Universidade Federal do Maranhão - UFMA
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia - CCET
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGMAT
Dissertação de Mestrado

Jadiel Carlos Asevedo Silva

O Método de Sub e Super Soluções e Aplicações

São Luís - MA

2019

Jadiel Carlos Asevedo Silva

O Método de Sub e Super Soluções e Aplicações

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto

São Luís - MA

2019

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Asevedo Silva, Jadiel Carlos.
O Método de Sub e Super Soluções e Aplicações / Jadiel Carlos Asevedo Silva. - 2019.
66 f.

Orientador(a): Sandra Imaculada Moreira Neto.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luis, 2019.

1. Equações Di- ferênciais Parciais. 2. Espaço de Sobolev. 3. Teorema de Sub e Supersolução. I. Moreira Neto, Sandra Imaculada. II. Título.

Jadiel Carlos Asevedo Silva

O Método de Sub e Super Soluções e Aplicações

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 28 de março de 2019.

BANCA EXAMINADORA:

Profa. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto (Orientadora)
Universidade Estadual do Maranhão - UEMA

Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. Rônei Sandro Vieira
Instituto Federal do Espírito Santo - IFES

Aos meus pais, Maria e Constâncio, minha irmã Suel de Maria e ao meu padrinho José Nazareno que estiveram ao meu lado em todos os momentos. Aos meus familiares e amigos.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, à Deus, pelas incontáveis graças concedidas durante a execução deste trabalho, iluminando os meus pensamentos, e abrindo a minha mente para que eu pudesse desenvolvê-la e dando-me força principalmente nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais, Maria Doralice e Constâncio Silva, meus primeiros orientadores nessa vida, ensinando-me valores éticos e morais. Ao meu padrinho José Nazareno, por estar sempre presente e também aos meus irmãos, por acreditarem no meu potencial e sempre me ajudarem no decorrer do curso, para que eu pudesse chegar nesta etapa da minha vida.

À Universidade Federal do Maranhão por me proporcionar a realização deste trabalho. À minha orientadora Sandra Imaculada Moreira Neto na qual tenho profunda admiração e gratidão, que com grande paciência, me mostrou diversas ideias de como desenvolver melhor tal estudo.

À banca examinadora, por sua valiosa contribuição para a finalização deste trabalho. À todos os colegas do mestrado, pelo grande prazer da convivência e pelo enorme aprendizado durante esse período. Em especial à William Luís Lima Pereira, que por sua gentileza, ajudou-me digitar uma parte do trabalho.

À todos aqueles que de alguma forma estiveram e estão próximo de mim, fazendo esta vida valer cada vez mais a pena. Também aqueles que, direta ou indiretamente, intencionalmente ou não, contribuíram para aumentar a minha motivação para a realização dessa dissertação meus sinceros agradecimentos.

Finalmente, o meu agradecimento à Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Ciêntıfico e Tecnológico do Maranhão - FAPEMA - pelo apoio financeiro.

A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.

(Descartes)

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos dois métodos envolvendo sub e supersolução. Um deles, no sentido fraco, que será usado para estudar a existência de solução fraca de uma classe de problemas elípticos de segunda ordem e que se anula na fronteira. O outro método, no sentido clássico, será usado para estudar a existência de solução em $C^2(\Omega)$, de uma classe, de problemas elípticos do tipo côncavo convexo.

Palavras-chave: Teorema de Sub e Supersolução, Espaço de Sobolev e Equações Diferênciais Parciais.

ABSTRACT

In this work, we present two methods involving sub and supersolution. One of them, in the weak sense, will be used to study the existence of weak solution of a class of second-order elliptic problems that cancels out at the border. The other method in the classical sense will be used to study the existence of solution in $C^2(\Omega)$ of a class of convex concave elliptic problems.

Keywords: Sub and Supersolution Theorem, Sobolev's Space and Partial Differential Equations.

NOTAÇÃO

Abaixo seguem todas as notações utilizadas neste trabalho.

- $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o operador laplaciano da função u;
- $\langle\ ,\ \rangle$ denota o produto de dualidade;
- $B_R(x)$ denota a bola aberta centrada em x e com raio R;
- $L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ mensurável; } \displaystyle\int_\Omega |f|^p dx < +\infty \right\}$, $1 \leq p < \infty$, denota o espaço de Lebesgue;
- $Lu := -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0(x)u$, denota o operador elíptico;
- Ω_ε denota um subconjunto de Ω;
- Ω_ε^c denota o complementar de Ω_ε;
- $W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^p(\Omega),\ i = 1, ..., n \right\}$ denota o espaço de Sobolev, onde as $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ são tomadas no sentido fraco;
- $H_0^1(\Omega)$ denota o espaço $W_0^{1,2}(\Omega)$;
- H' denota o dual do espaço de Hilbert H;
- $L^p_{loc}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ mensurável; } \displaystyle\int_\Omega |f|^p dx < +\infty \right\}$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto compacto e $1 \leq p < \infty$, denota o espaço das funções localmente integráveis;
- $C^1(\Omega)$ é o espaço das funções contínuas;
- $C_0^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto;
- $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) := \left\{ u \in C(\Omega) : \sup \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^2} < \infty \right\}$ com $0 < \alpha < 1$;
- $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ são as funções em $C^k(\Omega)$ tais que todas as derivadas parciais até a ordem k estão em $C^{0,\alpha}(\Omega)$;

- $\|u\|_{0,p} = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ é a norma da função u no espaço em $L^p(\Omega)$;
- $\|u\|_{1,p} = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p)\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$ é a norma da função u no espaço $W^{1,p}(\Omega)$;
- $\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ é uma norma de $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente a de $W^{1,p}(\Omega)$;
- $[v \leq w]$ denota o subconjunto de Ω tal que $v \leq w$, onde v e w são definidas em Ω;
- $\rightharpoonup$ denota a convergência fraca, quando $n \to \infty$;
- $\to$ denota a convergência forte, quando $n \to \infty$;
- $\hookrightarrow$ denota a imersão contínua;
- $\overset{c}{\hookrightarrow}$ denota a imersão compacta;
- $I'(x)h := \dfrac{\partial I}{\partial h}(x)$ representa a derivada de Gâteaux do funcional I aplicada em u na direção de v;
- *q.t.p.* significa "quase todo ponto";
- $\uparrow$ denota convergência de sequência crescente.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No presente trabalho faremos um estudo sobre duas classes de problemas elípticos de segunda ordem com condições de Dirichlet homogênea para os quais apresentaremos existência de solução. Para a primeira classe de problemas, nos baseamos no livro do Struwe visto em [15]. Enquanto, na segunda classe de problemas, foi baseada no artigo dos matemáticos Ambrosetti-Brezis-Cerami visto em [1].

No segundo capítulo, apresentamos a base matemática que vamos ultilizar nos capítulos posteriores. Assim, na primeira seção, exibimos conceitos e resultados de Medida e Integração de Lesbegue e também definimos o espaço $L^p(\Omega)$ para enuciarmos dois teoremas famosos que são, Teorema da Convergência Monótona e Teorema da Convergência Dominada. Na segunda seção, falamos das funções de classe $C^1(\Omega)$ e $C^2(\Omega)$, e algumas de suas propriedades como, por exemplo, as identidades de Green, que valem para funções em $C^2(\Omega)$. Já na terceira e quarta seção, apresentamos a definição de espaço de Sobolev os quais vale a desigualdade de Poincaré. Para domínios limtados foi definida a diferenciabilidade de funcionais no sentido de Fréchet e Gâteaux.

No terceiro capítulo, consideramos o seginte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory e Ω um conjunto limitado.

Vamos chamar uma função $\underline{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ de subsolução fraca do problema (1.1) se $\underline{u} \leq 0$ sobre a $\partial\Omega$ e

$$\int_\Omega \nabla\underline{u} \cdot \nabla v dx \leq \int_\Omega f(x,\underline{u})v \, dx, \tag{1.2}$$

para todo $v \in C_0^\infty(\Omega),\ v \geq 0$.

Por outro lado, uma função $\overline{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ é dita supersolução fraca do problema (1.1) se $\overline{u} \geq 0$ sobre a $\partial\Omega$ e

$$\int_\Omega \nabla\overline{u} \cdot \nabla v dx \geq \int_\Omega f(x,\overline{u})v \, dx \tag{1.3}$$

para todo $v \in C_0^\infty(\Omega),\ v \geq 0$.

Abordamos na primeira seção do Capítulo 3 o método de sub e supersolução, que pode ser visto em **(cf. [15], pag 17)**, o qual é para estudar a existência de solução no sentido fraco de uma classe de problemas elípticos de segunda ordem com condições de fronteira de Dirichlet. A princípio, apresentamos um lema que, sob determinadas condições, garante que o funcional I, associado ao problema (1.1), a ser definido posteriormente, possui mínimo e o utilizamos para provar o teorema de sub e supersolução no sentido fraco. Já na segunda seção, foi apresentada uma aplicação na qual foi usado este método. Na terceira parte deste capítulo, abordamos o método de Sub e Supersolução no sentido clássico, que pode ser visto em [1], e fizemos também uma aplicação.

Na quarta seção estudamos a existência de solução clássica para uma outra classe de problemas elípticos do tipo côncavo convexo dado por

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u^q + u^p, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &\geq 0, \qquad\qquad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0, \qquad\qquad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N \geq 3$ é limitado, com fronteira suave, $0 < q < 1 < p \leq \frac{N+2}{N-2} := 2^* - 1$ e λ parâmetro real.

Na primeira seção deste capítulo apresentamos o resultado principal do trabalho, na qual diz respeito a existênca de um Λ tal que o problema (P_λ) possui solução mínima não-crescente para $\lambda \in (0, \Lambda)$. Além disso, o referido resultado diz que o funcional associado ao problema (P_λ) quando aplicado á solução mínima u_λ é negativo, isto é, $I(u_\lambda) < 0$. Na prova deste resultado,usamos o teorema de sub e supersolução e o método de iteração monótona.

Normalmente, vamos considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e limitado, caso contrário Ω será caracterizado

2 PRELIMINARES

Aqui vamos abordar alguns conceitos e resultados da Matemática que nos auxiliará no próximo capítulo.

2.1 Medida e Integral de Lesbegue

Nessa seção introduzimos definições e propriedades básicas da Teoria de Medida e Integração de Lebesgue. As provas podem ser vistas em [2], [3] e [4].

Definição 2.1 *Uma familia F de subconjuntos de um conjunto X é chamado de σ-álgebra se satisfaz as seguintes condições:*

(i) $\emptyset, X \in F$,

(ii) *Se $A \in F$, então o complementar $A^c = X - A \in F$,*

(iii) *Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos em F então*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in F.$$

O par (X, F) é chamado de espaço mensurável.

Dizemos que uma função real $f : X \to \mathbb{R}$ é F-mensurável se, para cada $x \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in F.$$

Observação 2.1.1 *Na definição de função mensurável poderíamos utilizar qualquer um dos conjuntos abaixo:*

(i) $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in F$,

(ii) $\{x \in X : f(x) < \alpha\} \in F$,

(iii) $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in F$.

Lema 2.1 (cf. [2], pag 11) *Sejam f, g funções reais mesuráveis e seja c um número real. Então as funções*

$$cf,\ f^2,\ f+g,\ f\cdot g,\ |f|,$$

são mensuráveis.

Definição 2.2 *Seja $f : X \to \mathbb{R}$. Definimos as funções:*

(i) $f^+ : X \to \mathbb{R}$ *dada por* $f^+(x) = \max(f(x), 0)$,

(ii) $f^- : X \to \mathbb{R}$ *dada por* $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$,

denominadas parte positiva e parte negativa de f, respectivamente.

Da definição acima obtemos que $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$.

Denotaremos o conjunto de todas as funções $F-$ mensuráveis por $M = M(X, F)$ e o conjunto das funções $F-$ mensuráveis não negativas por $M^+ = M^+(X, F)$.

Lema 2.2 (cf. [2], pag 13) *Se $f \in M(X, F)$ é uma função não negativa então existe uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $M(X, F)$ tal que:*

(i) $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $f(x) = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(x)$, *para todo* $x \in X$;

(iii) *Cada φ_n tem um número finito de elementos na sua imagem.*

Definiremos agora integral de uma função mensurável, para isso, é necessário definirmos medida de um espaço mensurável em F.

Definição 2.3 *Uma função real estendida μ definida na σ-álgebra F de um conjunto X é chamada medida quando*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu(E) \geq 0$ *para todo* $E \in F$,

(iii) *Se* $(E_n)_{n\geq 1}$ *é uma sequência de elementos dois a dois disjuntos em* F, *então*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Para cada elemento E da σ- álgebra F definimos uma função dada por

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E, \\ 0, & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

Essa função χ_E é chamada de função característica em relação ao espaço mensurável E.

Definição 2.4 *Uma função a valores reais é dita simples se possui um número finito de valores, isto é, se o seu conjunto imagem for um conjunto finito.*

Uma função mensurável simples φ é respresentada da seguinte forma

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}, \tag{2.1}$$

onde $a_j \in \mathbb{R}$ e χ_{E_j} é a função característica de φ para o conjunto $E_j \in F$.

Observação 2.1.2 *De todas as representações para* φ, *podemos ter uma única representação pardrão na qual os* a_j *são distintos e os* E_j *são subconjuntos não vazios disjuntos de* X *tal que* $X = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$.

Definiremos primeiramente, integral de uma função mensurável simples.

Definição 2.5 (Integral de uma função mensurável simples) *Seja* $\varphi \in M^+$ *uma função simples com representação padrão dada por (2.1). Definiremos integral de* φ *com relação a medida* μ *por:*

$$\int \varphi \; d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \mu(E_j).$$

Aqui temos a definição de função mensurável não negativa.

Definição 2.6 (Integral de uma função mensurável não negativa) *Seja* $f \in M^+$, *definimos a integral de* f *com respeito a* μ *como um número real*

$$\int_X f \; d\mu = \sup \int_X \varphi \; d\mu,$$

onde $\varphi \in M^+$, *satisfazendo* $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ *para todo* $x \in X$.

Teorema 2.1 (cf. [2], pag 31) (Teorema da Convergência Monótona) *Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência monótona crescente de funções em* $M^+(X,F)$ *convergindo para* f, *então* $f \in M^+$ *e*

$$\int_X f\ d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\ d\mu.$$

Lema 2.3 (cf. [2], pag 33) (Lema de Fatou) *Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções em* $M^+(X,F)$. *Então*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty}\ (f_n)\ d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\ d\mu.$$

Lema 2.4 (cf. [2], pag 36) *Seja* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* M^+. *Então*

$$\int_X \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n\right) d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\int_X g_n\ d\mu\right).$$

Agora vamos conhecer o espaço $L^p(\Omega)$ e alguns resultados básicos. Vamos considerar $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ um aberto e $1\leq p<\infty$.

