

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE  
ELETRICIDADE  
AUTOMAÇÃO E CONTROLE

Eric Antony Vinhaes Prohmann

**Proposta de um Filtro de Partículas Aliado ao Filtro de  
Kalman Estendido Iterativo para Estimação de Estados de  
Sistemas Não Lineares com Ruído Gaussiano**

São Luís – MA

2018

Eric Antony Vinhaes Prohmann

# **Proposta de um Filtro de Partículas Aliado ao Filtro de Kalman Estendido Iterativo para Estimação de Estados de Sistemas Não Lineares com Ruído Gaussiano**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da Universidade Federal do Maranhão para obtenção de grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ELETRICIDADE  
AUTOMAÇÃO E CONTROLE

Orientador: Dr. Francisco das Chagas de Souza

São Luís – MA

2018

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Prohmann, Eric Antony Vinhaes.

Proposta de um Filtro de Partículas Aliado ao Filtro de Kalman Estendido Iterativo para Estimação de Estados de Sistemas Não Lineares com Ruído Gaussiano / Eric Antony Vinhaes Prohmann. - 2018.

114 p.

Orientador(a): Francisco das Chagas de Souza.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Engenharia de Eletricidade/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís - MA, 2018.

1. Estimação de estados. 2. Filtro de Kalman. 3. Filtro de partículas. I. Souza, Francisco das Chagas de.  
II. Título.

**Eric Antony Vinhaes Prohmann**

**Proposta de um Filtro de Partículas Aliado ao Filtro de Kalman Estendido Iterativo para Estimação de Estados de Sistemas Não Lineares com Ruído Gaussiano**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da Universidade Federal do Maranhão para obtenção de grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Dissertação aprovada em 5 de fevereiro de 2018:

---

**Prof. Dr. Francisco das Chagas de Souza/UFMA**  
Orientador

---

**Prof. Dr. Ginalber Luiz de Oliveira Serra/UFMA**  
Membro da Banca Examinadora - Interno

---

**Prof. Dra. Áurea Celeste da Costa Ribeiro/UEMA**  
Membro da Banca Examinadora - Externo

São Luís – MA  
2018



## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, pelas oportunidades e força para superar os obstáculos.

Em especial aos meus pais, Alceu e Daniele, por sua paciência e compreensão quanto as horas dedicadas a preparação do projeto.

A minha família, pelos votos de apoio para a conclusão do programa.

A minha namorada, pela compreensão e pelo apoio em momentos de dificuldade.

Ao meu orientador, Francisco, pelo ensino de criticidade e pelo esclarecimento de dúvidas.

Ao meu colega de dissertação e amigo, Rafael, pelas ajudas, discussões e embasamentos que auxiliaram na formação desta pesquisa.

A Capes, por ter fomentado a elaboração e construção deste projeto.

*“O mundo é um lugar perigoso de se viver, não por causa daqueles que fazem o mal, mas sim por causa daqueles que observam e deixam o mal acontecer.  
(Albert Einstein)*

## RESUMO

O filtro de Kalman é um estimador de mínima variância que é solução para o problema de estimação de estados em sistemas lineares. No caso de sistemas não lineares, não é possível definir um método de estimação genérico. A técnica mais famosa de estimação não linear tem sido o filtro de Kalman estendido, o qual vem sendo a primeira opção de aplicação em diversos sistemas. Na década de 1990, o filtro de partículas ganhou destaque, pois o avanço tecnológico tornou possível sua implementação. O filtro de partículas tem se mostrado uma ótima técnica que apresenta bons resultados na estimação de estados em sistemas não lineares. Nesta dissertação, é proposto um filtro de partículas com amostragem e reamostragem por importância aliado ao filtro de Kalman estendido iterativo (FPA-FKEI) para estimação de estados em sistemas não lineares. A eficácia do método proposto é comprovada através de realizações de Monte Carlo aplicada em 3 sistemas, um monovariável, um carro pêndulo-invertido e um sistema elétrico de potência de 4 geradores.

**Palavras-chave:** Estimação de estados, filtro de Kalman, filtro de partículas.



## ABSTRACT

About the century of 1900, control systems techniques using states feedback began to get on the highlights. Such techniques need the state vector to be available, what is not always possible to do with measurement equipments. So, techniques which implement state estimation became the center of attention of researchers. These state estimators use the system dynamic information and the input and output signals to estimate the states. The state estimator known as Kalman filter is the most acceptable and useful solution to linear systems and it is acknowledged as the solution to linear systems state estimation problem. Nonlinear systems, however, have no generic estimation method defined. The most famous nonlinear technique has been the extended Kalman filter, which is the first choice of application to many systems. On 1990s, another technique called particle filter got the spotlights, because the technological improvement allowed its implementation. The particle filter has been a technique which has shown good results on nonlinear systems state estimation. In this dissertation, it is proposed a particle filter with sampling importance resampling allied to iterated extended Kalman filter (FPA-FKEI) to nonlinear systems state estimation. The efficiency of the proposed method is proven through Monte Carlo realizations in 3 systems, a monovariable, a inverted-pendulum car and an electrical power system with 4 generators.

**Keywords:** State estimation, Kalman filter, particle filter.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Problemática do estimador de estados dada em diagrama de blocos. Nesta problemática, as únicas informações acessíveis são a entrada $u(t)$ e a saída $y(t)$ . . . . .	18
Figura 2.1 – Representação simplificada em diagrama de blocos de um sistema. $u(t)$ corresponde ao sinal de entrada do sistema. Por consequência, há um sinal $y(t)$ gerado na saída. . . . .	22
Figura 2.2 – Representação em diagramas de blocos de um sistema linear qualquer em espaço de estados contínuo. . . . .	23
Figura 2.3 – Representação em diagramas de blocos de um sistema qualquer em espaço de estados discreto. . . . .	24
Figura 2.4 – Processo estocástico contínuo de estado contínuo. . . . .	28
Figura 2.5 – Processo estocástico discreto de estado contínuo. . . . .	29
Figura 2.6 – Processo estocástico discreto de estado discreto. . . . .	29
Figura 2.7 – Conjunto de 4 realizações de um processo estocástico qualquer. . . . .	30
Figura 2.8 – Potência média de um ruído branco. . . . .	34
Figura 2.9 – Potência média de um ruído branco. . . . .	34
Figura 2.10–Exemplo de circuito elétrico em que se deseja obter os estados. . . . .	35
Figura 2.11–Exemplo de circuito elétrico com estados medidos. . . . .	35
Figura 2.12–Tipos de estimadores de acordo com os dados utilizados. O instante $k$ corresponde ao instante da estimação dos estados, o instante $k_f$ corresponde ao instante final que compreende todas as medições disponíveis, a área com traços diagonais corresponde à medições utilizadas para estimação e a área total de cada retângulo corresponde à todas as medições disponíveis. . . . .	36
Figura 2.13–Diagrama em blocos de um sistema regulador por realimentação de estados. . . . .	38
Figura 2.14–Diagrama em blocos de um observador de estados. . . . .	39
Figura 2.15–Entrada aplicada. . . . .	42
Figura 2.16–Estado $x_1$ real e estimado pelo observador. . . . .	42
Figura 2.17–Estado $x_2$ real e estimado pelo observador. . . . .	43

Figura 3.1 – Esquemático do filtro de Kalman. A seta contínua central na horizontal indica o sentido temporal do filtro de Kalman. As retas pontilhadas verticais indicam a transição entre um instante e outro. As setas diagonais representam a etapa de propagação através da dinâmica do sistema, enquanto que as setas verticais indicam a etapa de correção através do método de otimização e da medição obtida. Vale notar que as setas de propagação se afastam da seta central que indica o tempo, enquanto que as setas referentes a correção se aproximam da seta central. Tal perspectiva é utilizada para que se compreenda que a etapa de propagação tende a aumentar o erro de estimação e, por consequência, a covariância. A etapa de correção, por outro lado, tende a reduzir o erro de estimação e minimizar a covariância dos estados. . . . .	52
Figura 3.2 – Fluxograma referente as equações e etapas do filtro de Kalman. . . . .	53
Figura 3.3 – Equações do Filtro de Kalman Bucy. . . . .	56
Figura 3.4 – Entrada aplicada. . . . .	57
Figura 3.5 – Estado $x_1$ real e estimado pelo filtro de Kalman e pelo observador. . . . .	57
Figura 3.6 – Estado $x_2$ real e estimado pelo filtro de Kalman e pelo observador. . . . .	58
Figura 3.7 – Elementos da diagonal da matriz de covariância obtida durante a implementação do filtro de Kalman. . . . .	59
Figura 3.8 – Métrica $e_{1,k}$ da estimação feita pelo observador e pelo filtro de Kalman. . . . .	59
Figura 3.9 – Métrica $e_{2,k}$ da estimação feita pelo observador e pelo filtro de Kalman. . . . .	60
Figura 3.10–Entrada do tipo PRBS gerada a partir do programa MatLab®. . . . .	60
Figura 3.11–Estado real e estimado através do filtro de Kalman e do observador. . . . .	61
Figura 3.12–Estado real e estimado através do filtro de Kalman e do observador. . . . .	61
Figura 3.13–Métrica $e_{1,k}$ da estimação feita pelo observador e pelo filtro de Kalman para a entrada do tipo PRBS. . . . .	62
Figura 3.14–Métrica $e_{2,k}$ da estimação feita pelo observador e pelo filtro de Kalman para a entrada do tipo PRBS. . . . .	62
Figura 4.1 – Estados real e estimado obtidos através de 200 realizações de Monte Carlo utilizando o filtro de Kalman estendido discreto para o sistema dado por (4.82). . . . .	72
Figura 4.2 – Métrica $e_{1,k}$ obtida através de 200 realizações de Monte Carlo utilizando o filtro de Kalman estendido discreto para o sistema dado por (4.82). . . . .	73
Figura 4.3 – Exemplo de reamostragem monovariável com 6 partículas. . . . .	81
Figura 4.4 – Estados estimados obtidos através de 200 realizações de Monte Carlo utilizando $N$ partículas para o sistema dado por (4.117). . . . .	83
Figura 4.5 – Métrica $e_{1,k}$ obtida através de 200 realizações de Monte Carlo utilizando $N$ partículas para o sistema dado por (4.117). . . . .	83

