho foi feito de forma exploratória e descritiva. A pesquisa ocorreu por meio de leituras em sites, dissertações relacionadas ao assunto e livros. Estes sites e dissertações, descrevem os passos para se chegar a resolução de problemas, história da geometria, algumas construções geométricas entre outros. Descritiva quando foi relacionado as questões do exame do ENA e ENQ com as formas de resolução que envolvem construção geométrica.

O desenvolvimento deste trabalho iniciou-se após uma percepção feita na disciplina de MA 13 do PROFMAT da quão importância das construções geométricas nas resoluções de problemas, principalmente nas avaliações dos exames de acesso e de qualificação do mestrado profissional de matemática em rede, ao longo dos anos 2016 a 2019, baseado nas seguintes observações:

Foi feita uma busca de dados no banco da SBM, com análise minuciosa das questões de geometria que foram resolvidas através do método de construções geométricas no ENA e ENQ nesse período.

Após essa análise foi feito uma tabulação dos dados encontrados e forma exibidos os resultados obtidos através do levantamento nos exames já citados por meio de gráficos.

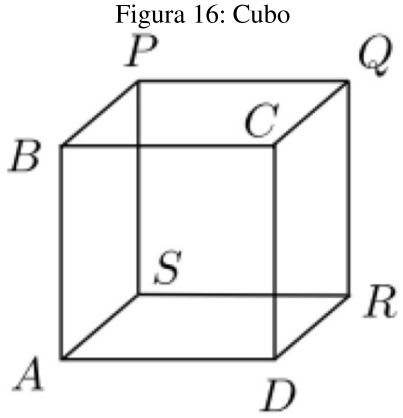
4 ANÁLISE

4.1 ANÁLISE DAS QUESTÕES DO ENA E DO ENQ

ENA 2017

(Questão 06) – A seguinte figura mostra um cubo.

Figura 16: Cubo



Fonte: ENA – 2017

O número de triângulos equiláteros que podem ser formados cujos vértices coincidam com os do cubo é:

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 12 (E) 24

Iremos apresentar o questionamento do docente com o discente com a intenção de criarmos uma estratégia de resolução, iniciando da seguinte forma:

- O que se pede?

O número de triângulos equiláteros.

- Como é formado um triângulo equilátero?

Com 3 segmentos iguais.

- O que temos?

Os 8 vértices do cubo.

- De que forma os vértices do cubo podem formar segmentos?

Podem formar segmentos representando, no cubo, a diagonal da face, uma aresta ou diagonal do cubo.

- Quais destas representações podem se relacionar para formar um triângulo equilátero?

Somente a diagonal das faces.

- Pode exemplificar quais triângulos posso formar de um vértice?

Note que de cada vértice é possível formar três triângulos distintos, por exemplo, com o vértice A formamos os triângulos ACP, ACR e APR.

- O problema mostra ter solução? A condicionante nos permite resolver o problema?

- Sim, aparenta não ser difícil de solucionar.

- Agora, o próximo passo é executar os procedimentos Planejados. Quantos triângulos podemos ter?

- Dados os 8 vértices do triângulo podemos formar 24 triângulos equiláteros.

- Algum triângulo foi contado mais de uma vez?

- Sim, ao contarmos quantas diagonais das faces saem de um mesmo vértice, contamos como se fossem as bases de triângulos distintos. observe que o triângulo equilátero BDQ com base BD é o mesmo com base DQ e QB.

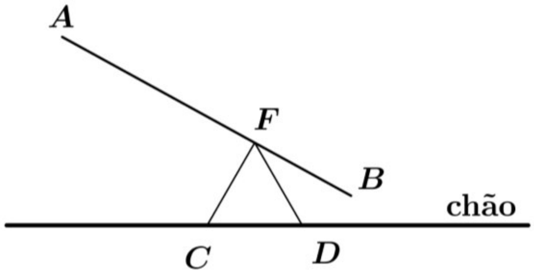
- O que pode ser feito para resolver este excesso?

- Basta dividir a quantidade encontrada por 3. Assim, chegamos ao resultado. Temos 8 triângulos equiláteros distintos que seus vértices coincidam com os vértices do cubo.

(Questão 07) A figura esquematiza o perfil de uma máquina simples, conhecida como alavanca. O triângulo equilátero CDF do esquema tem lados de medida $\sqrt{3}$ metros, estando o lado CD em contato com o chão horizontal. O segmento AB representa uma haste rígida e retilínea, de comprimento 6 metros, que gira em torno do ponto

fixo F, sendo $\overline{BF} = 2\ m$.

Figura 17:Alavanca.



Fonte: ENA – 2017

Quando A tocar o chão, a altura de B, em metros, em relação ao chão será

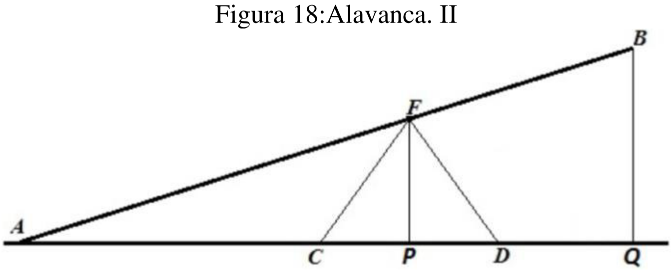
(A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\frac{9}{4}$ (E) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Solução

Resposta: D

A figura abaixo mostra a situação do problema, onde P e Q são, respectivamente, as projeções de F e B sobre o chão horizontal.

Figura 18:Alavanca. II



Fonte: ENA – 2017

Como todos os pontos são coplanares, inclusive P e Q, então FP é a altura do triângulo equilátero CDF. Sendo $l = \sqrt{3}$ metros o lado desse triângulo, então:

$$\overline{FP} = \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} m = \frac{3}{2} m$$

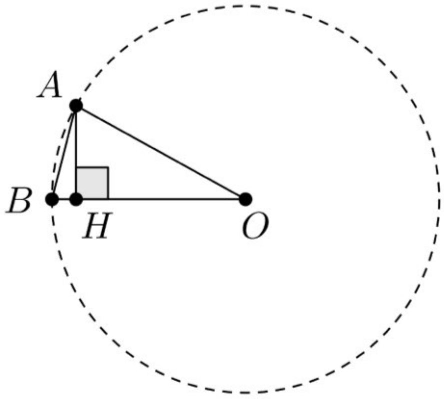
Como $A\hat{P}F = A\hat{Q}B = 90°$ e $P\hat{A}F = Q\hat{A}B$ (ângulo comum), então os triângulos AFP e ABQ são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo. Disso e sabendo-se que $\overline{AF} = \overline{AB} - \overline{FB} \; = \; 4$ metros, tem-se:

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{FP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} \rightarrow \frac{\overline{BQ}}{\frac{3}{2}} = \frac{6}{4},$$

donde conclui-se que a altura do ponto B em relação ao chão é $\overline{BQ} = \frac{9}{4}\,m$.

(Questão 15) – Na figura, a corda AB tem medida 5 e o raio OA mede 10.

Figura 19: Corda de um círculo. I



Fonte: ENA 2017

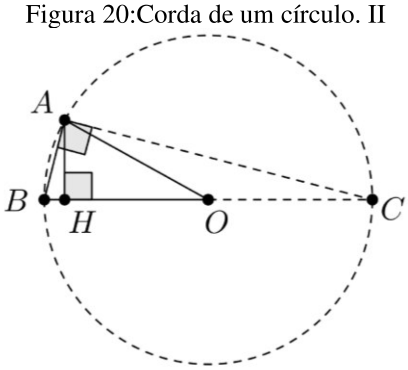
A medida do segmento AH, perpendicular ao raio OB, é igual a

(A) $\frac{5\sqrt{15}}{5}$ (B) 5 (C) $5\sqrt{3}$ (D) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

Resposta: A

Solução

Figura 20:Corda de um círculo. II



Fonte: ENA – 2017

Traçando o diâmetro BC e a corda AC da figura, o triângulo ABC será retângulo em A, pois o ângulo $B\hat{A}C$ determina um arco de 180°.

Chamando de y a medida de AC, como $BC = 20$ pelo Teorema de Pitágoras,

$$y^2 + 5^2 = 20^2,$$

logo $y^2 = 375$, e então $y = 5\sqrt{15}$.

Temos ainda, pela semelhança dos triângulos ABH e ABC, que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$, logo

$$5 \cdot 5\sqrt{15} = 20\overline{AH}$$

E com, isso

$$AH = \frac{25\sqrt{15}}{20} = \frac{5\sqrt{15}}{4}.$$

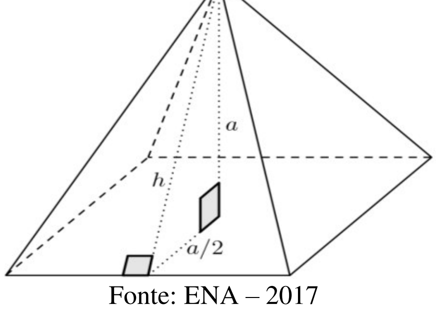
(Questão 24) – As quatro faces triangulares de uma pirâmide de base quadrada são congruentes, e a altura desta pirâmide é igual à medida das arestas da base. A razão entre a área lateral total e a área da base é:

(A) 2 (B) $\sqrt{5}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{2}$ (E) 1

Resposta: B

Solução:

Figura 21: Pirâmide de base quadrangular



Fonte: ENA – 2017

Na figura, está representado o triângulo retângulo formado pela altura da pirâmide, pelo apótema da base e pela altura de uma das faces (também chamado de apótema da pirâmide).

Sendo a a medida das arestas da base (o lado do quadrado) e h a altura de uma das faces laterais, o triângulo representado tem hipotenusa h e catetos a e $\frac{a}{2}$.

