Marcelo Oliveira Ribeiro

Perspectivas em Derivadas de Ordem Superior de Funções Quaterniônicas

São Luís, MA

2019

Marcelo Oliveira Ribeiro

Perspectivas em Derivadas de Ordem Superior de Funções Quaterniônicas

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Universidade Federal do Maranhão – UFMA

Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas – CCET

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Orientador: Prof. Dr. José Antônio Pires Ferreira Marão

São Luís, MA

2019

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Ribeiro, Marcelo Oliveira.
Perspectivas em Derivadas de Ordem Superior de Funções Quaterniônicas / Marcelo Oliveira Ribeiro. - 2019.
56 f.

Orientador(a): José Antônio Pires Ferreira Marão.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2019.

1. Derivadas Quaterniônicas. 2. Generalização. 3. Quatérnios. I. Marão, José Antônio Pires Ferreira. II. Título.

Marcelo Oliveira Ribeiro

Perspectivas em Derivadas de Ordem Superior de Funções Quaterniônicas

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado. São Luís, MA, 15 de Fevereiro de 2019:

Prof. Dr. José Antônio Pires Ferreira Marão
Orientador

Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho
Convidado 1

Prof. Dr. Marlon César Santos Oliveira (externo)
Convidado 2

São Luís, MA
2019

Dedico este trabalho a minha mãe, irmã e a minha esposa.

Agradecimentos

A **Deus**, por tudo.

À minha **mãe** e **irmã**, pelo amor, por sonharem meus sonhos junto a mim e por tanto me apoiarem.

À Minha esposa, **Mary Jane**, pela paciência, por estar sempre ao meu lado e por tornar meus dias melhores.

Ao professor **José Antônio Pires Ferreira Marão**, por acreditar em meu potencial, por ensinar-me, e acima de tudo, por ser meu amigo.

A todos os **professores** do PPGMAT-UFMA, pelos ensinamentos e incentivos.

A **CAPES**, pelo auxílio financeiro.

"Se existir uma forma de explicar os padrões que Deus criou,
certamente a Matemática é a principal ferramenta."
(Marcelo Oliveira)

Resumo

A dissertação consiste essencialmente do estudo dos quatérnios, visando generalizar resultados da Análise Complexa Clássica, além de fundamentar bases teóricas para futuras aplicações à Matemática e à Física. Para isso, mostramos a estrutura dos quatérnios e suas propriedades, definimos as principais funções quaterniônicas, apresentamos relações do tipo *Cauchy-Riemann*, demonstramos derivadas quaterniônicas para uma classe de funções, determinamos resultados a respeito da derivação de ordem superior e mostramos a generalização da *fórmula integral de Cauchy.*

Palavras-chaves: Quatérnios, Generalização, Derivadas Quaterniônicas.

Abstract

The dissertation consists essentially of the study of quaternions, aiming to generalize the results of Classical Complex Analysis, as well as to base theoretical bases for future applications to Mathematics and Physics. For this, we show the structure of the quaternions and their properties, we define the main quaternionic functions, we present relations of the type *Cauchy-Riemann*, we show quaternionic derivatives for a class of functions, we determine results with respect to the derivation of superior order and we show the generalization of the *Cauchy integral formula*.

Keywords: Quaternions, Generalization, Quaternionic Derivatives.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

Os *quatérnios* foram introduzidos por Willian Rowan Hamilton (1805-1865), e consistem em uma generalização dos números complexos. Precisamente no ano de 1843, Hamilton iniciou a generalização dos números complexos por meio das ternas, que nada mais são do que números complexos adicionados com uma terceira parcela, ou seja, números da forma $a+bi+cj$. Mas esse estudo não mostrou-se viável por conta de problemas existentes na multiplicação dessas ternas [1] e com o passar do tempo, Hamilton observou que o problema das ternas não podia ser resolvido, assim, a solução foi determinada com o acréscimo de uma quarta parcela, o que culminou no surgimento dos quatérnios. Os quatérnios foram desenvolvidos e as operações com números quaterniônicos mostraram-se versáteis na solução de problemas como o da rotação no espaço, por exemplo. Posteriormente, o surgimento das funções quaterniônicas ocorreu de forma natural, e essas funções apresentaram analogias com os casos complexos, sendo tal analogia imprescindível na generalização das funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e hiperbólicas.

A grande relevância da teoria de funções complexas, tornou natural o interesse em pesquisar as generalizações dos resultados clássicos da Análise Complexa, que vão desde a álgebra dos números complexos, até resultados consagrados, como por exemplo, as condições de Cauchy-Riemann (como condição necessária para a analiticidade de uma função complexa) e a fórmula integral de Cauchy. Vale ressaltar, que grande parte do desenvolvimento das generalizações da teoria de funções complexas para a teoria de funções quaterniônicas, deu-se após a década de trinta, principalmente com os estudos de Rudolph Fueter (1880 - 1950) e Grigore Moisil (1906 - 1976). Em particular, destacamos Rudolph Fueter por ser pioneiro na elaboração do importante conceito de *Regularidade*.

A Análise Quaterniônica, conforme destacado acima, foi originada de resultados clássicos das funções de uma variável complexa, e muitos resultados foram inspirados naqueles já consolidados da Análise Complexa Clássica. Alguns desses resultados podem ser citados agora, são eles: as condições de Cauchy - Riemann, Teorema da independência do caminho e a fórmula integral de Cauchy. Esses resultados terão destaque ao longo desse trabalho, pois são apresentados sob a perspectiva da Análise Quaterniônica. Recentemente, vários trabalhos mostraram essa tendência de generalização dos resultados da Análise Complexa, podemos destacar por exemplo (MACHADO; BORGES, 2002), (GENTILI; STRUPPA, 2007),(BORGES; FIGUEIREDO; MARAO, 2011) e (XU et al., 2015), principalmente tratando de derivação e integração de funções quaterniônicas. Isso demonstra que a teoria a ser tratada nessa dissertação é recente e a expectativa com relação a novos resultados é viável. Desse modo, procuramos mostrar ao longo desse trabalho

[1] Para uma leitura mais detalhada, consulte (MORAIS; GEORGIEV; SPRÖSSIG, 2014)

alguns resultados relevantes que justificam o que foi anteriormente mencionado.

A derivação de funções quaterniônicas foi objeto de estudos recentes, e foi constatado que os resultados relativos à derivação dessas funções (pelo menos os que foram utilizados para a realização dessa dissertação) estão diretamente ligados ao fato de a função satisfazer ou não as *condições de Cauchy-Riemann generalizadas* (como as chamaremos nesse texto). Assim, a proposta desse trabalho é a de apresentar novos fatos relativos à derivadas de ordem superior para essas funções, bem como caracterizar de forma parcial as funções que possuem essas características.

Buscando melhor apresentar os fatos propostos, o trabalho foi dividido da seguinte forma: no capítulo 1, mostramos definições e propriedades dos números quaterniônicos, além de definir as principais funções quaterniônicas como as exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e hiperbólicas. O principal objetivo deste capítulo é apresentar os quatérnios como generalização natural dos números complexos. Estendendo os conceitos vistos no capítulo 1, dedicamos o capítulo 2 para exibirmos um dos conceitos importantes da Análise Quaterniônica, que é o de Regularidade. Em sequência, mostramos *condições de Cauchy-Riemann generalizadas* para funções quaterniônicas e finalizamos com a apresentação das "derivada" à esquerda e "derivada" à direita de uma função quaterniônica f. Já no capítulo 3, trabalhamos com o desenvolvimento das derivadas de ordem superior, avaliando as consequências das *condições de Cauchy-Riemann generalizadas* para tais derivadas. O resultado principal obtido neste capítulo, estabelece uma importante relação entre dois casos específicos de derivação em ordem superior, que chamaremos de **Caso 1** e **Caso 2**. Por fim, o último capítulo serviu para resumirmos (BORGES; FIGUEIREDO; MARAO, 2011), a fim de mostrarmos a generalização da fórmula integral de Cauchy e caracterizarmos, em termos de integrais, a classe específica de funções quaterniônicas que satisfazem as *condições de Cauchy-Riemann*. Com relação a forma como foi escrita esta dissertação, é valido observar que optamos por um tratamento tão elementar quanto possível. Desse modo, esperamos que o leitor aprecie o conteúdo de tal maneira que possa lê-lo sem dificuldades.

1 Números Quaterniônicos e Funções Quaterniônicas

A formulação de números quaterniônicos é de fundamental importância para a sequência lógica do texto. Assim, o objetivo do presente capítulo é apresentar os números quaterniônicos e em seguida definir algumas funções quaterniônicas tais como as funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e hiperbólicas. Nos basearemos em (KRAVCHENKO, 2003) para tratar a respeito dos números quaterniônicos, e em (MORAIS; GEORGIEV; SPRÖSSIG, 2014) para a abordagem sobre as funções supracitadas.

1.1 Quatérnios

O conjunto dos **quatérnios**, denotado pela letra $\mathbb{H}$, é definido como o conjunto de todas as quádruplas reais ordenadas, ou seja, $\mathbb{H} = \{(q_0, q_1, q_2, q_3) : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}$. Dessa forma, são vistos como elementos de $\mathbb{R}^4$ cuja representação é uma combinação linear dos elementos da base ortonormal $\{i_0, i_1, i_2, i_3\}$. Assim,

$$q = q_0 i_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3. \tag{1.1}$$

Acima, q_0, q_1, q_2, q_3 são números reais e são chamados **componentes do quatérnio** q.

A igualdade de dois quatérnios p e q é dada quando estes possuem as mesmas componentes:

$$p = q \text{ se e somente se } p_k = q_k, \text{ onde } k = 0, 1, 2, 3,$$

enquanto a **soma** de dois quatérnios p e q é definida adicionando-se as componentes correspondentes:

$$p + q = \sum_{k=0}^{3} (p_k + q_k) i_k. \tag{1.2}$$

As configurações feitas até aqui não permitem distinguir os quatérnios dos vetores de $\mathbb{R}^4$, o que é justificado pelo fato de que o conceito propriamente dito de quatérnio começa com a definição da multiplicação quaterniônica [1], assim a definição de multiplicação será importante para fazer a devida distinção, já que os quatérnios são munidos de uma operação de multiplicação que torna sua álgebra peculiar e única, além disso tal operação não possui a propriedade comutativa. Antes de definí-la, necessitamos fazer algumas considerações a respeito dos elementos i_0, i_1, i_2 e i_3. Inicialmente o i_0 é considerado como a **unidade usual**, isto é $i_0 = 1$, os elementos i_1, i_2 e i_3 serão considerados como **unidades**

[1] Um tratamento algébrico pode ser visto em (MACHADO; BORGES, 2002).

imaginárias, satisfazendo:

$$i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1. \tag{1.3}$$

Os produtos dos diferentes elementos da base são definidos da seguinte maneira:

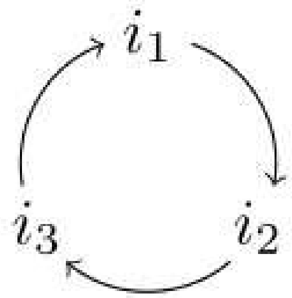
$$i_1 \cdot i_2 = -i_2 \cdot i_1 = i_3; \tag{1.4}$$

$$i_2 \cdot i_3 = -i_3 \cdot i_2 = i_1; \tag{1.5}$$

$$i_3 \cdot i_1 = -i_1 \cdot i_3 = i_2. \tag{1.6}$$

A seguir um esquema que mostra como os produtos ocorrem:

Figura 1 – Esquema dos produtos entre i_1, i_2 e i_3.



Fonte: compilação do autor

As igualdades (1.3) a (1.6) nos permitem definir completamente a **multiplicação** dos quatérnios da seguinte forma:

$$\begin{aligned} p \cdot q &= (p_0 i_0 + p_1 i_1 + p_2 i_2 + p_3 i_3) \cdot (q_0 i_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3) \\ &= (p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3) i_0 + (p_1 q_0 + p_0 q_1 + p_2 q_3 - p_3 q_2) i_1 \\ &+ (p_2 q_0 + p_0 q_2 + p_3 q_1 - p_1 q_3) i_2 + (p_3 q_0 + p_0 q_3 + p_1 q_2 - p_2 q_1) i_3. \end{aligned} \tag{1.7}$$

A importante observação a ser feita nesse momento é o fato de que a multiplicação quaterniônica não é comutativa, fato que constatamos observando as relações (1.4) a (1.6). Além disso, é válido ressaltar que o conjunto $\mathbb{H}$ dos quatérnios, munido das operações de soma e multiplicação descritas anteriormente, forma um *Anel não comutativo de divisão*. Veja mais detalhes sobre essa conclusão em (HERSTEIN, 1996).

Além do que foi descrito acima existe uma representação vetorial para os quatérnios, que é muito utilizada: se $q = \sum_{k=0}^{3} q_k i_k$, então q_0 (que é a mesma coisa que $q_0 i_0$) é chamado de **Parte Escalar** de q, sendo denotada por $Sc(q)$ e $\sum_{k=1}^{3} q_k i_k$ é chamado de **Parte Vetorial** de q, denotada por $Vec(q)$ ou $\vec{q}$. Quando ambas as partes do quatérnio forem diferentes de zero, o chamaremos de **quatérnio completo**. A representação acima nos permite afirmar que um quatérnio q é descrito como "soma" de uma parte escalar com uma parte vetorial, sendo representado por:

$$q = Sc(q) + Vec(q) = q_0 + \vec{q}.$$

Note que se $Sc(q) = 0$, então $q = \vec{q}$ e assim chamamos q de **quatérnio puro**, além disso, as unidades imaginárias i_1, i_2 e i_3 podem ser identificadas com as coordenadas da base dos vetores do espaço tridimensional. Logo, com essa identificação um vetor de $\mathbb{R}^3$ e um quatérnio puro possuem as mesmas componentes, o que não implica que são a mesma coisa[2].

Podemos expressar a multiplicação quaterniônica em termos do produto escalar e do produto vetorial de $\mathbb{R}^4$. Assim, (1.7) passa a ser escrito da seguinte forma:

$$p \cdot q = p_0 q_0 - < \vec{p}, \vec{q} > + p_0 \vec{q} + \vec{p} q_0 + [\vec{p}, \vec{q}], \tag{1.8}$$

em que,

$$< \vec{p}, \vec{q} > = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$$

e

$$[\vec{p}, \vec{q}] = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}.$$

Utilizando (1.8) podemos estabelecer a seguinte proposição:

Proposição 1.1 *O produto de dois quatérnios puros $\vec{p}$ e $\vec{q}$ é um quatérnio completo, com*

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = - < \vec{p}, \vec{q} > + [\vec{p}, \vec{q}].$$

Prova. Sejam $\vec{p}$ e $\vec{q}$ dois quatérnios puros. A multiplicação de dois quatérnios nos fornece que:

$$p \cdot q = p_0 q_0 - < \vec{p}, \vec{q} > + p_0 \vec{q} + \vec{p} q_0 + [\vec{p}, \vec{q}],$$

logo é imediato que $p_0 q_0 = 0$. Mais ainda, $p_0 = q_0 = 0$ e como $p = \vec{p}$ e $q = \vec{q}$, segue o resultado. □

Existem consequências imediatas a respeito da **Proposição 1.1**, uma delas é que $Sc(\vec{p} \cdot \vec{q}) = 0$ se, e somente se $\vec{p}$ e $\vec{q}$ são ortogonais, a outra é que $Vec(\vec{p} \cdot \vec{q}) = 0$ se, e somente se $\vec{p}$ e $\vec{q}$ são colineares.