Figura 5.1 – Exemplo de inserção do vetor de estados do IEKF no PF, conforme a metodologia proposta. Neste caso, a inserção do vetor é capaz de aumentar o espaço de busca do PF, resultando numa melhor estimativa da média da densidade do estado real. . . . .	85
Figura 5.2 – Pesos das partículas (em preto) e do vetor de estados (em vermelho) gerado através do EKF, iterações 2, 3, 4 e 5. . . . .	86
Figura 5.3 – Pesos das partículas (em preto) e do vetor de estados (em vermelho) gerado através do EKF, iterações 6, 7, 8 e 9. . . . .	87
Figura 5.4 – Fluxograma do método Filtro de Partículas aliado ao Filtro de Kalman Estendido Iterativo. . . . .	90
Figura 5.5 – Estados real e estimados através do EKF, PF e FPA-FKEI através de 200 realizações de Monte Carlo. . . . .	91
Figura 5.6 – Métrica $e_k$ obtida através de 200 realizações de Monte Carlo para as estimativas do EKF, PF e FPA-FKEI. . . . .	91
Figura 5.7 – Representação do sistema carro-pêndulo invertido. . . . .	92
Figura 5.8 – Entrada utilizada na simulação do pêndulo invertido com carro. . . . .	94
Figura 5.9 – Métrica $e_{1,k}$ para o sistema carro-pêndulo invertido obtida através de 200 realizações de Monte Carlo. . . . .	95
Figura 5.10–Métrica $e_{2,k}$ para o sistema carro-pêndulo invertido obtida através de 200 realizações de Monte Carlo. . . . .	95
Figura 5.11–Métrica $e_{3,k}$ para o sistema carro-pêndulo invertido obtida através de 200 realizações de Monte Carlo. . . . .	96
Figura 5.12–Métrica $e_{4,k}$ para o sistema carro-pêndulo invertido obtida através de 200 realizações de Monte Carlo. . . . .	96
Figura 5.13–Métrica $e_k$ para o sistema carro-pêndulo invertido obtida através de 200 realizações de Monte Carlo. . . . .	97
Figura 5.14–Representação de sistema multimáquina contendo 4 geradores. . . . .	98
Figura 5.15–Métrica $e_{1,k}$ para o sistema multimáquina obtida através de 200 realizações de Monte Carlo. . . . .	100
Figura 5.16–Métrica $e_{2,k}$ para o sistema multimáquina obtida através de 200 realizações de Monte Carlo. . . . .	101
Figura 5.17–Métrica $e_{3,k}$ para o sistema multimáquina obtida através de 200 realizações de Monte Carlo. . . . .	102
Figura 5.18–Métrica $e_{4,k}$ para o sistema multimáquina obtida através de 200 realizações de Monte Carlo. . . . .	102
Figura 5.19–Métrica $e_{5,k}$ para o sistema multimáquina obtida através de 200 realizações de Monte Carlo. . . . .	103
Figura 5.20–Métrica $e_{6,k}$ para o sistema multimáquina obtida através de 200 realizações de Monte Carlo. . . . .	103

Figura 5.21–Métrica $e_{7,k}$ para o sistema multimáquina obtida através de 200 realizações de Monte Carlo. . . . .	104
Figura 5.22–Métrica $e_{8,k}$ para o sistema multimáquina obtida através de 200 realizações de Monte Carlo. . . . .	104
Figura 5.23–Métrica $e_k$ para o sistema multimáquina obtida através de 200 realizações de Monte Carlo. . . . .	105
Figura A.1–Representação do diagrama de barras do sistema multimáquina com 4 máquinas em que os círculos representam as barras e as linhas que ligam os círculos representam as admitâncias entre as barras. . . . .	112
Figura A.2–Representação do diagrama de barras do sistema multimáquina com 4 máquinas em que os círculos representam as barras e as linhas que ligam os círculos representam as admitâncias entre as barras. . . . .	113
Figura A.3–Representação do diagrama de barras do sistema multimáquina com 4 máquinas em que os círculos representam as barras e as linhas que ligam os círculos representam as admitâncias entre as barras. . . . .	114

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Métrica de performance escalar calculada para o sistema 1. . . . .	90
Tabela 2 – Parâmetros utilizados na simulação do sistema do carro-pêndulo invertido. .	93
Tabela 3 – Métrica de performance escalar calculada para o sistema 2. . . . .	94
Tabela 4 – Tabela de parâmetros das máquinas síncronas do sistema de 4 geradores. . .	99
Tabela 5 – Métrica de performance escalar calculada para o sistema 3. . . . .	100

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>17</b>
1.1	Histórico da Estimação . . . . .	17
1.2	Problemática . . . . .	18
1.3	Motivação . . . . .	19
1.4	Objetivos da Pesquisa . . . . .	20
1.5	Trabalho Publicado . . . . .	20
1.6	Organização da Dissertação . . . . .	21
<b>2</b>	<b>GENERALIDADES . . . . .</b>	<b>22</b>
2.1	Representação de Sistemas em Espaço de Estados . . . . .	22
2.1.1	Sistemas Lineares . . . . .	23
2.1.2	Sistemas Não Lineares . . . . .	25
2.1.3	Sistemas Não Lineares com Ruído Aditivo . . . . .	25
2.2	Linearização de Sistemas Não Lineares . . . . .	26
2.3	Discretização de Sistemas Não Lineares . . . . .	26
2.4	Processos Estocásticos . . . . .	27
2.4.1	Distribuições em Processos Estocásticos . . . . .	30
2.4.2	Estatísticas de Primeira e Segunda Ordem . . . . .	30
2.4.3	Ortogonalidade e Descorrelação . . . . .	32
2.4.4	Estacionariedade . . . . .	32
2.4.5	Ergodicidade . . . . .	32
2.5	Ruído Branco . . . . .	33
2.6	Estimadores de Estados . . . . .	33
2.7	Métrica de Performance . . . . .	36
2.8	Observadores de Estados . . . . .	37
2.8.1	Realimentação de Estados . . . . .	37
2.8.2	Equações do Observador de Estados com Realimentação . . . . .	37
2.8.3	Observador com Referência Não Nula . . . . .	40
2.8.4	Passo a Passo para Implementação de Controle com Realimentação de Estados Obtidos por Observador . . . . .	40
2.8.5	Exemplo . . . . .	41
<b>3</b>	<b>FILTRO DE KALMAN . . . . .</b>	<b>44</b>
3.1	Filtro de Kalman Discreto . . . . .	44
3.1.1	Propagação da Média . . . . .	46
3.1.2	Propagação da Covariância . . . . .	46

3.1.3	Ganho de Kalman . . . . .	48
3.1.4	Correção da Matriz de Covariância . . . . .	50
3.1.5	Fluxograma do Filtro de Kalman . . . . .	52
3.2	Derivação do Filtro de Kalman Contínuo . . . . .	52
3.2.1	Filtro de Kalman Bucy . . . . .	52
3.2.2	Equações do Filtro de Kalman Bucy . . . . .	56
3.3	Exemplos . . . . .	56
<b>4</b>	<b>ESTIMAÇÃO NÃO LINEAR . . . . .</b>	<b>63</b>
4.1	Filtro de Kalman Estendido . . . . .	63
4.1.1	Filtro de Kalman Estendido Contínuo . . . . .	65
4.1.2	Filtro de Kalman Estendido Discreto . . . . .	65
4.1.3	O Filtro de Kalman <i>Unscented</i> . . . . .	66
4.1.4	Otimização pelo Método de Gauss-Newton . . . . .	68
4.1.5	Filtro de Kalman Estendido como um Método de Otimização de Gauss-Newton . . . . .	69
4.1.6	Exemplo de Aplicação . . . . .	72
4.2	Filtro de Partículas . . . . .	72
4.2.1	Modelos de Markov . . . . .	74
4.2.2	Inferência Bayesiana . . . . .	75
4.2.3	Aproximação do Valor Médio pelo Método de Monte Carlo . . . . .	77
4.2.4	Monte Carlo via Amostragem por Importância . . . . .	77
4.2.5	Amostragem por Importância Sequencial . . . . .	78
4.2.6	Reamostragem Sistemática para Redução da Degeneração das Partículas . . . . .	79
4.2.7	Algoritmo do Filtro de Partículas . . . . .	80
4.2.8	Exemplo de Aplicação . . . . .	82
<b>5</b>	<b>METODOLOGIA PROPOSTA E RESULTADOS . . . . .</b>	<b>84</b>
5.1	Motivação da Metodologia Proposta . . . . .	84
5.2	Etapas da Metodologia Proposta . . . . .	85
5.2.1	Inicialização . . . . .	86
5.2.2	Propagação . . . . .	87
5.2.3	Ponderação . . . . .	88
5.2.4	Substituição . . . . .	88
5.2.5	Normalização dos Pesos . . . . .	88
5.2.6	Reamostragem . . . . .	88
5.2.7	Estimação da Densidade, Média e Covariância . . . . .	88
5.2.8	Fluxograma do FPA-FKEI . . . . .	89
5.3	Resultados e Considerações . . . . .	89
5.3.1	Sistema 1 . . . . .	89
5.3.2	Sistema 2 . . . . .	92