Assim, pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$h^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow h^2 = \frac{5a^2}{4} \rightarrow h = \frac{a\sqrt{5}}{4}.$$

A área S_l de cada face lateral é dada por

$$S_l = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{5}}{4},$$

portanto, a área lateral total da pirâmide é

$$4S_l = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{5}}{4} = a^2\sqrt{5}$$

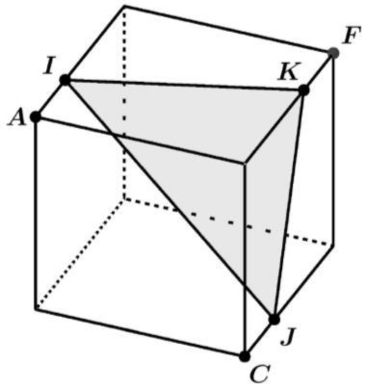
Por outro lado, a área S_b da base é dada por a^2. Sendo assim, a razão $\frac{4S_l}{S_b}$ é igual a

$$\frac{4S_l}{S_b} = \frac{a^2\sqrt{5}}{a^2} = \sqrt{5}.$$

ENA 2018

(Questão 18) – O cubo da figura abaixo tem aresta de medida 3. Se $AI = CJ = FK = 1$, o perímetro do triângulo IJK é

Figura 22: Secção no cubo



Fonte: ENA – 2018

$(A)\ 2\sqrt{10} + 3\sqrt{2}$

$(B)\ 3\sqrt{10}$

$(C)\ 9\sqrt{2}$

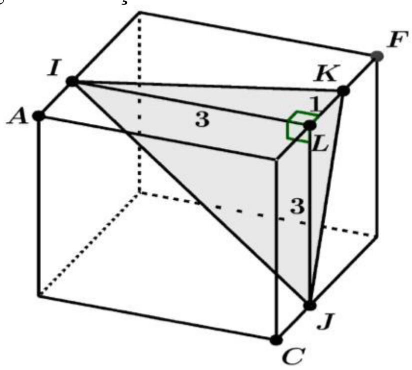
$(D)\ 2\sqrt{13} + 3\sqrt{2}$

$(E)\ 2\sqrt{10} - 3\sqrt{2}$

Resposta: A

Solução:

Figura 23:Secção no cubo com novas linhas.



Fonte: ENA 2018

Como $\overline{AI} = \overline{FK} = 1$, marcando o ponto L da figura acima, tal que $\overline{KL} = 1$, os triângulos LIK e LIJ serão retângulos, e tais que

$\overline{IK}^2 = \overline{IL}^2 + \overline{LK}^2 = 3^2 + 1^2 = 10,$

$\overline{IJ}^2 = \overline{IL}^2 + \overline{LJ}^2 = 3^2 + 3^2 = 18,$

Logo

$\overline{IK} = \sqrt{10}$ e $\overline{IJ} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$

Além disso, os triângulos ILK e JLK são congruentes (triângulos retângulos com os mesmos catetos), logo

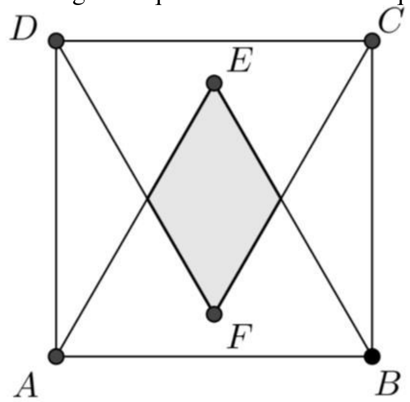
$\overline{JK} = \overline{IK} = \sqrt{10},$

Assim, o perímetro do triângulo IJK é dado por

$$\overline{IK} + \overline{IJ} + \overline{JK} = \sqrt{10} + 3\sqrt{2} + \sqrt{10} = 2\sqrt{10} + 3\sqrt{2}$$

(Questão 27) – Sobre os lados AB e CD de um quadrado $ABCD$, e internamente a ele, são construídos os triângulos equiláteros ABE e CDF, como indicado na figura. Sendo $1cm$ a medida do lado do quadrado, a área do losango destacado na figura é dada por:

Figura 24:Triângulos equiláteros inscritos no quadrado. I



Fonte: ENA – 2018

(A) $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$

(B) $\dfrac{4\sqrt{3}-6}{3}$

(C) $\dfrac{8\sqrt{3}-12}{3}$

(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

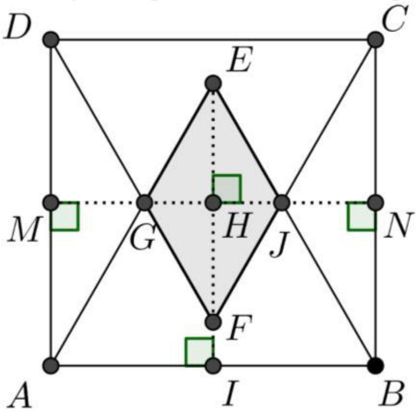
(E) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Resposta: A

Solução:

Considere os pontos M, G, H, J e N da figura abaixo, de forma que M e N são pontos médios dos lados do quadrado sobre os quais estão.

Figura 25:Triângulos equiláteros inscritos no quadrado. II



Fonte: ENA – 2018

O triângulo ADG é isósceles, pois os ângulos $G\hat{A}D = G\widehat{D}A = 30°$. Com isso,

$$\overline{AM} = \frac{\overline{AD}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Com isso $\overline{HI} = \frac{1}{2}$.

Desta forma, como $\overline{EI} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (altura do triângulo equilátero ABE de lados de medida 1), temos

$$\overline{EH} = \overline{EI} - \overline{HI} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

O triângulo EGJ é equilátero, pois o triângulo ABE é equilátero e o lado GJ é paralelo a AB. Assim, EH é altura de um triângulo equilátero de lado GJ e, portanto

$$\overline{EH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{GJ},$$

Logo

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot GJ,$$

e, portanto,

$$\overline{GJ} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}.$$

Assim,

$$área(EGFI) = 2 \cdot área(EGJ)$$

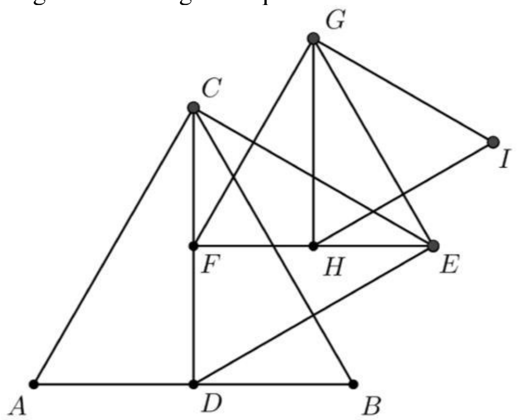
$$= 2 \cdot \frac{\overline{GJ} \cdot \overline{EH}}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = \frac{4-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-3}{3}$$

ENA 2019

(Questão 2) – Na figura, os triângulos ABC, CDE, EFG e GHI são equiláteros, sendo CD uma altura de ABC, EF uma altura de CDE e GH uma altura de EFG. Se $\overline{AB} = 1$, a medida $\overline{GI}$ é igual a:

Figura 26:Triângulos equiláteros consecutivos.



Fonte: ENA 2019

$(A)\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

$(B)\ \frac{3}{4}$

$(C)\ \frac{9}{16}$

$(D)\ \frac{27}{64}$

$(E)\ \frac{3\sqrt{3}}{8}$

Resposta: E

Solução:

Como CD é a altura do triângulo equilátero ABC de lado 1, temos que

$$CD = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Agora EF é a altura do triângulo equilátero CDE de lado $CD = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e assim

$$EF = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Da mesma forma, $\overline{GH}$ é a altura do triângulo equilátero EFG de lado $\overline{EF}$, logo

$$\overline{GH} = d\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{GH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

Logo $GI = GH$ e, portanto,

$$GI = GH = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

ENQ 2016.1

(Questão 02) Dados dois segmentos de medidas distintas a e b, descreva como construir, com régua e compasso, segmentos de medidas $\frac{a+b}{2}$ e $\sqrt{ab}$.

Observação: Considere conhecida a construção de perpendiculares.

Solução:

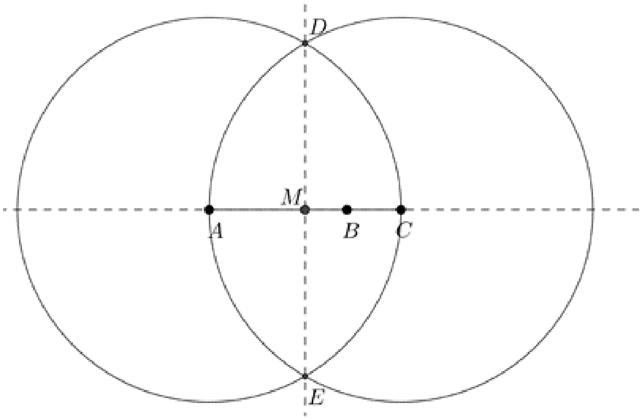
Consideramos três pontos colineares A, B e C, de maneira que B pertença ao segmento AC, $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$.

Construção de $\frac{a+b}{2}$:

Traçamos duas circunferências de raio $a + b$, uma com centro em A e outra com centro em B. Chamamos de D e E os pontos de intersecção entre elas.

Traçamos a reta por D e E.

Figura 27: Construção da média aritmética

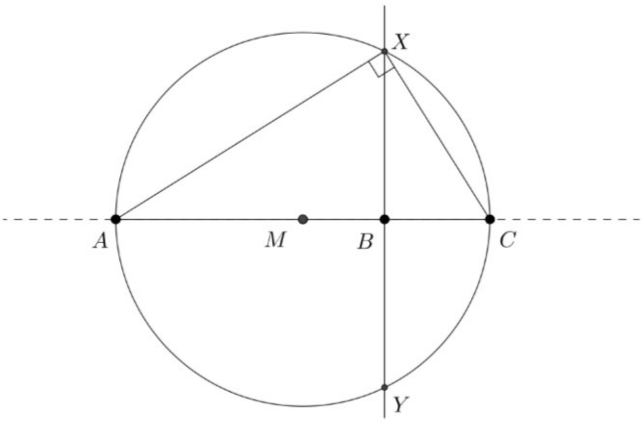


Fonte: ENQ 2016-1

Chamamos de M a intersecção dessa reta com o segmento AC. O segmento AM mede $\frac{a+b}{2}$, uma vez que DM é a altura do triângulo equilátero ACD e portanto é mediana.