De maneira semelhante ao que ocorre na Análise Complexa Clássica, é possível definir o conjugado de um quatérnio e a norma quaterniônica. Assim, dado o quatérnio $q = q_0 + \vec{q}$, chamamos de **conjugado** de q o quatérnio $\overline{q} = q_0 - \vec{q}$, cujas propriedades são dadas pela proposição a seguir:

[2] Os quatérnios possuem uma estrutura multiplicativa própria, enquanto que $\mathbb{R}^3$, não.

Proposição 1.2 *Sejam p e q números quaterniônicos, então:*

a) $\overline{\overline{q}} = q$;

b) $\overline{p+q} = \overline{p} + \overline{q}$;

c) $\overline{p \cdot q} = \overline{q} \cdot \overline{p}$.

Prova. Para provar a), consideremos o quatérnio $q = q_0 + \vec{q}$. Pela definição de conjugado $\overline{\overline{q}} = q_0 - (-\vec{q})$, o que prova o resultado do item a). Para o item b), consideremos agora, os quatérnios $p = p_0 + \vec{p}$ e $q = q_0 + \vec{q}$ e observemos o seguinte:

$$p + q = p_0 + q_0 + (\vec{p} + \vec{q}). \tag{1.9}$$

Usando a definição de conjugado em (1.9), vem:

$$\begin{aligned} \overline{p+q} &= p_0 + q_0 - (\vec{p} + \vec{q}) \\ &= (p_0 - \vec{p}) + (q_0 - \vec{q}) \\ &= \overline{p} + \overline{q}. \end{aligned}$$

Finalmente, para provar o item c), dados os quatérnios $p = p_0 + \vec{p}$ e $q = q_0 + \vec{q}$, tem-se:

$$p \cdot q = p_0 q_0 - < \vec{p}, \vec{q} > + p_0 \vec{q} + \vec{p} q_0 + [\vec{p}, \vec{q}].$$

Utilizando agora a definição de conjugado no resultado da multiplicação anterior, obtém-se:

$$\begin{aligned} \overline{p \cdot q} &= p_0 q_0 - < \vec{p}, \vec{q} > - p_0 \vec{q} - \vec{p} q_0 - [\vec{p}, \vec{q}] \\ &= q_0 p_0 - < \vec{q}, \vec{p} > - q_0 \vec{p} - \vec{q} p_0 + [\vec{q}, \vec{p}] \\ &= q_0 p_0 - < -\vec{q}, -\vec{p} > + q_0(-\vec{p}) + (-\vec{q}) p_0 + [-\vec{q}, -\vec{p}] \\ &= \overline{q} \cdot \overline{p}. \end{aligned}$$

□

As propriedades vistas na proposição anterior estabelecem importantes relações no que tange a conjugação quaterniônica. Além disso, permite-nos perceber que podem existir propriedades que ocorrem de um jeito para o caso complexo, mas que não ocorrem de forma semelhante para quatérnios. Para justifificar isso, percebemos que caso complexo é válido que, se p e q são números complexos, então $\overline{p \cdot q} = \overline{p} \cdot \overline{q} = \overline{q} \cdot \overline{p}$, já no caso quaterniônico, o mesmo não pode ocorrer pela falta da comutatividade na multiplicação.

Definida a multiplicação quaterniônica e o conjugado de um quatérnio, naturalmente podemos realizar o produto entre q e $\overline{q}$ da seguinte forma:

$$q \cdot \overline{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 =: |q|^2. \tag{1.10}$$

O número real obtido acima, representa o quadrado da distância da origem ao ponto (q_0, q_1, q_2, q_3) no espaço euclideano quadridimensional. Vista de outra forma, (1.10) pode ser:

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = \sqrt{q \cdot \overline{q}}. \tag{1.11}$$

Assim, temos definida a **norma** do quatérnio q.

Observações:

1. É válido notar que os produtos $q \cdot \overline{q}$ e $\overline{q} \cdot q$ são iguais. Somente por isso é possível definir tal norma;
2. A topologia a ser utilizada nesse texto se refere a essa norma.

A noção de norma apresentada acima, fornece o necessário para definir o **inverso multiplicativo** de um quatérnio q, desde que $q \neq 0$. Podemos descrever esse número como segue:

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}. \tag{1.12}$$

Esse número satisfaz $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$. Por esse motivo é possível defini-lo como inverso multiplicativo.

Existem outras importantes definições e propriedades a respeito de quatérnios que não foram tratadas ao longo dessa seção, isso porque desejamos tornar o texto o mais objetivo possível. Enfatizamos que a não apresentação de tais definições e propriedades não acarreta em prejuízo algum para o texto.

1.2 Funções Quaterniônicas

A definição adequada de função quaterniônica é o escopo da presente seção e um posterior tratamento das funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e hiperbólicas é feito. O objetivo com o estudo das funções mencionadas é mostrar generalizações do caso complexo.

Definição 1.1 *Seja $A \subset \mathbb{H}$ e $q \in A$ uma variável da forma $q = q_0 i_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3$. Chama-se de* ***Função quaterniônica*** *a função $f : A \to \mathbb{H}$ que faz corresponder cada $q \in A$ em um único número quaterniônico $u = f(q)$, ou seja:*

$$\begin{aligned} f &: A \to \mathbb{H} \\ q &\mapsto u = f(q) \end{aligned}$$

A definição acima permite dar início ao estudo das funções quaterniônicas, começando especificamente com as funções exponenciais e logarítmicas, conforme faremos nas próximas subseções. Necessitaremos de alguns resultados que não estão presentes no texto, principalmente no que diz respeito ao estudo das *séries quaterniônicas* (definição de série, propriedades, convergência, convergência absoluta, etc.). O leitor pode consultar (MORAIS; GEORGIEV; SPRÖSSIG, 2014) para compreender certas afirmações que serão feitas sobre séries.

1.2.1 Funções Exponenciais e Logarítmicas

A definição da função exponencial quaterniônica, carece da definição de e^q, em que $q \in \mathbb{H}$. Para tanto, observemos que a série $e^q := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{k!}$ é absolutamente convergente, pois $|q^k| \leq |q|^k$ para qualquer quatérnio q. Além disso, sabemos que para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, se x e y comutam, tem-se $e^x e^y = e^y e^x = e^{x+y}$. Uma vez que um quatérnio munido somente da parte escalar (um número real) comuta com qualquer outro quatérnio, isto é, se $q_0 \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{H}$, segue que $e^{q_0+z} = e^{q_0}e^z$.

Consideremos o número $q = q_0 + \vec{q} = q_0 + v$, onde v é um quatérnio puro. Provemos a seguinte proposição:

Proposição 1.3 *Se $v \in \mathbb{H}$ um quatérnio puro, com $\theta = |v|$, então*

$$e^v = \cos\theta + v\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}.$$

Prova. Notemos inicialmente que:

$$v^2 = -q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 = -|v|^2.$$

Segue daí que:

$$v^2 = -\theta^2, \quad v^3 = -\theta^2 v, \quad v^4 = \theta^4, \quad v^5 = \theta^4 v, \quad v^6 = -\theta^6, \cdots . \tag{1.13}$$

Substituindo (1.13) na série $e^v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^k}{k!}$, vem:

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{v}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^2 v}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^4 v}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \\
&= 1 + \frac{\theta v}{1!\theta} - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^3 v}{3!\theta} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^5 v}{5!\theta} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + \frac{v}{\theta}\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right) \\
&= \cos\theta + \frac{v}{\theta}\operatorname{sen}\theta,
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Portanto, a partir da proposição anterior, temos finalmente que a exponencial de um quatérnio é dada por:

$$\begin{aligned} e^q &= e^{q_0+v} = e^{q_0}\left(\cos\theta + \frac{v}{\theta}\operatorname{sen}\theta\right) \\ &= e^{q_0+\vec{q}} = e^{q_0}\left(\cos|\vec{q}| + \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}\operatorname{sen}|\vec{q}|\right). \end{aligned} \tag{1.14}$$

A partir daí é natural definir a **função exponencial quaterniônica** e^p como segue:

$$e^q = e^{q_0}\left(\cos|\vec{q}| + \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}\operatorname{sen}|\vec{q}|\right). \tag{1.15}$$

Destacaremos, logo em seguida, algumas propriedades importantes da função exponencial quaterniônica. são elas:

i) $e^q \neq 0$, para todo $q \in \mathbb{H}$;

ii) $e^{-q}e^q = 1$;

iii) $(e^p)^n = e^{np}$ para $n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ (Fórmula de *De Moivre*);

iv) Em geral $e^pe^q \neq e^{p+q}$, a menos que p e q comutem.

Buscando justificar essas propriedades, consideremos dois quatérnio arbitrários p e q. observemos que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^k}{k!}$ e $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^k}{k!}$ convergem, pois convergem absolutamente. Note que se p e q comutam, o produto de Cauchy das séries [3] de e^p e e^q nos dá:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(p+q)^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{k}\begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} p^n q^{k-n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k}\frac{p^n}{n!}\frac{q^{k-n}}{(k-n)!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q^m}{m!} \\ &= e^pe^q. \end{aligned}$$

Em particular, $e^pe^{-p} = e^0 = 1$ para todo $p \in \mathbb{H}$ assim $e^p \neq 0$ qualquer que seja $p \in \mathbb{H}$, e isto prova as propriedades *i)* e *ii)*. Por indução, é possível provar que $(e^p)^n = e^{np}$, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, o que mostra que *iii)* é verdadeira. Finalmente, para justificar o item *iv)*, consideremos o exemplo: $e^{\pi i_1}e^{\pi i_2} = (-1)(-1) = 1$, e $e^{\pi i_1+\pi i_2} = \cos(\pi\sqrt{2}) + \dfrac{i_1+i_2}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(\pi\sqrt{2}) \neq 1$.

[3] O *produto de Cauchy* de duas séries infinitas é definido por uma convolução discreta, como segue:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty}a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}b_i\right) = \sum_{k=0}^{\infty}c_k, \;\text{ onde }\; c_k = \sum_{l=0}^{k}a_lb_{k-l} \tag{1.16}$$

Observamos que a propriedade *iv)* da exponencial no caso quaterniônico é diferente do caso complexo, já que no conjunto dos complexos a multiplicação é comutativa, e portanto sempre vale que $e^p e^q = e^{p+q}$, se p e q forem complexos. O mesmo ocorre com a **periodicidade**, pois no caso complexo a exponencial é periódica, enquanto que no caso dos quatérnios a periodicidade não é "total". A seguir é definida a noção de periodicidade por eixos e periodicidade total.

Definição 1.2 *consideremos o quatérnio q_j tal que suas coordenadas são todas nulas, exceto a j-ésima coordenada. Diremos que uma função quaterniônica é **periódica por eixos**, se existir q_j tal que $f(p+q_j) = f(p)$ para todo $p \in \mathbb{H}$. O período da função f será justamente o valor da j-ésima coordenada de q_j.*

Definição 1.3 *Uma função $f : A \subset \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ diz-se **totalmente periódica** quando existe um quatérnio $q \in \mathbb{H}$ tal que $f(p+q) = f(p)$ para todo $p \in \mathbb{H}$, independentemente do eixo do espaço quadridimensional.*

Note que a função exponencial não satisfaz a condição imposta na **Definição 1.3**. Assim, só conseguimos a periodicidade através da periodicidade por eixos. Para ficar mais claro, observemos que dados os quatérnios p e q_j, com $j = 2, 3, 4$, em que:

$$q_2 = (0, 2\pi, 0, 0), \quad q_3 = (0, 0, 2\pi, 0), \quad \text{e} \quad q_4 = (0, 0, 0, 2\pi),$$

temos que $e^{q_1} = e^{q_2} = e^{q_3} = 1$. Note que, se p e q_j comutam, então $e^{p+q_j} = e^p e^{q_j} = e^p \cdot 1 = e^p$, para $j = 2, 3, 4$. Isso mostra que a função exponencial quaterniônica é periódica por eixos, e geometricamente possui uma **região fundamental** em $\mathbb{R}^3$, que é dada pelo conjunto:

$$F = \{u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3 : -\pi < u_i \leq \pi, \text{ com } i = 1, 2, 3\}.$$

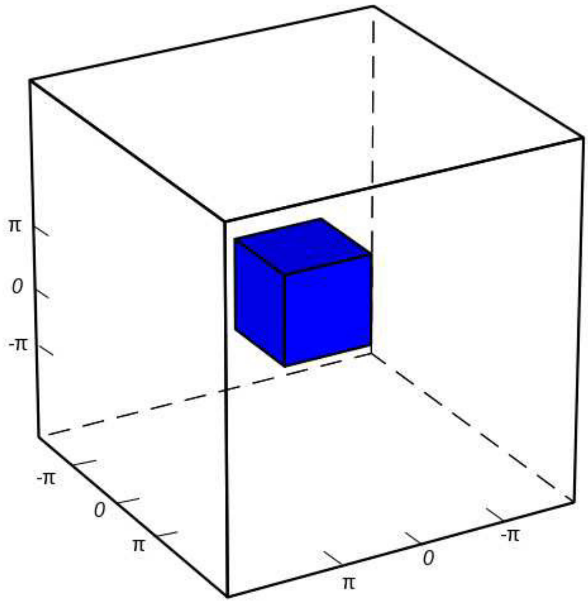
É notório observarmos que a região apresentada no conjunto F, acima definido, trata-se de um cubo no espaço tridimensional, e acham-se ali, todos os possíveis valores de e^q, em que $q \in \mathbb{H}$. Logo em seguida, mostramos a figura que representa a região do referido conjunto:

Buscando apresentar uma boa definição para o logaritmo quaterniônico, consideremos o quatérnio $q = q_0 + \vec{q}$, de modo que $|q| = 1$. É fácil perceber que $q_0^2 + |\vec{q}|^2 = 1$, assim existe um único $\theta \in [0, \pi]$ tal que $\cos\theta = q_0$ e $\operatorname{sen}\theta = |\vec{q}|$. Portanto, podemos escrever o quatérnio q como segue:

$$q = \cos\theta + \vec{u}\operatorname{sen}\theta, \tag{1.17}$$

em que $\vec{u} = \dfrac{\vec{q}}{|\vec{q}|}$.

Figura 2 – Representação geométrica do conjunto F.



Fonte: compilação do autor

A partir disso, é possível dar a representação para um quatérnio q qualquer, da seguinte forma:

$$q = |\vec{q}|(\cos\theta + \vec{u}\,\mathrm{sen}\,\theta), \tag{1.18}$$

com $\vec{u} = \dfrac{\vec{q}}{|\vec{q}|}$ e $\theta = \arccos\dfrac{q_0}{|q|}$.

Observação: note que $\arccos\dfrac{q_0}{|q|} + 2\pi n = \arccos\dfrac{q_0}{|q|}$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

Vimos em (1.14) uma forma de escrever a exponencial quaterniônica para todo $q \in \mathbb{H}$. Em particular, se $q = \vec{q}$ obtemos:

$$e^{\vec{q}} = e^0\left(\cos|\vec{q}| + \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}\,\mathrm{sen}\,|\vec{q}|\right). \tag{1.19}$$

Note que $\vec{q} = \dfrac{\vec{q}}{|\vec{q}|}|\vec{q}|$, e pondo $\vec{u} = \dfrac{\vec{q}}{|\vec{q}|}$ e $\theta = |\vec{q}|$, é imediato que $q = \vec{u}\,\theta$. Logo, utilizando (1.17), vem:

$$\begin{aligned} e^{\vec{u}\,\theta} = e^{\vec{q}} &= e^0\left(\cos|\vec{u}\,\theta| + \vec{u}\frac{\theta}{\theta}\,\mathrm{sen}\,|\vec{u}\,\theta|\right) \\ &= e^0(\cos\theta + \vec{u}\,\mathrm{sen}\,\theta) \\ &= \cos\theta + \vec{u}\,\mathrm{sen}\,\theta. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Encaramos (1.19) como a **fórmula de Euler generalizada**.