5.3.3	Sistema 3 . . . . .	97
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>106</b>
6.1	Trabalhos Futuros . . . . .	106
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>107</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>111</b>
	<b>APÊNDICE A – MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS DE POTÊNCIA . . . . .</b>	<b>112</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Um sistema é basicamente composto por entradas, um conjunto de regras, as quais modificam as entradas para gerar sinais de saída, e as próprias saídas (LATHI, 1998, p. 51). Na atualidade, a definição de sistema é aplicável em todas as áreas, desde engenharia, até medicina e economia. No contexto dos sistemas, existem os sistemas dinâmicos (LUENBERGER, 1979, p. 90-95), os quais podem ser modelados através da representação em espaço de estados dada por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (1.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (1.2)$$

onde  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$  e  $\mathbf{u}(t)$  é a entrada. A variável  $\mathbf{x}(t)$  é denominada vetor de estados e carrega as informações passadas do sistema (SIMON, 2006, p. XXI). Os estados em conjunto com a entrada formam a saída através da função  $\mathbf{h}(\cdot)$ .

O vetor de estados é muito útil para monitoramento dos sistemas e também para implementar técnicas de controle, como controle por realimentação de estados, por exemplo (LUENBERGER, 1979, p. 300). A equação (1.1) torna possível encontrar os valores dos estados para qualquer  $t$  caso o estado inicial  $\mathbf{x}(0)$  esteja disponível, entretanto, isto nem sempre ocorre (LUENBERGER, 1979, p. 302-303). Outra possível solução é realizar a medição destes estados através de equipamentos de instrumentação. Porém, mais uma vez, novos problemas podem surgir, como, por exemplo (LUENBERGER, 1979, p. 300):

- a não disponibilidade dos estados para medição por serem grandezas sem sentido físico;
- o custo dos equipamentos de medição podem ser elevados, tornando inviável sua aplicação.

Quando nem a equação (1.1) e nem as medições podem ser utilizadas para obtenção dos estados, resta uma terceira alternativa: os estimadores de estados.

### 1.1 Histórico da Estimação

Em 1795, surgiu o método de mínimos quadrados, atribuído a Carl Friedrich Gauss, sendo utilizado primeiramente na área de astronomia para realizar a estimação de órbitas de planetas. Este foi o primeiro método de estimação que satisfazia uma condição de otimalidade (GREWAL, 2011, p. 6-7).

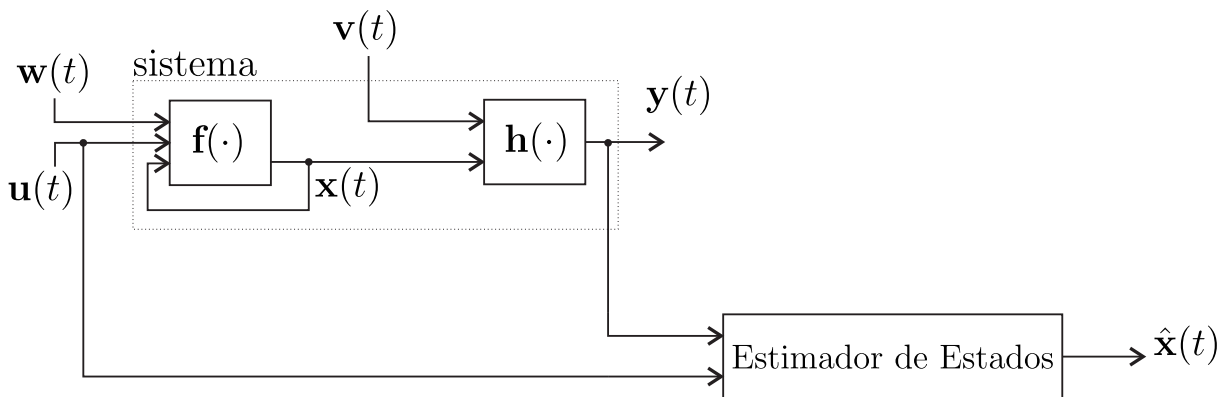
Em 1940, em meio a segunda guerra mundial, devido a alta velocidade dos aviões, as armas antiaéreas necessitavam prever a trajetória das aeronaves para acertá-las. Nesta época, Norbert Wiener desenvolveu o filtro de Wiener, o qual trata-se de um estimador baseado em mínimos quadrados, que funciona em termos da função de autocorrelação do sinal e do ruído.

Sua solução é obtida na forma de um operador integrador, o qual pode ser implementado através de um filtro analógico. Seu trabalho foi publicado com a nomenclatura *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series* (WIENER, 1949), o qual ficou conhecido posteriormente como *Time Series* (GREWAL, 2011, p. 13).

Em 1958, Rudolf Emil Kalman foi chamado para trabalhar para o Departamento de Força Aérea em uma pesquisa cuja problemática era semelhante a já trabalhada por Wiener. A partir da ideia de Kalman de juntar o filtro de Wiener à teoria de espaço de estados, surgiu o filtro de Kalman (KALMAN et al., 1960), o qual é considerado uma solução para a problemática de estimação de estados (SIMON, 2006, p. 130). O filtro de Kalman é considerado uma das grandes contribuições na teoria de estimação do século XX e recebeu substancial aceitação por parte da comunidade devido a simplicidade de implementação (GREWAL, 2011, p. 14-17). O filtro de Kalman foi utilizado no projeto Apollo, quando Stanley F. Schmidt trabalhou juntamente com Kalman na *Ames Research Center of NASA*, em meados da década de 1960.

## 1.2 Problemática

Dado um sistema modelado através das equações (1.1) e (1.2) e com condições iniciais desconhecidas, deseja-se estimar os estados do sistema. Além disso, pode-se ter um ruído de processo  $w(t)$  que influencia os estados, e portanto é argumento de  $f(\cdot)$ , e um ruído de medição  $v(t)$  que influencia a saída, e é argumento de  $h(\cdot)$ . O esquema desta problemática é dado na Figura 1.1. Nesta problemática, deseja-se obter os estados estimados  $\hat{x}(t)$  de tal forma que



**Figura 1.1** – Problemática do estimador de estados dada em diagrama de blocos. Nesta problemática, as únicas informações acessíveis são a entrada  $u(t)$  e a saída  $y(t)$ .

$\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$ . Os únicos dados acessíveis são a entrada  $u(t)$  e a saída  $y(t)$ . As informações sobre o sistema são dadas através de  $f(\cdot)$  e  $h(\cdot)$ . Os ruídos  $w(t)$  e  $v(t)$  são ruídos gaussianos brancos e apenas suas estatísticas são conhecidas. Portanto, o estimador utilizará os sinais  $u(t)$  e  $y(t)$  em conjunto com as informações das estatísticas dos ruídos e do sistema para realizar a medição.

### 1.3 Motivação

O filtro de Kalman é um estimador de estados, o qual resulta na estimação ótima dos estados caso o sistema seja linear e o ruído, gaussiano. Ele é considerado a melhor solução para o problema de estimação de estados (SIMON, 2006, p. 130). Entretanto, um outro espectro dos sistemas permanece sem solução. Este espectro abrange os sistemas não lineares. Um sistema não linear possui funções  $f(\cdot)$  e/ou  $h(\cdot)$  não lineares. E, uma vez que o sistema é não linear, a teoria de sistemas lineares não é mais aplicável, tal como o filtro de Kalman.

As primeiras soluções para a problemática não linear ocorrem através de derivações do filtro de Kalman. A mais comum delas é o filtro de Kalman estendido, o qual foi desenvolvido por Kalman e Schimidt na *Ames Research Center of NASA*. Esta técnica consiste em utilizar a série de Taylor para realizar a linearização do sistema (ARULAMPALAM et al., 2002) e se tornou a ferramenta de estimação de estados para sistemas não lineares mais utilizada nas últimas décadas (BONNABEL; SLOTINE, 2015).