Construção de $\sqrt{ab}$:

Figura 28: Construção da média geométrica



Fonte: ENQ – 2016.1

Traçamos uma circunferência de centro no ponto médio M e raio $\frac{a+b}{2}$.

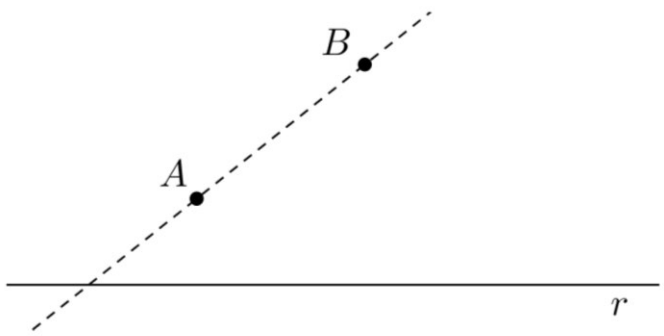
Traçamos uma perpendicular a AC passando por B. Chamamos de X e Y as intersecções dessa perpendicular com a circunferência.

O segmento $\overline{BX}$ mede $\sqrt{ab}$, pois é a altura do triângulo retângulo ACX e portanto $\overline{BX}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$.

Todo aprendiz se norteia a um novo nível de aprendizagem se o acompanha o objetivo intrínseco do desejo em querer observar se a resolução feita realmente está correta. Sempre é plausível verificar se a solução atende ao enunciado e se conseguiremos utilizar todos os dados disponíveis na fórmula encontrada. Quando temos uma boa solução ela direciona para futuramente conseguirmos obter muitas respostas similares, e algumas vezes, mesmo que permutemos as incógnitas de lugar ou mudemos as medidas enunciadas. Para tanto é necessário provar que a descoberta está correta e atende a várias questões similares. Isso pode ser visto nos problemas do ENQ a seguir que ao final provam o que foi construído.

ENQ 2017-1

(Questão 02) Descreva a construção, com régua e compasso, do círculo tangente à reta r e contendo os pontos A e B da figura abaixo.



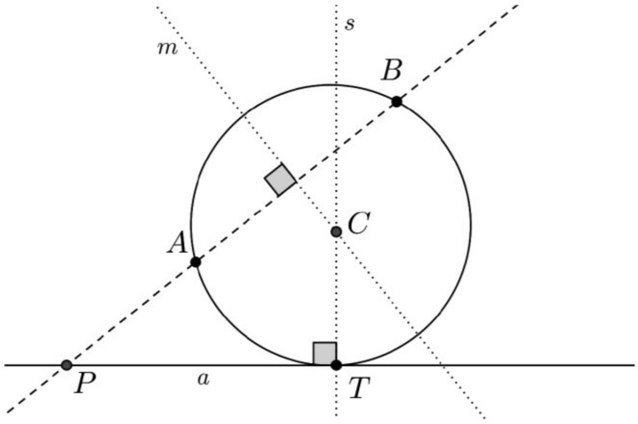
Construção do círculo tangente a r contendo A e B. I. Fonte: ENQ 2017-1

Observação: Considere conhecidas as construções, com régua e compasso, da mediatriz de um segmento, da média geométrica de dois segmentos e da perpendicular a um segmento passando por um ponto dado. Estas construções

podem ser utilizadas sem maiores detalhamentos.

Solução:

Vamos supor o problema resolvido:



Construção do círculo tangente a r contendo A e B. II. Fonte: ENQ 2017-1

Para construir o círculo, precisamos construir, primeiramente, seu centro C. Este centro estará na intersecção da mediatriz do segmento AB com a reta perpendicular a r e passando pelo ponto T de tangência entre r e o círculo. Com isso, se soubermos

determinar o ponto T, o problema poderá ser facilmente resolvido.

Sendo P o ponto de intersecção entre r e a reta que passa por A e B, sabemos que $\overline{\mathrm{PA}} \cdot \overline{\mathrm{PB}} = \overline{\mathrm{PT}}^2$ logo, $\overline{\mathrm{PT}}$ é a média geométrica dos segmentos $\overline{\mathrm{PA}}$ e $\overline{\mathrm{PB}}$. Com isso, podemos fazer a seguinte construção:

1. Marcamos o ponto P de intersecção entre as retas da figura e construímos o círculo de centro P e raio a, onde a é a média geométrica dos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ (esta construção pode, segundo o enunciado, ser feita sem maiores detalhes).

2. Tomamos o ponto T na intersecção entre r e o círculo do passo anterior, de forma que TPA seja agudo.

3. Traçamos a reta s, perpendicular a r e passando por T (segundo o enunciado, esta construção pode ser feita sem maiores detalhes).

4. Traçamos a reta m, mediatriz de AB (esta construção pode ser feita sem maiores detalhes).

5. Marcamos o centro C do círculo na intersecção entre m e s.

6. Construímos o círculo de centro C e raio CA.

ENQ 2019.1

(Questão 04) Dados dois segmentos de comprimentos s e q, com $s > 2q$, indique a construção com régua e compasso, de segmentos cujos comprimentos sejam iguais às raízes da equação do segundo grau $x^2 - sx + q^2 = 0$.

Solução:

Trace uma reta r e marque, sobre a mesma, pontos B e C tais que $\overline{BC} = s$.

Construa um círculo de diâmetro BC.

Trace a reta r' paralela a reta r distando q dela, a qual intersecta o semicírculo superior nos pontos A e D, pois $q < \frac{s}{2}$.

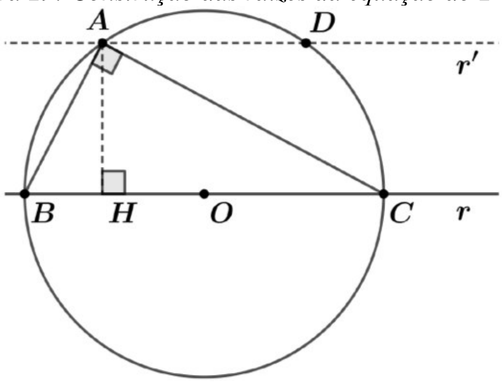
Temos que o triângulo ABC é retângulo em A.

Considere H o pé da altura do triângulo ABC relativa ao vértice A, logo $AH = q$.

Temos que $q^2 = \overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{HC}$ e $\overline{BH} + \overline{HC} = s$.

Portanto, $\overline{BH}$ e $\overline{HC}$ são as raízes da equação $x^2 - sx + q^2 = 0$.

Figura 29: Construção das raízes da equação do 2º grau



Fonte: ENQ 2019.1

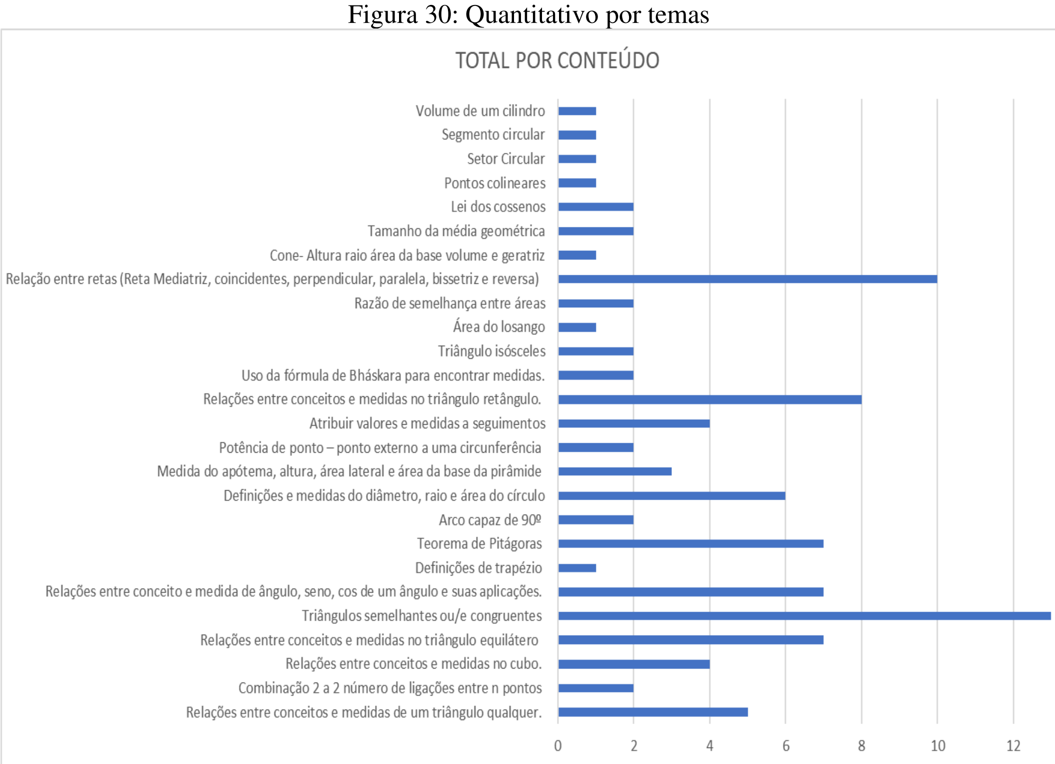
Também é sensato verificar a "unicidade", ou não, da resposta e dos meios para encontrá-la. Se existir o argumento da existência de outra possível solução ou outro caminho para encontrá-la, então é preciso haver uma discussão, após a resolução, sobre as formas em que o enunciado é atendido para que assim não reste dúvida sobre qual resposta irá satisfazer as inferências da pergunta inicial e para ter domínio sobre o método de forma a responder outras questões análogas.