As considerações acima, dadas fornecem condições para definir o logaritmo quaterniônico, mas inicialmente vamos considerar o caso em que $|q| = 1$:

$$\begin{aligned} \ln(q) &= \ln(\cos\theta + \vec{u}\,\mathrm{sen}\,\theta) \\ &= \ln(e^{\vec{u}\,\theta}) \\ &= \vec{u}\,\theta \end{aligned} \tag{1.21}$$

O logaritmo de um quatérnio unitário é um quatérnio puro, e por extensão, se q é um quatérnio qualquer, segue imediatamente:

$$\begin{aligned} \ln(q) &= \ln\left(|q|\frac{q}{|q|}\right) \\ &= \ln\,|q| + \ln\,\frac{q}{|q|} \\ &= \ln\,|q| + \vec{u}\,\theta \\ &= \ln\,|q| + \vec{u}\left(\arccos\,\frac{q_0}{|q|} + 2\pi n\right). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Portanto, a **função logarítimica quaterniônica**(função multivalente) $\ln(q)$ é definida por:

$$\ln(q) = \begin{cases} \ln\,|q| + \vec{u}\left(\arccos\,\dfrac{q_0}{|q|} + 2\pi n\right), & \text{se } |\vec{q}| \neq 0, \\ \ln\,|q_0|, & \text{se } |\vec{q}| = 0 \end{cases} \tag{1.23}$$

Observa-se, de imediato, a partir da definição de $\ln(q)$, que a função logarítmica é totalmente periódica, o que não ocorre com a função exponencial, como visto antes. Isto implica que $\ln(q)$ e e^q serão inversas uma da outra somente na região fundamental, ou seja: $e^{\mathrm{Ln}(q)} = q$ e $\mathrm{Ln}(e^q) = q$ para todo $q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, onde $\mathrm{Ln}(q)$ representa o **valor principal** da função logarítmica. Este valor principal é dado por:

$$\mathrm{Ln}(q) = \ln|q| + \vec{u}\,\arccos\left(\frac{q_0}{|q|}\right).$$

Note que a condição de q pertencer à região fundamental é imprescindível, pois dado o quatérnio $q = \pi i_3$, é notório o fato de que q não pertence a região fundamental, pois, $e^{\mathrm{Ln}(q)} = i_3 e^{ln|\pi|} = \pi i_3$, mas $\mathrm{Ln}(e^{\pi i_3}) = \mathrm{Ln}(-1) = 0$. Este exemplo mostra que, em geral, não vale a inversão entre essas funções.

Passemos a verificar algumas propriedades importantes do valor principal da função logarítmica, em destaque:

i) $\mathrm{Ln}(1) = 0, \mathrm{Ln}(i_1) = \dfrac{\pi}{2} i_1, \mathrm{Ln}(i_2) = \dfrac{\pi}{2} i_2, \mathrm{Ln}(i_3) = \dfrac{\pi}{2} i_3$;

ii) $\mathrm{Ln}(pq) \neq \mathrm{Ln}(p) + \mathrm{Ln}(q)$ em geral, a menos que p e q comutem;

iii) $\mathrm{Ln}(q^n) = n\mathrm{Ln}(q)$, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$;

iv) Se $|q| \geq 1$, então $|\mathrm{Ln}(q)| \leq |q| - 1 + \pi$.

Para a verificação de *i)* basta usar a definição dada para função logarítmica. Para *ii)*, considere o exemplo em que $p = i_1$ e $q = i_2$. observe que $\mathrm{Ln}(i_1 i_2) = \ln(i_3) = \dfrac{\pi}{2} i_3$, mas $\mathrm{Ln}(i_1) + \mathrm{Ln}(i_2) = \dfrac{\pi}{2}(i_1 + i_2)$. Aplicando indução, chegamos na validade de *iii)*. Finalmente, para provar *iv)*, usemos a definição como segue

$$\begin{aligned} |\mathrm{Ln}(q)| = |\ln|q| + \vec{u} \arccos\left(\frac{q_0}{|q|}\right)| &\leq |\ln|q|| + |\vec{u} \arccos\left(\frac{q_0}{|q|}\right)| \\ &= |1 + \ln|q| - 1| + |\vec{u} \arccos\left(\frac{q_0}{|q|}\right)| \\ &\leq |q| - 1 + \pi. \end{aligned}$$

As generalizações feitas para a função logarítmica podem também ser introduzidas através de **coordenadas esféricas**, o que em muitas situações é mais conveniente do modo como foi tratado nesse trabalho. Para mais detalhes a respeito dessa abordagem consulte (MARÃO, 2007) e (MARICATO, 2005).

1.2.2 Funções Trigonométricas e Hiperbólicas

Apresentamos ao longo desta seção as definições das funções quaterniônicas trigonométricas e hiperbólicas, além disso, estabelecemos algumas propriedades destas funções.

É sabido que para um dado $t \in \mathbb{R}$ podemos representar e^t em termos da série

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots . \tag{1.24}$$

Motivados por (1.24), consideremos os quatérnios p e u, em que $u = \vec{u} = \dfrac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$. Substituindo t, por $p\vec{u}$, é imediato que:

$$\begin{aligned} e^{p\vec{u}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(p\vec{u})^k}{k!} &= 1 + p\vec{u} + \frac{(p\vec{u})^2}{2!} + \frac{(p\vec{u})^3}{3!} + \frac{(p\vec{u})^4}{4!} + \frac{(p\vec{u})^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 + p\vec{u} - \frac{p^2}{2!} - \frac{p^3}{3!}\vec{u} + \frac{p^4}{4!} + \frac{p^5}{5!}\vec{u} + \cdots . \end{aligned} \tag{1.25}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} e^{-p\vec{u}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}(p\vec{u})^k &= 1 - p\vec{u} + \frac{(p\vec{u})^2}{2!} - \frac{(p\vec{u})^3}{3!} + \frac{(p\vec{u})^4}{4!} - \frac{(p\vec{u})^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 - p\vec{u} - \frac{p^2}{2!} + \frac{p^3}{3!}\vec{u} + \frac{p^4}{4!} - \frac{p^5}{5!}\vec{u} + \cdots . \end{aligned} \tag{1.26}$$

Observe que por (1.25) e (1.26) temos a seguinte conclusão:

$$\begin{aligned} \cos(p) &= \frac{1}{2}\left(e^{p\vec{u}} + e^{-p\vec{u}}\right); \\ \mathrm{sen}\,(p) &= -\frac{1}{2}\vec{u}\left(e^{p\vec{u}} - e^{-p\vec{u}}\right). \end{aligned}$$

Feitas essas considerações, cabe agora definir a função seno e cosseno, como segue:

$$\text{sen}\,(p) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\vec{u}\left(e^{p\vec{u}} - e^{-p\vec{u}}\right), & \text{se } |\vec{p}| \neq 0, \\ \text{sen}\,(p_0), & \text{se } |\vec{p}| = 0, \end{cases} \tag{1.27}$$

$$\cos\,(p) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(e^{p\vec{u}} + e^{-p\vec{u}}\right), & \text{se } |\vec{p}| \neq 0, \\ \cos\,(p_0), & \text{se } |\vec{p}| = 0. \end{cases} \tag{1.28}$$

Percebe-se que, de fato, as definições das funções seno e cosseno são generalizações naturais do caso complexo, desse modo, é válido a análise de algumas propriedades, como por exemplo, se as funções são pares ou ímpares, que sabemos valer imediatamente, além disso, provaremos a proposição a seguir, que sugere que a relação trigonométrica fundamental também é válida dentro desse contexto.

Proposição 1.4 *Sejam* $\text{sen}\,(p)$ *e* $\cos\,(p)$ *funções trigonométricas do tipo quaterniônico. Então*

$$\text{sen}^2\,(p) + \cos^2\,(p) = 1.$$

Prova. Se $|\vec{p}| = 0$, por definição, $\text{sen}\,(p) = \text{sen}\,(p_0)$ e $\cos\,(p) = \cos\,(p_0)$, logo o resultado é trivial, pois p_0 é um número real. Suponha então que $|\vec{p}| \neq 0$, devemos verificar que

$$\left[-\frac{1}{2}\vec{u}\left(e^{p\vec{u}} - e^{-p\vec{u}}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}\left(e^{p\vec{u}} + e^{-p\vec{u}}\right)\right]^2 = 1.$$

De fato, desenvolvendo o lado esquerdo da igualdade anterior, tem-se

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}\left(e^{2p\vec{u}} - 2 + e^{-p\vec{u}}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{2p\vec{u}} + 2 + e^{-p\vec{u}}\right) &= -\frac{1}{4}\left(e^{2p\vec{u}} - 2 - e^{-2p\vec{u}} - e^{2p\vec{u}} - 2 - e^{-2p\vec{u}}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Apesar de parecer que todas as propriedades válidas para complexos irão também valer para os quatérnios, é necessário ter certo cuidado, pois em geral, as funções trigonométricas quaterniônicas deixam de satisfazer o seno da soma e diferença e o cosseno da soma e diferença, isto é:

$$\begin{aligned} sen\,(p \pm q) &\neq sen\,(p) cos\,(q) \pm cos\,(p) sen\,(q); \\ cos\,(p \pm q) &\neq cos\,(p) cos\,(q) \pm sen\,(p) sen\,(q), \end{aligned}$$

ocorrerá a igualdade somente no caso em que p e q comutam. Para validar essa afirmação, tomemos como exemplo $p = i_1$ e $q = i_2$. Note que,

$$\text{sen}\,(i_1 + i_2) = \frac{i_1 + i_2}{\sqrt{2}}\text{senh}\,(\sqrt{2}) \neq (i_1 + i_2)\text{senh}\,(1)\cosh\,(1) = \text{sen}\,(i_1)\cos\,(i_2) + \cos\,(i_1)\text{sen}\,(i_2).$$

Além dessa propriedade, vale perceber que enquanto $|\text{sen}\,(t)| \leq 1$ e $|\cos{(t)}| \leq 1$ para todo t real, o mesmo não se pode concluir para quatérnios, pois $|\text{sen}\,(i_1 + i_2)| \approx 1.935 > 1$ e $|\cos{(i_1 + i_2)}| \approx 2.178 > 1$.

Com base nas definições dadas para as funções seno e cosseno podemos naturalmente definir as demais funções trigonométricas: tangente, secante, cotangente e cossecante. Dado $p \in \mathbb{H} \setminus \left\{\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi : n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right\}$ da seguinte forma:

$$\text{tg}\,(p) = \frac{\text{sen}\,(p)}{\cos{(p)}} \quad \text{e} \quad \sec{(p)} = \frac{1}{\cos{(p)}} \tag{1.29}$$

que são chamadas funções tangente e secante quaterniônicas. Assim, dado $p \in \mathbb{H} \setminus \{n\pi : n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ as funções definidas por

$$\text{cotg}\,(p) = \frac{\cos{(p)}}{\text{sen}\,(p)} \quad \text{e} \quad \text{cossec}\,(p) = \frac{1}{\text{sen}\,(p)}. \tag{1.30}$$

são chamadas funções cotagente e cossecante quaterniônicas, respectivamente.

Conforme visto anteriormente, certas propriedades não podem ser generalizadas do caso complexo para o caso quaterniônico. Pela **Definição 1.3**, que fundamenta periodicidade total, concluiremos que as funções trigonométricas não são totalmente periódicas, pelo fato de serem definidas em termos da exponencial, no entanto gozarão da periodicidade por eixos.

De maneira similar ao que foi feito para definir as funções quaterniônicas *seno* e *cosseno*, faremos as definições das **funções hiperbólicas**, assim considere $t \in \mathbb{R}$ e relembre que

$$\text{senh}\,(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{e} \quad \cosh{(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}. \tag{1.31}$$

Além disso, por (1.24), dado $p \in \mathbb{H}$, temos:

$$e^p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} = 1 + p + \frac{p^2}{2!} + \frac{p^3}{3!} + \cdots$$

e

$$e^{-p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} p^k = 1 - p + \frac{p^2}{2!} - \frac{p^3}{3!} + \cdots .$$

Percebe-se sem muita dificuldade o seguinte:

$$\begin{aligned} e^p - e^{-p} &= 2\text{senh}\,(p); \\ e^p + e^{-p} &= 2\cosh{(p)}. \end{aligned}$$

Logo, naturalmente podemos definir as funções $\text{senh}\,(p)$ e $\cosh{(p)}$ por:

$$\text{senh}\,(p) = \frac{e^p - e^{-p}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh{(p)} = \frac{e^p + e^{-p}}{2}. \tag{1.32}$$

Análogo às funções quaterniônicas sen e cos, temos propriedades generalizadas que são válidas para as hiperbólicas quaterniônicas, como por exemplo, o fato de $-\text{senh}\,(p) = \text{senh}\,(-p)$ e $\cosh(p) = \cosh(-p)$. Além disso, percebemos que vale também $\cosh^2(p) - \text{senh}^2(p) = 1$. A demonstração desse fato é feita utilizando a definição e verificando que, de fato, vale a identidade. Já o seno hiperbólico da soma e diferença e cosseno hiperbólico da soma e diferença não valem, isto é:

$$\begin{aligned} \text{senh}\,(p \pm q) &\neq \text{senh}\,(p)\cosh(q) \pm \cosh(p)\text{senh}\,(q); \\ \cosh(p \pm q) &\neq \cosh(p)\cosh(q) \pm \text{senh}\,(p)\text{senh}\,(q). \end{aligned}$$

A igualdade ocorrerá somente no caso em que p e q comutam e para justificar, tomemos como exemplo $p = i_1$ e $q = -i_2$. Note que,

$$\text{senh}\,(i_1 - i_2) = \frac{(i_1 - i_2)}{\sqrt{2}}\text{sen}\,(\sqrt{2}) \neq (i_1 - i_2)\cos(1)\text{sen}\,(1) = \text{senh}\,(i_1)\cosh(i_2) - \cosh(i_1)\text{senh}\,(i_2).$$

A partir de (1.32) é possível definir as demais funcões hiperbólicas: tangente, secante, cotangente e cossecante. Dado $p \in \mathbb{H} \setminus \left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} : n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right\}$, as funções definidas por:

$$\text{tgh}\,(p) = \frac{\text{senh}\,(p)}{\cosh(p)} \quad \text{e} \quad \text{sech}\,(p) = \frac{1}{\cosh(p)} \tag{1.33}$$

são chamadas funções tagente e secante hiperbólicas quaterniônicas. Agora, para definir as demais funções, dado $p \in \mathbb{H} \setminus \left\{n\pi\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} : n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right\}$, as funções definidas por:

$$\text{cotgh}\,(p) = \frac{\cosh(p)}{\text{senh}\,(p)} \quad \text{e} \quad \text{cossech}\,(p) = \frac{1}{\text{senh}\,(p)} \tag{1.34}$$

são chamadas funções cotagente e cossecante hiperbólicas quaterniônicas.