2.2 O Espaço $\mathbf{L}^p(\Omega)$

Define-se o espaço $L^p(\Omega)$, onde $1\leq p<\infty$, como sendo o espaço das (classes de equivalência de) funções reais p - integráveis no sentido de Lebesgue, isto é,

$$L^p(\Omega)=\{f:\Omega\to\mathbb{R} \text{ tal que } f \text{ é mensurável e } \int_\Omega |f|^p\ d\mu<\infty\}.$$

O Espaço $L^p(\Omega)$ é normado com a seguinte norma

$$||f||_{L^p(\Omega)}=\left(\int_\Omega |f|^p\ d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p=\infty$, teremos um outro espaço, na qual denotaremos por $L^\infty(\Omega)$ que será definido o espaço das (classes de equivalência de) funções reais mensuráveis limitadas, isto é,

$$L^\infty(\Omega)=\{f:\Omega\to\mathbb{R} \text{ tal que } f \text{ é mensurável e} \sup|f|<\infty\}.$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ é normado, munido da seguinte norma

$$||f||_\infty=\sup_\Omega|f|.$$

Mais tarde vamos enunciar um teorema que apresenta condições suficientes para integrar funções em $L^1(\Omega)$. Antes, veremos duas desigualdades.

Teorema 2.2 (cf. [2], pag 56) (Desigualdade de Holder) *Seja* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$, *onde* $p > 1$ *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Então* $f \cdot g \in L^1$ *e* $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

Teorema 2.3 (cf. [3], pag 4) (Desigualdade de Young) *Sejam* $a, b > 0$ *e* $1 < p, q < \infty$, *tais que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Então,*

$$ab \leq \frac{a^q}{q} + \frac{b^p}{p}.$$

Teorema 2.4 (cf. [2], pag 44) (Teorema da Convergência Dominada) *Seja* (f_n) *uma sequência de funções integráveis que converge em quase todo ponto para uma função mensurável* f. *Se existe uma função integrável* g *tal que* $|f_n| \leq g$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então* f *é integrável e*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Teorema 2.5 (cf. [4], pag 94) *Seja* (f_n) *uma sequência de funções de* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$ *tais que* $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$, *onde* Ω *é um aberto de* $\mathbb{R}^N$. *Então, existe uma subsequência* f_{n_k} *de* (f_n), *e uma função* $h \in L^p(\Omega)$, *tal que*

$$f_{n_k}(x) \to f(x) \;\; q.t.p \; em \; \Omega$$

e

$$|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \;\; q.t.p \; em \; \Omega.$$

2.3 Resultados Importantes

A demonstração destes resultados encontram-se em [4], [5], [6], [10], [12] e [14].

Teorema 2.6 (cf. [4], pag 69) (Eberlein-Sm̆uliam) *Seja* X *um espaço de Banach reflexivo. Então, toda sequência limitada* $(u_n) \subset X$ *possui uma subsequência fracamente convergente.*

Teorema 2.7 (cf. [4], pag 58) *Seja* (x_n) *uma sequência em* E. *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *fracamente, então* $(||x_n||)$ *é limitada e* $||x|| \leq \liminf ||x_n||$.

Teorema 2.8 (cf. [4], pag 60) *Seja* C *um subconjunto convexo em* E. *Então* C *é fracamente fechado se, e só, se for fechado na topologia forte.*

Teorema 2.9 (cf. [5], pag 200) (Príncipio do Máximo) *Seja* $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ *satisfazendo* $-\Delta u = f$ *em* Ω, *com* $f \geq 0$ *em* Ω. *Suponhamos que* $u \geq 0$ *em* $\partial\Omega$. *Então* $u > 0$ *em* Ω *ou* $u \equiv 0$ *em* Ω.

Teorema 2.10 (cf. [6], pag 65) (Lema de Hopf) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, *suponha* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *e* $c \equiv 0$ *em* Ω. *Suponha ainda que* $Lu \geq 0$ *em* Ω *e que exista um ponto* $x_0 \in \partial\Omega$ *tal que* $u(x_0) > u(x)$ *para todo* $x \in \Omega$. *Finalmente, suponha que exista uma bola* $B \subset \Omega$ *com* $x_0 \in \partial\Omega$. *Logo,*

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial v}(x_0) < 0$, *onde* v *é o vetor normal unitário exterior a* B *em* x_0;

(2) *Se* $c \geq 0$ *em* Ω, *a mesma conclusão do item anterior é válida sempre que* $u(x_0) \geq 0$.

Teorema 2.11 (cf. [6], pag 64) (Identidades de Green) *Suponhamos que* Ω *seja um subconjunto aberto limitado de* $\mathbb{R}^N$ *com fronteira suave. Se* $u, v \in C^2(\Omega)$ *então*

(1) $\displaystyle\int_\Omega \Delta u \; dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial v_1} \; dS,$

(2) $\displaystyle\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \; dx = -\int_\Omega u \cdot \Delta v \; dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial v_1} \cdot u \; dS,$

(3) $\displaystyle\int_\Omega (u \cdot \Delta v - v \cdot \Delta u) \; dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \cdot \frac{\partial v}{\partial v_1} - v \cdot \frac{\partial u}{\partial v_1} \right) \; dS.$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave e L o operador fortemente elíptico definido por

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0(x)u.$$

Lema 2.5 (cf. [14], pag 82) *Se u satisfaz*

$$\begin{cases} Lu \geq 0, & em \quad \Omega, \\ u > 0, & em \quad \Omega, \\ u = 0, & em \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

e ϕ_1 é uma autofunção associada ao primeiro autovalor do operador L, isto é, ϕ_1 satisfaz

$$\begin{cases} L\phi_1 = \lambda_1\phi_1, & em \quad \Omega, \\ \phi_1 > 0, & em \quad \Omega, \\ \phi_1 = 0, & em \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

com $u, \phi_1 \in C^1(\overline{\Omega})$, então existe $\alpha > 0$ tal que $u - \alpha\phi_1 > 0$ em Ω.

Teorema 2.12 (cf. [10], pag 235) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe $C^2(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, com $1 < p < \infty$. Então, existe uma única função $u \in W^{2,p}(\Omega) \bigcap W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & em \quad \Omega, \\ u = 0, & em \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Teorema 2.13 (cf. [10], pag 106) *Seja L um operador elíptico em um domínio limitado Ω, com $c \leq 0$, e seja f e os coeficientes de L limitados e pertencentes a $C^\alpha(\Omega)$. Suponha que Ω satisfaz a condição da esfera exterior em cada ponto da fronteira. Então, se ϕ é contínua sobre a fronteira, o problema de Dirichlet,*

$$\begin{cases} Lu = f, & em \quad \Omega, \\ u = \phi, & em \quad \partial\Omega, \end{cases} .$$

tem uma única solução $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$.

Teorema 2.14 (cf. [12], pag 55) (Multiplicadores de Lagrange) *Seja X um espaço de Banach, $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ e o seguinte conjunto $S = \{v \in X : F(v) = 0\}$. Suponha que para todo $u \in S$ temos $F'(u) \neq 0$. Se $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $u_0 \in S$ tal que $J(u_0) = \inf J(u) = \min J(u)$ em S, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $J'(u_0) = \lambda F'(u_0)$.*

Teorema 2.15 *A equação*

$$\begin{cases} -\Delta e = 1, & em \quad \Omega, \\ e = 0, & em \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

tem uma solução fraca, sendo a mesma única, que pode ser visto em **(cf. [9], pag 27).** *Usando o Teorema 2.9 concluimos que, $e > 0$ em Ω.*

2.4 Definição do Espaço de Sobolev

Nesta seção vamos conhecer o espaço de Sobolev e algumas de suas propriedades. Vamos usar este espaço para encontrarmos solução fraca de algumas Equações Diferenciais Parciais. Os resultados desta seção estão provados em [3], [4] e [9].

Primeiramente vamos apresentar o conceito de derivada fraca de uma função $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, onde Ω é um conjunto aberto do $\mathbb{R}^N$. Definimos $C_c^\infty(\Omega)$ como sendo o conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, tal que φ possui derivadas parciais contínuas de todas as ordens e suporte compacto em Ω. Chamaremos $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ de função teste.

Se $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ é uma função teste com suporte compacto em Ω, segue da fórmula de integração por partes que

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v \, dx = -\int_\Omega u \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} u \cdot v \cdot \eta_i \, dx,$$

que

$$\int_\Omega u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \varphi \, dx,$$

considerando $v = \varphi$ para $i = \{1, 2, ..., n\}$ e η_i é a derivada normal exterior a Ω.

Os termos de fronteira não aparecem pelo fato de que φ tem suporte compacto em Ω.

Definição 2.7 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dizemos que uma função $v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ é a derivada parcial fraca de u em relação a x_i, se*

$$\int_\Omega u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = -\int_\Omega v_i \cdot \varphi \, dx,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Neste caso denotaremos $v_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

Observação 2.4.1 *Dizemos que u é fracamente diferenciável se todas as derivadas parciais fracas de primeira ordem de u existirem.*

Agora, usando o conceito de derivada fraca, vamos definir o espaço de Sobolev.

Vamos convencionar que $\dfrac{\partial u}{\partial x_0} = u$ e $1 \leq p < \infty$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Definimos o Espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ como um espaço vetorial normado

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \text{ para } \text{ todo } i = 0, 1, ..., n \right\}$$

com a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\sum \int_{\Omega} |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo $i = 0, 1, .., n$.

O dois teoremas a seguir abordam respectivamente, algumas propriedades elementares do espaço $W^{1,p}(\Omega)$ e uma desigualdade interesante entre normas do espaço $W^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 2.16 (cf. [4], pag 211, 264) *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um dominio limitado, $N \geq 1$, então*

(1) *$W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach, para $1 \leq p \leq \infty$.*

(2) *$W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo, para $1 < p < \infty$.*

(3) *$C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Todas as conclusões em **(1)** e **(2)** valem também para $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 2.17 (cf. [4], pag 218)(Desigualdade de Poincaré) *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e limitado. Então existe uma constante C tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \text{ para } \text{ todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular, $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e é equivalente a norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

2.4.1 Imersões de Sobolev

Serão enunciados teoremas que diz respeito as imersões contínuas e compactas. Antes disso, vamos ver como se define cada uma delas.

Definição 2.8 *Sejam E e F espaços de Banach, com $E \subset F$ e $i : E \to F$ uma injeção canônica de E em F, que a cada elemento $x \in E$ fazemos corresponder $i(x) = x$ como elemento de F. Dizemos que a imersão de E em F é conínua quando existe uma constante $C > 0$, tal que $||x||_F \leq C||x||_E$, para todo $x \in E$.*

Definição 2.9 *Sejam E e F espaços de Banach, com $E \subset F$. Dizemos que E está compactamente imerso em F, se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) *Existe uma constante $C > 0$, tal que $||x||_F \leq C||x||_E$, para todo $x \in E$,*

(ii) *Qualquer sequência limitada em E é pré-compacta em F.*

Denotamos imersão compacta e imersão contínua por $E \hookrightarrow F$ e $E \hookrightarrow^c F$, respectivamente.

Agora vamos enunciar os teoremas de imersão compacta e imersão contínua.

Teorema 2.18 (cf. [4], pag 278)(Sobolev, Gagliardo, Nirenberg) *Seja $1 \leq p < N$. Então*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*},$$

onde p^* é dado por $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ e uma constante $C = C(p, N)$ tal que

$$||u||_{0,p^*} \leq C||\nabla u||_{0,p},$$

para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Corolário 2.1 (cf. [4], pag 281) *Seja $1 \leq p < N$. Então*

$$W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para todo $q \in [p, p^*]$ é uma imersão contínua.

Corolário 2.2 (cf. [4], pag 281) *Seja $p = N$. Então*

$$W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para todo $q \in [N, \infty]$ é uma imersão contínua.

Teorema 2.19 (cf. [4], pag 285)(Rellich-Kondrachov) *Suponha que* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *seja limitado e de classe* $C^1(\Omega)$*. Então as seguintes imersões são compactas:*

$$\begin{cases} W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow^c L^q(\Omega), & \textit{para todo } q \in [p, p^*), \quad \textit{onde} \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \quad \textit{se} \quad p < N; \\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow^c L^q(\Omega), & \textit{para todo } q \in [p, +\infty), \quad \textit{se} \quad p = N; \\ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow^c L^q(\overline{\Omega}), & \textit{se} \quad p > N. \end{cases}$$

Em particular, $W^{1,P}(\Omega) \hookrightarrow^c L^p(\Omega)$ com a imersão compacta para todo p (e para todo N).

Teorema 2.20 (cf. [3], pag 121)(Decomposição Espectral do Laplaciano) *Seja* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado. Então, o problema: encontrar* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $u \in W_0^{1,2}(\Omega) - \{0\}$ *tal que*

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u, \quad \textit{em} \quad \Omega, \\ u &= 0, \quad \textit{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

possui uma sequência de soluções $(\lambda_n,\ \varphi_n)_{n \geq 1}$ *tal que:*

(i) $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ..., \lambda_n \leq ...$ *e* $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$,

(ii) $\varphi_n \in C^\infty(\Omega)$,

(iii) λ_1 *é simples e a autofunção correspondente* φ_1 *pode ser escolhida tal que* $\varphi_1(x) > 0$,

(iv) $\lambda_1 = \min \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 \ dx : u \in W_0^{1,2}(\Omega), \int_\Omega u^2 \ dx = 1 \right\}$,

(v) *Se* $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *é tal que* $\int_\Omega |\nabla u|^2 \ dx = \lambda_1 \int_\Omega u^2 \ dx$*, então existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $u = c \cdot \varphi_1$,

(vi) *Se* $\partial\Omega$ *é regular, então* $\varphi_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Teorema 2.21 (cf. [9], pag 28) *Suponhamos* $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *com* $\Delta w \leq 0$ *em* Ω*. Então* $w \leq 0$ *q.t.p em* Ω.

2.5 Diferenciabilidade de Funcionais

Nesta seção iremos definir diferenciabilidade de funcionais no sentido de Gâteaux e Fréchet. Vamos considerar $(X, ||\cdot||)$ e $(Y, ||\cdot||)$ como sendo espaços de Banach e $I \in$

$C(X, \mathbb{R})$ um funcional. Para uma dada aplicação $r : X \to Y$, dizemos que $r(h) = o(\|h\|_X)$ se, e somente se,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|r(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Definição 2.10 *Seja x um ponto do conjunto aberto $U \subset X$. Uma aplicação $I : U \to Y$ é diferenciável a Fréchet em $x \in U$ se existe um operador linear $A \in L(X, Y)$ tal que*

$$I(x+h) - I(x) - Ah = o(\|h\|_X)$$

Outro tipo de derivada de um funcional é a derivada direcional ou derivada de Gâteaux, que definimos a seguir.

Definição 2.11 *Seja $I : U \to Y$ uma aplicação e $x \in U$. Dizemos que I é diferenciável à Gâteaux se existe o limite abaixo:*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|I(x+th) - I(x)\|}{t} = \frac{\partial I}{\partial h}(x), \text{ para todo } h \in X.$$

Exemplo 1 *O funcional $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right)^2, & se \quad y \neq 0, \\ 0, & se \quad y = 0, \end{cases}$$

é diferenciável à Gâteaux em $(0,0)$, mas não é diferenciável à Fréchet em $(0,0)$.