4.2 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NAS QUESTÕES DO EXAMES ENA E ENQ

As questões do ENA e ENQ serviram de norteamento, neste trabalho, para detalhar o uso atual, a nível nacional, da construção em resolução de problemas geométricos. O exame Nacional de acesso (ENA) vem sendo realizado anualmente por meio da SBM, com intuito de ordenar o acesso dos novos estudantes ao PROFMAT, contando, com 30 questões. Para enumerar as questões do ENA, em ocasiões que foram permutadas as questões e houveram várias provas, optamos por escolher a de menor índice, por exemplo usamos a ENA-2017 prova 1. O Exame Nacional de Qualificação (ENQ) é aplicado anualmente, para verificar a aprendizagem nas 4 primeiras disciplinas do curso PROFMAT, sendo elas: MA 11 (Números e Funções Reais), MA 12 (Matemática Discreta), MA 13 (Geometria), MA 14 (Aritmética). Este dispõe de 8 questões, entre elas duas de Geometria.

Abaixo segue a ocorrência dos conteúdos que verificamos nos 3 últimos anos nestes dois exames.

Figura 30: Quantitativo por temas

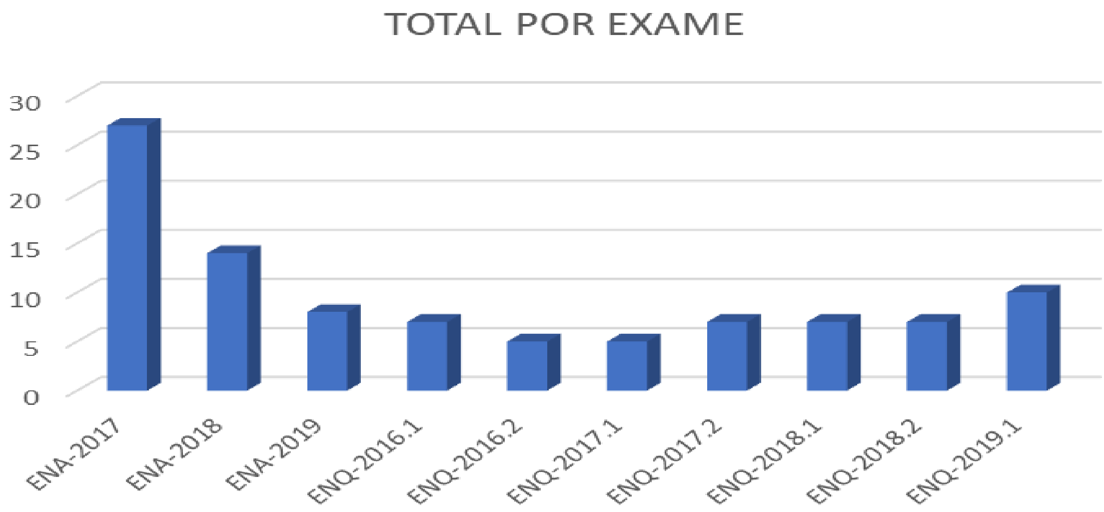


Fonte: Autoria Própria

É possível observar que, entre vários métodos utilizados na resolução de problemas que envolviam geometria os que mais foram utilizados envolviam a construção de triângulos semelhantes e a construções que relacionem retas. Sendo a primeira, mais utilizada no ENA, pois a semelhança usa a proporção, teorema de Tales e o Teorema de Pitágoras que são conteúdos pedidos nos editais do ENA. e a segunda muito utilizada no ENQ, ao verificar a assimilação do aprendizado.

Veremos agora o uso de construções geométricas na resolução de problemas por exame.

Figura 31: Total por Exame



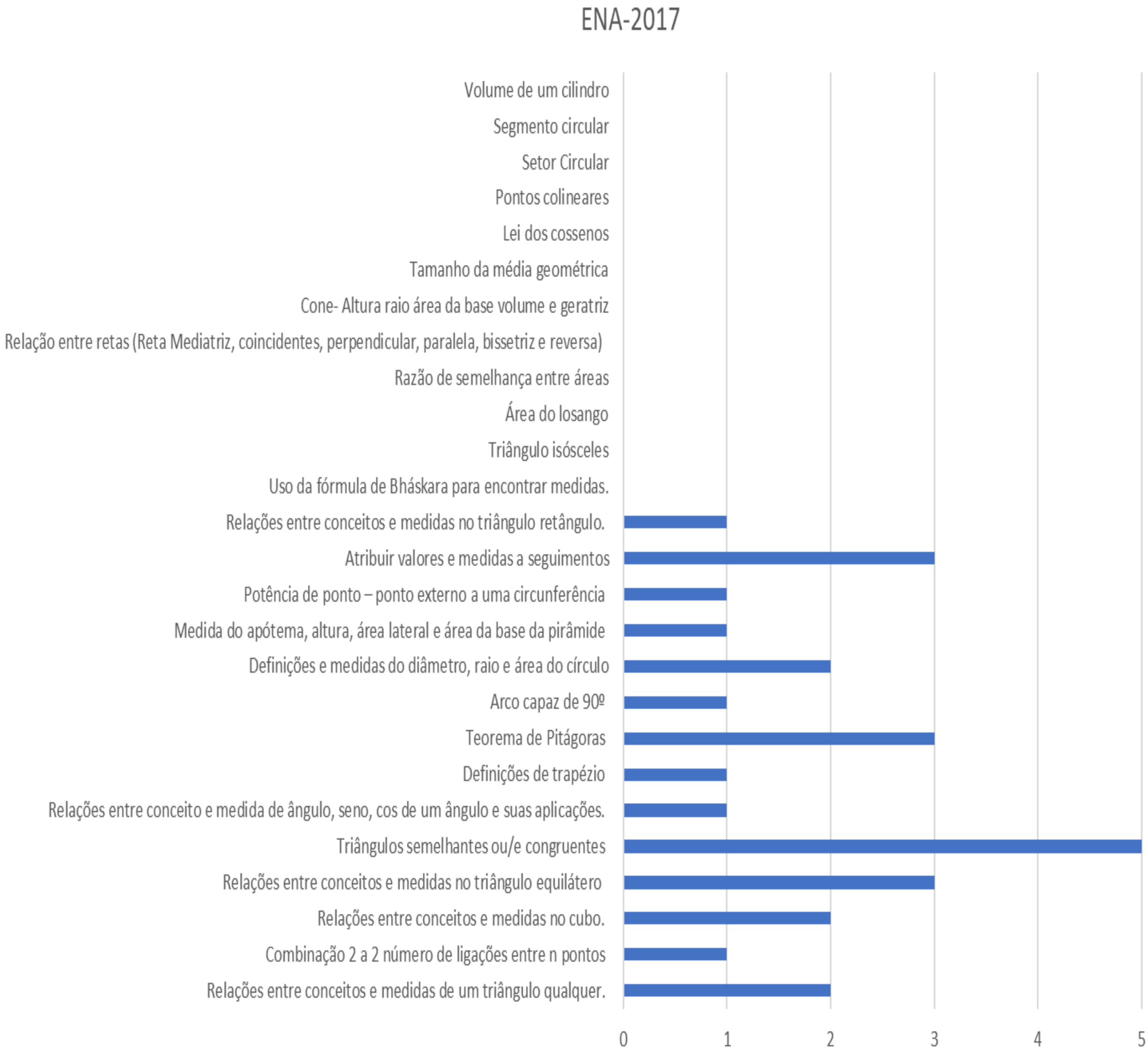
Fonte: Autoria Própria

É possível perceber que nas questões do ENA, a quantidade de resoluções que pedem algum artifício que envolva construção vem diminuindo, talvez devido ao tempo por questão para cada questão. Este tempo é composto de 180 minutos dividido em 30 questões, descontado o tempo do gabarito, os alunos tem menos de 6 minutos por questão.

Enquanto isso, é possível ver o crescimento da necessidade de construções na resolução das questões do ENQ. Este tempo é de 4 horas divididos em 8 questões o que dá uma média 30 minutos por questão. A primeira impressão, é que o tempo é suficiente aos alunos que irão se submeter ao exame. Porém, tratando-se de uma prova discursiva, onde além de obter com criatividade a construção necessária para chegar a resposta, deve detalhar ao corretor, de forma escrita, os métodos que utilizou para resolver a questão. O que em algumas questões só é possível se o aluno já tiver similaridade a questão ou a ideia de construção vier em tempo hábil. Agora veremos a aplicação dos conteúdos por exame.

Verificamos no ano de 2017, que a maior ocorrência envolveu a verificação de triângulos semelhantes envolvendo teorema de tales e igualdade entre ângulos, teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, definições como altura e área no triângulo equilátero e relações em triângulo qualquer. Assim, é possível observar que entre os conteúdos envolvendo geometria plana os que mais se destacam envolvem triângulos e suas relações.