Discutiremos a seguir importantes relações entre as funções quaterniônicas trigonométricas e hiperbólicas. Relembre que, dado $p = \vec{p}$, com $|\vec{p}| \neq 0$:

$$e^{\pm\vec{p}} = \cos|\vec{p}| \pm \vec{u}\,\text{sen}\,|\vec{p}|, \quad \text{onde } \vec{u} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}.$$

A fim de determinar relações entre as hiperbólicas e trigonométricas, observemos o seguinte:

$$\begin{aligned} \text{senh}\,(\vec{p}) = \frac{1}{2}\left(e^{\vec{p}} - e^{-\vec{p}}\right) &= \frac{1}{2}\left(\cos|\vec{p}| + \vec{u}\,\text{sen}\,|\vec{p}| - \cos|\vec{p}| + \vec{u}\,\text{sen}\,|\vec{p}|\right) \\ &= \frac{1}{2}2\text{sen}\,|\vec{p}| \\ &= \text{sen}\,|\vec{p}|, \end{aligned}$$

e portanto concluímos:

$$\text{senh}\,(\vec{p}) = \text{sen}\,|\vec{p}|. \tag{1.35}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\cosh(\vec{p}) = \frac{1}{2}\left(e^{\vec{p}} + e^{-\vec{p}}\right) &= \frac{1}{2}(\cos|\vec{p}| + \vec{u}\,\mathrm{sen}\,|\vec{p}| + \cos|\vec{p}| - \vec{u}\,sen\,|\vec{p}|) \\ &= \frac{1}{2}2\cos|\vec{p}| \\ &= \cos|\vec{p}|,\end{aligned}$$

logo,

$$\cosh(\vec{p}) = \cos|\vec{p}|. \tag{1.36}$$

A partir de (1.35) e (1.36), podemos determinar outras relações. A saber:

$$\mathrm{senh}\,(p) = \mathrm{senh}\,(p_0 + \vec{p}) = \mathrm{senh}\,(p_0)\cos(|\vec{p}|) + \cosh(p_0)\mathrm{sen}\,(|\vec{p}|), \tag{1.37}$$

e

$$\cosh(p) = \cosh(p_0 + \vec{p}) = \cosh(p_0)\cos(|\vec{p}|) - \mathrm{senh}\,(p_0)\mathrm{sen}\,(|\vec{p}|). \tag{1.38}$$

Existem diversos tipos de funções quaterniônicas que não foram mencionadas nesse trabalho, pois pensamos em expor somente as funções mais importantes dentro da teoria, além de mostrar as propriedades essenciais destas. O leitor interessado em estudar detalhadamente as funções quaterniônicas pode consultar (MORAIS; GEORGIEV; SPRÖSSIG, 2014).

2 Regularidade e Derivada das Funções Quaterniônicas

As funções analíticas estudadas em Análise Complexa possuem um papel fundamental na teoria de funções complexas, pois formam um conjunto não trivial com importantes propriedades. Dentro desse contexto, falar em função analítica é o mesmo que afirmar que a função pode ser desenvolvida em série de potências.

No caso quaterniônico, as funções $f : A \subseteq \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ que podem ser desenvolvidas em série de potências são as mesmas quando vistas como aplicações, que podem ser desenvolvidas em série de potências, de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^4$ (SUDBERY, 1979). Desse modo, o estudo das séries de potências quaterniônicas em nada ajuda quando se procura um conjunto de funções quaterniônicas que desempenhe para o conjunto dos quatérnios o mesmo papel que as funções analíticas possuem para a Análise Complexa.

A necessidade de uma outra abordagem para conseguir uma generalização a respeito da analiticidade tornou-se essencial, e precisamente em 1934, R. Fueter encontrou uma maneira de definir um conjunto de funções sobre o qual pode-se desenvolver a teoria de funções quaterniônicas de forma análoga à teoria de funções complexas. Tal conjunto de funções é conhecido como conjunto das **funções regulares**.

Apresentaremos nesse capítulo a definição de regularidade de funções quaterniônicas devida a R. Fueter, e vale ressaltar que a definição a ser dada ainda apresenta lacunas (existem funções lineares que não são regulares), e trabalhos recentes mostraram como atender uma demanda maior de funções, como (XU et al., 2015), por exemplo.

Como mencionado, alguns trabalhos publicados recentemente procuraram contribuir com o desenvolvimento dessa noção de regularidade. Em particular, utilizamos o artigo (MACHADO; BORGES, 2002), que se ocupa com uma classe de funções que satisfazem condições especiais (um tipo de regularidade para tal classe específica de funções). Tais condições serão denominadas *condições de Cauchy-Riemann Generalizadas*.

2.1 Regularidade

As próximas definições seguem fielmente a de (FUETER, 1934) para funções regulares. Tal definição é imprescindível para o desenvolvimento lógico da teoria de funções quaterniônicas.

Definição 2.1 *Seja $f = f_0 + i_1 f_1 + i_2 f_2 + i_3 f_3$ uma função quaterniônica. Dizemos que f é **Regular à esquerda** quando as suas funções coordenadas $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, k = 0, 1, 2, 3$ são* *parcialmente diferenciáveis em relação às variáveis $q_k, k = 0, 1, 2, 3$ e satisfaz a seguinte relação:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_0}{\partial q_0} - \dfrac{\partial f_1}{\partial q_1} - \dfrac{\partial f_2}{\partial q_2} - \dfrac{\partial f_3}{\partial q_3} = 0; \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial q_0} + \dfrac{\partial f_0}{\partial q_1} + \dfrac{\partial f_3}{\partial q_2} - \dfrac{\partial f_2}{\partial q_3} = 0; \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial q_0} - \dfrac{\partial f_3}{\partial q_1} + \dfrac{\partial f_0}{\partial q_2} + \dfrac{\partial f_1}{\partial q_3} = 0; \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial q_0} + \dfrac{\partial f_2}{\partial q_1} - \dfrac{\partial f_1}{\partial q_2} + \dfrac{\partial f_0}{\partial q_3} = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Definição 2.2 *Seja $f = f_0 + i_1 f_1 + i_2 f_2 + i_3 f_3$ uma função quaterniônica. Dizemos que f é* ***Regular à direita*** *quando as suas funções coordenadas $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, k = 0, 1, 2, 3$ são parcialmente diferenciáveis em relação às variáveis $q_k, k = 0, 1, 2, 3$ e satisfaz a seguinte relação:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_0}{\partial q_0} - \dfrac{\partial f_1}{\partial q_1} - \dfrac{\partial f_2}{\partial q_2} - \dfrac{\partial f_3}{\partial q_3} = 0; \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial q_0} + \dfrac{\partial f_0}{\partial q_1} - \dfrac{\partial f_3}{\partial q_2} + \dfrac{\partial f_2}{\partial q_3} = 0; \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial q_0} + \dfrac{\partial f_3}{\partial q_1} + \dfrac{\partial f_0}{\partial q_2} - \dfrac{\partial f_1}{\partial q_3} = 0; \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial q_0} - \dfrac{\partial f_2}{\partial q_1} + \dfrac{\partial f_1}{\partial q_2} + \dfrac{\partial f_0}{\partial q_3} = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Utilizando uma forma mais simples, podemos definir o operador $\Gamma = \dfrac{\partial}{q_0} + i_1 \dfrac{\partial}{q_1} + i_2 \dfrac{\partial}{q_2} + i_3 \dfrac{\partial}{q_3}$ e reescrever a regularidade à esquerda, quando o operador Gama encontra-se operando à esquerda da função f, isto é:

$$\Gamma f = 0 \tag{2.3}$$

Da mesma forma, podemos reescrever a regularidade à direita, quando o operador Gama encontra-se operando à direita da função f, isto é:

$$f\Gamma = 0. \tag{2.4}$$

Certas funções quaterniônicas podem simplesmente ser regulares à esquerda ou à direita, no entanto, podem também existir funções que irão satisfazer ambas as condições, e quando este for o caso, diremos que as funções são **Regulares**. Não é difícil exibir exemplos de funções regulares, mas vale ressaltar algo importante, que é o fato de uma função quaterniônica simples como $f(q) = q$ não ser regular. Em geral, dado $k \in \mathbb{N}, f(q) = q^k$

jamais irá satisfazer as equações acima, nunca sendo, portanto, regular. Apesar disso, a definição de regularidade que foi dada é útil o suficiente para atender uma rica quantidade de funções (FUETER, 1934). A seguir veremos alguns exemplos de funções regulares:

Exemplos.

1. Mostraremos que a função quaterniônica $f(q) = q$ não é regular no sentido de Fueter. Para isso, basta mostrarmos que ela não é regular à esquerda. De fato,

$$\Gamma f = \frac{\partial f}{q_0} + i_1 \frac{\partial f}{q_1} + i_2 \frac{\partial f}{q_2} + i_3 \frac{\partial f}{q_3} = 1 - 1 - 1 - 1 = -2 \neq 0.$$

   Poderíamos provar que essa função também não é regular à direita da seguinte forma:

$$f\Gamma = \frac{\partial f}{q_0} + \frac{\partial f}{q_1} i_1 + \frac{\partial f}{q_2} i_2 + \frac{\partial f}{q_3} i_3 = 1 - 1 - 1 - 1 = -2 \neq 0.$$

   Temos assim um exemplo de função que não é regular nem à esquerda nem à direita.

2. Escolha $j \in \{1, 2, 3\}$. Uma forma simples de criar funções regulares é considerar *funções holomorfas* $f(q_0 + i_j q_j)$ na variável $z = q_0 + i_j q_j$. Então f não depende das outras duas variáveis e satisfaz claramente as equações (2.1) e (2.2), isto é, $\Gamma f = 0$ e $f\Gamma = 0$.

3. Escolha $\omega \in \mathbb{R}^3, |\omega| = 1$. Observemos que $\left(\sum_{j=1}^{3} i_j \omega_j\right)^2 = -1$. Se

$$f(z) = f_0(q_0, t) + \sum_{j=1}^{3} i_j \omega_j f_1(q_0, t), \text{ em que } z = q_0 + it,$$

   é uma função *holomorfa* em z, então,

$$F(q) = f_0\left(q_0, \sum_{j=1}^{3} \omega_j q_j\right) + \sum_{j=1}^{3} i_j \omega_j f_1\left(q_0, \sum_{j=1}^{3} \omega_j q_j\right),$$

   Satisfaz a equação $\Gamma f = 0$ (ou $f\,\Gamma = 0$), em seu domínio de definição.

4. Existe uma maneira de gerar funções regulares que foi criada por R. Fueter, e corresponde a uma fonte de valiosos exemplos de funções regulares. Consideremos as funções do tipo $f_k = \Delta(q^k), k \in \mathbb{Z}$ em que

$$\Delta(q^k) = -4(kq^{-k-1}\overline{q}^{-1} + (k-1)q^{-k}\overline{q}^{-2} + (k-2)q^{-k+1}\overline{q}^{-3} + \cdots + q^{-2}\overline{q}^{-k})$$

   .

   Em particular, para $k = -1$ temos a seguinte função:

$$\Delta(q^{-1}) = 4\frac{q^{-1}}{|q|^2} = 4\frac{\bar{q}}{|q|^4}.$$

Definimos a função E por,

$$E(q) = 4\frac{q^{-1}}{|q|^2} = 4\frac{\bar{q}}{|q|^4}.$$

Esta função é regular à esquerda e à direita em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,ou seja, $\Gamma E = E\,\Gamma = 0$. Para uma demonstração veja (BUREŠ; LÁVIČKA; SOUČEK, 2009)

Existem atualmente uma quantidade significativa de trabalhos que buscam complementar essa noção de regularidade do ponto de vista de Fueter, podemos citar (GENTILI; STRUPPA, 2007), (LEO; ROTELLI, 2003) e (XU et al., 2015), por exemplo. Para mais detalhes sobre propriedades a respeito da definição de regularidade supracitada veja (FUETER, 1934).

Dentro das possibilidades, nos ocuparemos de funções que satisfazem um sistema de relações denominadas *condições de Cauchy-Riemann generalizadas*, que permitirá o desenvolvimento de "derivadas" das funções quaterniônicas.

2.2 Condições de Cauchy-Riemann Generalizadas e Derivadas Quaterniônicas

A diferenciação de funções complexas depende exclusivamente de que as derivadas parciais de uma função f cumpram certas relações de compatibilidade, relações estas conhecidas como condições de Cauchy-Riemann. Como veremos, não é diferente quando se trata de funções quaterniônicas, porém, há de se ter certo cuidado devido a falta de comutatividade do anel dos quatérnios, pois conforme analisaremos, implicará no desenvolvimento de dois tipos de derivadas: derivada à esquerda e derivada à direita, cada uma dependendo da existência de funções satisfazendo as *condições de Cauchy-Riemann generalizadas* que mostraremos.

Considere uma função $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, isto é,

$$\begin{aligned} f(q_0, q_1, q_2, q_3) &= f_0(q_0, q_1, q_2, q_3) + i_1 f_1(q_0, q_1, q_2, q_3) \\ &\quad + i_2 f_2(q_0, q_1, q_2, q_3) + i_3 f_3(q_0, q_1, q_2, q_3), \end{aligned}$$

em que $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ são funções coordenadas com valores reais. A variável quaterniônica será denotada por q, onde,

$$q = q_0 + i_1 q_1 + i_2 q_2 + i_3 q_3.$$

As relações entre as unidades imaginárias i_1, i_2 e i_3 permitem dar uma definição formal de

$\int f dq$ e $\int dq f$ (note que tratam-se de integrais diferentes). Temos assim que:

$$\begin{aligned} \int f dq := \int (f_0 + i_1 f_1 + i_2 f_2 + i_3 f_3)(dq_0 + i_1 dq_1 + i_2 dq_2 + i_3 dq_3) \\ = \int (f_0 dq_0 - f_1 dq_1 - f_2 dq_2 - f_3 dq_3) \\ + i_1 \int (f_1 dq_0 + f_0 dq_1 - f_3 dq_2 + f_2 dq_3) \\ + i_2 \int (f_2 dq_0 + f_3 dq_1 + f_0 dq_2 - f_1 dq_3) \\ + i_3 \int (f_3 dq_0 - f_2 dq_1 + f_1 dq_2 + f_0 dq_3) \end{aligned} \tag{2.5}$$

e

$$\begin{aligned} \int dq f := \int (dq_0 + i_1 dq_1 + i_2 dq_2 + i_3 dq_3)(f_0 + i_1 f_1 + i_2 f_2 + i_3 f_3) \\ = \int (dq_0 f_0 - dq_1 f_1 - dq_2 f_2 - dq_3 f_3) \\ + i_1 \int (dq_0 f_1 + dq_1 f_0 + dq_2 f_3 - dq_3 f_2) \\ + i_2 \int (dq_0 f_2 - dq_1 f_3 + dq_2 f_0 + dq_3 f_1) \\ + i_3 \int (dq_0 f_3 - dq_1 f_2 + dq_2 f_1 + dq_3 f_0). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Tais integrais podem ser encaradas como integrais indefinidas para a Análise Quaterniônica. Dessa forma, o que surge do lado direito de cada integral acima definida, é uma função (primitiva quaterniônica). Por exemplo, se queremos calcular $\int f dq$, em que f é uma função quaterniônica e $f(q) = q_0 + i_1 0 + i_2 0 + i_3 0$, teremos como resultado:

$$\int f dq = \int q_0 dq_0 = \frac{q_0^2}{2} + c,$$

em que c é uma constante real.