O filtro de Kalman estendido é conhecido por apresentar bons resultados caso o estado inicial do filtro esteja próximo o suficiente do estado inicial do sistema e também é um dos melhores estimadores para sistemas que são levemente não lineares (BONNABEL; SLOTINE, 2015). Esta variação do filtro de Kalman também tem recebido destaque na área de sistemas de potência, realizando a estimação dos fasores de tensão (GHAHREMANI; KAMWA, 2011), de frequência (CHEN et al., 2010), além da velocidade e posição das máquinas síncronas do sistema de geração (ZHOU et al., 2015).

Outras variações do filtro de Kalman estendido também foram desenvolvidas, entretanto, tais derivações são geralmente formuladas apenas para um seletivo grupo de sistemas não lineares (DAUM, 2005).

A principal desvantagem do filtro de Kalman estendido é que, uma vez que ele é baseado em métodos de linearização local, ele não obtém bons resultados em caso de não linearidades consideráveis. Além disso, ele trabalha apenas até o segundo momento estatístico, o que resultaria em boa estimativa apenas para ruídos gaussianos (SÄRKKÄ, 2013, p. 72). Outra desvantagem deste filtro é que ele requer que as funções de transição de estados e medição do sistema sejam diferenciáveis.

Além do filtro de Kalman estendido, outra técnica que vem sendo estudada recentemente é o filtro de partículas. O nome filtro de partículas se refere a uma classe de filtros não lineares que implementam numericamente o filtro bayesiano (CHEN et al., 2003, p. 25). Um filtro de partículas aproxima a função de distribuição de probabilidade do vetor de estados condicionada às medições. A integração multidimensional dos estados é realizada através da técnica sequencial de Monte Carlo (DAUM, 2005). Ao contrário do filtro de Kalman estendido, o filtro de partículas é uma técnica que apresenta boas estimativas mesmo com alto níveis de não linearidade e é também uma solução para os casos em que os ruídos são não gaussianos (CUI; KAVASSERI,

2015).

Apesar de todas as vantagens do filtro de partículas, este depende fortemente da escolha da função densidade de importância (ZUO et al., 2013).

Como será visto na seção 4.2.5, a função densidade de importância pode ser escolhida como sendo a função de transição dos estados, o que facilita o cálculo da ponderação das partículas. Alguns pesquisadores propõem melhorar a performance do filtro de partículas utilizando outras funções densidade de importância, como Merwe et al. (2001), que propõem a utilização do filtro de Kalman *unscented* para geração da função de importância. Li e Yang (2010) propõem um filtro de Kalman *unscented square root* iterativo para gerar tal função de importância. Zuo e Jia (2013) propõem um filtro de partículas em que metade das partículas são amostradas da função de propagação dos estados e a outra metade, da função densidade obtida pelo filtro de Kalman estendido iterativo, possuindo duas funções de importância. Neste âmbito, propõe-se um filtro de partículas com amostragem e reamostragem por importância aliado ao filtro de Kalman estendido iterativo (FPA-FKEI) para estimação de estados em sistemas não lineares.

## 1.4 Objetivos da Pesquisa

Os objetivos deste projeto de pesquisa estão listados a seguir:

- Apresentar técnicas lineares de estimação de estados;
- Considerar ambientes com ruídos gaussianos;
- Considerar sistemas não lineares;
- Avaliar técnicas de estimação de estados de sistemas não lineares comuns na literatura;
- Propor técnicas de estimação de estados aplicadas a sistemas não lineares com ruído gaussiano;
- Comparar técnicas propostas com técnicas já existentes na literatura.

## 1.5 Trabalho Publicado

O desenvolvimento desta pesquisa resultou na publicação do seguinte trabalho:

- Prohmann, Eric A. V. e de Souza, Francisco C. Desenvolvimento de um Filtro de Partículas Aliado ao Filtro de Kalman Estendido Iterativo para Estimação de Estados de Sistemas Não Lineares com Ruído Gaussiano, apresentado no XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI), paginas 809 - 814, em 2017.

(link de acesso - [https://www.ufrgs.br/sbai17/papers/paper\\_238.pdf](https://www.ufrgs.br/sbai17/papers/paper_238.pdf)).

## 1.6 Organização da Dissertação

Esta dissertação está organizada em 6 capítulos:

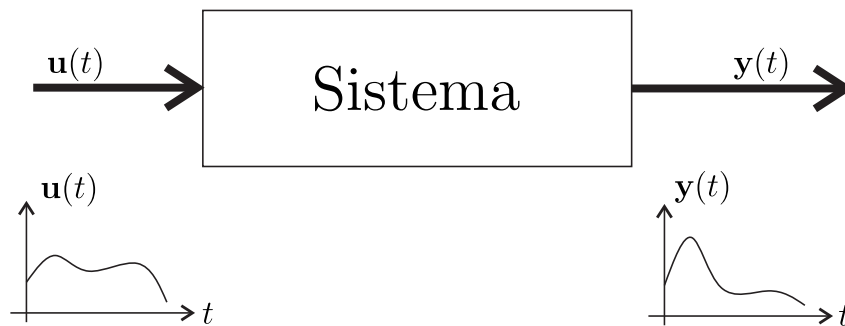
- Capítulo 2 - Este capítulo tem por objetivo recordar o leitor sobre assuntos que fundamentam este trabalho, por esta razão, o capítulo foi chamado de generalidades. Ele abrange os assuntos básicos da área de automação, como sistemas em espaço de estados, até assuntos mais complexos, como processos estocásticos. Além disso, ele aborda uma das técnicas mais simples em estimação: o observador de estados. Para avaliação das técnicas apresentadas no decorrer desta dissertação, métricas baseadas no valor absoluto são apresentadas neste capítulo.
- Capítulo 3 - O terceiro capítulo remete o leitor a primeira técnica de estimação de estados que inovou a área, por ser um método prático e simples, o filtro de Kalman. Tal método soluciona o problema para sistemas lineares com ruído gaussiano e, portanto, sua forma discreta e contínua são apresentadas. Sua eficácia é comprovada ao ser comparado ao observador de estados em dois exemplos.
- Capítulo 4 - O capítulo 4 traz duas técnicas muito utilizadas para a solução da problemática da estimação em sistemas não lineares. Estas duas técnicas são o filtro de Kalman estendido, o qual consiste da linearização em série de Taylor do sistema para obtenção de um sistema linear para, então, aplicar as equações do filtro de Kalman; e o filtro de partículas, o qual consiste da implementação do estimador Bayesiano numericamente.
- Capítulo 5 - O quinto capítulo traz, inicialmente, a problemática da estimação não linear e do fato de não haver soluções genéricas para estes casos. Com base nesta problemática, uma variação do filtro de partículas, denominada filtro de partículas aliado ao filtro de Kalman estendido iterativo é formulada. Para comprovação da eficácia do método, 3 sistemas são utilizados e a metodologia proposta é comparada ao filtro de Kalman estendido e ao filtro de partículas através das métricas de performance.
- Capítulo 6 - O capítulo 6 contém conclusões gerais sobre os resultados e sobre trabalhos futuros e expansões da técnica proposta nesta dissertação são realizadas.

## 2 GENERALIDADES

Neste capítulo, definições e teorias básicas são fornecidas ao leitor a fim de facilitar o entendimento dos capítulos consecutivos. Dentre os itens presentes neste capítulo estão: a classificação de sistemas dinâmicos, representação em espaço de estados, métodos de discretização e linearização de sistemas, processos estocásticos, ruído branco, estimadores de estados e, além disso, a teoria básica dos observadores de estados.

### 2.1 Representação de Sistemas em Espaço de Estados

Em engenharia, os sinais correspondem a um conjunto de informações ou dados. Estes sinais podem ser processados pelos sistemas a fim de modificá-los ou obter algumas informações. Tais sistemas consistem em componentes físicos ou algoritmos que calculam o sinal de saída a partir do sinal de entrada (LATHI, 1998, p. 51). Desta forma, os sistemas são caracterizados pelas entradas, saídas e pelas regras de operação que regem o sistema (LATHI, 1998, p. 77). Estas regras podem ser expressas através de equações matemáticas, as quais são construídas com base no conhecimento em áreas específicas e em algumas medições (CHEN, 1999, p. 2-3). Um diagrama simplificado de um sistema pode ser observado na Figura 2.1.



**Figura 2.1** – Representação simplificada em diagrama de blocos de um sistema.  $u(t)$  corresponde ao sinal de entrada do sistema. Por consequência, há um sinal  $y(t)$  gerado na saída.

Uma forma de representação matemática das regras de um sistema é denominada espaço de estados. Esta representação utiliza equações diferenciais lineares ou não lineares de primeira ordem para representar sistemas dinâmicos (sistemas em que suas saídas atuais dependem de valores passados da entrada (LUENBERGER, 1979, p. 90-95)(LATHI, 1998, p. 84)). A representação de um sistema em espaço de estados é apresentada nas subseções a seguir. Nesta dissertação, é considerado que os modelos matemáticos dos sistemas já estão disponíveis em espaço de estados.