De fato a função é diferênciavel a Gâteaux. Pois tomando a direção $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ com $h_2 \neq 0$, assim vamos calcular $\dfrac{\partial f}{\partial h}(0,0)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial h}(0,0) &= \lim_{t \to 0} \frac{||f[(0,0) + t(h_1, h_2)] - f(0,0)||}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(th_1, th_2)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{t(h_1^2 \cdot h_2^2)^2}{(t^2 \cdot h_1^4 + h_2^2)^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Se f é diferenciável à Fréchet em $(0,0)$, o limite $\lim\limits_{||h|| \to 0} \dfrac{|f(h) - f(0)|}{||h||}$ deve existir em qualquer direção do ponto $(0,0)$. O que não ocorre, pois tomando a direção

$$h = (h_1, h_1^2) \to (0,0)$$

temos

$$\begin{aligned}
\lim_{||h|| \to 0} \frac{|f(h) - f(0)|}{||h||} &= \lim_{h_1 \to 0} \left(\frac{h_1^4}{h_1^4 + h_1^4} \right)^2 \cdot \frac{1}{(h_1^2 + h_1^4)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{4} \lim_{h_1 \to 0} \frac{1}{(h_1^2 + h_1^4)^{\frac{1}{2}}} \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

3 Teoremas de Sub e Supersolução

O lema a seguir assegura, sob certas condições, a existência de pontos críticos para funcionais definidos em espaços de Banach Reflexivos. Ele será usado na demonstração do Teorema de sub e Supersolução fraca na qual vamos garantir a existência de solução em $W_0^{1,2}(\Omega)$ quando f é uma função de Carathéodory baseado no livro do Struwe em **(cf. [15], pag 17)**.

Definição 3.1 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $n \geq 1$ *um conjunto mensurável não-vazio, e* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Dizemos que* f *é uma função de Carathéodory se satisfaz:*

(i) $x \mapsto f(x,s)$ *é mensurável em* Ω *para todo* $s \in \mathbb{R}$;

(ii) $s \mapsto f(x,s)$ *é continua em* $\mathbb{R}$, *q.t.p em* Ω.

Lema 3.1 *Sejam* X *um espaço de Banach reflexivo com norma* $\| \cdot \|$, $M \subset X$ *um subconjunto fechado na topologia fraca e* $I : M \to \mathbb{R}$ *satisfazendo:*

($\mathbf{I}_1$) $I(u) \to \infty$ *quando* $\| u \| \to \infty$ *para todo* $u \in M$, *ou seja,* I *é coercivo;*

($\mathbf{I}_2$) I *é fracamente semicontínuo inferiormente em* M *com relação a* X, *isto é, toda sequência* $(u_n) \subset M$ *tal que* $u_n \rightharpoonup u$ *em* X *satisfaz:*

$$I(u) \leq \liminf_{n \to \infty} I(u_n). \tag{3.1}$$

Então I *é limitado inferiormente e atinge seu ínfimo em* M.

Demonstração: Seja $\alpha = \inf \{I(u) : u \in M\}$ e (u_n) uma sequência minimizante em M, ou seja, uma sequência tal que $I(u_n) \to \alpha$. Uma vez que I é coercivo, temos que (u_n) é limitado, pois caso contrário existiria uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que $\| u_{n_j} \| \to \infty$ quando $n_j \to \infty$. Logo $I(u_{n_j}) \longrightarrow \infty$ contrariando o fato de (u_n) ser minimizante. Como X é reflexivo, temos pelo Teorema 2.6 que a menos de subsequência, existe u em X tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente quando $n \to \infty$. Mas como M é fracamente fechado, então $u \in M$. Mas como I é fracamente semicontínuo inferiormente, temos que

$$I(u) \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} I(u_n) = \alpha \tag{3.2}$$

e portanto I atinge ínfimo em M.

$\square$

Antes de vermos uma aplicação do Lema 3.1, observemos alguns fatos relevantes.

Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u), \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0, \quad\quad\quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{P}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, $N \geq 3$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory.

Dizemos que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (P) se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega f(x,u) \cdot \varphi \, dx, \text{ para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.3}$$

Essa definição nos motiva a encontrar o seguinte funcional $I : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ associado ao problema (P)

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega F(x,u)dx, \tag{3.4}$$

onde

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,u)dx.$$

Observemos que

$$I'(u)\varphi = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi - \int_\Omega f(x,u)\varphi \, dx, \text{ para todo } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{3.5}$$

De fato,

$$\begin{aligned} I'(u)\varphi &= \lim_{t\to 0} \frac{I(u+t\varphi) - I(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u+t\varphi)|^2 - \int_\Omega [F(x,u+t\varphi) - F(x,u)] - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2}{t} \end{aligned}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + t\nabla u\nabla\varphi + \frac{t^2}{2}|\nabla\varphi|^2 - \frac{1}{2}|\nabla u|^2\right] - \int_\Omega [F(x,u+t\varphi) - F(x,u)]}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\displaystyle t\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 - \int_\Omega [F(x,u+t\varphi) - F(x,u)]}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\left\{\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi + \frac{t}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 - \int_\Omega \left[\frac{F(x,u+t\varphi)-F(x,u)}{t}\right]\right\}$$

$$= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi + \lim_{t\to 0}\frac{t}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 - \lim_{t\to 0}\int_\Omega \left[\frac{F(x,u+t\varphi)-F(x,u)}{t}\right].$$

Como f é continua em Ω obtemos que

$$I^{'}(u)\varphi = \int_\Omega \nabla u\nabla\varphi - \int_\Omega \lim_{t\to 0}\left[\frac{F(x,u+t\varphi)-F(x,u)}{t}\right].$$

Por definição, $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left[\frac{F(x,u+t\varphi)-F(x,u)}{t}\right] = F^{'}(x,u)\varphi.$

Sabe-se que $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,u)ds$. Daí, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$F^{'}(x,s) = f(x,u)|_0^s = f(x,s) - f(x,0).$$

Observemos que $f(x,0) = 0$, logo $F^{'}(x,s) = f(x,s)$. Considerando $s = u$, obtemos que $F^{'}(x,u) = f(x,u)$. Assim, pelo Teorema **??**, para toda $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tem-se

$$F^{'}(x,u)\cdot\varphi = f(x,u)\cdot\varphi.$$

Portanto,

$$I^{'}(u)\varphi = \int_\Omega \nabla u\nabla\varphi - \int_\Omega f(x,u)\varphi \text{ para toda } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Note que $I^{'}(u)\varphi = 0$ implica em $\displaystyle\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi = \int_\Omega f(x,u)\varphi dx$. Daí, $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ é uma solução fraca de (P) se, e só, se u é ponto crítico de I. Em função disso, dizemos que I é o funcional associado ao problema (P).

Definição 3.2 *Uma função* $\underline{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ *é dita subsolução fraca do problema* (P) *se* $\underline{u} \le 0$ *sobre* $\partial\Omega$ *e*

$$\int_\Omega \nabla\underline{u}\cdot\nabla\varphi dx \le \int_\Omega f(x,\underline{u})\varphi dx, \tag{3.6}$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \varphi \geq 0$. *Analogamente, uma função* $\overline{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ *é dita supersolução fraca do problema* (P) *se* $\overline{u} \geq 0$ *sobre* $\partial\Omega$ *e*

$$\int_\Omega \nabla\overline{u} \cdot \nabla\varphi dx \geq \int_\Omega f(x,\overline{u})\varphi dx, \tag{3.7}$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \varphi \geq 0$.

3.1 O Teorema de Sub e Supersolução no sentido fraco

Teorema 3.1 *(Teorema de sub e supersolução fraca). Suponha que* $\underline{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ *é uma subsolução fraca e que* $\overline{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ *é uma supersolução fraca para o problema* (P). *Suponha ainda que existam constantes* $\underline{c}, \overline{c} \in \mathbb{R}$ *tais que* $\underline{c} \leq \underline{u} \leq \overline{u} \leq \overline{c}$ *em quase todo ponto de* Ω. *Então, o problema* (P) *admite uma solução fraca* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *satisfazendo* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ *em quase todo ponto de* Ω.

Demonstração: Vamos considerar o funcional associado ao problema (P)

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx.$$

Denotaremos por $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,t)dt$ a primitiva de f. Observemos que como F é a primitiva de f e esta é uma função de Carathéodory, segue que F é também uma função de Caratheodory. Desta forma, não temos condições suficientes para garantir que o funcional I seja limitado ou até mesmo diferenciável em $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Seja $M = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) : \underline{u} \leq u \leq \ \overline{u}$ q.t.p$\}$. Iremos verificar que as hipóteses do Lema 3.1 são satisfeitas para I restrito à M e garantir a existência de um mínimo local para o funcional I em M.

Temos que:

1º) $W_0^{1,2}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo, conforme visto no Teorema 2.16.

2º) O conjunto M é fechado e convexo.

De fato, seja $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência em M tal que $u_m \to u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Temos que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, pois este é Banach. Como $(u_m) \subset M$ então

$$\underline{u}(x) \leq u_m(x) \leq \overline{u}(x). \tag{3.8}$$

Vamos mostrar que u também pertençe a M.

De fato, passando o limite em (3.8) quando $m \to \infty$ e como $u_m(x) \to u(x)$, quando $m \to \infty$, obtemos que

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x).$$

Acabamos de concluir que u é limite de uma sequência $(u_m) \subset M$. Portanto M é fechado.

Agora, dadas v_1 e $v_2 \in M$ então $\underline{u} \leq v_1 \leq \overline{u}$ e $\underline{u} \leq v_2 \leq \overline{u}$. Dado $0 \leq t \leq 1$, segue que

$$(1-t)\underline{u} \leq (1-t)v_1 \leq (1-t)\overline{u} \tag{3.9}$$

e

$$t\underline{u} \leq tv_2 \leq t\overline{u}. \tag{3.10}$$

Então, somando as expressões (3.9) e (3.10) tem-se

$$(1-t)\underline{u} + t\underline{u} \leq (1-t)v_1 + tv_2 \leq (1-t)\overline{u} + t\overline{u}.$$

Portanto, M é convexo. Logo M é fechado pelo Teorema 2.8.

Por hipótese temos que $\underline{u}, \overline{u} \in L^\infty(\Omega)$. Conforme definido M, se $u \in M$ então $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$. Daí $u \in L^\infty(\Omega)$. Logo, $M \subset L^\infty(\Omega)$.

Dado $u \in M$, temos que $\underline{c} \leq u \leq \overline{c}$ em quase todo ponto de Ω. Daí $u(x) = |u(x)| \leq k$ em quase todo ponto de Ω, onde k é o maximo dos $|\underline{c}|$ e $|\overline{c}|$.

Portanto, como $f(x,\cdot)$ é contínua, logo

$$|F(x,u(x))| = \left| \int_0^{u(x)} f(x,t)dt \right| \leq \int_0^{u(x)} |f(x,t)|\, dx \leq \int_0^k |f(x,t)|\, dt = c(x) \tag{3.11}$$

em quase todo ponto de Ω, em que $c(x)$ é uma função mensurável.

Pela Desigualdade de Poincaré temos que

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} dx \tag{3.12}$$

é uma norma equivalente à norma do espaço $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Uma vez que

$$|F(x,u(x))| \leq c, \tag{3.13}$$

segue que

$$\int_\Omega F(x,u(x))\ dx \leq \int_\Omega c\ dx. \tag{3.14}$$

Logo, por (3.12) e (3.14) temos

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)\ dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} - \int_\Omega c\ dx \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} - c|\Omega|.
\end{aligned}$$

Portanto, I é limitado inferiormente em M e $I(u) \to \infty$ quando $\|u\| \to \infty$ em M. Assim, a coercividade de I está provada.

Finalmente, falta verificar que I é fracamente semicontínuo inferiormente em M, isto é, dadas $u_m, u \in M$ tais que $u_m \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ temos que verficar que

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)\ dx \\
&\leq \liminf \left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx - \int_\Omega F(x,u_m)\ dx\right).
\end{aligned}$$

Como $(u_m) \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ temos pelo Teorema 2.7 que,

$$\|u\|^2 \leq \liminf \|u_m\|^2. \tag{3.15}$$

Logo, para ver que I é fracamente semicontínuo inferiormente em M falta mostrar que

$$\int_\Omega F(x,u_m) dx \to \int_\Omega F(x,u) dx.$$

Como a imersão $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é compacta e (u_m) é limitada, passando a subsequência temos que

$$u_{m_j} \to u \text{ em } L^2(\Omega),$$

e pelo Teorema 2.5 obtemos

$$u_{m_j}(x) \to u(x) \text{ em quase todo ponto de } \Omega.$$

Sabemos que F é contínua na segunda coordenada e que $u_{m_j}(x) \to u(x)$ em quase todo ponto de Ω. Obtemos, $F(x, u_{m_j}) \to F(x, u)$ em quase todo ponto de Ω.

Como $|F(x, u(x))| \leq c$ uniformemente, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\int_\Omega F(x,u)dx = \lim_{m_j \to +\infty} \int_\Omega F(x, u_{m_j})dx = \int_\Omega \lim_{m_j \to +\infty} F(x, u_{m_j})dx.$$

Daí segue que

$$\int_\Omega F(x,u)dx = \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega F(x, u_m)dx. \tag{3.16}$$

Por (3.15) e (3.16) obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|u\|^2 dx \ - \int_\Omega F(x,u)dx \ &\leq \ \liminf \left[\frac{1}{2}\|u_m\|^2 - \int_\Omega F(x,u_m)\right] dx \\
&= \ \frac{1}{2} \liminf \|u_m\|^2 - \ \limsup \int_\Omega F(x,u_m)dx.
\end{aligned}$$

Desse modo concluímos que I é semicontínuo inferiormente. Portanto, pelo Lema 3.1, o funcional I atinge o ínfimo em M; que chamaremos de u.

Para ver que u é solução fraca do problema (P) tomamos $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$ e definimos

$$v_\varepsilon = \min \{\overline{u}, \ \max \{\underline{u}, \ u + \varepsilon\varphi \ \}\} = u + \varepsilon\varphi - \varphi^\varepsilon + \varphi_\varepsilon,$$

em que

$$\varphi^\varepsilon = \ \max \{0, \ u + \varepsilon\varphi - \overline{u}\} \ \geq \ 0;$$

$$\varphi_\varepsilon = -\min \{0, \ u + \varepsilon\varphi - \underline{u}\} \ \geq \ 0.$$

Temos que $v_\varepsilon \leq \overline{u}$. Por outro lado se $\overline{u} \geq \max\{\underline{u}, u + \varepsilon\varphi\}$, então $v_\varepsilon \geq \underline{u}$. Portanto $v_\varepsilon \in M$.

Observemos que, conforme φ^ε *e* φ_ε foram definidas, segue que $\varphi^\varepsilon, \ \varphi_\varepsilon \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Como M é convexo, então $(1-t)u + tv_\varepsilon \in M$. Além disso, como u minimiza I em M, temos que

$$I(u + t(v_\varepsilon - u)) - I(u) = I((1-t)u + tv_\varepsilon) - I(u) \geq 0.$$

Daí, para todo $t \in (0,1)$ temos

$$\frac{I(u+t(v_\varepsilon - u)) - I(u)}{t} = \frac{I((1-t)u + tv_\varepsilon) - I(u)}{t} \geq 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{I(u+t(v_\varepsilon - u)) - I(u)}{t}\right] \\ &= I'(u)(v_\varepsilon - u) \\ &= \varepsilon I'(u)\varphi - I'(u)\varphi^\varepsilon + I'(u)\varphi_\varepsilon, \end{aligned}$$

visto que $v_\varepsilon = u + \varepsilon\varphi - \varphi^\varepsilon + \varphi_\varepsilon$. Assim podemos concluir que

$$I'(u)\varphi \geq \frac{1}{\varepsilon}\left[I'(u)\varphi^\varepsilon - I'(u)\varphi_\varepsilon\right]. \tag{3.17}$$

Temos que

$$I'(\overline{u})\varphi^\varepsilon = \int_\Omega \nabla\overline{u}\nabla\varphi^\varepsilon - \int_\Omega f(x,\overline{u})\varphi^\varepsilon. \tag{3.18}$$

Como u é supersolução fraca temos por definição que

$$\int_\Omega \nabla\overline{u}\nabla\varphi^\varepsilon - \int_\Omega f(x,\overline{u})\varphi^\varepsilon \geq 0. \tag{3.19}$$

para toda $\varphi^\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$.