Necessitamos agora dar a seguinte definição:

Definição 2.3 *Seja Ω um domínio aberto conexo. Dizemos que Ω é simplesmente conexo se o interior de qualquer contorno contido em Ω, está contido em Ω.*

Observação: em palavras menos formais, um *domínio simplesmente conexo* não apresenta "buracos".

Supondo inicialmente que as funções coordenadas $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, 3$, satisfazem os requisitos para a existência de todas as integrais dadas em (2.5) e (2.6) e dado um *caminho* que vai do ponto $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ até o ponto $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ em um *domínio simplesmente conexo* do espaço quadridimensional, veremos que as integrais $\int_a^b f dq$ e $\int_a^b dq f$ independem do caminho de integração sob certas condições (MACHADO; BORGES, 2002).

Teorema 2.1 *Para quaisquer par de pontos a e b e qualquer caminho unindo-os em um domínio simplesmente conexo do espaço quadridimensional, a integral $\int_a^b f dq$ sobre o anel dos quatérnios, é independente do caminho se e somente se existe uma função $F = F_0 + i_1F_1 + i_2F_2 + i_3F_3$ tal que $\int_a^b f dq = F(b) - F(a)$ e satisfazendo as seguintes relações:*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_0}{\partial q_0} = \frac{\partial F_1}{\partial q_1} = \frac{\partial F_2}{\partial q_2} = \frac{\partial F_3}{\partial q_3} \quad &, \quad \frac{\partial F_1}{\partial q_0} = -\frac{\partial F_0}{\partial q_1} = -\frac{\partial F_2}{\partial q_3} = \frac{\partial F_3}{\partial q_2}, \\
\frac{\partial F_2}{\partial q_0} = -\frac{\partial F_0}{\partial q_2} = -\frac{\partial F_1}{\partial q_3} = \frac{\partial F_3}{\partial q_1} \quad &, \quad \frac{\partial F_3}{\partial q_0} = \frac{\partial F_0}{\partial q_3} = -\frac{\partial F_1}{\partial q_2} = -\frac{\partial F_2}{\partial q_1}.
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

Prova. De acordo com (2.5), a integral de f ao longo de a até b é escrita como,

$$
\begin{aligned}
\int f dq = \int (f_0 + i_1f_1 + i_2f_2 + i_3f_3)(dq_0 + i_1dq_1 + i_2dq_2 + i_3dq_3) \\
= \int (f_0dq_0 - f_1dq_1 - f_2dq_2 - f_3dq_3) \\
+i_1 \int (f_1dq_0 + f_0dq_1 - f_3dq_2 + f_2dq_3) \\
+i_2 \int (f_2dq_0 + f_3dq_1 + f_0dq_2 - f_1dq_3) \\
+i_3 \int (f_3dq_0 - f_2dq_1 + f_1dq_2 + f_0dq_3),
\end{aligned}
$$

e independe do caminho desde que

$$
\int_a^b f dq = \int_a^b dF = \int_a^b d(F_0 + i_1F_1 + i_2F_2 + i_3F_3) = F(b) - F(a),
$$

para uma certa função F. Supondo então que a função F existe, temos que as diferenciais totais de suas funções coordenadas são dadas por:

$$
\begin{aligned}
dF_1 &= \frac{\partial F_0}{\partial q_0}dq_0 + \frac{\partial F_0}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial F_0}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial F_0}{\partial q_3}dq_3 \\
&= f_0dq_0 - f_1dq_1 - f_2dq_2 - f_3dq_3, \\
dF_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial q_0}dq_0 + \frac{\partial F_1}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial F_1}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial F_1}{\partial q_3}dq_3 \\
&= f_0dq_1 + f_1dq_0 - f_2dq_3 - f_3dq_2, \\
dF_1 &= \frac{\partial F_2}{\partial q_0}dq_0 + \frac{\partial F_2}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial F_2}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial F_2}{\partial q_3}dq_3 \\
&= f_0dq_3 - f_2dq_0 - f_1dq_3 - f_3dq_1, \\
dF_1 &= \frac{\partial F_3}{\partial q_0}dq_0 + \frac{\partial F_3}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial F_3}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial F_3}{\partial q_3}dq_3 \\
&= f_0dq_3 + f_3dq_1 + f_2dq_1 + f_1dq_2
\end{aligned}
$$

e as relações do **Teorema 2.1** são imediatas:

$$\begin{aligned}
f_0 &= \frac{\partial F_0}{\partial q_0} = \frac{\partial F_1}{\partial q_1} = \frac{\partial F_2}{\partial q_2} = \frac{\partial F_3}{\partial q_3}, \\
f_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial q_0} = -\frac{\partial F_0}{\partial q_1} = -\frac{\partial F_2}{\partial q_3} = \frac{\partial F_3}{\partial q_2}, \\
f_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial q_0} = -\frac{\partial F_0}{\partial q_2} = -\frac{\partial F_1}{\partial q_3} = \frac{\partial F_3}{\partial q_1}, \\
f_3 &= \frac{\partial F_3}{\partial q_0} = \frac{\partial F_0}{\partial q_3} = -\frac{\partial F_1}{\partial q_2} = -\frac{\partial F_2}{\partial q_1}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.2 *Para quaisquer par de pontos a e b e qualquer caminho unindo-os em um domínio siplesmente conexo do espaço quadridimensional, a integral $\int_a^b dqf$ sobre o anel dos quatérnios, é independente do caminho se e somente se existe uma função $G = G_0 + i_1G_1 + i_2G_2 + i_3G_3$ tal que $\int_a^b fdq = G(b) - G(a)$ e satisfazendo as seguintes relações:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_0}{\partial q_0} = \frac{\partial G_1}{\partial q_1} = \frac{\partial G_2}{\partial q_2} = \frac{\partial G_3}{\partial q_3} \quad &, \quad \frac{\partial G_1}{\partial q_0} = -\frac{\partial G_0}{\partial q_1} = \frac{\partial G_2}{\partial q_3} = -\frac{\partial G_3}{\partial q_2}, \\
\frac{\partial G_2}{\partial q_0} = -\frac{\partial G_0}{\partial q_2} = -\frac{\partial G_1}{\partial q_3} = \frac{\partial G_3}{\partial q_1} \quad &, \quad \frac{\partial G_3}{\partial q_0} = -\frac{\partial G_0}{\partial q_3} = \frac{\partial G_1}{\partial q_2} = -\frac{\partial G_2}{\partial q_1}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Prova. A demonstração desse teorema é feita usando passos semelhantes ao teorema anterior. □

Vale ressaltar a importância das relações obtidas em (2.7) e (2.8), pois elas se caracterizam dentro dessa teoria como um análogo às relações de *Cauchy-Riemann* na teoria de funções complexas. Dentro do nosso contexto elas se chamarão *condições de Cauchy-Riemann generalizadas*. É válido observar que as condições obtidas no **Teorema 2.1** e no **Teorema 2.2** não são as mesmas, logo, quando se diz que uma função quaterniônica f satisfaz as *condições de Cauchy-Riemann generalizadas*, deve-se especificar a qual grupo de condições estamos nos referindo, se é (2.7) ou (2.8). No entanto, podem existir funções que irão satisfazer ambas as condições. Isso proporciona uma discussão semelhante àquela vista sobre regularidade.

Em muitos problemas, a derivada de uma função é conhecida e o objetivo é encontrar a própria função. Com esse intuito iremos definir dois tipos de derivada, **derivada à esquerda** e **derivada à direita**. Iremos assumir que a função f satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_0}{\partial q_0} = \frac{\partial f_1}{\partial q_1} = \frac{\partial f_2}{\partial q_2} = \frac{\partial f_3}{\partial q_3} \quad &, \quad \frac{\partial f_1}{\partial q_0} = -\frac{\partial f_0}{\partial q_1} = -\frac{\partial f_2}{\partial q_3} = \frac{\partial f_3}{\partial q_2}, \\
\frac{\partial f_2}{\partial q_0} = -\frac{\partial f_0}{\partial q_2} = \frac{\partial f_1}{\partial q_3} = -\frac{\partial f_3}{\partial q_1} \quad &, \quad \frac{\partial f_3}{\partial q_0} = -\frac{\partial f_0}{\partial q_3} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_2} = \frac{\partial f_2}{\partial q_1}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Note que essas condições são as mesmas vistas em (2.7).

Considere uma função $l(q)$ definida em termos das derivadas parciais de f por:

$$\begin{aligned} l(q) = \frac{1}{4}&\left(\frac{\partial f_0}{\partial q_0} + \frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} + \frac{\partial f_3}{\partial q_3}\right) \\ +\frac{1}{4}i_1&\left(\frac{\partial f_0}{\partial q_0} - \frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} - \frac{\partial f_3}{\partial q_3}\right) \\ +\frac{1}{4}i_2&\left(\frac{\partial f_0}{\partial q_0} - \frac{\partial f_1}{\partial q_1} - \frac{\partial f_2}{\partial q_2} + \frac{\partial f_3}{\partial q_3}\right) \\ +\frac{1}{4}i_3&\left(\frac{\partial f_0}{\partial q_0} + \frac{\partial f_1}{\partial q_1} - \frac{\partial f_2}{\partial q_2} - \frac{\partial f_3}{\partial q_3}\right). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Definiremos essa função $l(q)$ como a *derivada à esquerda* da função quaterniônica $f(q)$. Para uma demonstração de que $l(q)$ satisfaz a condição $\int ldq = f$ veja (MACHADO; BORGES, 2002).

Seguindo os mesmos passos a definição anterior podemos definir a *derivada à direita* da função quaterniônica f, exigindo também que a função f satisfaça as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial q_0} = \frac{\partial f_1}{\partial q_1} = \frac{\partial f_2}{\partial q_2} = \frac{\partial f_3}{\partial q_3} \quad &, \quad \frac{\partial f_1}{\partial q_0} = -\frac{\partial f_0}{\partial q_1} = \frac{\partial f_2}{\partial q_3} = -\frac{\partial f_3}{\partial q_2}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_0} = -\frac{\partial f_0}{\partial q_2} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_3} = \frac{\partial f_3}{\partial q_1} \quad &, \quad \frac{\partial f_3}{\partial q_0} = -\frac{\partial f_0}{\partial q_3} = \frac{\partial f_1}{\partial q_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial q_1}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Note que essas condições são as mesmas vistas em (2.7).

Considere uma função $r(q)$ definida em termos das derivadas parciais de f por:

$$\begin{aligned} r(q) = \frac{1}{4}&\left(\frac{\partial f_0}{\partial q_0} + \frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} + \frac{\partial f_3}{\partial q_3}\right) \\ +\frac{1}{4}i_1&\left(\frac{\partial f_0}{\partial q_0} - \frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} - \frac{\partial f_3}{\partial q_3}\right) \\ +\frac{1}{4}i_2&\left(\frac{\partial f_0}{\partial q_0} - \frac{\partial f_1}{\partial q_1} - \frac{\partial f_2}{\partial q_2} + \frac{\partial f_3}{\partial q_3}\right) \\ +\frac{1}{4}i_3&\left(\frac{\partial f_0}{\partial q_0} - \frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} - \frac{\partial f_3}{\partial q_3}\right). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Finalmente, a função $r(q)$ é definida como a *derivada à direita* da função quaterniônica $f(q)$. Para uma demonstração de que $r(q)$ satisfaz a condição $\int dqr = f$ veja (MACHADO; BORGES, 2002).

Conforme foi definido, o operador quaterniônico de Fueter que é dado pela expressão $\Gamma = \frac{\partial}{\partial q_0} + i_1\frac{\partial}{\partial q_1} + i_2\frac{\partial}{\partial q_2} + i_3\frac{\partial}{\partial q_3}$, possibilita definir também o "conjugado" desse operador da seguinte forma, $\overline{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial q_0} - i_1\frac{\partial}{\partial q_1} - i_2\frac{\partial}{\partial q_2} - i_3\frac{\partial}{\partial q_3}$.Veremos que existe uma relação entre esse operador conjugado e as derivadas à esquerda e à direita. Note que

$$\begin{aligned}
f\overline{\Gamma} &= (f_0 + i_1 f_1 + i_2 f_2 + i_3 f_3)\left(\frac{\partial}{\partial q_0} - i_1\frac{\partial}{\partial q_1} - i_2\frac{\partial}{\partial q_2} - i_3\frac{\partial}{\partial q_3}\right) \\
&= \left(\frac{\partial f_0}{\partial q_0} + \frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} + \frac{\partial f_3}{\partial q_3}\right) + i_1\left(\frac{\partial f_0}{\partial q_0} - \frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} - \frac{\partial f_3}{\partial q_3}\right) \\
+i_2 &\left(\frac{\partial f_0}{\partial q_0} - \frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} - \frac{\partial f_3}{\partial q_3}\right) + i_3\left(\frac{\partial f_0}{\partial q_0} - \frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} - \frac{\partial f_3}{\partial q_3}\right) \\
&= 4l(q),
\end{aligned}$$

isto nos faz concluir que,

$$f\overline{\Gamma} = 4l(q), \tag{2.13}$$

Observe que fazendo um processo análogo podemos determinar a derivada à direita da função f, e daí obteremos:

$$\overline{\Gamma}f = 4r(q). \tag{2.14}$$

Portanto, ficam assim determinadas as derivadas à esquerda e direita em termos do operador conjugado de Fueter, o que acaba se tornando uma maneira prática de fazer o cálculo dessas derivadas.

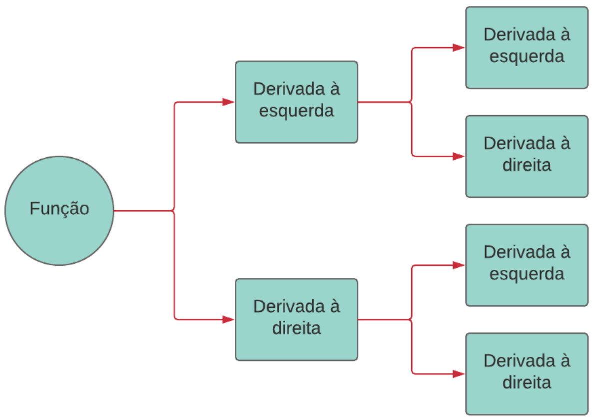
Para motivar o desenvolvimento das derivadas que vimos nesse capítulo, vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo. Analisaremos agora um exemplo interessante. Considerando a função quaterniônica $\phi(q) = i_1 + i_2 + i_3$, notamos que ela satisfaz as *condições de Cauchy-Riemann generalizadas* e não é difícil perceber que $\frac{1}{4}\overline{\Gamma}f = \frac{1}{4}f\,\overline{\Gamma} = 0$, ou seja $l(q) = r(q) = 0$. Em geral, se $\psi(q) = C$, onde $C = c_0 + i_1c_1 + i_2c_2 + i_3c_3$ e c_k com $k = 0, 1, 2, 3$ são constantes reais, teremos resultado semelhante ao anterior, isto é, a derivada à esquerda é igual a derivada à direita da função $\psi(q)$ e ambas são iguais a zero. Podemos então afirmar que, *toda função quaterniônica constante possui derivada à esquerda igual a derivada à direita.*

3 Derivadas de Ordem Superior e suas Consequências

O processo de derivação em ordens superiores é essencial para investigar diversos fenômenos, como já é sabido do cálculo de funções de variáveis reais. Para quatérnios, devemos atentar para o fato de que na tentativa de derivar em ordens superiores, obteremos uma cadeia de permutações entre as derivadas de ordem superior, ou seja, dada uma função f satisfazendo as *condições de Cauchy-Riemann generalizadas*, teremos duas possíveis derivadas: derivada à esquerda , denotada por $l(q)$, e derivada à direita, denotada por $r(q)$. Sob as mesmas condições da função f, as funções $l(q)$ e $r(q)$ podem também possuir suas derivadas à esquerda e à direita. Para um melhor entendimento, observe o diagrama de árvore a seguir:

Figura 3 – Diagrama de árvore das derivadas de ordem superior.