### 2.1.1 Sistemas Lineares

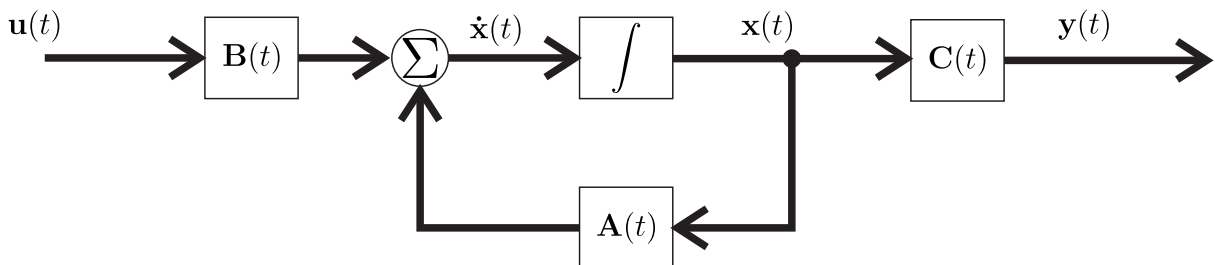
A representação de um sistema linear dinâmico em espaço de estados é dada por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (2.2)$$

onde  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$ ,  $\mathbf{x}(t)$  é denominado o vetor de estados do sistema, a matriz  $\mathbf{A}(t)$  é denominada matriz de realimentação dos estados,  $\mathbf{B}(t)$  é a matriz de entrada,  $\mathbf{u}(t)$  é o vetor de entrada,  $\mathbf{y}(t)$  é a saída do sistema,  $\mathbf{C}(t)$  é a matriz de saída do sistema,  $\mathbf{D}(t)$  é a matriz de transmissão direta e  $t$  é o índice de tempo. As equações em (2.1) são um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem denominadas equações de estado (LUENBERGER, 1979, p.90-95). Segundo Chen (1999, p. 6), o estado  $\mathbf{x}(t_0)$  de um sistema no instante  $t_0$  é a informação que, juntamente com a entrada  $\mathbf{u}(t)$ ,  $t \geq t_0$ , determina unicamente a saída,  $\mathbf{y}(t)$  para todo  $t \geq t_0$ . O vetor de entrada consiste de grandezas físicas, como tensão, corrente ou força, por exemplo. A saída, da mesma forma, corresponde a grandezas físicas. Em um carro, por exemplo, a entrada poderia ser o fluxo de gasolina que é injetado no motor e, a saída, a velocidade do veículo. O estado, por sua vez, é um vetor que armazena toda a informação do sistema até o instante atual. Outra definição menos formal para o estado é dada por Simon (2006, p. XXI), em que caracteriza o estado como variáveis que provém uma completa representação das condições internas do sistema em um determinado instante de tempo. Algumas dos estados podem representar valores de grandezas físicas, como tensão em um capacitor ou corrente em um indutor. Os estados de um satélite em órbita podem incluir a posição, velocidade e orientação angular. Em um sistema econômico, os estados podem ser a renda per capita, taxa de imposto, o número de desempregados e o crescimento da economia. Em biologia, os estados podem incluir o nível de açúcar no sangue, taxa cardíaca, taxa de respiração e temperatura corpórea (SIMON, 2006, p. XXII). Dessa forma, a utilização dos sistemas e, também dos estados, é ampla em diversas áreas científicas.

Um sistema linear modelado em espaço de estados possui sua representação em diagrama de blocos como na Figura 2.2 (LUENBERGER, 1979, p. 98).



**Figura 2.2** – Representação em diagramas de blocos de um sistema linear qualquer em espaço de estados contínuo.

Quando as entradas e saídas do sistema são sinais contínuos, o sistema é considerado um sistema contínuo. As equações (2.1) e (2.2) são utilizadas para representar sistemas contínuos. Quando as entradas e saídas do sistema são sinais discretos, o sistema é discreto (LATHI, 1998,

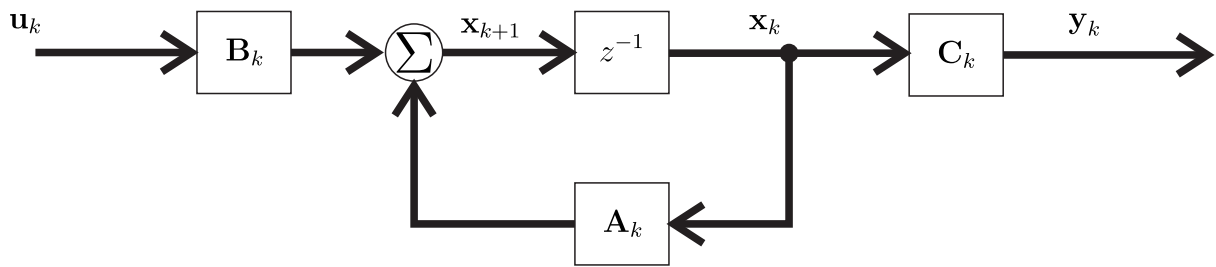


p. 87). A representação de sistemas discretos é levemente diferente da utilizada para sistemas contínuos, e é dada por

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \quad (2.3)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_k \mathbf{u}_k \quad (2.4)$$

onde o índice  $k$  indica o instante de tempo. A representação de um sistema em espaço de estados discreto pode ser visualizado na Figura 2.3.



**Figura 2.3** – Representação em diagramas de blocos de um sistema qualquer em espaço de estados discreto.

Outra forma de se classificar um sistema está relacionada a quantidade de entradas e saídas, a qual é dada da seguinte forma:

- SISO - Uma entrada e uma saída (*single input single output*);
- MISO - Múltiplas entradas e uma saída (*multiple input single output*);
- SIMO - Uma entrada e múltiplas saídas (*single input multiple output*);
- MIMO - Múltiplas entradas e múltiplas saídas (*multiple input multiple output*).

Outra classificação ocorre em relação à concentração dos parâmetros. Se todos os elementos existentes no sistema tiverem uma representação que independa da condição espacial do próprio elemento, o sistema é dito a parâmetros concentrados. Isto implica que o sistema possuirá uma quantidade de estados finita. Por outro lado, se qualquer elemento for função de suas dimensões, o sistema passa a ser classificado como sistema a parâmetros distribuídos e o sistema possuirá uma quantidade infinita de estados (LATHI, 1998, p. 87) (CHEN, 1999, p. 7). Para citar um exemplo, em um circuito elétrico, a corrente é função também do espaço. Entretanto, se as dimensões dos componentes do sistema forem menores que o comprimento de onda da corrente, os efeitos espaciais sobre a corrente são desprezíveis, e o sistema pode ser considerado a parâmetros concentrados (LATHI, 1998, p. 87). Para o caso de sistemas a parâmetros distribuídos, a teoria de espaço de estados vista nesta seção não pode ser aplicada. Uma consulta sobre sistemas distribuídos pode ser realizada em Kailath (1980, p. 633-636).

Além das classificações apresentadas nesta seção, há várias outras formas de classificação de sistemas, as quais podem ser estudadas em Chen (1999, p. 5-17) e Lathi (1998, p. 79).

### 2.1.2 Sistemas Não Lineares

Apesar de toda a formulação a respeito de sistemas lineares, tais sistemas não existem na prática. Todo sistema é não linear. Por outro lado, muitos sistemas não lineares são próximos o suficiente da teoria linear, tornando-a aplicável para tais sistemas. Para os sistemas restantes, essa proximidade com a teoria linear não é verdadeira, sendo necessário uma representação diferente da apresentada na seção 2.1.1 (SIMON, 2006, p. 395).

A representação de um sistema não linear não é mais apresentada de forma matricial, ao invés disso, ela corresponde a um conjunto de equações e é dada por (LUENBERGER, 1964, p. 316-317) (KAILATH, 1980, p. 59)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (2.6)$$

onde  $\mathbf{f}$  corresponde ao conjunto de funções não lineares de estado e  $\mathbf{h}$  corresponde ao conjunto de equações não lineares de saída. A representação para o caso discreto é semelhante e dada por

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, k) \quad (2.7)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, k). \quad (2.8)$$

### 2.1.3 Sistemas Não Lineares com Ruído Aditivo

Em alguns casos, os sinais utilizados no sistema podem ter característica estatística<sup>1</sup>, o que leva a necessidade de empregar variáveis estocásticas nas representações em espaços de estados. Para tais casos, o modelo do sistema é dado por (LEWIS; XIE; POPA, 2007, p. 263)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \mathbf{w}(t) \quad (2.9)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \mathbf{v}(t). \quad (2.10)$$

O ruído  $\mathbf{w}(t)$  é denominado ruído de processo enquanto que o ruído  $\mathbf{v}(t)$  é denominado ruído de medição.

Para o caso discreto, as equações têm o índice  $t$  alterado para o índice discreto  $k$ , resultando em

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, k) + \mathbf{w}_k \quad (2.11)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, k) + \mathbf{v}_k. \quad (2.12)$$

Na maioria das vezes, os sinais não são realmente estocásticos. Nestes casos, os ruídos são utilizados para representar as incertezas da modelagem do sistema (SÄRKKÄ, 2013, p. 1).

<sup>1</sup> quando os valores do sinal não podem ser preditos precisamente, mas são conhecidos através de descrições probabilísticas (LATHI, 1998, p. 60)

## 2.2 Linearização de Sistemas Não Lineares

A maioria dos sistemas físicos podem ser descritos através de equações diferenciais não lineares na forma das equações (2.5) e (2.6). Sabendo que a maioria dos sistemas não lineares é aproximadamente linear, realizar a linearização das equações do sistema pode ser uma alternativa (CHEN, 1999, p. 17).