Daí, concluímos que

$$I'(\overline{u})\varphi^\varepsilon \geq 0. \tag{3.20}$$

Assim, tendo em vista que $I'(\overline{u})\varphi^\varepsilon \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} I'(u)\varphi^\varepsilon &= \left[I'(\overline{u}) + I'(u) - I'(\overline{u})\right]\varphi^\varepsilon \\ &= I'(\overline{u})\varphi^\varepsilon + \left[I'(u) - I'(\overline{u})\right]\varphi^\varepsilon \\ &\geq I'(u)\varphi^\varepsilon - I'(\overline{u})\varphi^\varepsilon \end{aligned} \tag{3.21}$$

Também temos que

$$I'(u)\varphi^\varepsilon = \int_\Omega \nabla u\nabla\varphi^\varepsilon - \int_\Omega f(x,u)\varphi^\varepsilon. \tag{3.22}$$

Reescrevendo a expressão (3.21) e usando o fato em (3.22) tem-se que

$$\begin{aligned} I'(u)\varphi^\varepsilon &\geq \int_\Omega \nabla u\nabla\varphi^\varepsilon - \int_\Omega f(x,u)\varphi^\varepsilon - \int_\Omega \nabla\overline{u}\nabla\varphi^\varepsilon + \int_\Omega f(x,\overline{u})\varphi^\varepsilon \\ &= \int_\Omega \{(\nabla u - \nabla\overline{u})\nabla\varphi^\varepsilon - (f(x,u) + f(x,\overline{u}))\varphi^\varepsilon\} \qquad (3.23) \\ &= \int_\Omega \{\nabla(u-\overline{u})\nabla\varphi^\varepsilon - (f(x,u) - f(x,\overline{u}))\,\varphi^\varepsilon\} \end{aligned}$$

Seja

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : u(x) + \varepsilon\varphi(x) \geq \overline{u}(x) > u(x)\}.$$

e

$$\Omega_\varepsilon^c = \{x \in \Omega : u(x) + \varepsilon\varphi(x) < \overline{u}(x) \leq u(x)\}.$$

Daí reescrevendo (3.23) em relação a Ω_ε e Ω_ε^c, sabendo que $\Omega_\varepsilon^c = \emptyset$, pois não existe $x \in \Omega$ tal que $\overline{u}(x) \leq u(x)$ obtemos

$$I^{'}(u)\varphi^\varepsilon \geq \int_{\Omega_\varepsilon} \{\nabla(u - \overline{u})\nabla(u + \varepsilon\varphi - \overline{u}) - [f(x,u) - f(x,\overline{u})](u + \varepsilon\varphi - \overline{u})\}. \tag{3.24}$$

Sejam agora

$$\begin{aligned}
\Omega_\varepsilon^+ &= \{x \in \Omega_\varepsilon : [f(x,u(x)) - f(x,\overline{u}(x))] \geq 0\},\\
\Omega_\varepsilon^- &= \{x \in \Omega_\varepsilon : [f(x,u(x)) - f(x,\overline{u}(x))] \leq 0\}.
\end{aligned}$$

Em Ω_ε^+ valem as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}
[f(x,u) - f(x,\overline{u})](u + \varepsilon\varphi - \overline{u}) &= [f(x,u) - f(x,\overline{u})](u - \overline{u})\\
&\quad + [f(x,u) - f(x,\overline{u})]\varepsilon\varphi\\
&\leq [f(x,u) - f(x,\overline{u})]\varepsilon\varphi \qquad (3.25)\\
&\leq \varepsilon|f(x,u) - f(x,\overline{u})||\varphi|.
\end{aligned}$$

visto que $\varphi > 0$ e $u - \overline{u} \leq 0$.

Por outro lado, em Ω_ε^- temos

$$\begin{aligned}
[f(x,u) - f(x,\overline{u}))(u + \varepsilon\varphi - \overline{u}) &= [f(x,u) - f(x,\overline{u})](u - \overline{u})\\
&\quad + [f(x,u) - f(x,\overline{u})]\varepsilon\varphi\\
&\leq [f(x,u) - f(x,\overline{u})](u - \overline{u}) \qquad (3.26)\\
&\leq |f(x,u) - f(x,\overline{u})| \cdot |u - \overline{u}|\\
&\leq \varepsilon|f(x,u) - f(x,\overline{u})||\varphi|,
\end{aligned}$$

visto que $|u - \overline{u}| \leq \varepsilon|\varphi|$.

Logo, por (3.25) e (3.26), temos

$$\int_{\Omega_\varepsilon} [f(x,u) - f(x,\overline{u})](u + \varepsilon\varphi - \overline{u}) = \int_{\Omega_\varepsilon^+} [f(x,u) - f(x,\overline{u})](u + \varepsilon\varphi - \overline{u})$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \int_{\Omega_\varepsilon^-} [f(x,u) - f(x,\overline{u})]\,(u + \varepsilon\varphi - \overline{u}) \\
&\leq \int_{\Omega_\varepsilon^+} \varepsilon |f(x,u) - f(x,\overline{u})||\varphi| \\
&\quad + \int_{\Omega_\varepsilon^-} \varepsilon |f(x,u) - f(x,\overline{u})||\varphi| \qquad (3.27)\\
&= \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon |f(x,u) - f(x,\overline{u})||\varphi|.
\end{aligned}
$$

Observemos também que

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(u-\overline{u})\nabla(u+\varepsilon\varphi-\overline{u}) &= \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(u-\overline{u})|^2 + \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(u-\overline{u})\nabla\varphi \\
&\geq \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(u-\overline{u})\nabla\varphi. \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

Por (3.24), (3.27) e (3.28) temos

$$
\begin{aligned}
I'(u)\varphi^\varepsilon &\geq \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(u-\overline{u})\nabla(u+\varepsilon\varphi-\overline{u}) - \int_{\Omega_\varepsilon} [f(x,u) - f(x,\overline{u})]\,(u+\varepsilon\varphi-\overline{u}) \\
&\geq \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(u-\overline{u})\nabla(u+\varepsilon\varphi-\overline{u}) - \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} |f(x,u) - f(x,\overline{u})| \qquad (3.29)\\
&\geq \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(u-\overline{u})\nabla\varphi - \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} |f(x,u) - f(x,\overline{u})||\varphi|.
\end{aligned}
$$

Daí obtemos que

$$
\frac{I'(u)\varphi^\varepsilon}{\varepsilon} \geq \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(u-\overline{u})\nabla\varphi - \int_{\Omega_\varepsilon} |f(x,u) - f(x,\overline{u})| \cdot |\varphi|. \qquad (3.30)
$$

Note que $|\Omega_\varepsilon| \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Além disso, os integrandos acima não dependem de ε. Assim, (3.30) obtemos que

$$
\begin{aligned}
\liminf_{\varepsilon\to 0^+} \frac{I'(u)\varphi^\varepsilon}{\varepsilon} &\geq \liminf_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(u-\overline{u})\nabla\varphi - \int_{\Omega_\varepsilon} |f(x,u) - f(x,\overline{u})||\varphi| \right) \\
&= \liminf_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(u-\overline{u})\nabla\varphi \qquad (3.31)\\
&\quad - \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} |f(x,u) - f(x,\overline{u})||\varphi| \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Considerando o fato de $\underline{u}$ ser subsolução fraca, temos

$$
\int_\Omega \nabla\underline{u}\nabla\varphi_\varepsilon - \int_\Omega f(x,\underline{u})\varphi_\varepsilon \leq 0, \qquad (3.32)
$$

para toda $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$.

Temos que,

$$I^{'}(\underline{u})\varphi_\varepsilon = \int_\Omega \nabla\underline{u}\nabla\varphi_\varepsilon - \int_\Omega f(x,\underline{u})\varphi_\varepsilon. \tag{3.33}$$

Daí concluímos que

$$I^{'}(\underline{u})\varphi_\varepsilon \leq 0. \tag{3.34}$$

De (3.34) segue que

$$\begin{aligned} I^{'}(u)\varphi_\varepsilon &= \left[I^{'}(\underline{u}) + I^{'}(u) - I^{'}(\underline{u})\right]\varphi_\varepsilon \\ &= I^{'}(\underline{u})\varphi_\varepsilon + \left[I^{'}(u) - I^{'}(\underline{u})\right]\varphi_\varepsilon \\ &\leq I^{'}(u)\varphi_\varepsilon - I^{'}(\underline{u})\varphi_\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Reescrevendo a expressão (3.35) obtemos que:

$$\begin{aligned} I^{'}(u)\varphi_\varepsilon &\leq \int_\Omega \nabla u\nabla\varphi_\varepsilon - \int_\Omega f(x,u)\varphi_\varepsilon \\ &\quad - \int_\Omega \nabla\underline{u}\nabla\varphi_\varepsilon + \int_\Omega f(x,\underline{u})\varphi_\varepsilon \\ &= \int_\Omega \left\{(\nabla u - \nabla\underline{u})\nabla\varphi_\varepsilon - [f(x,u) - f(x,\underline{u})]\varphi_\varepsilon\right\} \\ &= \int_\Omega \left\{\nabla(u - \underline{u})\nabla\varphi_\varepsilon - [f(x,u) - f(x,\underline{u})]\varphi_\varepsilon\right\}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Seja

$$\tilde{\Omega}_\varepsilon = \left\{x \in \Omega : u(x) + \varepsilon\varphi(x) \leq \underline{u}(x) < u(x)\right\}.$$

e

$$\tilde{\Omega}_\varepsilon^c = \left\{x \in \Omega : u(x) + \varepsilon\varphi(x) > \underline{u}(x) \geq u(x)\right\}.$$

Daí reescrevendo (3.36) com relação a $\tilde{\Omega}_\varepsilon$ e $\tilde{\Omega}_\varepsilon^c$, sabendo que $\tilde{\Omega}_\varepsilon^c = \emptyset$, pois não existe $x \in \Omega$ tal que $\underline{u}(x) \geq u(x)$, obtemos

$$I^{'}(u)\varphi_\varepsilon \leq \int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} \left\{\nabla(u - \underline{u})\nabla(-u - \varepsilon\varphi + \underline{u}) - [f(x,u) - f(x,\underline{u})](-u - \varepsilon\varphi + \underline{u})\right\}, \tag{3.37}$$

Sejam agora

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_\varepsilon^+ &= \left\{x \in \tilde{\Omega}_\varepsilon : \ [f(x,u(x)) - f(x,\underline{u}(x))] \geq 0\right\}, \\ \tilde{\Omega}_\varepsilon^- &= \left\{x \in \tilde{\Omega}_\varepsilon : \ [f(x,u(x)) - f(x,\underline{u}(x))] \leq 0\right\}. \end{aligned}$$

Em $\tilde{\Omega}_\varepsilon^+$ valem as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}
[f(x,u)-f(x,\underline{u})](-u-\varepsilon\varphi+\underline{u}) &= [f(x,u)-f(x,\underline{u})](-u+\underline{u}) \\
&\quad -[f(x,u)-f(x,\underline{u})]\varepsilon\varphi \qquad (3.38)\\
&\geq [f(x,u)-f(x,\underline{u})]\varepsilon\varphi.
\end{aligned}$$

Enquanto em $\tilde{\Omega}_\varepsilon^-$ temos as desigualdades

$$\begin{aligned}
[f(x,u)-f(x,\underline{u})](-u-\varepsilon\varphi+\underline{u}) &= [f(x,u)-f(x,\underline{u})](\underline{u}-u) \\
&\quad -[f(x,u)-f(x,\underline{u})]\varepsilon\varphi \qquad (3.39)\\
&\geq [f(x,u)-f(x,\underline{u})]\varepsilon\varphi.
\end{aligned}$$

Logo, por (3.38) e (3.39), temos

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon}[f(x,u)-f(x,\underline{u})](-u-\varepsilon\varphi+\underline{u}) &= \int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon^+}[f(x,u)-f(x,\underline{u})](-u-\varepsilon\varphi+\underline{u}) \\
&\quad +\int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon^-}[f(x,u)-f(x,\underline{u})](-u-\varepsilon\varphi+\underline{u}) \\
&\geq \int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon^+}\varepsilon[f(x,u)-f(x,\underline{u})]\varphi \\
&\quad +\int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon^-}\varepsilon[f(x,u)-f(x,\underline{u})]\varphi \\
&= \int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon}\varepsilon[f(x,u)-f(x,\underline{u})]\varphi. \qquad (3.40)
\end{aligned}$$

Além disso, observemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon}\nabla(u-\underline{u})\nabla(-u-\varepsilon\varphi+\underline{u}) &= \int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon}-|\nabla(u-\underline{u})|^2-\varepsilon\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla(u-\underline{u})\nabla\varphi \\
&= -\int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon}|\nabla(u-\underline{u})|^2-\varepsilon\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla(u-\underline{u})\nabla\varphi \\
&\leq \varepsilon\int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon}\nabla(u-\underline{u})\nabla\varphi. \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

Usando as expressões (3.40), (3.41) em (3.37) segue que

$$\begin{aligned}
I'(u)\varphi_\varepsilon &\leq \int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon}\nabla(u-\underline{u})\nabla(-u-\varepsilon\varphi+\underline{u})-[f(x,u)-f(x,\underline{u})](-u-\varepsilon\varphi+\underline{u}) \\
&= \int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon}\nabla(u-\underline{u})\nabla(-u-\varepsilon\varphi+\underline{u}) \\
&\quad -\int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon}[f(x,u)-f(x,\underline{u})](-u-\varepsilon\varphi+\underline{u}) \qquad (3.42)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \varepsilon \int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} \nabla(u-\underline{u})\nabla\varphi - \int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} [f(x,u)-f(x,\underline{u})]\,(-u-\varepsilon\varphi+\underline{u}) \\
&\leq \varepsilon \int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} \nabla(u-\underline{u})\nabla\varphi - \int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} \varepsilon[f(x,u)-f(x,\underline{u})]\varphi.
\end{aligned}
$$

Daí obtemos que

$$
\frac{I'(u)\varphi_\varepsilon}{\varepsilon} \leq \int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} \nabla(u-\underline{u})\nabla\varphi - \int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} [f(x,u)-f(x,\underline{u})]\varphi. \tag{3.43}
$$

Quando $\varepsilon \to 0$, segue que $|\tilde{\Omega}_\varepsilon| \to 0$. Além disso, os integrandos não dependem de ε.