Fonte: compilação do autor

Chamaremos de **caso 1**, a derivação que obedece a seguinte ordem:

$$\begin{aligned}&\text{função } f(q) \longrightarrow \text{ derivada à esquerda } l(q) \longrightarrow \text{ derivada à esquerda } l_1(q);\\&\text{função } f(q) \longrightarrow \text{ derivada à direita } r(q) \longrightarrow \text{ derivada à direita } r_1(q),\end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $l_1(q)$ representa a derivada à esquerda de $l(q)$ e $r_1(q)$ representa a derivada à direita de $r(q)$. O caso **caso 2** obedece a seguinte ordem:

$$\begin{aligned}&\text{função } f(q) \longrightarrow \text{ derivada à esquerda } l(q) \longrightarrow \text{ derivada à direita } \bar{r}_1(q);\\&\text{função } f(q) \longrightarrow \text{ derivada à direita } r(q) \longrightarrow \text{ derivada à esquerda } \bar{l}_1(q),\end{aligned} \tag{3.2}$$

onde $\bar{r}_1(q)$ representa a derivada à direita de $l(q)$ e $\bar{l}_1(q)$ representa a derivada à esquerda de $r(q)$. Assim, o objetivo desse capítulo, é determinar consequências das *condições de Cauchy-Riemann generalizadas* para a derivação de ordem 2 do **caso 1** e, a partir daí, relacionarmos o **caso 1** com o **caso 2**, para finalmente concluirmos o que ocorre com as derivação superior de ordem $n \geq 2$. O estudo do caso 1 foi feito por (REIS, 2015).

3.1 Consequências das Condições de Cauchy-Riemann generalizadas para Derivadas de Ordem Superior nos casos 1 e 2

Assumiremos que a função $l(q)$ satisfaz as mesmas condições impostas à função f, portanto calcularemos $l_1(q)$, isto é, a sua derivada à esquerda.

$$\begin{aligned}
l_1(q) \quad = \quad & \frac{1}{16}\left(\frac{\partial}{\partial q_0}\left(\frac{\partial f_0}{\partial q_0}+\frac{\partial f_1}{\partial q_1}+\frac{\partial f_2}{\partial q_2}+\frac{\partial f_3}{\partial q_3}\right)\right)\\
&+\frac{1}{16}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_0}-\frac{\partial f_0}{\partial q_1}+\frac{\partial f_3}{\partial q_2}-\frac{\partial f_2}{\partial q_3}\right)\right)\\
&+\frac{1}{16}\left(\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_0}-\frac{\partial f_3}{\partial q_1}-\frac{\partial f_0}{\partial q_2}+\frac{\partial f_1}{\partial q_3}\right)\right)\\
&+\frac{1}{16}\left(\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial f_3}{\partial q_0}+\frac{\partial f_2}{\partial q_1}-\frac{\partial f_1}{\partial q_2}-\frac{\partial f_0}{\partial q_3}\right)\right)\\
&+\frac{1}{16}i_1\left(\frac{\partial}{\partial q_0}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_0}-\frac{\partial f_0}{\partial q_1}+\frac{\partial f_3}{\partial q_2}-\frac{\partial f_2}{\partial q_3}\right)\right)\\
&-\frac{1}{16}i_1\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f_0}{\partial q_0}+\frac{\partial f_1}{\partial q_1}+\frac{\partial f_2}{\partial q_2}+\frac{\partial f_3}{\partial q_3}\right)\right)\\
&+\frac{1}{16}i_1\left(\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial f_3}{\partial q_0}+\frac{\partial f_2}{\partial q_1}-\frac{\partial f_1}{\partial q_2}-\frac{\partial f_0}{\partial q_3}\right)\right)\\
&-\frac{1}{16}i_1\left(\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_0}-\frac{\partial f_3}{\partial q_1}-\frac{\partial f_0}{\partial q_2}+\frac{\partial f_1}{\partial q_3}\right)\right)\\
&+\frac{1}{16}i_2\left(\frac{\partial}{\partial q_0}\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_0}-\frac{\partial f_3}{\partial q_1}-\frac{\partial f_0}{\partial q_2}+\frac{\partial f_1}{\partial q_3}\right)\right)\\
&-\frac{1}{16}i_2\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f_3}{\partial q_0}+\frac{\partial f_2}{\partial q_1}-\frac{\partial f_1}{\partial q_2}-\frac{\partial f_0}{\partial q_3}\right)\right)\\
&-\frac{1}{16}i_2\left(\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial f_0}{\partial q_0}+\frac{\partial f_1}{\partial q_1}+\frac{\partial f_2}{\partial q_2}+\frac{\partial f_3}{\partial q_3}\right)\right)\\
&+\frac{1}{16}i_2\left(\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_0}-\frac{\partial f_0}{\partial q_1}+\frac{\partial f_3}{\partial q_2}-\frac{\partial f_2}{\partial q_3}\right)\right)\\
&+\frac{1}{16}i_3\left(\frac{\partial}{\partial q_0}\left(\frac{\partial f_3}{\partial q_0}+\frac{\partial f_2}{\partial q_1}-\frac{\partial f_1}{\partial q_2}-\frac{\partial f_0}{\partial q_3}\right)\right)\\
&+\frac{1}{16}i_3\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_0}-\frac{\partial f_3}{\partial q_1}-\frac{\partial f_0}{\partial q_2}+\frac{\partial f_1}{\partial q_3}\right)\right)\\
&-\frac{1}{16}i_3\left(\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_0}-\frac{\partial f_0}{\partial q_1}+\frac{\partial f_3}{\partial q_2}-\frac{\partial f_2}{\partial q_3}\right)\right)\\
&-\frac{1}{16}i_3\left(\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial f_0}{\partial q_0}+\frac{\partial f_1}{\partial q_1}+\frac{\partial f_2}{\partial q_2}+\frac{\partial f_3}{\partial q_3}\right)\right).
\end{aligned}$$

Fazendo os devidos cálculos na expressão anterior, vem:

$$\begin{aligned}
l_1(q) &= \frac{1}{16}\left[\left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_0^2} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2^2} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_3^2}\right.\right.\\
&\quad \left. +2\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0 \partial q_1} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0 \partial q_2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1 \partial q_3}\right)\right)\\
&\quad +i_1\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0^2} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2^2} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3^2}\right.\\
&\quad \left. +2\left(\frac{-\partial^2 f_0}{\partial q_0 \partial q_1} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0 \partial q_2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0 \partial q_3}\right)\right)\\
&\quad +i_2\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0^2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1^2} - \frac{\partial f_2}{\partial q_2^2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_3^2}\right.\\
&\quad \left. +2\left(\frac{-\partial^2 f_3}{\partial q_0 \partial q_1} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_0 \partial q_2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0 \partial q_3}\right)\right)\\
&\quad +i_3\left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0^2} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2^2} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_3^2}\right.\\
&\quad \left.\left. +2\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0 \partial q_1} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0 \partial q_2} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_0 \partial q_3}\right)\right)\right]. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Derivando parcialmente todos os membros de (2.9) em relação à variável q_0 temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_0^2} &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0 \partial q_1} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0 \partial q_2} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0 \partial q_3}\\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0^2} &= -\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_0 \partial q_1} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0 \partial q_2} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0 \partial q_3}\\
\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0^2} &= -\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0 \partial q_1} = -\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_0 \partial q_2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0 \partial q_3}\\
\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0^2} &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0 \partial q_1} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0 \partial q_2} = -\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0 \partial q_3}.
\end{aligned}$$

Estabelecidas essas relações podemos naturalmente aplicá-las em (3.3), em que obtemos

$$\begin{aligned}
l_1(q) &= \frac{1}{16}\left[\left(7\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_0^2} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2^2} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_3^2}\right)\right.\\
&\quad +i_1\left(7\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0^2} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2^2} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3^2}\right)\\
&\quad +i_2\left(7\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0^2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_2^2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_3^2}\right)\\
&\quad \left. +i_3\left(7\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0^2} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2^2} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_3^2}\right)\right]. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

A expressão dada em (3.4) pode ainda ser simplificada, para isso derivamos parcialmente as igualdades das *condições de Cauchy-Riemann generalizadas* dadas em (2.9), em relação às variáveis q_1, q_2 e q_3. Fazendo isso iremos obter

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_0^2} = -\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1^2} = -\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2^2} = -\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_3^2}$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0^2} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2^2} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3^2}$$
$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0^2} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1^2} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_2^2} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_3^2}$$
$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0^2} = -\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1^2} = -\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2^2} = -\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_3^2}.$$

Utilizando essas igualdades, simplificamos (3.4) e obtemos a seguinte forma para a $l_1(q)$:

$$l_1(q) = \frac{10}{16}\left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_0^2} + i_1\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0^2} + i_2\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0^2} + i_3\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0^2}\right). \tag{3.5}$$

Um processo semelhante ao anterior pode se feito para obter $r_1(q)$, considerando também que $r(q)$ goza das mesmas condições da função f, façamos os cálculos:

$$\begin{aligned}
r_1(q) \quad = \quad & \frac{1}{16}\left(\frac{\partial}{\partial q_0}\left(\frac{\partial f_0}{\partial q_0} + \frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} + \frac{\partial f_3}{\partial q_3}\right)\right) \\
& + \frac{1}{16}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_0} - \frac{\partial f_0}{\partial q_1} + \frac{\partial f_3}{\partial q_2} - \frac{\partial f_2}{\partial q_3}\right)\right) \\
& + \frac{1}{16}\left(\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_0} - \frac{\partial f_3}{\partial q_1} - \frac{\partial f_0}{\partial q_2} + \frac{\partial f_1}{\partial q_3}\right)\right) \\
& + \frac{1}{16}\left(\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial f_3}{\partial q_0} + \frac{\partial f_2}{\partial q_1} - \frac{\partial f_1}{\partial q_2} - \frac{\partial f_0}{\partial q_3}\right)\right) \\
& + \frac{1}{16}i_1\left(\frac{\partial}{\partial q_0}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_0} - \frac{\partial f_0}{\partial q_1} - \frac{\partial f_3}{\partial q_2} + \frac{\partial f_2}{\partial q_3}\right)\right) \\
& - \frac{1}{16}i_1\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f_0}{\partial q_0} + \frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} + \frac{\partial f_3}{\partial q_3}\right)\right) \\
& - \frac{1}{16}i_1\left(\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial f_3}{\partial q_0} - \frac{\partial f_2}{\partial q_1} + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} - \frac{\partial f_0}{\partial q_3}\right)\right) \\
& + \frac{1}{16}i_1\left(\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_0} + \frac{\partial f_3}{\partial q_1} - \frac{\partial f_0}{\partial q_2} - \frac{\partial f_1}{\partial q_3}\right)\right) \\
& + \frac{1}{16}i_2\left(\frac{\partial}{\partial q_0}\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_0} + \frac{\partial f_3}{\partial q_1} - \frac{\partial f_0}{\partial q_2} - \frac{\partial f_1}{\partial q_3}\right)\right) \\
& + \frac{1}{16}i_2\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f_3}{\partial q_0} - \frac{\partial f_2}{\partial q_1} + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} - \frac{\partial f_0}{\partial q_3}\right)\right) \\
& - \frac{1}{16}i_2\left(\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial f_0}{\partial q_0} + \frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} + \frac{\partial f_3}{\partial q_3}\right)\right) \\
& - \frac{1}{16}i_2\left(\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_0} - \frac{\partial f_0}{\partial q_1} - \frac{\partial f_3}{\partial q_2} + \frac{\partial f_2}{\partial q_3}\right)\right) \\
& + \frac{1}{16}i_3\left(\frac{\partial}{\partial q_0}\left(\frac{\partial f_3}{\partial q_0} - \frac{\partial f_2}{\partial q_1} + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} - \frac{\partial f_0}{\partial q_3}\right)\right) \\
& - \frac{1}{16}i_3\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_0} + \frac{\partial f_3}{\partial q_1} - \frac{\partial f_0}{\partial q_2} - \frac{\partial f_1}{\partial q_3}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{16}i_3\left(\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_0}-\frac{\partial f_0}{\partial q_1}-\frac{\partial f_3}{\partial q_2}+\frac{\partial f_2}{\partial q_3}\right)\right)$$
$$-\frac{1}{16}i_3\left(\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial f_0}{\partial q_0}+\frac{\partial f_1}{\partial q_1}+\frac{\partial f_2}{\partial q_2}+\frac{\partial f_3}{\partial q_3}\right)\right).$$

Fazendo os devidos cálculos na expressão anterior, vem:

$$\begin{aligned}
r_1(q) \quad = \quad & \frac{1}{16}\left[\left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_0^2}-\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1^2}-\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2^2}-\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_3^2}\right.\right.\\
& \left.+2\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0\partial q_1}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0\partial q_2}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1\partial q_3}\right)\right)\\
& +i_1\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3^2}\right.\\
& \left.+2\left(\frac{-\partial^2 f_0}{\partial q_0\partial q_1}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0\partial q_2}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0\partial q_3}\right)\right)\\
& +i_2\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1^2}-\frac{\partial f_2}{\partial q_2^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_3^2}\right.\\
& \left.+2\left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0\partial q_1}-\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_0\partial q_2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0\partial q_3}\right)\right)\\
& +i_3\left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_3^2}\right.\\
& \left.\left.+2\left(-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0\partial q_1}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0\partial q_2}-\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_0\partial q_3}\right)\right)\right].
\end{aligned}\tag{3.6}$$

Derivando parcialmente todos os membros de (2.11) em relação à variável q_0 temos

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_0^2}=\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0\partial q_1}=\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0\partial q_2}=\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0\partial q_3}$$
$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0^2}=-\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_0\partial q_1}=-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0\partial q_2}=\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0\partial q_3}$$
$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0^2}=\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0\partial q_1}=-\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_0\partial q_2}=-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0\partial q_3}$$
$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0^2}=-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0\partial q_1}=\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0\partial q_2}=-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0\partial q_3}.$$

Estabelecidas essas relações podemos naturalmente aplicá-las em (3.6), em que obtemos

$$\begin{aligned}
r_1(q) \quad = \quad & \frac{1}{16}\left[\left(7\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_0^2}-\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1^2}-\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2^2}-\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_3^2}\right)\right.\\
& +i_1\left(7\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3^2}\right)\\
& +i_2\left(7\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_2^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_3^2}\right)\\
& \left.+i_3\left(7\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_3^2}\right)\right].
\end{aligned}\tag{3.7}$$

A expressão dada em (3.7) pode ainda ser simplificada, para isso derivamos parcialmente as igualdades das *condições de Cauchy-Riemann generalizadas* dadas em (2.11), em relação às variáveis q_1, q_2 e q_3. Fazendo isso iremos obter

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_0^2} = -\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1^2} = -\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2^2} = -\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_3^2}$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0^2} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2^2} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3^2}$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0^2} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1^2} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_2^2} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_3^2}$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0^2} = -\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1^2} = -\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2^2} = -\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_3^2}.$$

Finalmente, a partir da relações anteriores, obtemos $r_1(q)$ de forma simplificada:

$$r_1(q) = \frac{10}{16}\left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_0^2} + i_1\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0^2} + i_2\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0^2} + i_3\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0^2}\right). \tag{3.8}$$

É um fato curioso que essas derivadas coincidam, e motivados por isso, somos levados a enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.1 *Uma função quaterniônica f que satisfaz as equações de Cauchy-Riemann tem as suas derivadas quaterniônicas segunda à esquerda e à direita iguais.*

Prova. A demonstração é feita justamente baseando-se nas construções das funções $l_1(q)$ e $r_1(q)$, em que se conclui a igualdade. □

Conseguimos até aqui um resultado significativo para proceder na investigação das derivadas de ordem superior, e veremos a seguir uma relação mais forte entre as derivadas $l_1(q), r_1(q)$ e o laplaciano Δ.