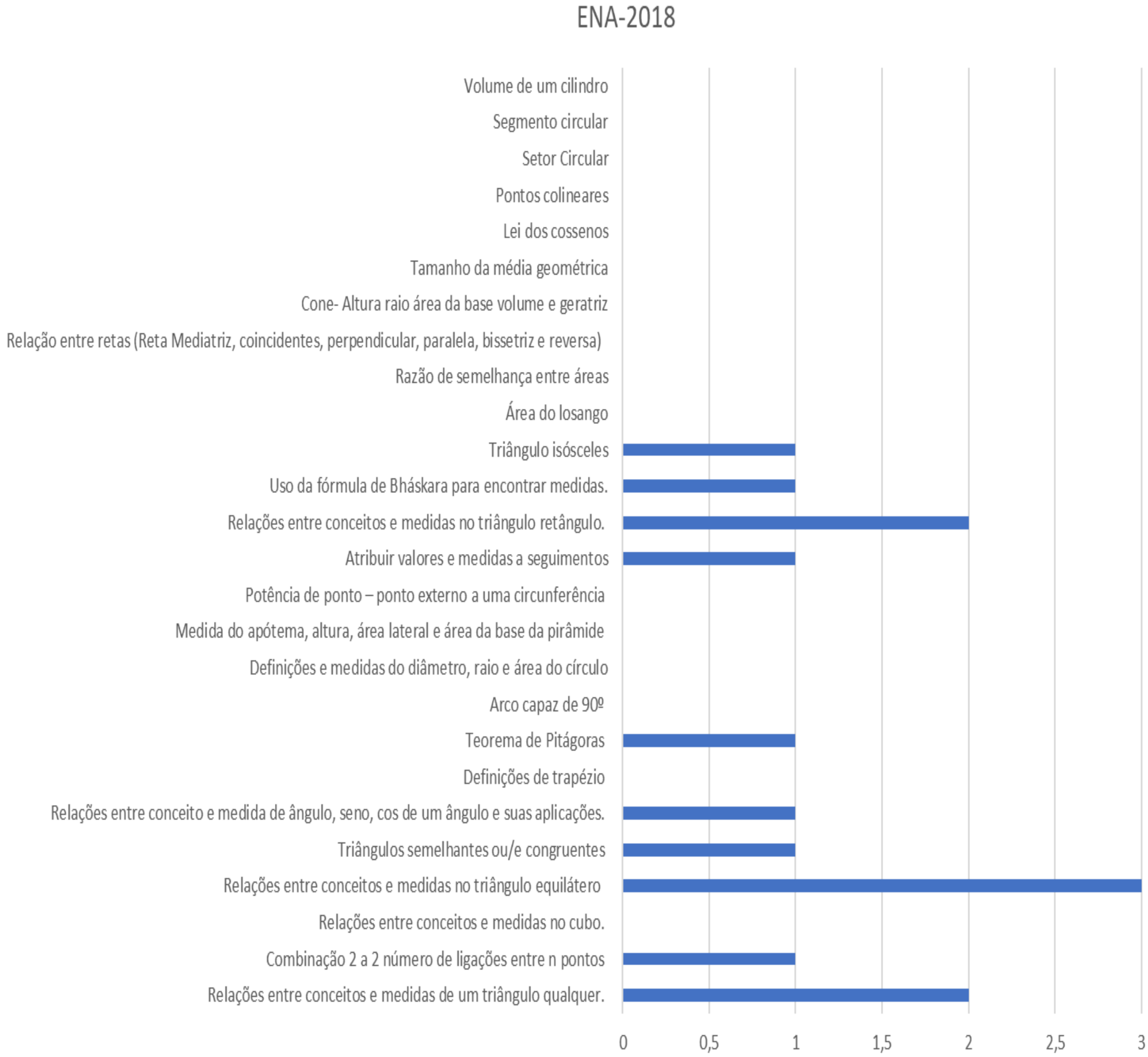
Figura 32: Temas no ENA 2017



Fonte: Autoria Própria

A seguir, é possível observar os conteúdos utilizados na resolução de problemas geométricos em 2018. É notório que as relações nos diversos tipos de triângulos, em especial o equilátero, foram muito utilizadas entre as respostas que envolviam geometria. E como pode ser visto no gráfico tivemos outros surgimentos, como por exemplo uso das relações trigonométricas.

Figura 33: ENA 2018

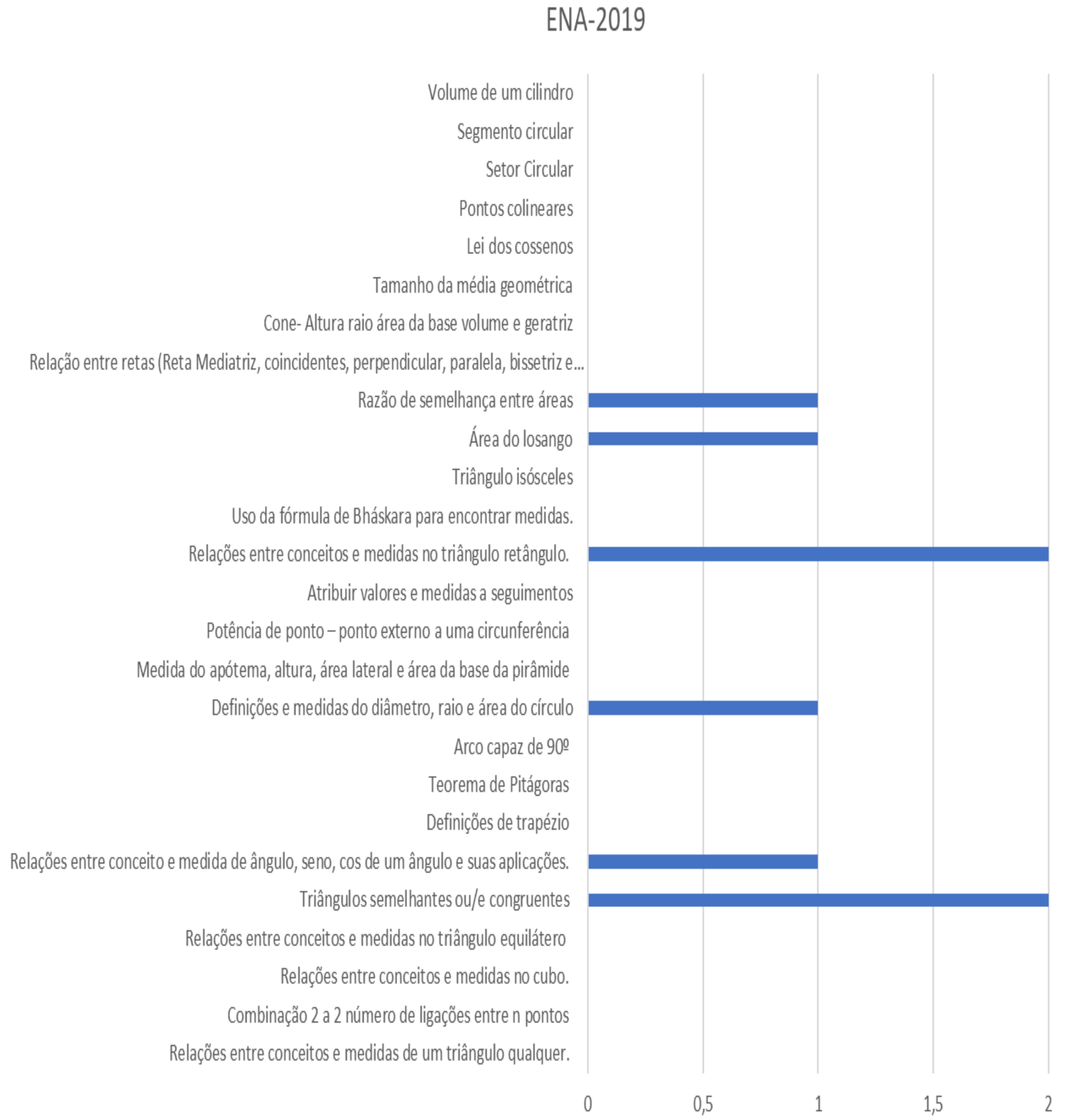


Fonte: Autoria Própria

Além dos supracitados podemos observar, o uso de combinação 2 a dois, onde se verifica quantas são as ligações possíveis a se fazer usando n vértices e assim escolher a melhor estratégia para resolver problemas que envolvam probabilidade e geometria simultaneamente.

Verificaremos, no próximo gráfico, as questões do ENA 2019. Este deixa claro, a confirmação que as questões que envolvem construção vêm diminuindo de forma gradativa. É provável que o ocorrido se deve ao tempo disponível para resolução das questões do exame ser de poucos minutos como já citamos acima. Porém, espera-se que as resoluções por construções continuem desempenhando um importante quesito para adentrar no PROFMAT, de forma simples e que mostre a beleza em visualizar, por meio de novas medidas traçadas, uma estratégia a ser desenvolvida.

Figura 34: ENA 2019



Fonte: Autoria Própria

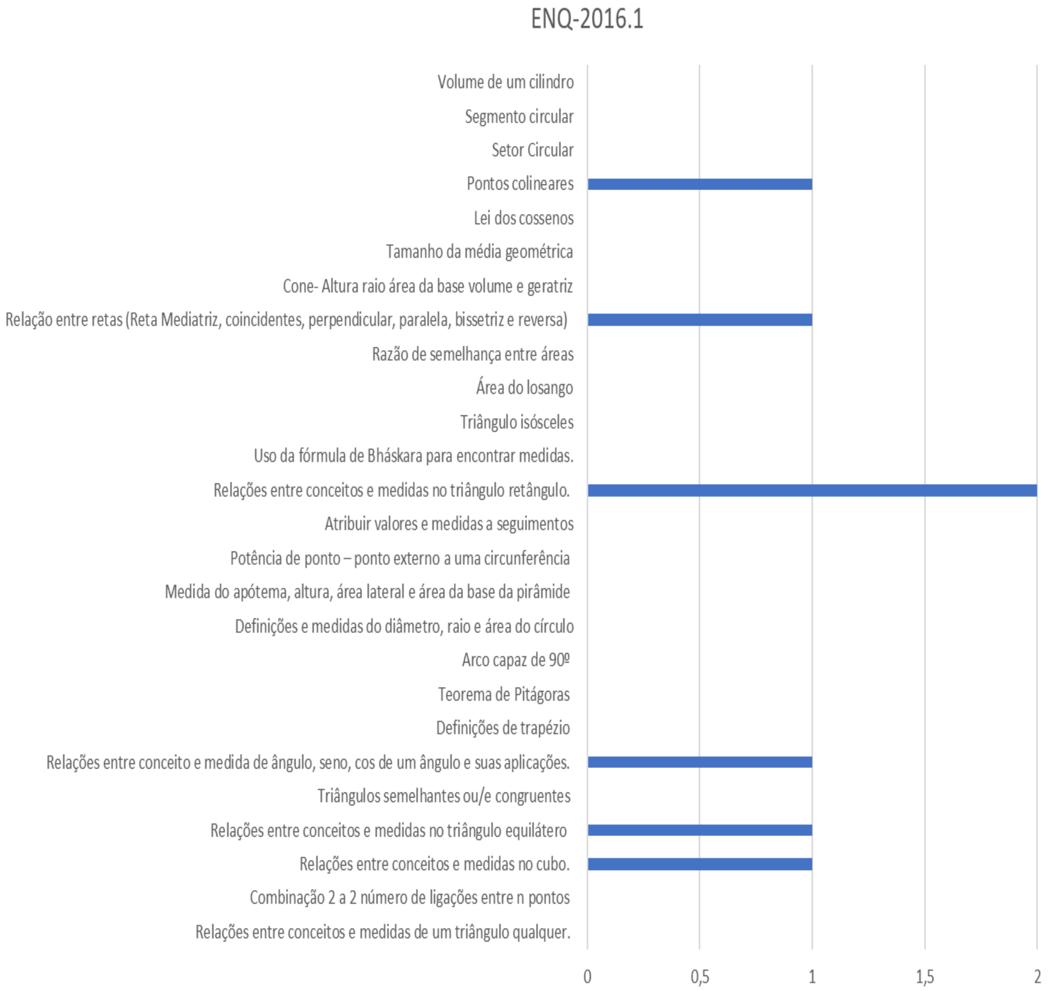
Exame Nacional de Qualificação

Agora verificaremos as resoluções, que envolvem geometria, nos exames do ENQ nos 3 últimos anos.