De (3.43) obtemos que

$$
\begin{aligned}
\limsup_{\varepsilon\to 0^+} \frac{I'(u)\varphi_\varepsilon}{\varepsilon} &\leq \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} \nabla(u-\underline{u})\nabla\varphi\right) \\
&\quad + \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \left(-\int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} [f(x,u)-f(x,\underline{u})]\varphi\right) \\
&= \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} \nabla(u-\underline{u})\nabla\varphi\right) \\
&\quad - \liminf_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} [f(x,u)-f(x,\underline{u})]\varphi\right) \qquad (3.44) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Logo, por (3.17), (3.43) e (3.44), obtemos

$$
\begin{aligned}
I'(u)\varphi &\geq \liminf_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{I'(u)\varphi^\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{I'(u)\varphi_\varepsilon}{\varepsilon}\right] \\
&= \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{I'(u)\varphi^\varepsilon}{\varepsilon} + \liminf_{\varepsilon\to 0} \left(-\frac{I'(u)\varphi_\varepsilon}{\varepsilon}\right) \\
&= \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{I'(u)\varphi^\varepsilon}{\varepsilon} - \limsup_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{I'(u)\varphi_\varepsilon}{\varepsilon}\right) \\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
I'(u)\varphi \geq 0,
$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Como tomammos inicialmente $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ arbitrária, então podemos considerar os casos de φ ser nula, positiva ou até mesmo negativa. Sendo assim, invertendo o seu sinal temos que $I'(u)\varphi \leq 0$. Logo $I'(u)\varphi = 0$ para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Em particular, consideremos a sequência $(\varphi_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ para concluir que

$$
I'(u)\varphi_n = 0.
$$

$C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W_0^{1,2}(\Omega)$ pelo Teorema 2.16. Então podemos considerar a sequência $(\varphi_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_n \to \varphi$ para uma dada $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Temos que

$$0 = \lim_{n\to\infty} I'(u)\varphi_n = I^{'}(u)\varphi$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Portanto $I'(u) = 0$.

3.2 Aplicação

Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= k(x)u - u|u|^{p-2}, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0, \qquad\qquad\qquad\quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.45}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N,\ N \geq 3$ é um domínio limitado e regular, $p = \dfrac{2N}{N-2}$ e k é uma função contínua tal que

$$1 \leq k(x) \leq K < \infty.$$

para todo $x \in \Omega$.

Afirmação 3.1 $\underline{u} = 1$ *é uma subsolução fraca.*

De fato, temos que $-\Delta\underline{u} = 0$. Além disso, temos que $\nabla\underline{u} = 0$, pois $\underline{u}$ é uma função constante. Substituindo $\underline{u} = 1$ em (3.45) obtemos que

$$f(x,1) = k(x)\cdot 1 - 1\cdot|1|^{p-2} = k(x) - 1.$$

Agora, usando a definição de subsolução fraca segue que,

$$\int_\Omega 0\cdot\nabla\varphi\ dx \leq \int_\Omega (k(x)-1)\varphi \Rightarrow \int_\Omega (k(x)-1)\varphi \geq 0,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \leq 0$. Isto faz sentido, pois $k(x) \geq 1$ e $\varphi \geq 0$ q.t.p.

Afirmação 3.2 $\overline{u} = c > 1$, *onde c é uma constante suficiente grande é uma supersolução fraca.*

De fato, temos que $\Delta\overline{u} = 0$, pois $c > 1$ é constante. Substituindo em (3.45) obtemos que

$$f(x,c) = k(x)\cdot c - c^{p-1}.$$

Por outro lado, temos que $\nabla \overline{u} = 0$. Para verificarmos que $\overline{u} = c$ é supersolução fraca vamos usar a definição,

$$\int_\Omega 0 \cdot \nabla\varphi \, dx \geq \int_\Omega \left[k(x) \cdot c - c^{p-1}\right] \varphi \, dx = \int_\Omega c \left[k(x) - c^{p-2}\right] \varphi \, dx.$$

Daí

$$\int_\Omega c \left[k(x) - c^{p-2}\right] \varphi \, dx \leq 0.$$

Isso faz sentido, pois o integrando $c\left[k(x) - c^{p-2}\right] \varphi$ é negativo, pois, como $2 < p < 6$ então $p - 2 > 0$. Além disso, c é um número suficiente grande, logo c^{p-2} acaba sendo suficiente grande. Assim, $k(x) - c^{p-2} \leq 0$. Como $c > 1$ e $\varphi > 0$, concluímos que $\displaystyle\int_\Omega c \left[k(x) - c^{p-2}\right] \varphi \, dx \leq 0$.

Como $\underline{u} = 1$ e $\overline{u} = c$ pertencem a $W_0^{1,2}(\Omega)$ e $1 = \underline{u} \leq \overline{u} = c < \infty$, pelo Teorema 3.1, segue que o problema (3.45) admite uma solução fraca u com $1 \leq u \leq c$.

□

3.3 O Teorema de Sub e Supersolução no sentido clássico

Agora vamos conhecer uma outra versão do Teorema 3.1 que será aplicado à uma classe de problemas elípticos do tipo côncavo-convexo que se anulam na fronteira. A partir daqui, vamos considerar sub e supersolução no sentido clássico, isto é, funções que estão em $C^2(\overline{\Omega})$.

Antes de enunciarmos o referido teorema, vamos definir sub e supersolução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u), \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0, \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio regular e $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^\infty(\Omega)$.

Aqui estamos no referindo a menos que se diga o contrário, à solução clássica do problema (P_1), isto é, uma função $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisfaz (P_1).

Definição 3.3 *Uma função* $\underline{U} \in C^2(\overline{\Omega})$ *é dita uma subsolução do problema* (P_1) *se*

$$\begin{cases} -\Delta \underline{U} & \leq & f(\underline{U}), & em & \Omega, \\ \underline{U} & \leq & 0, & em & \partial\Omega. \end{cases}$$

Definição 3.4 *Uma função* $\overline{U} \in C^2(\overline{\Omega})$ *é dita uma supersolução do problema* (P_1) *se*

$$\begin{cases} -\Delta \overline{U} & \geq & f(\overline{U}), & em & \Omega, \\ \overline{U} & \geq & 0, & em & \partial\Omega. \end{cases}$$

Teorema 3.2 *Suponhamos que o problema* (P_1) *possui uma subsolução* $\underline{U}$ *e uma supersolução* $\overline{U}$ *com* $\underline{U} \leq \overline{U}$ *em* Ω. *Então o problema* (P_1), *possui soluções* $U, V \in C^{2,\infty}(\overline{\Omega})$ *tais que* $\underline{U} \leq U \leq V \leq \overline{U}$. *Além disso, qualquer solução* u *de* (P_1) *com* $\underline{U} \leq u \leq \overline{U}$ *é tal que* $U \leq u \leq V$, *ou seja,* U *é solução mínima e* V *é solução máxima com respeito ao intervalo* $[\underline{U},\ \overline{U}]$.

Para a demonstração, veja **(cf. [14], pag 76).**

3.3.1 Aplicação

Suponha $0 < q < 1$ e $\lambda > 0$. Então, o problema

$$\begin{cases} -\Delta u & = & \lambda u^q, & \text{em} & \Omega, \\ u & = & 0, & \text{em} & \partial\Omega. \end{cases},$$

possui uma solução positiva.

Solução: Vamos considerar

$$\varphi_1 \in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{3.46}$$

uma autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1 do operador $-\Delta$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Vamos também considerar

$$v = t\varphi_1 > 0, \tag{3.47}$$

onde t é uma constante positiva e $\varphi_1 > 0$ pelo Lema 2.5.

De (3.46) e (3.47) obtemos que

$$-\Delta v = -\Delta(t\varphi_1) = t \cdot (-\Delta\varphi_1) = t \cdot (\lambda_1\varphi_1).$$

Desejamos que v seja uma subsolução do problema, isto é,

$$-\Delta v \leq \lambda v^q \text{ em } \Omega, \text{ou seja}, t \cdot (\lambda_1 \varphi_1) \leq \lambda (t\varphi_1)^q. \tag{3.48}$$

Para isso basta tomar t tal que

$$t^{1-q} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda} \cdot \|\varphi_1\|_\infty^{1-q} \leq 1. \tag{3.49}$$

De fato, de (3.49) segue que

$$\frac{t\lambda_1}{t^q \lambda} \cdot \frac{\sup|\varphi_1|}{(\sup|\varphi_1|)^q} \leq 1,$$

implicando que

$$t\lambda_1 \cdot \sup|\varphi_1| \leq \lambda \cdot (t \cdot \sup|\varphi_1|)^q.$$

Como $0 < q < 1$, vale que $(\sup|\varphi_1|)^q \leq \varphi_1^q$. Sendo assim, de (3.48) segue que $t \cdot \lambda_1 \cdot \varphi_1 \leq t \cdot \lambda_1 \cdot \sup|\varphi_1| \leq \lambda \cdot (t \cdot \sup|\varphi_1|)^q \leq \lambda (t\varphi_1)^q$ em Ω, provando que $t\varphi_1$ é subsolução do problema.

Consideremos $\theta \in C^2(\Omega)$ a única solução positiva de

$$\begin{cases} -\Delta \theta &= 1, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \theta &= 0, \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

conforme o Teorema 2.15.

Considere $\delta = k\theta$ onde k é uma constante positiva. Pela linearidade do operador laplaciano, temos $-\Delta\delta = k$. Desejamos que δ seja uma supersolução do problema, isto é, $-\Delta\delta \geq \lambda\delta^q$. Daí, devemos mostrar que $k \geq \lambda(k\theta)^q$ em Ω.

Para isso , basta tomarmos k tal que

$$k^{\frac{1-q}{q}} \geq ||\theta||_\infty. \tag{3.50}$$

De fato, pela expressão (3.50) tem-se

$$k^{\frac{1}{q}-1} \geq \lambda \cdot \sup|\theta| \geq \lambda \cdot \theta \text{ para todo } x \in \Omega. \tag{3.51}$$

Elevando ambos os membros da desigualdade (3.51) por q obtemos $\left(\dfrac{k^{\frac{1}{q}}}{k}\right)^q \geq \lambda \cdot \theta^q$, assim, $\dfrac{k}{k^q} \geq \lambda\theta^q$ e daí, $k \geq \lambda \cdot \theta^q \cdot k^q$.

Desejamos que $t\lambda_1\varphi_1 - k \leq 0$. Pela linearidade do laplaciano obtemos que

$$-\Delta(t\varphi_1 - k\theta) = -\Delta(t\varphi_1) + \Delta(k\theta) = t(-\Delta\varphi_1) - k(-\Delta\theta) = t\lambda_1\varphi_1 - k.$$

Tomando $k \geq t\lambda_1||\varphi_1||_\infty$, ou seja, $k \geq t\lambda_1 \cdot \sup|\varphi_1|$, concluímos que $t\lambda_1\varphi_1 - k \leq 0$.

De fato, como $\varphi \leq \sup|\varphi_1|$ para todo $x \in \Omega$, obtemos que $k \geq t\lambda_1\varphi_1$, isto é, $t\lambda_1\varphi_1 - k \leq 0$. Logo, pelo Teorema 2.21 temos que $t\varphi_1 - k\theta \leq 0$, ou seja, $t\varphi_1 \leq k\theta$.

Portanto pelo Teorema 3.2 existe uma solução $u \in C^{2,\infty}(\Omega)$ tal que $t\varphi_1 \leq u \leq k\theta$.

$\square$

4 O problema côncavo-convexo

Consideremos a seguinte equação elíptica não linear

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u^q + u^p, & \text{em} & \Omega, \\ u &\geq 0, & \text{em} & \Omega, \\ u &= 0, & \text{em} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N \geq 3$ é limitado, com fronteira suave, $0 < q < 1 < p \leq \frac{N+2}{N-2} := 2^* - 1$ e λ um parâmetro real.

Uma solução clássica do problema (P_λ) é uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que satisfaz (P_λ) pontualmente. Quando falamos do problema (P_λ) estamos nos referindo, a menos que se diga o contrario, à solução clássica.

O funcional associado ao problema (P_λ) é $I_\lambda : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx. \tag{4.1}$$

Dizemos que u é solução mínima de (P_λ) quando $u \leq v$ para toda solução v de (P_λ).

Mostraremos a existência de solução não trivial para o problema (P_λ) baseado no método de sub e supersolução.

4.1 Resultado Principal

Teorema 4.1 *Para todo* $0 < q < 1 < p$ *existe* $\Lambda \in \mathbb{R},\ \Lambda > 0$ *tal que para todo* $\lambda \in (0, \Lambda)$, *o problema* (P_λ) *tem uma solução mínima* u_λ *tal que* $I_\lambda(u_\lambda) < 0$. *E ainda mais,* u_λ *é não-decrescente com respeito a* λ.

Para provarmos o resultado acima, vamos fazer uso dos Lemas a seguir.

Lema 4.1 *Suponha* $0 < q < 1 < p$, *e* $\alpha > 0$. *Então existe* $\lambda_0 > 0$ *tal que para todo* $0 < \lambda \leq \lambda_0$ *existe* $M = M(\lambda) > 0$ *satisfazendo*

$$M \geq \lambda M^q \alpha^q + M^p \alpha^p. \tag{4.2}$$

Demonstração: Consideremos as funções:

$$\begin{aligned} f(x) &= x, \\ g(x) &= Ax^q + Bx^p, \end{aligned}$$

onde $0 < q < 1 < p$, tal que $A = \lambda\alpha^q$ e $B = \alpha^p$. Temos,

$$\begin{aligned} g'(x) &= qAx^{q-1} + pBx^{p-1} > 0, \text{ para todo } x > 0 \\ g''(x) &= q(q-1)Ax^{q-2} + p(p-1)x^{p-2} > 0, \text{ para todo } x > 0 \end{aligned}$$

e $g(0) = 0$. Assim, g é convexa em $[0, +\infty)$.

Logo, existe $c > 0$ tal que $f(x) \geq g(x)$, para $0 < x < c$. Assim temos,

$$x \geq Ax^q + Bx^p = \lambda\alpha^q x^q + \alpha^p x^p.$$

Fazendo $x = M$ verificamos a desigualdade (4.2).

$\square$

Lema 4.2 *Suponhamos que* $0 < q < 1 < p$ *e* $\lambda_1 > 0$. *Então existe* $\overline{\lambda} > 0$ *tal que* $\overline{\lambda}t^q + t^p > \lambda_1 t$, *para todo* $t > 0$.

Demonstração: Definamos $f(t) = \lambda_1 t - t^p$. Sabendo que:

$$\lim_{t\to+\infty} (\lambda_1 t - t^p) \;=\; -\infty,$$

temos que existe $r > 1$ tal que $\lambda_1 t - t^p \leq 0$, para todo $t \geq r$. Para $t \in (1, r]$ existe um $\overline{r} > 0$ tal que $\lambda_1 t - t^p < \overline{r} \cdot t^q$. Para todo $t \in (0, 1)$, temos que $\lambda_1 t > t^p$. Como $\lambda_1 t$ e t^p são positivos obtemos que $\lambda_1 t - t^p < \lambda_1 t$. Por hipótese, $0 < q < 1$, logo $\lambda_1 t < \lambda_1 t^q$. Logo, $\lambda_1 t - t^p < \lambda_1 t < \lambda_1 t^q$. Daí, para $\overline{\lambda} = \max\{0, \overline{r}, \lambda_1\}$, temos $\lambda_1 t - t^p < \overline{\lambda}t^q$ quando $t > 0$.