Dado um vetor de entrada inicial,  $\mathbf{u}_0(t)$ , e um vetor de estados iniciais,  $\mathbf{x}_0(t)$ , tem-se que a solução de (2.5) é dada por

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t). \quad (2.13)$$

Se houver uma pequena perturbação no estado  $\mathbf{x}_0(t) + \Delta\mathbf{x}(t)$  e na entrada  $\mathbf{u}_0(t) + \Delta\mathbf{u}(t)$ , a solução de (2.13) difere de  $\dot{\mathbf{x}}_0(t)$  levemente<sup>2</sup> (CHEN, 1999, p. 17). Portanto, pode-se representar esta solução como

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) + \dot{\Delta\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t) + \Delta\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_0(t) + \Delta\mathbf{u}(t), t). \quad (2.14)$$

Desta forma, a equação (2.14) pode ser expandida em série de Taylor até a primeira ordem em torno de  $\mathbf{x}_0(t)$  e  $\mathbf{u}_0(t)$  (KAILATH, 1980, p. 59-60), resultando em

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) + \dot{\Delta\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0(t)} \Delta\mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0(t)} \Delta\mathbf{u}(t) \quad (2.15)$$

onde  $\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0(t)}$  e  $\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0(t)}$  são chamados de matrizes jacobianas. Pode-se representar este sistema através de equações matriciais lineares ao fazer  $\mathbf{A}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0(t)}$  e  $\mathbf{B}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0(t)}$ . Isto resultará em um sistema linear dado por

$$\dot{\Delta\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\Delta\mathbf{u}(t). \quad (2.16)$$

A equação de medição dada por (2.6) também pode ser linearizada da mesma forma.

É importante ressaltar que a linearização de sistemas não lineares invariantes no tempo geralmente resultam em sistemas linearizados variantes no tempo. Esta é uma das principais formas nas quais sistemas variantes no tempo são encontrados em análise de sistemas (KAILATH, 1980, p. 60).

## 2.3 Discretização de Sistemas Não Lineares

Em posse de um sistema não linear descrito por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (2.17)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (2.18)$$

<sup>2</sup> Isto é verdade para sistemas em que o nível de não linearidade não é elevado.

a discretização deste sistema contínuo pode ser feita através da aproximação da derivada de  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  dada por (CHEN, 1999, p. 90)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\mathbf{x}(t+T) - \mathbf{x}(t)}{T} \quad (2.19)$$

onde  $T$  é o período de amostragem. Substituindo (2.19) em (2.17), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{x}(t+T) - \mathbf{x}(t)}{T} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{x}(t+T) &= \mathbf{x}(t) + T\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Dessa forma, a representação do sistema se torna uma função de  $kT$  ao invés de  $t$ , onde  $k \in \mathbb{Z}_+$  determina o instante de tempo e  $\mathbb{Z}_+$  é o conjunto dos números inteiros positivos. Assim, a representação de (2.20) é dada por

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + T\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, k). \quad (2.21)$$

Uma outra forma de realizar a discretização é possível ao se considerar que a entrada  $\mathbf{u}(t)$  é gerada por um computador digital e levada a um conversor digital/analógico, então,  $\mathbf{u}(t)$  será constante por partes (CHEN, 1999, p. 91-92). Tal situação é comum quando o controle é realizado através de um computador digital. Para esta situação, o sistema resultante é dado por

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (2.22)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k \quad (2.23)$$

onde as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  são dadas por

$$\mathbf{A} = \exp(\mathbf{A}_{cont}T) \quad \mathbf{B} = \left( \int_0^T \exp(\mathbf{A}_{cont}\tau) \partial\tau \right) \mathbf{B}_{cont} \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_{cont} \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_{cont} \quad (2.24)$$

onde  $\mathbf{A}_{cont}$ ,  $\mathbf{C}_{cont}$  e  $\mathbf{D}_{cont}$  são as matrizes de realimentação de estados, saída e realimentação direta do sistema linear contínuo, respectivamente. Neste método de discretização não há qualquer aproximação envolvida, como no caso anterior, e provém a solução exata do sistema (CHEN, 1999, p. 92).

## 2.4 Processos Estocásticos

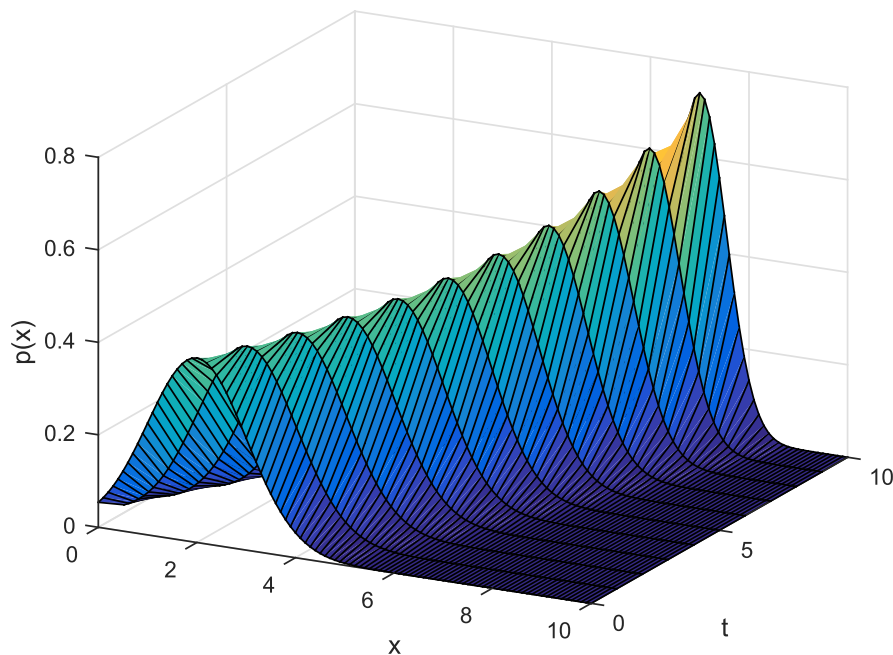
Para a compreensão sobre processos estocásticos, é necessário o conhecimento sobre probabilidade e variáveis aleatórias. Alguns dos autores que abordam estes assuntos são: Papoulis e Pillai (2002), Bertsekas e Tsitsiklis (2002), Manolakis, Ingle e Kogon (2000), Therrien (1992), Lindsey (2004) e Jazwinski (2007).

Um processo estocástico (processo aleatório)  $\{x(t), t \in \mathcal{T}\}$  é uma família de variáveis aleatórias indexadas pelo parâmetro  $t$  (MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000, p. 97) (JAZWINSKI, 2007, p. 47). Se  $\mathcal{T}$  for um conjunto de valores contínuos, então o processo é

chamado a parâmetros contínuos. Se  $\mathcal{T}$  for um conjunto de valores discretos, o processo é denominado a parâmetros discretos. Nas aplicações deste trabalho, o parâmetro  $t$  refere-se ao tempo, portanto, o conjunto de parâmetros  $\mathcal{T}$  pode ser dado por  $\mathcal{T} = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$  para o caso contínuo ou  $\mathcal{T} = \{t \in \mathbb{N} : t \geq 0\}$  para o caso discreto (JAZWINSKI, 2007, p. 47-48) (PAPOULIS; PILLAI, 2002, p. 373).

Além da classificação quanto aos parâmetros, o processo também é classificado em relação ao seu conjunto de variáveis aleatórias. Se estas variáveis forem contínuas, o processo é denominado a estados contínuos. Se forem discretas, a estados discretos (JAZWINSKI, 2007, p. 47-48) (PAPOULIS; PILLAI, 2002, p. 373).

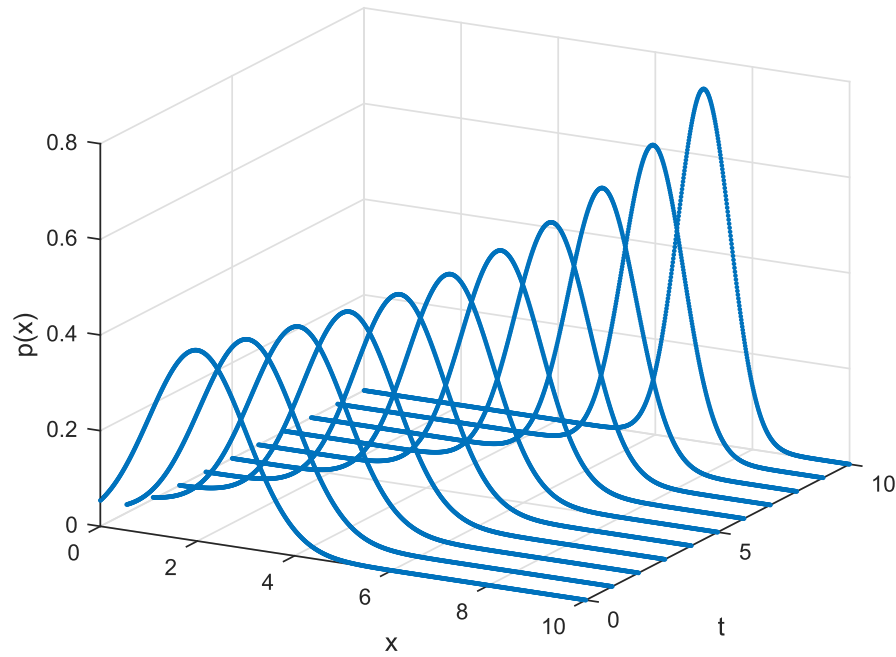
Para facilitar o entendimento, podem ser observados três processos estocásticos escalares nas Figuras 2.4, 2.5 e 2.6, em que constam um processo estocástico a parâmetros contínuos e a estados contínuos, um processo estocástico a parâmetros discretos e a estados contínuos e um processo estocástico a parâmetros discretos e a estados discretos, respectivamente. O último caso, que seria um processo estocástico a parâmetros contínuos e a estados discretos é de difícil representação gráfica e não foi possível exibi-lo graficamente.