No ENQ – 2016.1 foi observado a necessidade de conhecimento sobre as medidas no triângulo retângulo. Isso se deve ao fato de ter sido pedido o tamanho da media geométrica entre m e n o que foi provado usando a construção de um triangulo retângulo e usando a notação $h^2 = m \cdot n$ onde, h é a altura baixada da hipotenusa, m e n são as medidas em que a hipotenusa se divide.

Outra verificação, novamente vista foi o uso da relação entre as retas. Este foi atendendo ao cosseno entre uma reta (corda) e uma das arestas do cubo, que foi atendida usando os conceitos de medidas do cubo.

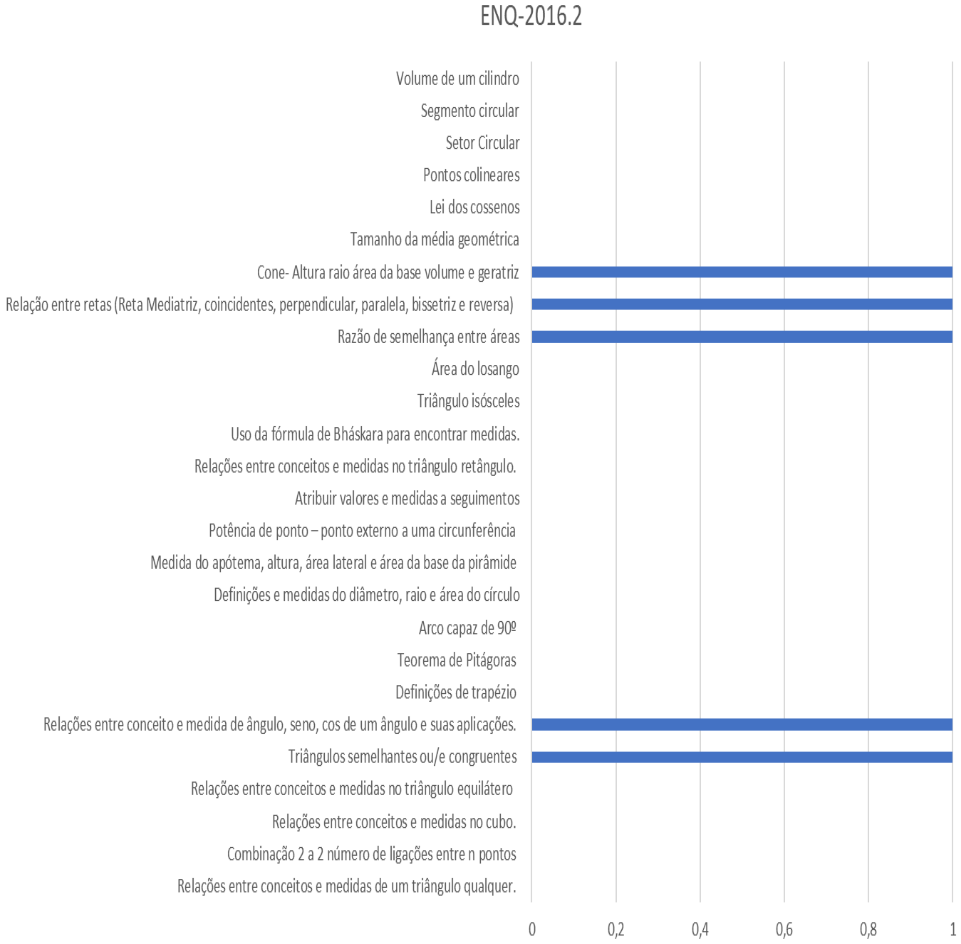
Figura 35: ENQ 2016-1



Fonte: Autoria Própria

Podemos observar também que no ENQ – 2016.2 entre outros conceitos, o surgimento de um conteúdo não muito usual no exame, que é a relação entre as medidas do cone. Este não é de muita surpresa pois o cone usa as definições do círculo e do triângulo nas suas resoluções.

Figura 36: ENQ 2016-2

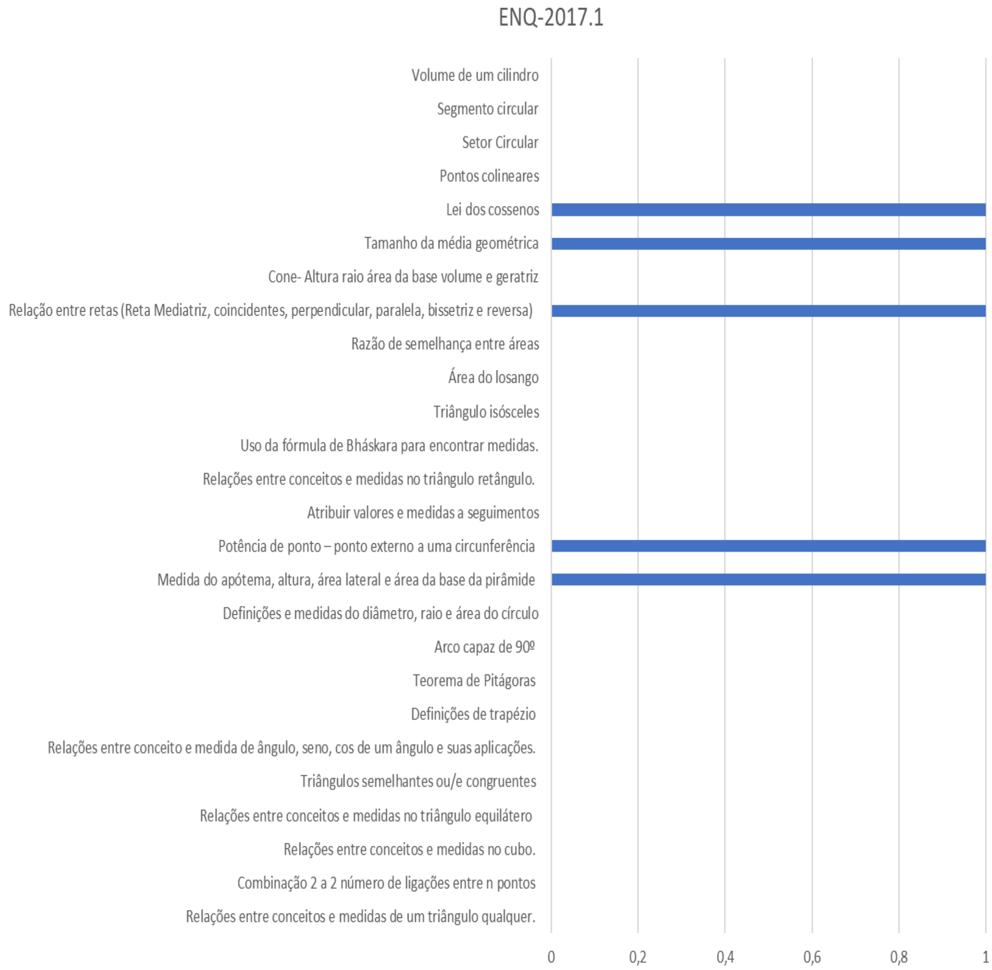


Fonte: Autoria Própria

No exame do ENQ 2017.1 podemos observar uma relação que se tornou imprescindível para resolução das questões na qualificação. Esta observação torna-se visível na questão 5so quando pede para colocar as arestas da pirâmide em função de α, onde α é o ângulo entre duas arestas da pirâmide que tenham como vértice o ápice da mesma. Alguns alunos usaram a lei dos senos na resolução desta questão.

Ainda é visível, na questão 2, o reaparecimento da construção da Média Geométrica, que após uso dos conceitos de potência de ponto torna-se necessária para a resolução do problema. Porém, era desnecessário descrever todos os passos para construção desta média, pois o enunciado trazia como dica, que o redator poderia considerar a construção sem maiores detalhes. Estas dicas que acompanham o ENQ, ajudam o redator a economizar tempo na descrição e trazem informações importantes para conduzir ao estabelecimento de uma estratégia para resolver o problema pedido.