$\square$

Lema 4.3 *Seja* $\Lambda := \sup\{\lambda > 0 : (P_\lambda)$ *tem uma solução*$\}$. *Então,*

$$0 < \Lambda < \infty.$$

Demonstração: Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta e &= 1, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ e &= 0, \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Lema 4.1, existe $\lambda_0 > 0$ tal que, para todo $0 < \lambda \leq \lambda_0$, existe $M > 0$ satisfazendo $M \geq \lambda M^q \|e\|_\infty^q + M^p \|e\|_\infty^p$. Mas $-\Delta(Me) = M$ e como $\|e\|_\infty^q \geq e^q$ e $\|e\|_\infty^p \geq e^p$, temos que $-\Delta(Me) \geq \lambda(Me)^q + (Me)^p$. Assim, Me é supersolução de (P_λ).

Por outro lado, tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno $\varepsilon\varphi_1$ é uma subsolução de (P_λ), onde $\varphi_1 \in C^2(\Omega)$ é autofunção do operador $-\Delta$ associada ao primeiro autovalor λ_1 em relação a Ω. De fato, temos que

$$\begin{aligned} \Delta(\varepsilon\varphi_1) &= \lambda_1 \varepsilon \varphi_1 \\ &= \varepsilon(\lambda_1\varphi_1) \\ &= \left(\frac{\varepsilon^{1-q}\lambda_1}{\lambda}\varphi_1^{1-q}\right) \cdot \lambda(\varepsilon\varphi_1)^q. \end{aligned}$$

O que resta agora é determinar $\varepsilon > 0$ tal que $\left(\dfrac{\varepsilon^{1-q}\lambda_1}{\lambda}\varphi_1^{1-q}\right) < 1$.

Note que $\varphi_1 \in L^\infty(\Omega)$ pois $\varphi_1 \in C(\overline{\Omega})$ e $\overline{\Omega}$ é compacto. Além disso, $\varphi_1 > 0$, de modo que existe $k > 0$ tal que $\varphi_1(x) \leq k$, para todo $x \in \Omega$. Logo, $\varphi_1^{1-q}(x) \leq k^{1-q}$ para todo $x \in \Omega$.

Tomando $k^{1-q} = c > 0$, temos que $\varphi_1(x) \leq c$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Daí,

$$\frac{\varepsilon^{1-q}\lambda_1}{\lambda}\varphi_1^{1-q} \leq \varepsilon^{1-q}\left(\frac{\lambda_1 c}{\lambda}\right) \leq 1.$$

Portanto, podemos considerar $0 < \varepsilon \leq \left(\dfrac{\lambda_1 c}{\lambda}\right) \leq 1$, isto significa que

$$\varepsilon(\lambda_1\varphi_1) = -\Delta(\varepsilon\varphi_1) \leq \lambda_1(\varepsilon\varphi_1)^q \leq \lambda(\varepsilon\varphi_1)^q + (\varepsilon\varphi_1)^p.$$

Isto mostra que $\varepsilon\varphi_1$ é uma subsolução de (P_λ).

Também temos que, escolhendo ε suficientemente pequeno, $\varepsilon\varphi_1 < Me$.

De fato, como $-\Delta(\varepsilon\varphi_1) \geq 0$ e φ_1 é uma autofunção do operador Δ, segue do Lema 2.5 que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon\varphi_1 < Me$, onde $\varepsilon\varphi_1$ e Me pertecem a $C^2(\Omega)$.

Logo, pelo Teorema 3.2 temos que o problema (P_λ) tem uma solução u tal que $\varepsilon\varphi_1 \leq u \leq Me$, quando $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$. A partir da definição de Λ, temos que $\lambda_0 \leq \Lambda$.

Seja λ tal que (P_λ) tem solução u. Então,

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q + u^p, & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Multiplicando por φ_1 e integrando sobre Ω, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega (-\Delta u)\cdot\varphi_1 dx &= \int_\Omega \varphi_1(\lambda u^q + u^p)dx\\ &= \int_\Omega \varphi_1 \lambda u^q dx + \int_\Omega \varphi_1 u^p dx.\end{aligned}$$

Usando a Terceira Identidade de Green obtemos

$$\int_\Omega \varphi_1\cdot(-\Delta u)dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial\varphi_1}{\partial v_1}dS - \int_{\partial\Omega}\varphi_1\frac{\partial u}{\partial v_1}dS + \int_\Omega u\cdot(-\Delta\varphi_1)dx. \tag{4.3}$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Por outro lado temos que φ_1 é uma autofunção positiva que se anula na fronteira de Ω. Logo, $\int_{\partial\Omega}\varphi_1\frac{\partial u}{\partial v_1}dS = 0$. De acordo com o Teorema 2.10, segue que $\frac{\partial\varphi_1}{\partial v_1} < 0$ sobre $\partial\Omega$. Como $u > 0$, segue que $\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial\varphi_1}{\partial v_1}dS < 0$.

De (4.3) segue que

$$\int_\Omega \varphi_1(-\Delta u)dx < \int_\Omega u(-\Delta\varphi_1)dx = \lambda_1\int_\Omega \varphi_1 u dx,$$

daí,

$$\int_\Omega (\lambda u^q + u^p)\varphi_1 dx < \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1 u dx.$$

e pelo Lema 4.2 obtemos

$$\lambda\int_\Omega \varphi_1 u^q dx + \int_\Omega u^p\varphi_1 dx < \lambda_1\int_\Omega \varphi_1 u dx < \overline{\lambda}\int_\Omega u^q\varphi_1 dx + \int_\Omega \varphi_1 u^p dx.$$

e assim segue que $\lambda < \overline{\lambda}$, e dessa forma segue da definição de supremo que $\Lambda < \overline{\lambda}$.

Portanto,

$$0 < \Lambda < \infty.$$

$\square$

Lema 4.4 *Para todo $\lambda \in (0,\Lambda)$ o problema (P_λ) possui uma solução.*

Demonstração:

Dado $0 < \lambda < \Lambda$, seja $\lambda < \mu < \Lambda$ e u_μ uma solução do problema.

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu u_\mu^q + u_\mu^p, & \text{em } \Omega,\\ u_\mu \geq 0, & \text{em } \Omega,\\ u_\mu = 0, & \text{em } \partial\Omega.\end{cases} \qquad (P_\mu)$$

Logo $-\Delta u_\mu = \mu u_\mu^q + u_\mu^p > \lambda u_\mu^q + u_\mu^q$, assim u_μ é supersolução de (P_λ).

Agora, tomando $\varepsilon > 0$ segue que $\varepsilon\varphi_1$ é uma subsolução de (P_λ) visto na demonstração do Lema 4.3, onde φ_1 é a autofunção associada ao autovalor λ_1 em relação à Ω. Dessa forma, $\varepsilon\varphi_1 < u_\mu$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Logo, pelo Teorema 3.2, existe u de (P_λ), tal que $\varepsilon\varphi_1 \le u \le u_\mu$. Logo, (P_λ) possui solução.

□

A seguir mostraremos que (P_λ) possui solução mínima. Para isso, é necessário conhecermos o seguinte lema de comparaçao.

Lema 4.5 *Suponha que $f(t)$ é uma função tal que $t^{-1}f(t)$ é decrescente para $t > 0$. Seja $v, w \in C^2(\Omega)$ satisfazendo,*

$$\begin{cases} -\Delta v & \le & f(v), & \text{em} & \Omega, \\ v & > & 0, & \text{em} & \Omega, \\ v & = & 0, & \text{em} & \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.4}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta w & \ge & f(w), & \text{em} & \Omega, \\ w & > & 0, & \text{em} & \Omega, \\ w & = & 0, & \text{em} & \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.5}$$

Então, $w \ge v$ em Ω.

Demonstração: Por (4.4) e (4.5) temos que

$$-v\Delta w + w\Delta v \ge f(w)v - f(v)w = vw\Big(\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\Big). \tag{4.6}$$

Considere agora $\theta(t)$ uma função não decrescente e suave, tal que $\theta(t) \equiv 1$ para $t \ge 1$ e $\theta(t) \equiv 0$ para $t \le 0$. Como por exemplo,

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad t \le 0, \\ \dfrac{1}{1 + \frac{e^{\frac{1}{t}}}{e^{\frac{1}{1-t}}}}, & \text{se} \quad 0 < t < 1, \\ 1, & \text{se} \quad t \ge 1. \end{cases}$$

Assim, defina

$$\theta_\varepsilon(t) = \theta\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big), \text{ onde } \theta_\varepsilon(t) \ge 0, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Multiplicando (4.6) por $\theta_\varepsilon(v-w)$ e integrando sobre Ω, obtemos:

$$\int_\Omega [-v\Delta w + w\Delta v]\theta_\varepsilon(v-w)\ dx \geq \int_\Omega vw\Big[\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\Big]\theta_\varepsilon(v-w)\ dx. \tag{4.7}$$

Observemos que,

$$\begin{aligned} \int_\Omega [-v\Delta w + w\Delta v]\theta_\varepsilon(v-w)\ dx &= \int_\Omega -v\Delta w \cdot \theta_\varepsilon(v-w)\ dx \\ &\quad + \int_\Omega w\Delta v \cdot \theta_\varepsilon(v-w)\ dx \\ &= \int_\Omega \Delta v[w\theta_\varepsilon(v-w)]\ dx \\ &\quad - \int_\Omega \Delta w[v\theta_\varepsilon(v-w)]\ dx. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Usando a Segunda Identidade de Green no segundo membro da expressão (4.8) temos que:

$$\int_\Omega \Delta v[w\theta_\varepsilon(v-w)]\ dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial[w\theta_\varepsilon(v-w)]}{\partial v_1} dx - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla[w\theta_\varepsilon(v-w)]\ dx, \tag{4.9}$$

e

$$-\int_\Omega \Delta w[v\theta_\varepsilon(v-w)]\ dx = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial[v\theta_\varepsilon(v-w)]}{\partial v_1}\ dx + \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla[v\theta_\varepsilon(v-w)]\ dx. \tag{4.10}$$

Substituindo (4.9) e (4.10) em (4.8) e usando o fato das funções u e v se anularem na fronteira, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_\Omega [-v\Delta w + w\Delta v]\theta_\varepsilon(v-w)\ dx &= \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla[v\theta_\varepsilon(v-w)]\ dx \\ &\quad - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla[w\theta_\varepsilon(v-w)]\ dx. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Usando a regra da cadeia no segundo membro da expressão (4.11), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla[v\theta_\varepsilon(v-w)]dx &= \int_\Omega \nabla w \cdot \{\nabla v \cdot \theta_\varepsilon(v-w) + v[\theta_\varepsilon(v-w)]\}\ dx \\ &= \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \cdot \theta_\varepsilon(v-w)\ dx \\ &\quad + \int_\Omega \nabla w \cdot v \cdot \nabla(v-w) \cdot \theta'_\varepsilon(v-w)\ dx \\ &= \int_\Omega \nabla w \nabla v \cdot \theta_\varepsilon(v-w)\ dx \\ &\quad + \int_\Omega v \cdot (\nabla v - \nabla w) \cdot \theta'_\varepsilon(v-w)\ dx. \end{aligned} \tag{4.12}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla [w\theta_\varepsilon(v-w)]\; dx &= \int_\Omega \nabla v \{\nabla w \cdot \theta_\varepsilon(v-w) + w[\theta_\varepsilon(v-w)]\}\; dx \\
&= \int_\Omega \nabla v \nabla w \cdot \theta_\varepsilon(v-w)\; dx \\
&\quad + \int_\Omega w \cdot \nabla(v-w) \cdot \theta'_\varepsilon(v-w)\; dx \qquad (4.13)\\
&= \int_\Omega \nabla v \nabla w \cdot \theta_\varepsilon(v-w) \\
&\quad + \int_\Omega w \cdot (\nabla v - \nabla w) \cdot \theta'_\varepsilon(v-w)\; dx.
\end{aligned}$$

Subtraindo (4.13) de (4.12) e usando a distributiva, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla [v\theta_\epsilon(v-w)]dx - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla[w\theta_\varepsilon(v-w)]dx \\
= & \int_\Omega [\nabla w \nabla v \theta_\varepsilon(v-w) + v\nabla w(\nabla v - \nabla w)\cdot \theta'_\varepsilon(v-w)]dx \\
& - \int_\Omega [\nabla v \nabla w \theta_\varepsilon(v-w) + w\nabla v(\nabla v - \nabla w)\cdot \theta'_\varepsilon(v-w)]dx \qquad (4.14)\\
= & \int_\Omega v\nabla w(\nabla v - \nabla w)\cdot \theta'_\varepsilon(v-w)dx + \int_\Omega \nabla v \nabla w \theta_\varepsilon(v-w)dx \\
& - \int_\Omega w\nabla v(\nabla v - \nabla w)\cdot \theta'_\varepsilon(v-w)]dx - \int_\Omega \nabla v \nabla w \theta_\varepsilon(v-w)dx.
\end{aligned}$$

Observemos que temos dois termos simétricos na expresão (4.14). Assim, usando a expressão (4.14) em (4.11) segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega [-v\Delta w + w\Delta v]\theta_\varepsilon(v-w)dx &= \int_\Omega v \cdot \nabla w(\nabla v - \nabla w)\cdot \theta'_\varepsilon(v-w)\; dx \qquad (4.15)\\
&\quad - \int_\Omega w \cdot \nabla v(\nabla v - \nabla w)\cdot \theta'_\varepsilon(v-w)\; dx.
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo $\int_\Omega [v\nabla v(\nabla v - \nabla w)\theta'_\varepsilon(u-w)]\; dx$ em (4.15), obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega [-v\Delta w + w\Delta v]\theta_\varepsilon(v-w)dx &= \int_\Omega v \cdot \nabla w(\nabla v - \nabla w)\cdot \theta'_\varepsilon(v-w)\; dx \\
&\quad - \int_\Omega w \cdot \nabla v(\nabla v - \nabla w)\cdot \theta'_\varepsilon(v-w)\; dx \qquad (4.16)\\
&\quad + \int_\Omega [v\nabla v(\nabla v - \nabla w)\theta'_\varepsilon(u-w)]\; dx \\
&\quad - \int_\Omega [v\nabla v(\nabla v - \nabla w)\theta'_\varepsilon(u-w)]\; dx.
\end{aligned}$$

Reagrupando os termos de (4.16) obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega [-v\Delta w + w\Delta v]\theta_\varepsilon(v-w)dx &= \int_\Omega [v\cdot\nabla w(\nabla v - \nabla w)\cdot\theta'_\varepsilon(v-w)\ dx \\ &- \int_\Omega v\nabla v(\nabla v - \nabla w)\cdot\theta'_\varepsilon(u-w)]\ dx \qquad (4.17)\\ &+ \int_\Omega [v\nabla v(\nabla v - \nabla w)\cdot\theta'_\varepsilon(u-w)\ dx \\ &- \int_\Omega w\cdot\nabla v(\nabla v - \nabla w)\cdot\theta'_\varepsilon(v-w)]\ dx.\end{aligned}$$

Observemos que temos termos em comuns nas duas integrais do segundo membro da expressão (4.17) nais quais são

$$v\cdot(\nabla v - \nabla w)\cdot\theta'_\varepsilon(v-w)$$

e

$$\nabla v\cdot(\nabla v - \nabla w)\cdot\theta'_\varepsilon(v-w),$$

respectivamente. Assim, colocando-os em evidência na expressão (4.17) obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega [-v\Delta w + w\Delta v]\theta_\varepsilon(v-w)\ dx &= \int_\Omega (\nabla w - \nabla v)v\theta'_\varepsilon(v-w)(\nabla v - \nabla w)\ dx \qquad (4.18)\\ &+ \int_\Omega (v-w)(\nabla v - \nabla w)\nabla v\cdot\theta'_\varepsilon(v-w)\ dx.\end{aligned}$$

Observemos que

$$\int_\Omega (\nabla w - \nabla v)\cdot v\cdot\theta'_\varepsilon(v-w)(\nabla v - \nabla w)dx \le 0, \qquad (4.19)$$

por dois motivos:

(I) $(\nabla w - \nabla v)(\nabla v - \nabla w) = -(\nabla w - \nabla v)(\nabla w - \nabla v) = -(\nabla w - \nabla v)^2 \le 0,$

(II) θ é não decrescente, sua derivada é positiva ou nula. Além disso, $v \ge 0$.