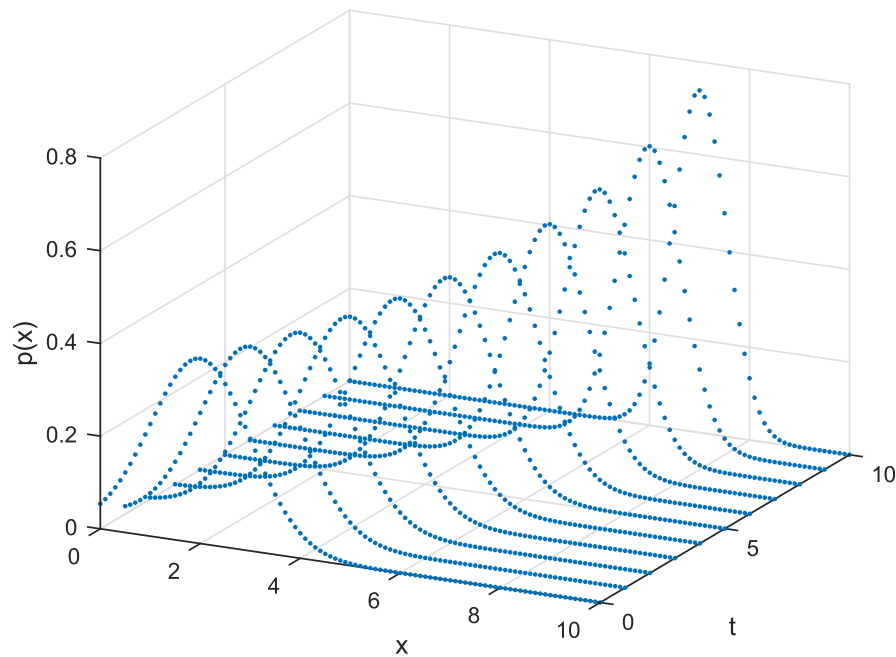
**Figura 2.4** – Processo estocástico contínuo de estado contínuo.

Sobre um processo estocástico é possível obter as seguintes interpretações (PAPOULIS; PILLAI, 2002, p. 373) (MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000, p. 98):

1. O processo  $x(t)$  consiste em um conjunto de funções  $x(t, \zeta)$ . Nesta interpretação,  $t$  e  $\zeta$  são variáveis.



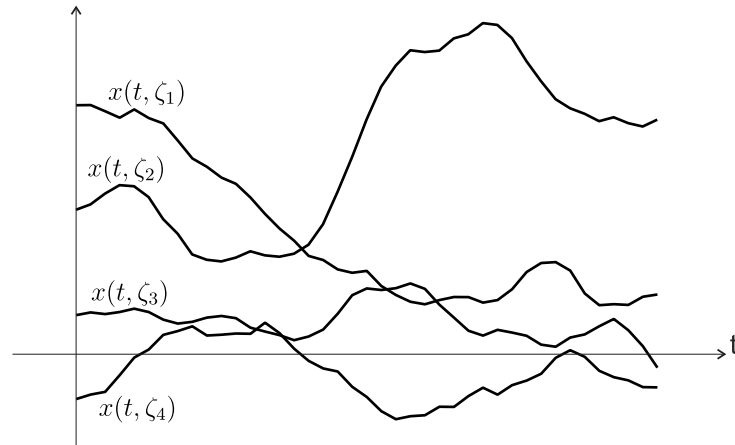
**Figura 2.5** – Processo estocástico discreto de estado contínuo.



**Figura 2.6** – Processo estocástico discreto de estado discreto.

2. Se  $t$  é variável e  $\zeta$  for fixada, tem-se uma função temporal dada por  $x(t, \zeta)$  (ou uma realização do processo).
3. Se  $t$  for fixado e  $\zeta$  é variável, então  $x(t)$  é uma variável aleatória.
4. Se  $t$  e  $\zeta$  forem fixadas,  $x(t)$  é um número.

Na prática, são obtidas amostras de um processo estocástico ao longo do tempo (PAPOULIS; PILLAI, 2002, p. 374). Cada vez que o processo é reiniciado, um novo conjunto de amostras é obtido. A este conjunto de amostras, dá-se o nome de realização (MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000, p. 98). Um conjunto de 4 realizações de um processo estocástico qualquer pode ser observado na Figura 2.7.



**Figura 2.7** – Conjunto de 4 realizações de um processo estocástico qualquer.

### 2.4.1 Distribuições em Processos Estocásticos

No instante  $t = t_0$ ,  $x(t_0)$  é uma variável aleatória, a qual possui uma distribuição de probabilidade de primeira ordem, que pode ser definida por  $F_x(x; t_0)$ . De forma similar,  $x(t_1)$  e  $x(t_2)$  também são variáveis aleatórias estabelecidas nos instantes  $t_1$  e  $t_2$ . Portanto, existe uma distribuição conjunta denominada  $F_x(x_1, x_2; t_1, t_2)$ , a qual é denominada distribuição de segunda ordem (MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000, p. 99-100) (PAPOULIS; PILLAI, 2002, p. 375-376). Ao obter  $n$  variáveis aleatórias, a distribuição de  $n$ -ésima ordem é representada por

$$F_x(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n). \quad (2.25)$$

Mais informações sobre distribuições podem ser encontrada em Papoulis e Pillai (2002, p. 73-83) e Manolakis, Ingle e Kogon (2000, p. 75-77).

### 2.4.2 Estatísticas de Primeira e Segunda Ordem

Na prática, é desejável resumir alguns aspectos chave de uma distribuição de probabilidade utilizando apenas alguns números no lugar de todos os valores presentes nas distribuições. Estes números são denominados *médias estatísticas* ou *momentos* e são calculados utilizando a fórmula de valor esperado (MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000, p. 77) (BERTSEKAS; TSITSIKLIS, 2002, p.81-82), a qual é dada por

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (2.26)$$

onde  $f(x)$  é a função densidade de probabilidade e corresponde a

$$f(x) = \frac{\partial F_x(x)}{\partial x}. \quad (2.27)$$

Além disso, a maioria das propriedades estatísticas de um processo estocástico podem ser descritas através das médias associadas as distribuições de primeira e segunda ordem (MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000, p. 100).

Em relação as distribuições de primeira ordem, é possível calcular o valor esperado ou valor médio por

$$\hat{x}(t) = E[x(t)]. \quad (2.28)$$

Uma interpretação possível para a média de  $x(t)$  é que esta pode ser considerada como a "localização" ou o "centro de gravidade" de  $x(t)$  (MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000, p. 77).

Relacionado as distribuições de segunda ordem, é possível calcular a correlação e a covariância. A correlação é dada por

$$\text{corr}(x(t_1), x(t_2)) = E[x(t_1)x(t_2)]. \quad (2.29)$$

A covariância é dada por

$$\text{cov}(x(t_1), x(t_2)) = E[(x(t_1) - \hat{x}(t_1))(x(t_2) - \hat{x}(t_2))]. \quad (2.30)$$

Através da covariância, é possível encontrar o desvio padrão através de

$$\text{desvio}(x(t_1), x(t_2)) = \sqrt{\text{cov}(x(t_1), x(t_2))} \quad (2.31)$$

o qual é uma medida da dispersão dos valores observados em torno da média de  $x(t)$  (MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000, p. 79).