Figura 37: ENQ 2017-1

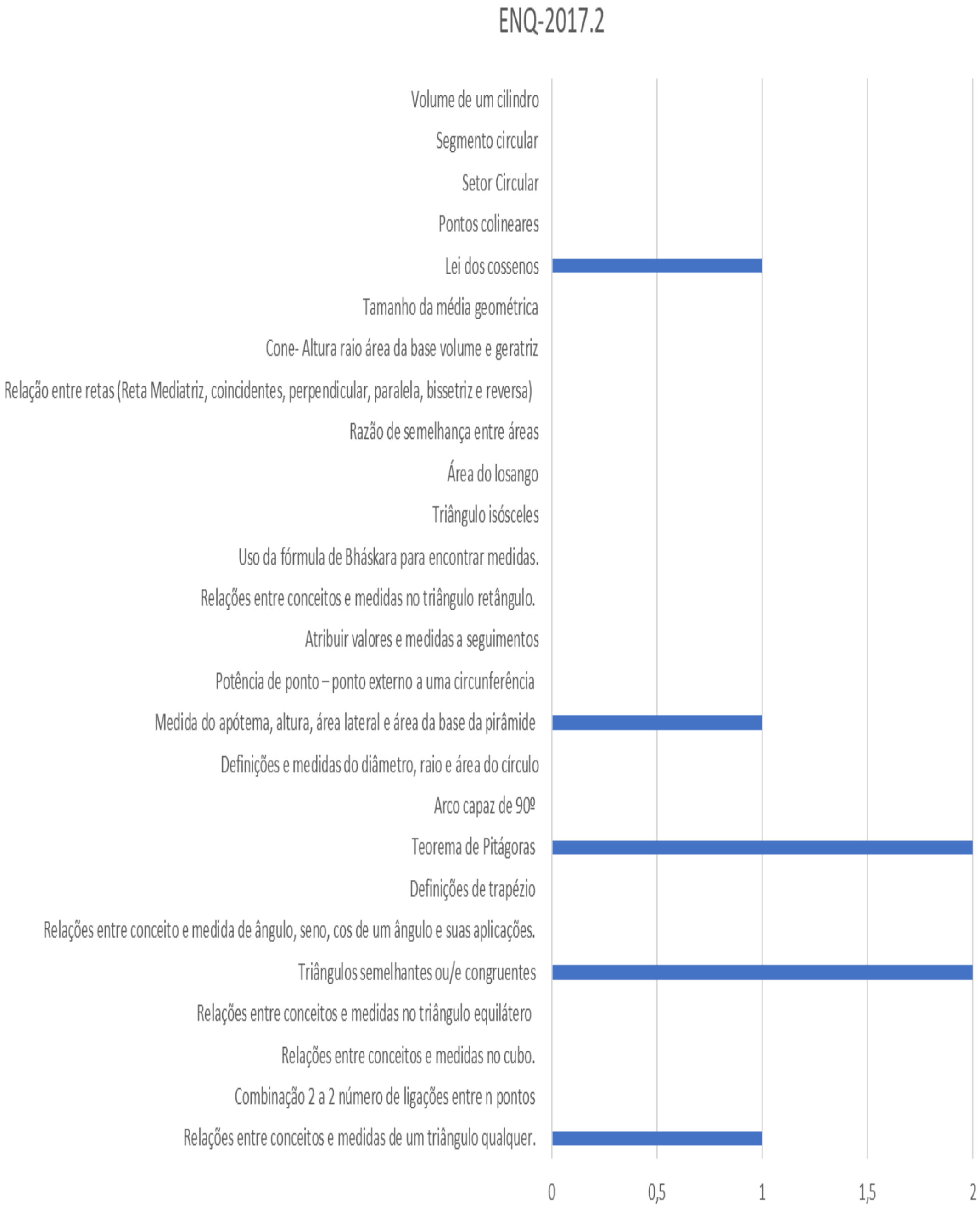


Fonte: Autoria Própria

Pode ser observado, no exame 2017.2 a verificação do uso da semelhança de triângulos em maior quantidade. Isto ocorreu na questão 5 devido a questão trazer uma secção próximo ao vértice do cubo de forma a construir uma pirâmide. Assim, para relacionar os lados foi necessário identificar ângulos e medidas que encontrassem os conceitos necessários para criar uma estratégia de resolução.

Na questão 1, foi usado a lei dos cossenos para relacionar 2 lados e um ângulo de forma a encontrar o triângulo pedido. A surpresa ocorreu quando ao invés de um foi encontrado dois triângulos. O que não deve ter ocorrido com que domina os conceitos sobre um triângulo qualquer.

Figura 38: ENQ 2017-2



Fonte: Autoria Própria

No ENQ – 2018.1 foi utilizado o conceito da reta reversa, onde buscava-se relacionar duas retas no espaço. Para tanto foi utilizado variadas soluções diferentes. Em todas elas foram o uso de medidas do cubo, podendo usar desde a lei dos cossenos para estabelecer uma estratégia usando álgebra e concluir que a relação entre as retas é de 90º Outra solução que foi encontrada, envolvia a construção e a observação entre a relação entre arestas e diagonais no cubo.

Também na demonstração do teorema da bissetriz foi utilizado relações entre retas de forma a construir retas paralelas e usar a semelhança de triângulos, para relacionar as medidas nos triângulos construídos.

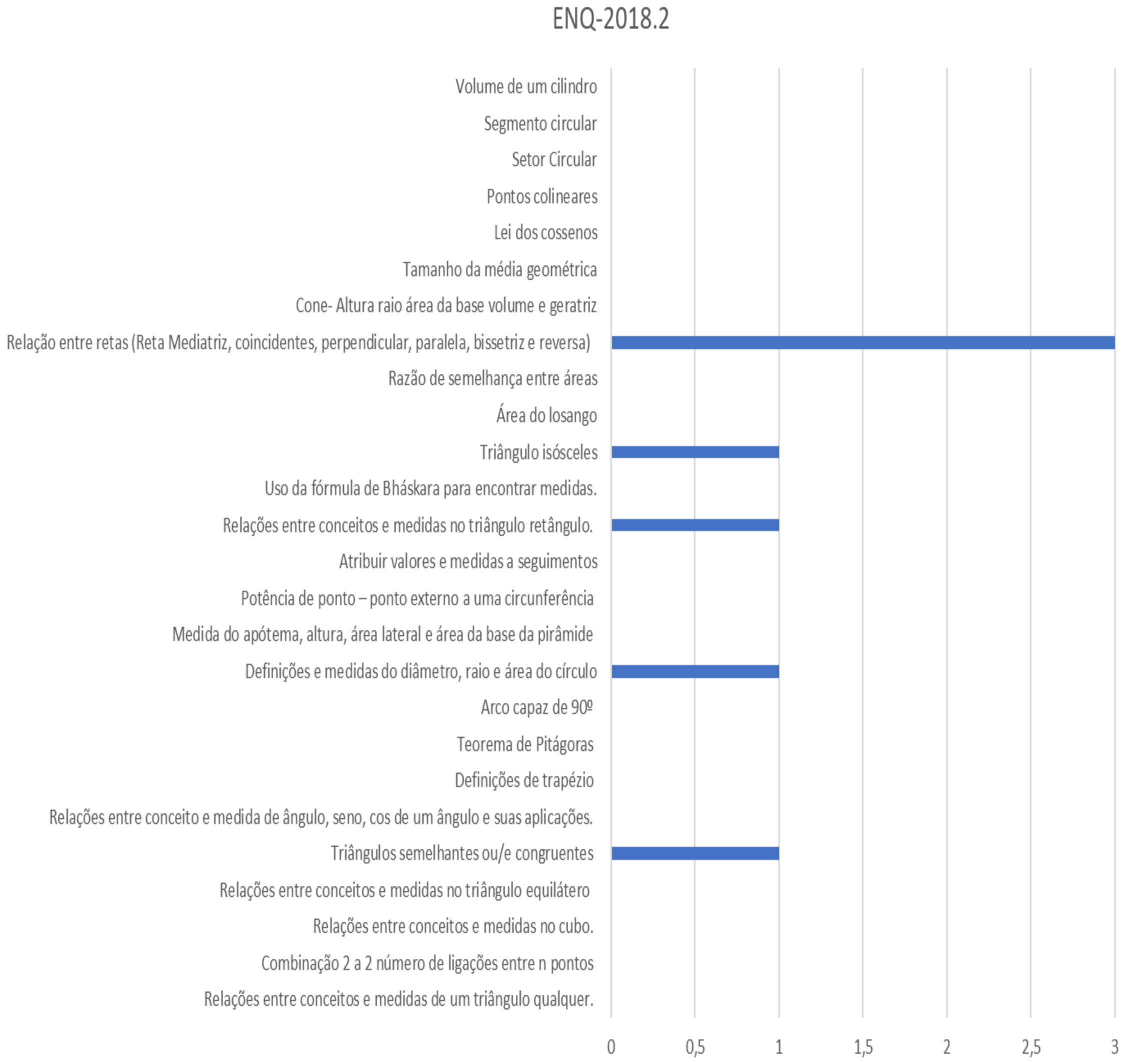
Figura 39: ENQ 2018-1

Fonte: Autoria Própria

No ENQ – 2018.2 tivemos uma questão que trouxe grande divergência de opiniões no mundo acadêmico, quando pediu que construísse duas retas. De início a questão 2, pareceu simples, mais um problema surgiu quando foi acrescentado em alguns polos a palavra “distintas” dando ênfase ao pressuposto que deveriam ser feitas duas construções. Em alguns polos a alteração não foi realizada pressupondo que a informação era redundante e portanto, desnecessária. Depois de muitas demonstrações que a falta ou o acréscimo da palavra “distintas” gerou construções diferentes, logo, provas diferentes, a questão foi anulada e acrescentado os devidos pontos a todos que realizaram o exame.

Na outra questão geométrica, surgiu um conceito de aplicação nova no ENQ. Esta questão pedia a prova da “colinearidade entre centro de duas esferas tangentes interiores e o ponto de tangência entre elas.