Assim, de (4.18) segue que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega [-v\Delta w + w\Delta v]\theta_\epsilon(v-w)\ dx \qquad (4.20)\\ &\le \int_\Omega (v-w)\theta'_\varepsilon(v-w)\nabla v(\nabla v - \nabla w)\ dx.\end{aligned}$$

Considerando a função γ_ε dada por $\gamma_\varepsilon(t) = \displaystyle\int_0^t s\theta'_\varepsilon(s)\ ds$, obtemos

$$\gamma_\varepsilon(v-w) = \int_0^{v-w} s\theta'_\varepsilon(s)\ ds. \qquad (4.21)$$

Tomando o gradiente em os membros de (4.21) temos

$$\begin{aligned}\nabla[\gamma_\varepsilon(v-w)] &= \nabla\int_0^{v-w} s\theta'_\varepsilon(s)\ ds\\ &= \Big(\frac{\partial}{\partial_1}\int_0^{v-w} s\theta'_\varepsilon(s)\ ds, ..., \frac{\partial}{\partial_n}\int_0^{v-w} s\theta'_\varepsilon(s)\ ds\Big).\end{aligned}$$

Mas, $\displaystyle\int_\Omega s\theta'_\varepsilon(s)\ ds = G(s)$, com $G'(s) = s\theta_\varepsilon(s)$. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos que $\displaystyle\int_0^{v-w} s\theta'_\varepsilon(s)\ ds = G(v-w) - G(0)$. Daí,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial_i}\int_0^{v-w} s\theta'_\varepsilon(s)\ ds &= \frac{\partial}{\partial_i}\left[G(v-w) - G(0)\right]\\ &= \frac{\partial}{\partial_i}G(v-w) - \frac{\partial}{\partial_i}G(0)\\ &= \frac{\partial}{\partial_i}G(v-w) - 0,\end{aligned}$$

pois a função $\theta_\varepsilon(s) = 0$ quando $s = 0$, logo $\theta'_\varepsilon(s) = 0$ e consequentemente $s\cdot\theta'_\varepsilon(s) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial_i}\int_0^{v-w} s\theta'_\varepsilon(s)\ ds &= \frac{\partial}{\partial_i}G(v-w)\\ &= \frac{\partial}{\partial_i}(v-w)\cdot G'(v-w).\end{aligned}$$

Como $G'(s) = s\cdot\theta_\varepsilon(v-w)$, concluimos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial_i}\Big[G(v-w) - G(0)\Big] &= \frac{\partial}{\partial_i}(v-w)\cdot G'(v-w)\\ &= \frac{\partial}{\partial_i}(v-w)\cdot[(v-w)\cdot\theta'_\varepsilon(v-w)],\end{aligned}$$

para todo $i = 1, ..., n$. Assim,

$$\nabla[\gamma_\varepsilon(v-w)] = (\nabla v - \nabla w)\cdot[(v-w)\cdot\theta'_\varepsilon(v-w)].$$

Logo, de (4.20) segue que

$$\int_\Omega[-v\Delta w + w\Delta v]\theta_\varepsilon(v-w)\ dx \leq \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla[\gamma_\varepsilon(v-w)]\ dx. \tag{4.22}$$

Temos que $v, w \in C^2(\Omega)$, usando a Segunda Identidade de Green no segundo membro da desigualdade (4.22) obtemos:

$$\begin{aligned}\int \nabla v\cdot\nabla[\gamma_\varepsilon(v-w)]\ dx &= -\int_\Omega \Delta v\cdot\gamma_\varepsilon(v-w)\ dx \qquad (4.23)\\ &\quad + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial v_1}\cdot\gamma_\varepsilon(v-w)\ ds.\end{aligned}$$

Como $\gamma_\varepsilon(v-w)=0$ em $\partial\Omega$, temos que $\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial v_1}\cdot 0 = 0$. Logo,

$$\int \nabla v\cdot\nabla[\gamma_\varepsilon(v-w)]\ dx = -\int_\Omega \Delta v\cdot\gamma_\varepsilon(v-w)\ dx. \tag{4.24}$$

Afirmação 4.1 $0\le\gamma_\varepsilon(t)\le\varepsilon$, *para todo* $t\in\mathbb{R}$.

Vamos dividir em três partes a demonstração. No primeiro momento, vamos considerar $t\le 0$, no segundo consideremos $0<t<\varepsilon$, e por ultimo, $t\ge\varepsilon$.

(I) Se $t\le 0$ então $\theta_\varepsilon(s)=0$, pois $\dfrac{s}{\varepsilon}\le 0$. Logo $\gamma_\varepsilon(t)=0$.

(II) Seja $0<t<\varepsilon$. Neste caso, usaremos o fato de $s\le t$, pois a função está definida em $[0,t]$ e $\theta\left(\dfrac{t}{\varepsilon}\right)<1$. Logo

$$\begin{aligned}
\gamma_\varepsilon(t)=\int_0^t s\theta_\varepsilon'(s)\ ds &\le \int_0^t t\theta_\varepsilon'(s)\ ds\\
&= t\int_0^t \theta_\varepsilon'(s)\ ds\\
&= t[\theta_\varepsilon(t)-\theta_\varepsilon(0)]\\
&= t\theta\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\le t<\varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, para $0<t<\varepsilon$, obtemos $\gamma_\varepsilon(t)<\varepsilon$.

(III) Seja $t\ge\varepsilon$. Neste caso,

Se $t=\varepsilon$, temos que $s\theta_\varepsilon'(s)\le\varepsilon\theta'(s)$, implicando em

$$\int_0^\varepsilon s\theta_\varepsilon'(s)\ ds\le\int_0^\varepsilon \varepsilon\theta_\varepsilon'(s)\ ds=\varepsilon.$$

Se $t>\varepsilon$, vamos ter

$$\gamma_\varepsilon(t)=\int_0^\varepsilon s\theta_\varepsilon'(s)\ ds+\int_\varepsilon^t s\theta_\varepsilon'(s)\ ds.$$

Primeiramente temos que $\theta_\varepsilon'(s)=0$ para $s\ge\varepsilon$, visto que $\theta_\varepsilon(s)=1$ para $s\ge 1$. Por outro lado temos que

$$\int_0^\varepsilon s\theta_\varepsilon'(s)\ ds\le\varepsilon\int_0^\varepsilon \theta_\varepsilon'(s)\ ds=\varepsilon[\theta_\varepsilon(\varepsilon)-\theta_\varepsilon(0)]=\varepsilon,\ \text{ pois } \theta_\varepsilon(\varepsilon)=1.$$

Daí $\gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon$, para $t \geq \varepsilon$.

Portanto, $0 \leq \gamma_\varepsilon(t) \leq \varepsilon$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

De (4.23) e (4.24) temos que

$$\int_\Omega [-v\Delta w + w\Delta v]\theta_\varepsilon(v-w)\ dx \leq \int_\Omega -\Delta v \gamma_\varepsilon(v-w)\ dx.$$

Por hipótese, $-\Delta v \leq f(v)$. Como $\gamma_\varepsilon(t) \leq \varepsilon$, para todo $t \in \mathbb{R}$, obtemos que

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta v \left[\gamma_\varepsilon(v-w)\right]\ dx &= \int_\Omega -\Delta \left[\gamma_\varepsilon(v-w)\right]\ dx \\ &\leq \varepsilon \int_\Omega -\Delta v\ dx \\ &\leq \varepsilon \int_\Omega f(v)\ dx \\ &= \tilde{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Escolhendo-se um $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, segue que

$$\int_\Omega [-v\Delta w + w\Delta v] \cdot \theta_\varepsilon(v-w)\ dx \leq \varepsilon$$

.

Como

$$\int_\Omega [-v\Delta w + w\Delta v]\theta_\varepsilon(v-w)dx \geq \int_\Omega vw\Big[\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\Big] \cdot \theta_\varepsilon(v-w)\ dx,$$

segue que,

$$\int_\Omega vw\Big[\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\Big] \cdot \theta_\varepsilon(v-w)\ dx \leq \tilde{\varepsilon}. \tag{4.25}$$

Vamos reescrever a expressão (4.25) como

$$\begin{aligned} \int_\Omega vw\Big[\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\Big] \cdot \theta_\varepsilon(v-w)\ dx &= \int_{[v\leq w]} vw\Big[\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\Big] \cdot \theta_\varepsilon(v-w)\ dx \\ &\quad + \int_{[v>w]} vw\Big[\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\Big] \cdot \theta_\varepsilon(v-w)\ dx \\ &\leq \tilde{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Observe em $[v \leq w]$ que $\theta_\varepsilon(v-w) \equiv 0$, visto que $v - w \leq 0$. Assim,

$$\int_{[v>w]} vw\Big[\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\Big] \cdot \theta_\varepsilon(v-w)\ dx \leq \tilde{\varepsilon}.$$

Por hipótese, $\dfrac{f(t)}{t}$ é decrescente para $t > 0$, isto é, para quaisquer $v > w$, tem-se que $\dfrac{f(w)}{w} - \dfrac{f(v)}{v} \geq 0$. Além disso, $v, w > 0$ em Ω e $\theta_\varepsilon(v-w) = \theta\left(\dfrac{v-w}{\varepsilon}\right)$ visto que $\dfrac{v-w}{\varepsilon} > 0$. Sendo assim, em $[v > w]$, tem-se

$$\left[vw\left(\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\right)\right]\theta_\varepsilon(v-w) \geq 0.$$

Observemos que, quando $\varepsilon \to 0$ temos que $\dfrac{v-w}{\varepsilon} \geq 1$ e assim $\theta_\varepsilon(v-w) = 1$, logo

$$\left[vw\left(\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\right)\right]\theta_\varepsilon(v-w),$$

converge para $\left[vw\left(\dfrac{f(w)}{w} - \dfrac{f(v)}{v}\right)\right]$, quando $\varepsilon \to 0$.

Usando o teorema da convergência monótona, vemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{[v>w]}\left[vw\left(\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\right)\right]\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega\left[vw\left(\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\right)\right]\cdot\theta_\varepsilon(v-w)\,dx \qquad (4.26)\\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\int_{[v>w]}\left[vw\left(\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\right)\right]\,dx \geq 0. \qquad (4.27)$$

Comparando as expressões (4.26) e (4.27) obtemos que

$$\int_{[v>w]}\left[vw\left(\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\right)\right]\,dx = 0. \qquad (4.28)$$

Portanto, como o valor da integral é zero, segue que $\text{med}[v > w] = 0$, ou seja, $v \leq w$ quase sempre em Ω.

Lema 4.6 *Para todo* $0 < \lambda < \Lambda$, *o problema* (P_λ) *tem uma solução mínima* u_λ.

A prova deste lema foi inspirada na dissertação vista em **(cf. [6], pag 13)**.

Demonstração: Conforme visto na aplicação 3.3.1, consideremos v_λ uma solução positiva de

$$\begin{cases} -\Delta v_\lambda &= \lambda v_\lambda^q, \quad \text{em} \quad \Omega,\\ \quad v_\lambda &\geq 0, \quad\ \ \text{em} \quad \Omega,\\ \quad v_\lambda &= 0, \quad\ \ \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \qquad (4.29)$$

Sabe-se que existe uma solução positiva $u > 0$ de (P_λ) para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$ pelo Lema 4.4. Isto é,

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u^q + u^p, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &> 0, \qquad\qquad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0, \qquad\qquad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.30}$$

De (4.29) segue que $-\Delta v_\lambda = \lambda v_\lambda^q \leq \lambda v_\lambda^q + v_\lambda^p := f_\lambda(v_\lambda)$ em Ω, visto que v_λ é solução positiva.

Usando o Lema 4.5 com $w = u$ e $v = v_\lambda$ e definindo $f_\lambda(u) := \lambda u^q + \lambda u^p$, obtemos que

$$v_\lambda \leq u \text{ em } \Omega, \tag{4.31}$$

para toda solução u de (P_λ). Logo v_λ é subsolução de (P_λ).

Agora, vamos considerar a iteração monótona:

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} &= \lambda u_n^q + u_n^p, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u_{n+1} &= 0, \qquad\qquad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.32}$$

onde $u_0 = v_\lambda$, satisfazendo $u_n \uparrow u_\lambda$ com u_λ uma solução de (P_λ).

Vamos agora verficar que u_λ é solução mínima de P_λ.

Observemos que se u é solução de (P_λ), temos por (4.31) que $v_\lambda \leq u$, ou seja, u é supersolução de (P_λ).

Agora vamos usar o príncipio de indução para mostrar que

$$u_n \leq u,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Isto é,

$$v_\lambda = u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq ... \leq u_n \leq ... \leq u.$$

Mostraremos primeiro para $n = 1$, ou seja, $v_\lambda = u_0 \leq u_1 \leq u$. Sabe-se que v_λ é subsolução de (P_λ), então

$$\begin{cases} -\Delta v_\lambda &\leq \lambda v_\lambda^q + v_\lambda^p, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ v_\lambda &\leq 0, \qquad\qquad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.33}$$

Usando o fato de u_1 ser solução de (4.32) obtemos que

$$\begin{cases} -\Delta u_1 &= \lambda u_0^q + u_0^p = \lambda v_\lambda^q + v_\lambda^p, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u_1 &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.34}$$

Comparando as expressões (4.33) e (4.34) segue que

$$\begin{cases} -\Delta v_\lambda &\leq -\Delta u_1, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ v_\lambda &\leq u_1, \qquad\quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Como o operador laplaciano é linear temos que

$$\begin{cases} -\Delta(u_1 - u_\lambda) &\geq 0, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u_1 - u_\lambda &\geq 0, \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Aplicando o Teorema 2.9 obtemos que $u_1 - v_\lambda \geq 0$ em Ω, ou seja, $u_1 \geq v_\lambda$ em Ω.

Agora vamos mostrar que $u_1 \leq u$ em Ω. Como u é supersolução de (P_λ) temos que

$$\begin{cases} -\Delta u &\geq \lambda u^q + u^p, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &\geq 0, \qquad\qquad\ \ \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.35}$$

Assim, de (4.32) e do fato de f_λ ser crescente, obtemos que

$$\begin{cases} -\Delta u_1 &= \lambda u_0^q + u_0^p = \lambda v_\lambda^q + v_\lambda^p \leq \lambda u^q + u^p, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u_1 &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \ \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.36}$$

pois, $f_\lambda(u_0) = f_\lambda(v_\lambda) \leq f_\lambda(u)$. Combinando (4.35) e (4.36), obtemos

$$\begin{cases} -\Delta u_1 &\leq f_\lambda(u) \leq -\Delta u, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u_1 &\leq u, \qquad\qquad\qquad\ \ \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Dessa forma,

$$\begin{cases} -\Delta(u - u_1) &\geq 0, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u - u_1 &\geq 0, \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Usando novamente o Teorema 2.9, obtemos que

$$u_1 \leq u \text{ em } \Omega.$$

Logo, $u_0 \leq u_1 \leq u$.