Teorema 3.2 *Se f é uma função quaterniônica que satisfaz as condições de Cauchy-Rieman generalizadas, então*

$$l_1(q) = r_1(q) = -\frac{5}{16}(\Delta f_0 + i_1\Delta f_1 + i_2\Delta f_2 + i_3\Delta f_3),$$

em que Δ é o laplaciano.

Prova. Procedendo de forma análoga ao que fizemos para concluir a igualdade em (3.5) temos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
l_1(q) = r_1(q) = \quad & \frac{10}{16}\Big(\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_0^2} + i_1\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0^2} + i_2\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0^2} + i_3\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0^2}\Big) \\
= - & \frac{10}{16}\Big(\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1^2} + i_1\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2} + i_2\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1^2} + i_3\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1^2}\Big) \\
= - & \frac{10}{16}\Big(\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2^2} + i_1\frac{\partial^3 f_1}{\partial q_2^2} + i_2\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_2^2} + i_3\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2^2}\Big) \\
= - & \frac{10}{16}\Big(\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_3^2} + i_1\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3^2} + i_2\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_3^2} + i_3\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_3^2}\Big). \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Somando as quatro igualdades em (3.9) e fazendo os cálculos concluímos, finalmente que:

$$l_1(q) = r_1(q) = -\frac{5}{16}(\Delta f_0 + i_1\Delta f_1 + i_2\Delta f_2 + i_3\Delta f_3).$$

□

Motivados pelo **Teorema 3.2** mostraremos uma generalização das *equações de laplace* para as funções quaterniônicas, e para isso usaremos as *condições de Cauchy-Riemann generalizadas* em que iremos supor que as funções coordenadas f_k, em que $k = 1, 2, 3, 4$ de f são de classe C^2, portanto é válido o Teorema de Schwartz[1].

Já sabemos que as *condições de Cauchy-Riemann generalizadas* são dadas por:

$$\frac{\partial f_0}{\partial q_0} = \frac{\partial f_1}{\partial q_1} = \frac{\partial f_2}{\partial q_2} = \frac{\partial f_3}{\partial q_3}; \qquad (3.10)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_0} = -\frac{\partial f_0}{\partial q_1} = \frac{\partial f_3}{\partial q_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial q_3}; \qquad (3.11)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial q_0} = -\frac{\partial f_3}{\partial q_1} = -\frac{\partial f_0}{\partial q_2} = \frac{\partial f_1}{\partial q_3}; \qquad (3.12)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial q_0} = \frac{\partial f_2}{\partial q_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_2} = -\frac{\partial f_0}{\partial q_3}. \qquad (3.13)$$

Inicialmente iremos derivar as equações (3.10), (3.11), (3.12), (3.13) em relação às variáveis q_0, q_1, q_2 e q_3 e, a partir disso, concluir que as equações de Laplace são válidas.

Derivaremos a equação (3.10) em relação a q_0, q_1, q_2 e q_3, e em seguida, faremos procedimento análogo para as equações (3.11), (3.12) e (3.13). Fazendo isso, temos:

[1] **Teorema de Schwarz**. Se $f : U \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ então, para quaisquer $i, j = 1, \cdots, n$ e $x \in U$, tem-se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_0^2} &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0 \partial q_1} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0 \partial q_2} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0 \partial q_3} \\
\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_0 \partial q_1} &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1 \partial q_3} \\
\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2 \partial q_0} &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2 \partial q_1} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_2^2} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_3 \partial q_2} \\
\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_0 \partial q_3} &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3 \partial q_1} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_3 \partial q_2} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_3^2}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Derivando as condições da equação (3.11), obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0^2} &= -\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1 \partial q_0} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2 \partial q_0} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_3 \partial q_0} \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0 \partial q_1} &= -\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1^2} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2 \partial q_1} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_3 \partial q_1} \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0 \partial q_2} &= -\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2^2} = -\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_3 \partial q_2} \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0 \partial q_3} &= -\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_1 \partial q_3} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2 \partial q_3} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_3^2}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Derivando as condições da equação (3.12), vem:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0^2} &= -\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2 \partial q_0} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3 \partial q_0} = -\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1 \partial q_0} \\
\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0 \partial q_1} &= -\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2 \partial q_1} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3 \partial q_1} = -\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1^2} \\
\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0 \partial q_2} &= -\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3 \partial q_2} = -\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1 \partial q_2} \\
\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0 \partial q_3} &= -\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2 \partial q_3} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3^2} = -\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1 \partial q_3}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Derivando agora as condições da equação (3.13), segue:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0^2} &= -\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_3 \partial q_0} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3 \partial q_0} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1 \partial q_0} \\
\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0 \partial q_1} &= -\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_3 \partial q_1} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2 \partial q_1} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1^2} \\
\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0 \partial q_2} &= -\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_3 \partial q_2} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1 \partial q_2} \\
\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0 \partial q_3} &= -\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_3^2} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2 \partial q_3} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1 \partial q_0}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Por fim, pelas equações (3.14), (3.15), (3.16) e (3.17), temos os seguintes resultados:

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_0^2} + \frac{\partial^2 f_0}{q_1^2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2^2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_3^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1 \partial q_0} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0 \partial q_1} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3 \partial q_2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2 \partial q_3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_0^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3^2} = -\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_0 \partial q_1} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_0 \partial q_1} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_3 \partial q_2} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_2 \partial q_3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0^2}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1^2}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_2^2}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_3^2}=-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1\partial q_0}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0\partial q_1}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_3\partial q_2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2\partial q_3}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_0^2}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1^2}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2^2}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_3^2}=\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1\partial q_0}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_0\partial q_1}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_3\partial q_2}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_2\partial q_3}=0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\Delta f_0 &= 0;\\ \Delta f_1 &= 0;\\ \Delta f_2 &= 0;\\ \Delta f_3 &= 0.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Por (3.18), concluímos que se uma função quaterniônica satisfaz as *condições de Cauchy-Riemann generalizadas* , o laplaciano das suas funções coordenadas é nulo. Estamos portanto em condições de enunciar um dos resultados mais importante do capítulo, mas antes provaremos um Lema que irá auxiliar na demonstração do próximo teorema.

Lema 3.1 *Toda função quaterniônica que satisfaz as condições de Cauchy-Riemann generalizadas e que possui derivada à esquerda nula, é uma função constante.*

Prova. De fato, chamemos de l a derivada à esquerda da função ϕ. Sabemos que $\displaystyle\int l dq = \phi$. Pela definição dessa integral e tomando $l(q) = 0$, temos que

$$\int l dq = C,$$

em que C é uma constante quaterniônica. □

Um resultado análogo ocorre para o caso em que a derivada à direita é nula.

Teorema 3.3 *Se f é uma função quaterniônica que satisfaz as condições de Cauchy-Riemann generalizadas, então as suas derivadas quaterniônicas à esquerda e à direita são funções constantes.*

Prova. De fato, pois $l_1(q) = r_1(q) = 0$. Logo, pelo **Lema 3.1**, temos que l e r são funções constantes, o que prova o teorema. □

Conforme foi visto na seção anterior pudemos separar a derivação de ordem superior em dois casos, que chamamos de **caso 1** e **caso 2**. Após analisarmos o que ocorre na derivação para o **caso 1**, conseguimos determinar que as derivadas, à esquerda e à direita de certa função f, tratam-se de funções constantes. Buscando relacionar a maneira de derivação entre os casos 1 e 2, percebemos imediatamente que acabam por ser coincidentes, isto é, a ordem superior de derivação de funções quaterniônicas que satisfazem as *condições de Cauchy-Riemann generalizadas* a partir da segunda ordem, independe da forma como se deriva, pois a partir daí todas as derivadas são nulas. A seguir, daremos um resultado autêntico, que corresponde a contribuição dessa dissertação para a Análise Quaterniônica.

Teorema 3.4 *Se f é uma função quaterniônica satisfazendo condições de Cauchy-Riemann generalizadas, então a partir da ordem 2 todas as derivadas anulam-se, independente da maneira como se deriva.*

Prova. Sendo $l(q)$ e $r(q)$ funções constantes, conforme mostra o **Teorema 3.3**, afirmamos que tais funções possuem suas derivadas à esquerda e à direita iguais a zero (Veja o exemplo 1 da página 36). Portanto, a partir da ordem 2, independente do caso, todas as derivadas são iguais a zero. □

O **Teorema 3.4** explica por sí só o que ocorre com as ordens de derivação acima da ordem 2 para funções que satisfazem as *condições de Cauchy-Riemann generalizadas* e estabelece a relação existente entre os casos de derivação mencionados no início do capítulo.

4 Fórmula Integral de Cauchy para quatérnios

A *fórmula integral de Cauchy* é um resultado central da análise complexa, pois ela afirma que uma função analítica, definida sobre e dentro de uma curva simples fechada γ, é completamente determinada pelos seus valores na fronteira dessa curva. É conveniente dentro da proposta deste trabalho mostrar a generalização dessa fórmula para o caso quaterniônico, além disso, constataremos que tal generalização fornece resultados importantes dentro da teoria. Para maiores detalhes veja (BORGES; FIGUEIREDO; MARAO, 2011).

4.1 Fórmula Integral de Cauchy

Para realizar a generalização da fórmula integral de Cauchy do caso complexo para o caso quaterniônico, devemos inicialmente dar a noção de *esfera*. Dados o ponto $q_0 \in \mathbb{H}$ e o número real $r > 0$, chamamos de *esfera* de centro q_0 e raio r o conjunto

$$\varphi = \{q \in \mathbb{H}; |q - q_0| = r\}.$$

Além disso, necessitamos enunciar e demonstrar o teorema a seguir .

Teorema 4.1 *Seja Ω um domínio simplesmente conexo num espaço quadridimensional e $f(q)$ uma função regular em Ω. Então,*

$$\int_{\varphi} \frac{f(q)}{q - q_0} dq = f(q_0)\pi(i_1 + i_2 + 2i_3) \tag{4.1}$$

em que φ é uma esfera em Ω e q_0 um ponto qualquer em φ.

Prova. Seja φ uma esfera de centro em q_0 e raio r_0, $|q - q_0| = r_0$. Assim, como a função $\dfrac{f(q)}{q - q_0}$ é regular em $\Omega/\{q_0\}$, temos:

$$\begin{aligned}\int_{\varphi} \frac{f(q)}{q - q_0} dq &= \int_{\varphi} [\frac{f(q_0) + f(q) - f(q_0)}{q - q_0}] dq \\ &= f(q_0) \int_{\varphi} \frac{dq}{q - q_0} + \int_{\varphi} \frac{f(q) - f(q_0)}{q - q_0} dq.\end{aligned}$$

De acordo com (BORGES; FIGUEIREDO; MARAO, 2011) é possível escrever o quatérnio $q - q_0$ com segue:

$$q - q_0 = r_0 e^{\theta_1 i_1 + \theta_2 i_2 + \theta_3 i_3}, \tag{4.2}$$

onde $r_0 > 0$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \theta_3 \leq 2\pi$.

Segue de (4.2) que:

$$dq = d(r_0 e^{\theta_1 i_1 + \theta_2 i_2 + \theta_3 i_3}) = r_0 d(e^{\theta_1 i_1 + \theta_2 i_2 + \theta_3 i_3}).$$

Daí verificamos que:

$$\begin{aligned} d(e^{\theta_1 i_1 + \theta_2 i_2 + \theta_3 i_3}) =& \frac{\partial(e^{\theta_1 i_1 + \theta_2 i_2 + \theta_3 i_3})}{\partial\theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial(e^{\theta_1 i_1 + \theta_2 i_2 + \theta_3 i_3})}{\partial\theta_2} d\theta_2 + \frac{\partial(e^{\theta_1 i_1 + \theta_2 i_2 + \theta_3 i_3})}{\partial\theta_3} d\theta_3 \\ =& (i_1 d\theta_1 + i_2 d\theta_2 + i_3 d\theta_3) e^{\theta_1 i_1 + \theta_2 i_2 + \theta_3 i_3}. \end{aligned}$$

Utilizando a expressão (4.2) e a diferencial dada acima, temos:

$$\begin{aligned} \int_\varphi \frac{dq}{q - q_0} =& \int_\varphi \frac{r_0 e^{\theta_1 i_1 + \theta_2 i_2 + \theta_3 i_3}}{r_0 e^{\theta_1 i_1 + \theta_2 i_2 + \theta_3 i_3}} (i_1 d\theta_1 + i_2 d\theta_2 + i_3 d\theta_3) \\ =& \pi(i_1 + i_2 + 2i_3) \end{aligned}$$

Usando agora o fato de f ser contínua[1] no ponto q_0, para $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$, tal que $|q - q_0| < 0$, o que implica que $|f(q) - f(q_0)| < \epsilon = \frac{\epsilon_0}{4\pi}$. Logo,

$$\begin{aligned} \Big| \int_\varphi \frac{f(q) - f(q_0)}{q - q_0} dq \Big| =& \Big| \int_\varphi \frac{f(q) - f(q_0)}{r_0 e^{\theta_1 i_1 + \theta_2 i_2 + \theta_3 i_3}} r_0 e^{\theta_1 i_1 + \theta_2 i_2 + \theta_3 i_3} (i_1 d\theta_1 + i_2 d\theta_2 + i_3 d\theta_3) \Big| \\ =& \Big| \int_\varphi (f(q) - f(q_0))(i_1 d\theta_1 + i_2 d\theta_2 + i_3 d\theta_3) \Big| \\ =& \Big| \int_0^{2\pi} (f(q) - f(q_0)) i_1 d\theta_1 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(q) - f(q_0)) i_2 d\theta_2 + \\ & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(q) - f(q_0)) i_3 d\theta_3 \Big| \\ \leq & \Big| \int_0^{2\pi} (f(q) - f(q_0)) i_1 d\theta_1 \Big| + \Big| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(q) - f(q_0)) i_2 d\theta_2 \Big| + \\ & \Big| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(q) - f(q_0)) i_3 d\theta_3 \Big| \\ < & \int_0^{2\pi} |f(q) - f(q_0)| d\theta_1 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |f(q) - f(q_0)| d\theta_2 + \\ & + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |f(q) - f(q_0)| d\theta_3 \\ < & \int_0^{2\pi} \epsilon d\theta_1 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \epsilon d\theta_2 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \epsilon d\theta_3. \end{aligned}$$

Temos que,

[1] A definição de *continuidade* em $\mathbb{H}$ é análoga a do conjunto $\mathbb{C}$ dos complexos.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \epsilon d\theta_1 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \epsilon d\theta_2 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \epsilon d\theta_3 =& 2\pi\epsilon + \pi\epsilon + \pi\epsilon \\
=& 4\pi\frac{\epsilon_0}{4\pi} \\
=& \epsilon_0,
\end{aligned}
$$

e fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos:

$$\int_\varphi \frac{f(q) - f(q_0)}{q - q_0} dq = 0.$$

Logo,

$$\int_\varphi \frac{f(q)}{q - q_0} dq = f(q_0)\pi(i_1 + i_2 + 2i_3),$$

o que conclui a demonstração. □

A partir desse resultado podemos estabelecer dois corolários, que juntamente com o teorema anterior nos permitirão dar uma "Fórmulação fechada" para a *fórmula integral de Cauchy*. São eles:

Corolário 4.1 *Seja Ω um domínio simplesmente conexo num espaço quadridimensional e $f(q)$ uma função regular em Ω. Então,*

$$\int_\varphi \frac{f(q)}{q - q_0} dq = f(q_0)\pi(i_1 + 2i_2 + i_3) \tag{4.3}$$

onde φ é uma esfera em Ω e q_0 um ponto qualquer em φ.