Figura 40: ENQ 2018-2

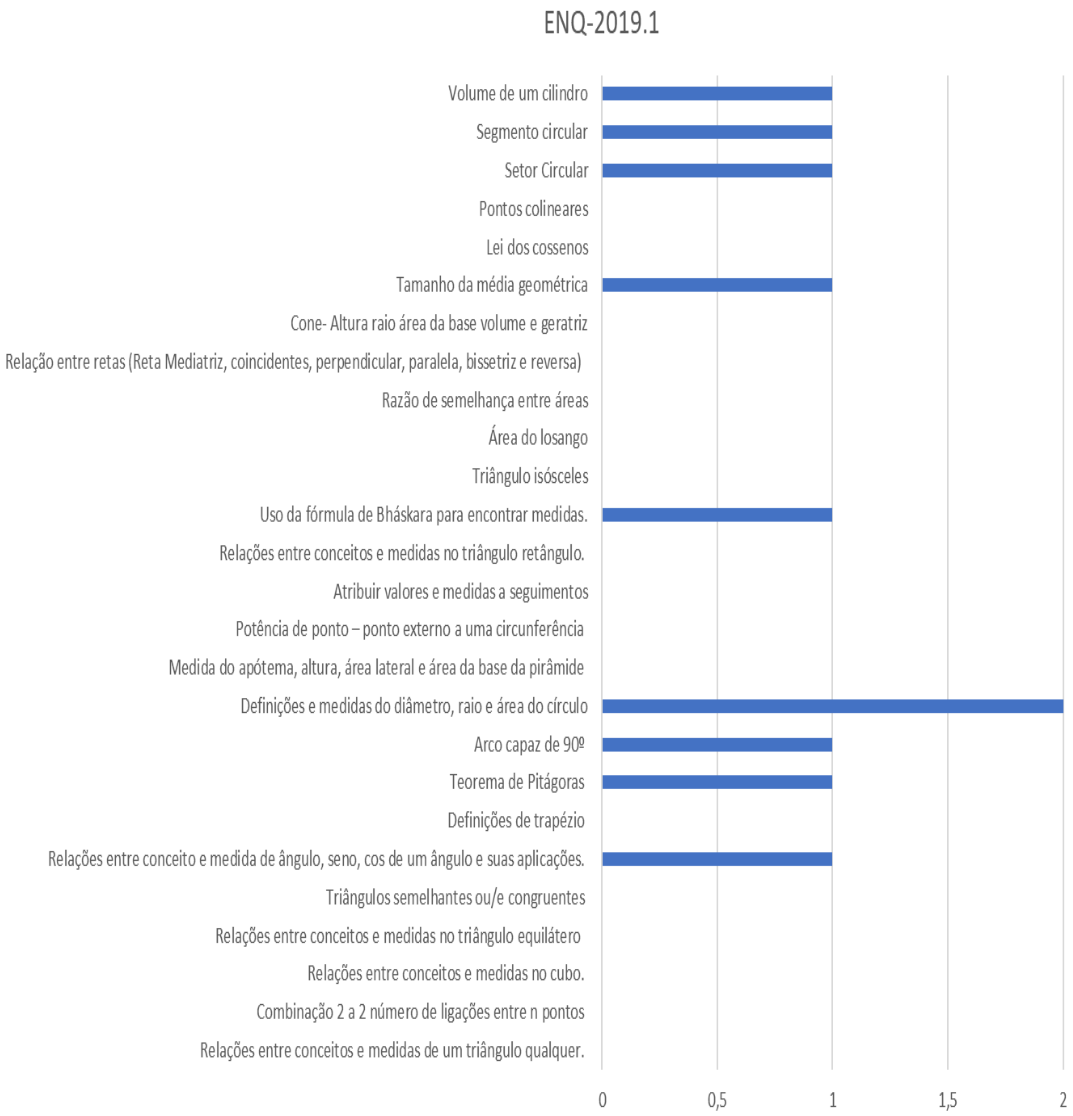


Fonte: Autoria Própria

No ENQ 2019.1, novamente foi pedido a média aritmética e a média geométrica. Esta ocorreu devido a necessidade de construir as raízes de uma função quadrática a partir da medida de seus coeficientes. Para esta resolução foi usada a técnica de traçar um círculo e perpendiculares ou uma paralela a uma altura igual ao coeficiente que acompanha o termo de primeiro grau.

Também verificamos a construção geométrica sendo usada para comparar volumes entre um cilindro em diferentes posições. Tal construção envolvia a construção de um triângulo isósceles e um retângulo.

Figura 41: ENQ 2019 -1



Fonte: Autoria Própria

Assim verificamos as diferentes construções usadas nas provas do ENQ e ENA com a intenção de obter um quantitativo sobre o uso de construções nas resoluções das questões geométricas, esperando que esta obra sirva de base para futuros estudantes e pesquisadores que façam uso de resoluções por construções.

9. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi observado o uso de construções geométricas na resolução de problemas desde a antiguidade até os dias de hoje, sendo primeiro observado a descrição de um problema. Em seguida foi visto a resolução por etapas para resolução descritas por George Polya para assim prepararmos uma estratégia para a construção geométrica de forma eficaz e assim obter a resposta pedida.

Observamos a importância da geometria para o crescimento das civilizações antigas mostrando os agrimensores egípcios. Foi verificado as relações no triângulo retângulo e de forma especial o teorema de Pitágoras. Este teorema foi escolhido por trazer várias construções que levam à sua demonstração, entre elas por área que aparenta ser mais longa porém somente por observação e uma construção simples que pedia apenas a altura baixada a partir da hipotenusa e semelhanças de triângulos.

Foi notório que as construções geométricas tiveram o seu ápice durante o período da ditadura militar com a disciplina de “Fortificação” que servia para estudos de mapas e construções de fortes. Assim que o desenho geométrico foi colocado como matéria eletiva foi abandonada pela maioria das escolas e está sendo alvejado hoje pelos alunos que busquem respostas eficazes como por exemplo os exames da SBM.

As aplicações exibidas neste trabalho visavam mostrar a necessidade da observação e da aplicação de conceitos correlatos, intermediados por novos traços, antes inexistentes na figura dada, para chegar ao que foi solicitado. Entre muitas, foi citado questões que pediam a construção geométrica e o arco capaz, sendo as vezes estes conceitos pedidos simultaneamente.

Podemos assim notar, analisando os gráficos, que estas formas de resolução, estão diminuindo nos exames do ENA talvez devido ao tempo necessário para obter a resposta pedida. Por outro lado, as construções vêm aumentando nos exames do ENQ, sempre em duas questões para mostrar o desempenho dos mestrandos e a criatividade ao desenvolver problemas geométricos.

Portanto, é esperado que este trabalho sirva de motivação para futuros estudantes que venham a pesquisar sobre geometria, buscando novos e antigos conceitos para que tenhamos futuramente novos “geômetras” capazes de formular novos traçados que possam facilitar a vida em sociedade.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, Aldivam do Carmo. **Resolução de Problemas de Contagem Usando Recorrências Lineares.** 2019. 70 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2019.

ALVES, Clenilton Fernandes. **Trigonometria e Números Complexos.** 2019. 64 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2019.

BATISTA, Amazilde de Farias. **Insolubilidade de soluções dos problemas Clássicos e Aplicações no ensino Básico.** 2018. 48 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Universidade Federal de Sergipe, São Cristovão, 2018.

CARDOSO, Ana Gabriela Rodrigues. **Problemas de Contagem e o Princípio da Inclusão e Exclusão.** 2018. 57 f. Tese (Doutorado) - Curso de Profmat, Ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2018.

CASTRO, Edmilson Martins. **As construções geométricas como metodologias de ensino.** 2018. 52 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2018.

Clube de Matemática da Obmep. **Triângulo Russo.** Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/desafio-triangulo-russo/>. Acesso em: 11 jul. 2019.

COSTA, Evandro Alexandre da Silva. **Fragmentos históricos do desenho geométrico no currículo.** Disponível em: http://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/FRA GMENTOS-HISTORICOS-DO-DESENHO-GEOMETRICONO-CURRICULO.pdf Acesso em: 10/07/2019

FRANÇA, Fábio Lima. **Considerações e apresentação de construções geométricas.** 2018. 69 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Universidade Estadual do Sudoeste, Vitória da Conquista, 2018.

JORGE, S. **Desenho geométrico: Ideias e imagens**. São Paulo, SP: Saraiva, 1998.

MACHADO, R. B**. Entre vida e morte: cenas de um ensino de desenho**. (254 fls); Dissertação de Mestrado. Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica. Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina, 2012.

MARMO, C.; MARMO, N. **Desenho geométrico**. Rio de Janeiro, RJ: Scipione, 1994.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar.** Rio de Janeiro: Sbm, 2012.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas.** Traduzido e adaptado por Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

RIBEIRO, Geovani Henrique. **Matemática, Aprendizagem Baseada em Problemas:** Metodologia Inovadora do 9º ano do ensino fundamental de uma escola pública. 2019. 120 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2019.

SANTOS, Paula Eugênia dos. **Resolução de Problemas como uma Estratégia Didática para o Ensino da Matemática.** 2019. 30 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Universidade Federal do Maranhão, Cuiabá, 2019.

SCHMIDT, Henk G.. Foudations of problem-basead learning some explanatory notes. **Medical Education**, Oxford, v. 27, n. 5, p.422-432, set. 1993.

SILVA JUNIOR, Arnaldo Oliveira. **Os três níveis da solução de problemas.** 2019. 95 f. Dissertação de Mestrado - Curso do PROFMAT, CCET, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2019.

VALENTE; W. R; **Uma História da Matemática escolar no Brasil, 1730 – 1930**; 2ª edição; São Paulo; FAFESP; 2007.

WAGNER, Eduardo. **Construções geométricas – Eduardo Wagner** com a colaboração de José Paulo Q. Carneiro. 6ª edição - Rio de Janeiro: SBM, 2007.

WAGNER, Eduardo. **Teorema de pitágoras e áreas.** Rio de Janeiro: 86 p. Impa, 2005.

ZUIN, E. S. L. **Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil**. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação. Belo Horizonte, MG: Universidade Federal de Minas Gerais, 2001.

ZUIN, Elenice de Souza Londron. **POR UMA NOVA ARITHIMETICA:** O SISTEMA MÉTRICO DECIMAL COMO UM SABER ESCOLAR EM PORTUGAL E NO BRASIL OITOCENTISTAS. 2007. 320 f. Tese (Doutorado) - Curso de EducaÇÃo MatemÁtica, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.