Agora, suponhamos por indução que vale $v_\lambda = u_0 \leq u_1 \leq ... \leq u_n \leq u$ e mostraremos que

$$v_\lambda = u_n \leq u_{n+1} \leq u \text{ em } \Omega.$$

Novamente, usando o fato de f_λ ser crescente temos que $f(u_n) \leq f(u)$, visto que $u_n \leq u$ por hipótese. Assim por (4.32) e do fato de f_λ ser crescente temos que

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} &= \lambda u_n^q + u_n^p \leq \lambda u^q + u^p, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u_{n+1} &= 0, \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.37}$$

Combinando (4.35) e (4.37) segue que

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} &\leq -\Delta u, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &\geq u_{n+1}, \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

Daí temos que

$$\begin{cases} -\Delta(u - u_{n+1}) &\geq 0, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u - u_{n+1} &\geq 0, \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Teorema 2.9 temos que $u - u_{n+1} \geq 0$ em Ω, isto é, $u_{n+1} \leq u$ em Ω para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, concluimos que $u_n \leq u$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Foi considerado na iteração monótona que a sequência crescente u_n converge para u_λ, isto é, $u_n \uparrow u$. Logo, $u_\lambda \leq u$ sendo u solução de (P_λ). Portanto u_λ é solução mínima.

□

Observação 4.1.1 *Consideremos o seguinte problema de autovalor*

$$\begin{cases} -\Delta\phi - \gamma\phi &= v_1\phi, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \phi &= 0, \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}, \tag{4.38}$$

onde $\gamma = \gamma(x) = \lambda q u(x)^{q-1} + p u(x)^{p-1}$, onde u é solução minimal de (4.38) e $\lambda > 0$.

O problema (4.38) possui solução a qual é assegurada pelo Teorema 2.14. Para mais detalhes consulte **(cf. [11], pag 112)**.

Lema 4.7 *Sejam $\psi_1 \leq \psi_2$ uma subsolução e uma supersolução, respctivamente, de (P_λ), e suponha que ψ_1 não é solução. Seja u uma solução mínima de (P_λ) tal que $\psi_1 \leq u \leq \psi_2$. Então, $v_1 := \lambda_1[-\Delta - \gamma(x)] \geq 0$, onde $\gamma = \gamma(x) = \lambda q u^{q-1} + p u^{p-1}$ e $\lambda_1[-\Delta - \gamma(x)]$ denota o primeiro autovalor de $-\Delta - \gamma(x)$, com condição de fronteira nula.*

Demonstração: Suponhamos por absurdo que $v_1 < 0$.

Seja $\Phi > 0$ uma autofunção correspondente a v_1, satisfazendo:

$$\begin{cases} -\Delta\Phi - \gamma\Phi &= v_1\Phi, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \Phi &= 0, \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Afirmação 4.2 *Temos que $u - \alpha\Phi$ é uma supersolução de (P_λ) onde $\alpha > 0$ suficientemente pequeno.*

De fato, substituindo $u - \alpha\Phi$ na equação do problema (P_λ), temos

$$\begin{aligned} -\Delta(u-\alpha\Phi) - [\lambda(u-\alpha\Phi)^q + (u-\alpha\Phi)^p] &= -\Delta u + \alpha\Delta\Phi \\ &\quad -[\lambda(u-\alpha\Phi)^q + (u-\alpha\Phi)^p] \\ &= \lambda u^q + u^p - \alpha(v_1\Phi + \gamma\Phi) \\ &\quad -\lambda(u-\alpha\Phi)^q - (u-\alpha\Phi)^p \\ &= \lambda u^q + u^p - \alpha v_1\Phi - \alpha\gamma\Phi \qquad (4.39) \\ &\quad -\lambda(u-\alpha\Phi)^q - (u-\alpha\Phi)^p \\ &= \lambda u^q + u^p - \alpha v_1\Phi - \alpha\lambda q u^{q-1}\Phi \\ &\quad +\alpha p u^{p-1}\Phi - \lambda(u-\alpha\Phi)^q \\ &\quad -(u-\alpha\Phi)^p. \end{aligned}$$

Usando o fato de $t \longrightarrow t^q$ ser côncava, obtemos que $(u-\alpha\Phi)^q \leq u^q - \alpha q u^{q-1}\Phi$.

Como $\lambda > 0$, segue que

$$\lambda(u-\alpha\Phi)^q \leq \lambda(u^q - \alpha q u^{q-1}\Phi). \tag{4.40}$$

Assim de (4.39) e (4.40) segue que

$$\begin{aligned} -\Delta(u-\alpha\Phi) - [\lambda(u-\alpha\Phi)^q + (u-\alpha\Phi)^p] &= \lambda u^q + u^p - \alpha v_1\Phi - \alpha\lambda q u^{q-1}\Phi \\ &\quad +\alpha p u^{p-1}\Phi - \lambda(u-\alpha\Phi)^q \\ &\quad -(u-\alpha\Phi)^p \\ &\geq \lambda u^q + u^p - \alpha v_1\Phi - \alpha\lambda q u^{q-1} \\ &\quad +\alpha p u^{p-1}\Phi - \lambda u^q + \alpha\lambda q u^{q-1}\Phi \\ &\quad -(u-\alpha\Phi)^p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= u^p - \alpha v_1\Phi - \alpha p u^{p-1}\Phi \\ &\quad -(u-\alpha\Phi)^p. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Observemos que

$$u^p - \alpha p u^{p-1}\Phi - (u-\alpha\Phi)^p = u^p - p u^{p-1}(\alpha\Phi) - (u-\alpha\Phi)^p.$$

Definindo $O(\alpha\Phi) = u^p - pu^{p-1}(\alpha\Phi) - (u-\alpha\Phi)^p$, concluímos que

$$\frac{O(\alpha\Phi)}{\alpha\Phi} \to 0,$$

quando $\alpha\Phi \to 0$.

Além disso,

$$\begin{aligned} -\alpha v_1\Phi + O(\alpha\Phi) &= (-v_1)\alpha\Phi + O(\alpha\Phi) \\ &= \alpha\Phi\left[-v_1 + \frac{O(\alpha\Phi)}{\alpha\Phi}\right] > 0, \end{aligned} \tag{4.42}$$

para $\alpha > 0$ suficiente pequeno, visto que $-v_1 > 0$ e $\Phi > 0$.

De (4.41) e (4.42) segue que

$$-\Delta(u-\alpha\Phi) - \lambda(u-\Phi)^q - (u-\alpha\Phi)^p > 0,$$

isto é,

$$-\Delta(u-\alpha\Phi) > \lambda(u-\Phi)^q - (u-\alpha\Phi)^p,$$

Como $u - \alpha\Phi = 0$ em $\partial\Omega$, então $u - \alpha\Phi$ é supersolução de (P_λ).

Usando o fato de ψ_1 ser subsolução e não ser solução temos que $u > \psi_1$, visto que u é solução mínima.

Tomando α suficiente pequeno, podemos teambém supor que $u - \alpha\Phi \geq \psi_1$.

Pelo Teorema 3.2, o problema (P_λ) tem uma solução $\overline{v}$ tal que $\psi_1 \leq \overline{v} \leq u - \alpha\Phi < u$ contradizendo, pois u é solução mínima. Isto prova $v_1 \geq 0$.

$\square$

Observação 4.1.2 *Do item (IV), Teorema 2.20, podemos escrever*

$$v_1 := \lambda_1[-\Delta - \gamma(x)] = \min_{\overline{\phi}\in H_0^1(\Omega),\ \|\overline{\phi}\|_{W_0^{1,2}}=1} \left(\int_\Omega |\nabla\overline{\phi}|^2\, dx - \int_\Omega \gamma(x)\overline{\phi}^2 dx\right).$$

Assim $v_1 \geq 0$ se, e somente se,

$$\int_\Omega (|\nabla\overline{\phi}|^2 - \gamma\overline{\phi}^2)dx \geq 0, \text{ para todo } \overline{\phi} \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{4.43}$$

4.2 Demonstração do Resultado Principal

A partir dos Lemas 4.3, 4.4 e 4.6 segue que (P_λ) tem uma solução mínima u_λ para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$.

Falta mostrar que $I_\lambda(u_\lambda) < 0$. Note que

$$I_\lambda(u_\lambda) = \frac{1}{2}\|u_\lambda\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}dx,$$

onde $I_\lambda \in C^1(H, \mathbb{R})$. Como $u_\lambda \in H$ podemos escrever

$$I_\lambda(u_\lambda) = \frac{1}{2}\|u_\lambda\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\|u\|_{q+1}^{q+1}dx - \frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}dx.$$

Mas, u_λ é solução de (P_λ). Logo, $I'_\lambda(u_\lambda)u_\lambda = 0$ e assim, obtemos

$$\begin{aligned} I'_\lambda(u_\lambda)u_\lambda &= \int_\Omega \nabla u_\lambda \cdot \nabla u_\lambda dx - \lambda\int_\Omega |u_\lambda|^{q-1}\cdot u_\lambda \cdot u_\lambda dx - \int_\Omega |u_\lambda|^{p-1}\cdot u_\lambda \cdot u_\lambda dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2 dx - \lambda\int_\Omega |u_\lambda|^{q-1}\cdot |u_\lambda|^2 dx - \int_\Omega |u_\lambda|^{p-1}\cdot |u_\lambda|^2 dx \\ &= \|u_\lambda\|^2 - \lambda\int_\Omega |u_\lambda|^{q+1}dx - \int_\Omega |u_\lambda|^{p+1}dx \\ &= \|u_\lambda\|^2 - \lambda\|u_\lambda\|_{q+1}^{q+1} - \|u_\lambda\|_{p+1}^{p+1} \end{aligned}$$

Logo, $I'_\lambda(u_\lambda)u_\lambda = 0$ se, e somente se,

$$\|u_\lambda\|^2 = \lambda\|u_\lambda\|_{q+1}^{q+1} + \|u_\lambda\|_{p+1}^{p+1}. \tag{4.44}$$

Agora vamos utilizar o Lema 4.7 e a observação 4.1.2 para mostrarmos que

$$I_\lambda(u_\lambda) < 0.$$

Tomando $\Phi = u_\lambda$ segue de (4.43) que

$$\int_\Omega \Big(|\nabla u_\lambda|^2 - (\lambda q u_\lambda^{q-1} + p u_\lambda^{p-1})u_\lambda^2\Big)dx \geq 0,$$

Isto é, $\Big(\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2 dx - \int_\Omega \lambda q u_\lambda^{q+1}dx - \int_\Omega p u_\lambda^{p+1}dx\Big) \geq 0$, Daí, obtemos que

$$\|u_\lambda\|^2 - \lambda q\|u_\lambda\|_{q+1}^{q+1} - p\|u_\lambda\|_{p+1}^{p+1} \geq 0.$$

Por outro lado, temos que $I_\lambda(u_\lambda) < 0$, pois

$$I_\lambda(u_\lambda) = \frac{1}{2}\|u_\lambda\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\|u_\lambda\|_{q+1}^{q+1} - \frac{1}{p+1}\|u_\lambda\|_{p+1}^{p+1}.$$

Por (4.44) segue que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_\lambda) &= \frac{1}{2}\Big[\lambda\|u_\lambda\|_{q+1}^{q+1} + \|u_\lambda\|_{p+1}^{p+1}\Big] - \frac{\lambda}{q+1}\|u_\lambda\|_{q+1}^{q+1} - \frac{1}{p+1}\|u_\lambda\|_{p+1}^{p+1} \\ &= \lambda\|u_\lambda\|_{q+1}^{q+1}\Big[\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\Big] + \|u_\lambda\|_{p+1}^{p+1}\Big[\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big]. \end{aligned}$$

Sabe-se que $0 < q < 1 < p$ e $1 < q+1 < 2 < p+1$. Assim, temos que,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1} < 0, \text{ além disso, } \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} < 0.$$

Daí, como $\lambda\|u_\lambda\|_{q+1}^{q+1} > 0$ e $\|u_\lambda\|_{p+1}^{p+1} > 0$ segue que $I_\lambda(u_\lambda) < 0$.

Para finalizar a prova, mostraremos que u_λ é não decrescente com respeito a λ, isto é, se $\lambda \leq \overline{\lambda}$ então $u_\lambda \leq u_{\overline{\lambda}}$.

De $\lambda \leq \overline{\lambda}$ segue que $u_{\overline{\lambda}}$ é supersolução de (P_λ). Vimos que, tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno $\varepsilon\varphi_1$ é subsolução de (P_λ) e $\varepsilon\varphi_1 \leq u_{\overline{\lambda}}$. Pelo Teorema 3.2, (P_λ) possui uma solução $\tilde{v}$ com $\varepsilon\varphi_1 \leq \tilde{v} \leq u_{\overline{\lambda}}$.

Assumindo que u_λ é solução mínima de (P_λ), temos que $u_\lambda \leq \tilde{v} \leq u_{\overline{\lambda}}$. Isto completa a prova do resultado.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Ambrosetti, A. & Brezis, H. & Cerami, G., *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. 122, (1994) 519-543.

[2] Bartle, R.G., *The Elements of Integration,* John Wiley Sons, New York (1966).

[3] Biezuner, R.J., *Notas de Aula de Analise Funcional,* Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

[4] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equantions*, Springer- verlag, New York (2010).

[5] Brezis, H., *Análisis Funcional Teória y aplicaciones*, Alianza Editorial, Masson Paris, (1983).

[6] Chávez, B.K.R., *Efeitos combinados de não - linearidades côncavas e convexas em alguns problemas elípticos*, Dissertação de Mestrado do Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, (2015).

[7] de Figueiredo, D. G., *Equações elípticas não lineares*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro (1977).

[8] de Figueiredo, D. G., *Positive solutions of semilinear elliptic problems.* Differential equations (São Paulo, 1981), Lectures Notes in Math., Springer, Berlin-New York, 957 (1982) 34-87.

[9] de Santos, A.V.H., *O problema elíptico com não linearidade concava convexa,* Dissertação de Mestrado do Departamento de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, 2009.

[10] Gilbard, D. & Trudinger, N. S., *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, Berlin (2001).

[11] Holanda, A.R.F., *Existência de Soluções Positivas para uma Classe de Equações Elípticas,* Disssertação de Mestrado do Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, 2000.

[12] Kavian, O., *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèms Elliptiques,* Springer- Verlag, Berlin Heidelberg NewYork, (1993).

[13] Lawrence, C.E., *Partial Diferential Equations.*, American Mathematical Society, (1998).

[14] Neto, S.I.M., *Mínimos locais em* C^1 *versus* H^1 *com aplicações a problemas elípticos semilineares*, Dissertação de Mestrado do Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, 2005.

[15] Struwe, M., *Variational methods: Applications to nonlinear PDE and Hamiltonian systems*, Springer-Verlag, (1990).