Corolário 4.2 *Seja Ω um domínio simplesmente conexo num espaço quadridimensional e $f(q)$ uma função regular em Ω. Então,*

$$\int_\varphi \frac{f(q)}{q - q_0} dq = f(q_0)\pi(2i_1 + i_2 + i_3) \tag{4.4}$$

onde φ é uma esfera em Ω e q_0 um ponto qualquer em φ.

De posse do **Teorema 4.1** e dos **Corolários 4.1** e **4.2**, mostraremos mais um importante resultado, que é o

Teorema 4.2 *Seja Ω um domínio simplesmente conexo num espaço quadridimensional e $f(q)$ uma função regular em Ω. Então,*

$$\int_\varphi \frac{f(q)}{q - q_0} dq = \frac{4}{3}\pi f(q_0)(i_1 + i_2 + i_3),$$

onde φ é uma esfera de $\mathbb{R}^4$ em Ω e q_0 um ponto qualquer em φ.

Prova. Por (4.1), (4.3) e (4.4) temos

$$\begin{aligned}\int_\varphi \frac{f(q)}{q-q_0}dq =& f(q_0)\pi(i_1+i_2+2i_3)\\ =& f(q_0)\pi(i_1+2i_2+i_3)\\ =& f(q_0)\pi(2i_1+i_2+i_3).\end{aligned}$$

Somando as igualdades acima concluímos que

$$\int_\varphi \frac{f(q)}{q-q_0}dq = \frac{4}{3}\pi f(q_0)(i_1+i_2+i_3).$$

□

4.2 Fórmula Integral de Cauchy Generalizada para Quatérnios

Assim como ocorre na Análise Complexa, podemos dar uma generalização da fórmula integral de Cauchy para quatérnios, que essencialmente mostrará que as derivadas de ordem superior de uma função f existem. Ressaltamos que usaremos para o desenvolvimento, a fórmula dada no **Teorema 4.1**, mas qualquer uma das fórmulas mostradas nos **Corolários 4.1** e **4.2** poderiam analogamente ser desenvolvidas. Além disso, necessitamos explicar que no decorrer da construção da fórmula integral de Cauchy generalizada, surgirá uma derivada da função quaterniônica f, que denotaremos por f' (SUDBERY, 1979). O leitor naturalmente pode ficar confuso em querer saber se estamos nos referindo a derivada à esquerda ou à direita da função f. Nesse caso, não estamos envolvendo nenhuma das duas, pois, para quatérnios existem duas formas de determinar derivadas: uma foi como mostramos (através das derivadas à esquerda e à direita), e a outra é através da definição usando limite. Ressaltamos que para a construção da fórmula integral de Cauchy generalizada é conveniente adotarmos a definição de limite. Caso o leitor queira ver em detalhes essa forma de definir derivadas quaterniônicas, pode consultar (LUNA-ELIZARRARAS; SHAPIRO, 2011).

Considerando a fórmula integral de Cauchy dada em (4.1), temos:

$$f(q_0) = \frac{1}{\pi(i_1+i_2+2i_3)}\int_\varphi \frac{f(q)}{q-q_0}dq.$$

Colocando q' como variável de integração e q como ponto do domínio Ω, a expressão é reescrita da seguinte maneira:

$$f(q) = \frac{1}{\pi(i_1+i_2+2i_3)}\int_\varphi \frac{f(q')}{q'-q}dq'.$$

Afim de determinar a derivada $f'(q)$ devemos tomar a diferença:

$$\begin{aligned}
f(q+\Delta q)-f(q) =& \frac{1}{\pi(i_1+i_2+2i_3)}\int_\varphi \frac{f(q')}{q'-q-\Delta q}dq' - \frac{1}{\pi(i_1+i_2+2i_3)}\int_\varphi \frac{f(q')}{q'-q}dq', \\
=& \frac{1}{\pi(i_1+i_2+2i_3)}\int_\varphi \frac{f(q')(q'-q)-f(q')(q'-q-\Delta q)}{(q'-q)(q'-q-\Delta q)}dq', \\
=& \frac{1}{\pi(i_1+i_2+2i_3)}\int_\varphi \frac{f(q')\Delta q}{(q'-q)(q'-q-\Delta q)}dq', \\
=& \frac{\Delta q}{\pi(i_1+i_2+2i_3)}\int_\varphi \frac{f(q')}{(q'-q)(q'-q-\Delta q)}dq'.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{f(q+\Delta q)-f(q)}{\Delta q} = \frac{1}{\pi(i_1+i_2+2i_3)}\int_\varphi \frac{f(q')}{(q'-q)(q'-q-\Delta q)}dq'.$$

Fazendo Δq tender para zero, chegamos a expressão:

$$f'(q) = \frac{1}{\pi(i_1+i_2+2i_3)}\int_\varphi \frac{f(q')}{(q'-q)^2}dq'.$$

Afim de assegurar o que foi feito, é necessário mostrar que a diferença:

$$\zeta = \frac{1}{\pi(i_1+i_2+2i_3)}\int_\varphi \frac{f(q')}{(q'-q)^2}dq' - \frac{1}{\pi(i_1+i_2+2i_3)}\int_\varphi \frac{f(q')}{(q'-q)(q'-q-\Delta q)}dq',$$

tende para 0 quando $\Delta q \to 0$. Fazendo a diferença, segue-se:

$$\zeta = -\frac{\Delta q}{\pi(i_1+i_2+2i_3)}\int_\varphi \frac{f(q')}{(q'-q)^2(q'-q-\Delta q)}dq'.$$

Observe que:

$$|q'-q|^2 \geq d^2, \forall q \in \Omega \Rightarrow \frac{1}{|q'-q|^2} \leq \frac{1}{d^2}.$$

Pela desigualdade triangular:

$$d \leq |q'-q| = |q'-q-\Delta q+\Delta q| \leq |q'-q-\Delta q| + |\Delta q|$$

Fazendo $|\Delta q| \leq \dfrac{d}{2}$ temos $-|\Delta q| \geq -\dfrac{d}{2}$. Logo,

$$\frac{1}{2}d \leq d - |\Delta q| \leq |q'-q-\Delta q| \Rightarrow \frac{1}{|q'-q-\Delta q|} \leq \frac{2}{d}.$$

A função $f(q')$ é contínua e limitada em φ, ou seja, $|f'(q)| < M$. Denote por A, a área da hiperesfera de raio d e centrada em q. Assim,

$$|\zeta| = \frac{|\Delta q|}{6\pi}\left|\int_\varphi \frac{f(q')}{(q'-q)^2(q'-q-\Delta q)}dq'\right|.$$

Logo,

$$|\zeta| < \frac{|\Delta q|}{3\pi} MA \frac{1}{d^3}$$

Daí, resulta que $\zeta \to 0$ quando $\Delta q \to 0$. Portanto,

$$f''(q) = \frac{2!}{\pi(i_1 + i_2 + 2i_3)} \int_\varphi \frac{f(q')}{(q' - q)^3} dq'.$$

Procedendo indutivamente segue-se:

$$f^{(n)}(q) = \frac{n!}{\pi(i_1 + i_2 + 2i_3)} \int_\varphi \frac{f(q')}{(q' - q)^{n+1}} dq'. \tag{4.5}$$

Como mencionado, podemos também obter:

$$f^{(n)}(q) = \frac{n!}{\pi(i_1 + 2i_2 + i_3)} \int_\varphi \frac{f(q')}{(q' - q)^{n+1}} dq', \tag{4.6}$$

e

$$f^{(n)}(q) = \frac{n!}{\pi(2i_1 + i_2 + i_3)} \int_\varphi \frac{f(q')}{(q' - q)^{n+1}} dq'. \tag{4.7}$$

Cada uma das fórmulas obtidas em (4.5), (4.6) e (4.7) é chamada de **Fórmula Geral de Cauchy** e compreendem resultados significativos para a teoria de funções quaterniônicas.

Podemos, a partir dos resultados mostrados acima, caracterizar as funções quaterniônicas que satisfazem o fato de terem a n-enésima derivada nula, por meio de integrais. Para tanto, enunciemos o seguinte resultado:

Teorema 4.3 *Se f é uma função quaterniônica satisfazendo as condições de Cauchy-Riemann generalizadas, e f possui derivadas constantes*[2]*, então*

$$\int_\varphi \frac{f(q')}{(q' - q)^{n+1}} dq' = 0, \tag{4.8}$$

para todo $n \geq 2$.

Prova. A demonstração do resultado é imediata, e é proveniente do fato de que as derivadas de ordem superior a 2 serão sempre nulas. □

Portanto, as funções quaterniônicas determinadas por meio da teoria exposta nesse trabalho são caracterizadas por integrais da forma (4.8) nulas.

[2] As derivadas mencionadas no teorema independem do **caso**.

Considerações Finais

Pudemos observar ao longo deste trabalho, que as ideias envolvidas generalizam resultados importantes da Análise Complexa Clássica, que vão desde os números, algumas funções especiais (exponencias, logarítmicas, trigonométricas e hiperbólicas), *condições de Cauchy-Riemann generalizadas* (para uma classe especial de funções), derivadas, derivadas de ordem superior, até a fórmula integral de Cauchy. Ressaltamos que a relevância da necessidade de fazer tal generalização, dar-se-á por uma configuração adequada para a estruturação de problemas geométricos, físicos e/ou matemáticos. Desse modo, a Análise Quaterniônica compõe uma importante teoria, que de fato, consolida a Análise Complexa Clássica.

Os principais resultados obtidos neste trabalho, são oriundos do artigo "*New Remarks on the Differentiability of Hypercomplex Functions*" (MACHADO; BORGES, 2002), que tratam essencialmente do desenvolvimento de derivadas à direita e à esquerda para uma classe especial de funções quaterniônicas, além de teoremas sobre integração. O uso desses resultados foi de grande relevância para a realização do estudo da derivação de ordem superior, em que foi possível a obtenção de resultados significativos, como por exemplo, se uma função quaterniônica satisfaz as *condições de Cauchy-Riemann generalizadas*, então a derivada segunda à esquerda é igual a derivada segunda à direita, além disso, uma relação com o laplaciano foi capaz de determinar que tais funções são constantes. Posteriormente, estudamos uma troca na forma de derivar, o que resultou no que chamamos de **caso 2**. Tal estudo culminou em um resultado ausente na literatura, que é o fato de que tanto as derivadas do **caso 1** quanto as derivadas do **caso 2** , a partir da derivação de ordem 2, são todas nulas. Por fim, simplesmente mostramos uma generalização da fórmula integral de Cauchy, com o intuito de mostrar ao leitor a viabilidade de generalizar resultados da Análise Complexa Clássica, para assim tornar a teoria mais consistente. O ultimo resultado apresentado consiste na caracterização desse tipo de função por meio do valor de sua integral, o que certamente irá auxiliar na determinação de novos resultados que dependem de integrais dessas funções.

Em linhas gerais, podemos dizer que este trabalho permite ampliar as perspectivas na direção da matemática, mais especificamente, na Análise Quaterniônica. Além disso, cabe ressaltar que a teoria da Análise Quaterniônica ainda apresenta muitas lacunas, e resultados novos vem sendo apresentados, como ficou claro ao longo do trabalho. Assim, esta dissertação, na medida do possível, procurou contribuir com o desenvolvimento da Análise Quaterniônica. Por fim, desejamos que este trabalho possa servir de estímulo para que diversas pessoas interessem-se por essa teoria.

Referências

AHLFORS, L. *Complex analysis*. 3. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 1979. v. 1.

BORGES, M.; FIGUEIREDO, A.; MARAO, J. Hypercomplex geometric derivative from a cauchy-like integral formula. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, p. 55–59, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 11, 12 e 47.

BUREŠ, J.; LÁVIČKA, R.; SOUČEK, V. *Elements of quaternionic analysis and Radon transform*. [S.l.]: Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, 2009. Citado na página 31.

CONWAY, J. B. *Functions of One Complex Variable*. 2. ed. [S.l.]: Springer-Verlag. New York Heidelberg Berlin., 1978. v. 1. (Graduate texts in mathematics 011, v. 1).

CONWAY, J. H.; SMITH, D. A. *On quaternions and octonions*. [S.l.]: AK Peters/CRC Press, 2003.

FUETER, R. Die funktionentheorie der differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen variablen. *Commentarii Mathematici Helvetici*, Springer, v. 7, n. 1, p. 307–330, 1934. Citado 3 vezes nas páginas 28, 30 e 31.

GENTILI, G.; STRUPPA, D. C. A new theory of regular functions of a quaternionic variable. *Advances in Mathematics*, Academic Press, v. 216, n. 1, p. 279–301, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 31.

HAMILTON, W. R. *Elements of quaternions*. [S.l.]: Longmans, Green, & Company, 1866.

HERSTEIN, I. N. *Abstract algebra*. [S.l.]: Prentice Hall, 1996. Citado na página 14.

KRAVCHENKO, V. Applied quaternionic analysis (lemgo: Heldermann). 2003. Citado na página 13.

LEO, S. D.; ROTELLI, P. P. Quaternionic analyticity. *Applied Mathematics Letters*, Pergamon, v. 16, n. 7, p. 1077–1081, 2003. Citado na página 31.

LUNA-ELIZARRARAS, M. E.; SHAPIRO, M. A survey on the (hyper-) derivatives in complex, quaternionic and clifford analysis. *Milan Journal of Mathematics*, Springer, v. 79, n. 2, p. 521–542, 2011. Citado na página 50.

MACHADO, J.; BORGES, M. New remarks on the differentiability of hypercomplex functions. *International Journal of Applied Mathematics*, ACADEMIC PUBLICATIONS, v. 8, n. 1, p. 85–102, 2002. Citado 6 vezes nas páginas 11, 13, 28, 32, 35 e 53.

MARÃO, J. A. P. F. Hipercomplexos: um estudo da analicidade e da hiperperiodicidade de funções octoniônicas. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2007. Citado na página 23.

MARICATO, J. B. J. Uma abordagem para classificação de funções k-quaseconformes. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2005. Citado na página 23.

MORAIS, J. P.; GEORGIEV, S.; SPRÖSSIG, W. *Real quaternionic calculus handbook*. [S.l.]: Springer, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 11, 13, 18 e 27.

REIS, G. M. d. Análise quaterniônica: teoremas e perspectivas em derivação e integração. Universidade Federal do Maranhão (UFMA), 2015. Citado na página 38.

SUDBERY, A. Quaternionic analysis. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. [S.l.], 1979. v. 85, n. 2, p. 199–225. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 50.

XU, D. et al. Enabling quaternion derivatives: the generalized hr calculus. *Royal Society open science*, The Royal Society, v. 2, n. 8, p. 150255, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 11, 28 e 31.