É possível construir a matriz de correlação de um processo fazendo

$$\mathbf{CORR} = \begin{bmatrix} \text{corr}(x(t_1), x(t_1)) & \text{corr}(x(t_1), x(t_2)) & \dots & \text{corr}(x(t_1), x(t_n)) \\ \text{corr}(x(t_2), x(t_1)) & \text{corr}(x(t_2), x(t_2)) & \dots & \text{corr}(x(t_2), x(t_n)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{corr}(x(t_n), x(t_1)) & \text{corr}(x(t_n), x(t_2)) & \dots & \text{corr}(x(t_n), x(t_n)) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

e a matriz de covariância por

$$\mathbf{COV} = \begin{bmatrix} \text{cov}(x(t_1), x(t_1)) & \text{cov}(x(t_1), x(t_2)) & \dots & \text{cov}(x(t_1), x(t_n)) \\ \text{cov}(x(t_2), x(t_1)) & \text{cov}(x(t_2), x(t_2)) & \dots & \text{cov}(x(t_2), x(t_n)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(x(t_n), x(t_1)) & \text{cov}(x(t_n), x(t_2)) & \dots & \text{cov}(x(t_n), x(t_n)) \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$



### 2.4.3 Ortogonalidade e Descorrelação

Dois processos são denominados mutuamente ortogonais se (PAPOULIS; PILLAI, 2002, p. 385)(MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000, p. 101)

$$\text{corr}(x(t_1), x(t_2)) = 0 \quad \forall t_1 \text{ e } t_2 \quad (2.34)$$

e descorrelacionados se

$$\text{cov}(x(t_1), x(t_2)) = 0 \quad \forall t_1 \text{ e } t_2. \quad (2.35)$$

Se ambos os processos tiverem média nula, a descorrelação implica também na ortogonalidade (MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000, p. 86).

### 2.4.4 Estacionariedade

As duas principais formas de estacionariedades são (PAPOULIS; PILLAI, 2002, p. 391-392)(LINDSEY, 2004, p. 8)(MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000, p. 102):

1. Estacionário no sentido estrito - Quando as propriedades estatísticas do processo são invariantes para qualquer avanço no tempo, ou seja,  $x(t)$  tem as mesmas estatísticas que  $x(t + c)$  para todo  $c$ .
2. Estacionário no sentido amplo - Quando a média do processo é sempre constante e sua autocorrelação depende apenas de  $\tau = t_1 - t_2$ , ou seja,  $E[x(t_1)x(t_2)] = \text{corr}(\tau) \forall t_1 \text{ e } t_2$ .

A classificação de estacionário no sentido amplo possui menores restrições, por este motivo é a condição mais averiguada para constatar a estacionariedade de um processo (MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000, p. 102).

### 2.4.5 Ergodicidade

O teorema da ergodicidade promove identidade entre médias probabilísticas, tal como o valor médio, e médias temporais obtidas a partir de uma única realização de um processo (LINDSEY, 2004, p. 8-9).

Para se estimar o valor médio de um processo estocástico no instante  $t$ , é comum utilizar um valor aproximado dado pela média de  $N_r$  realizações através de

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{N_r} \sum_{r=1}^{N_r} x_r(t) \quad (2.36)$$

onde  $N_r$  é o número total de realizações disponíveis. Entretanto, em algumas aplicações, apenas uma realização do processo  $x(t)$  pode ser obtida. Para tais casos, avaliar as condições de ergodicidade é interessante, pois, uma vez que o processo possa ser considerado ergódico, o valor médio do processo tende para a média temporal (MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000, p. 105-106).

Para que um processo estocástico seja ergódico, é necessário primeiramente checar se o processo é estacionário. Uma vez constatada a estacionariedade, é preciso avaliar se quando  $t \rightarrow \infty$ , a variância do processo tende para zero. Se estas duas condições forem constatadas, o processo pode ser considerado ergódico e a média temporal tem probabilidade próxima de 1 de equivaler ao valor esperado (PAPOULIS; PILLAI, 2002, p. 523-524).

## 2.5 Ruído Branco

Ruído branco é um termo aplicado para qualquer processo aleatório em que a densidade espectral de potência é uma constante (THERRIEN, 1992, p. 198). Uma vez que esta densidade é uma constante, a função de correlação é um impulso, conforme a Figura 2.8. Em outras palavras, as amostras de processos de um ruído branco são descorrelacionadas. Matematicamente falando, um processo  $x(t)$  é um ruído branco se  $x(t_1)$  e  $x(t_2)$  são descorrelacionados para todo  $t_1$  e  $t_2$ , ou seja, (PAPOULIS; PILLAI, 2002, p. 385) (MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000, p. 110)

$$C(t_1, t_2) = 0 \quad \forall t_1 \neq t_2. \quad (2.37)$$

Se as amostras  $x(t_1)$  e  $x(t_2)$  forem independentes  $\forall t_1 \neq t_2$ , então  $x(t)$  é denominado ruído estritamente branco. A média do ruído branco será considerada nula no decorrer deste trabalho.

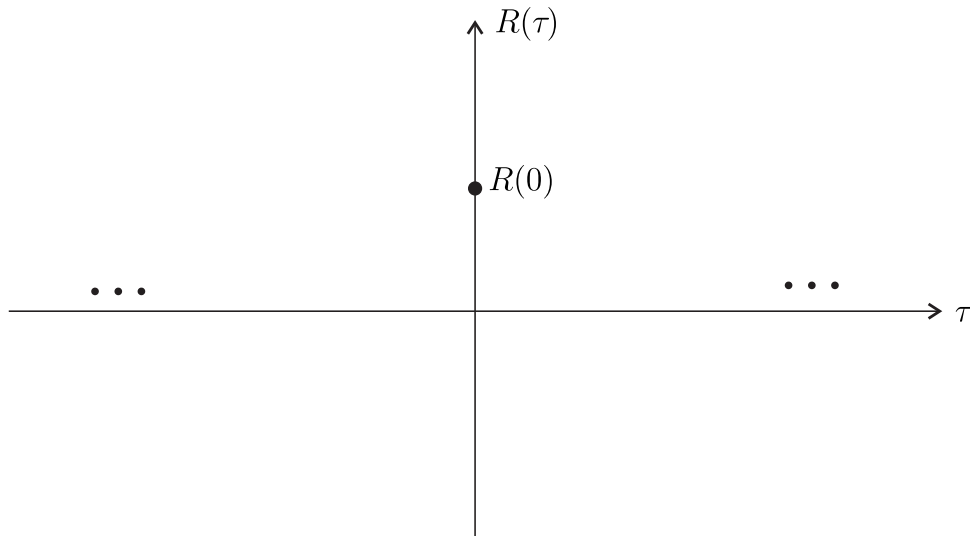
O termo ruído branco é utilizado para enfatizar que todas as frequências contribuem com a mesma potência, tal como no caso da luz branca, a qual é obtida ao se misturar todas as cores possíveis na mesma quantidade (MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000, p. 110).

O ruído branco contínuo é um tipo de processo aleatório idealizado, pois ele possui potência infinita, uma vez que a potência é constante de  $-\infty$  até  $\infty$ , conforme a Figura 2.9. Se um sinal está corrompido por um ruído branco, utiliza-se um filtro para limitar a banda do sinal de entrada e, conseqüentemente, do ruído em uma largura igual a largura de banda do sistema (THERRIEN, 1992, p. 198). A utilização do filtro não afetará as análises sobre o ruído devido as próprias limitações de banda do sistema.

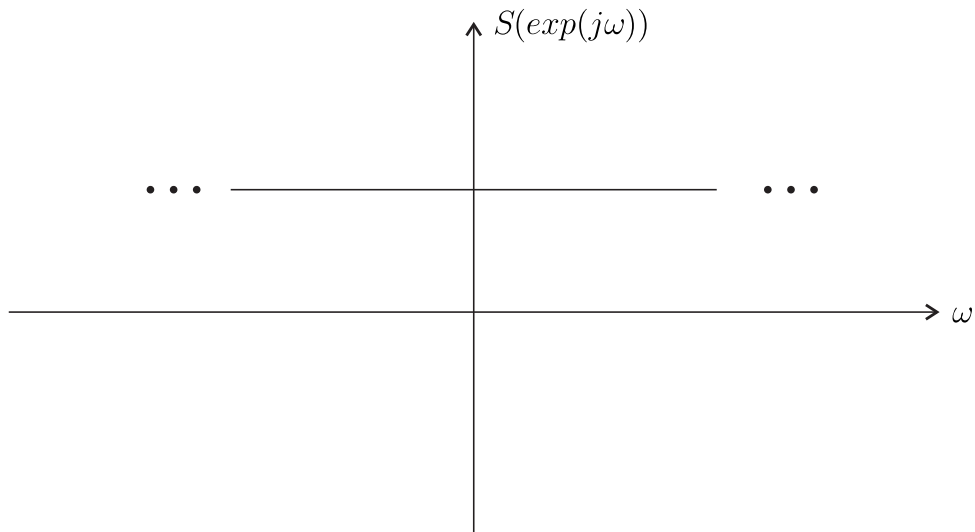
Se, adicionalmente, as funções densidades de probabilidade de um ruído branco  $x(t)$  para todo  $t$  forem gaussianas, o processo é chamado de ruído branco gaussiano (MANOLAKIS; INGLE; KOGON, 2000, p. 110).

## 2.6 Estimadores de Estados

O conhecimento dos estados de um sistema pode ser utilizado tanto para monitoramento, como é o caso em sistemas de potência (BEIDES; HEYDT, 1991), (MA; GIRGIS, 1996), (ZHANG et al., 2014), quanto para utilização de técnicas de controle por realimentação de estados, em que a entrada se torna uma função estática dos estados reais do sistema (LUENBERGER, 1979, p. 300). Uma forma de se obter o valor destes estados é através de medição (observação). Entretanto, nem sempre o acesso a estes estados está disponível. Além disso, a utilização de



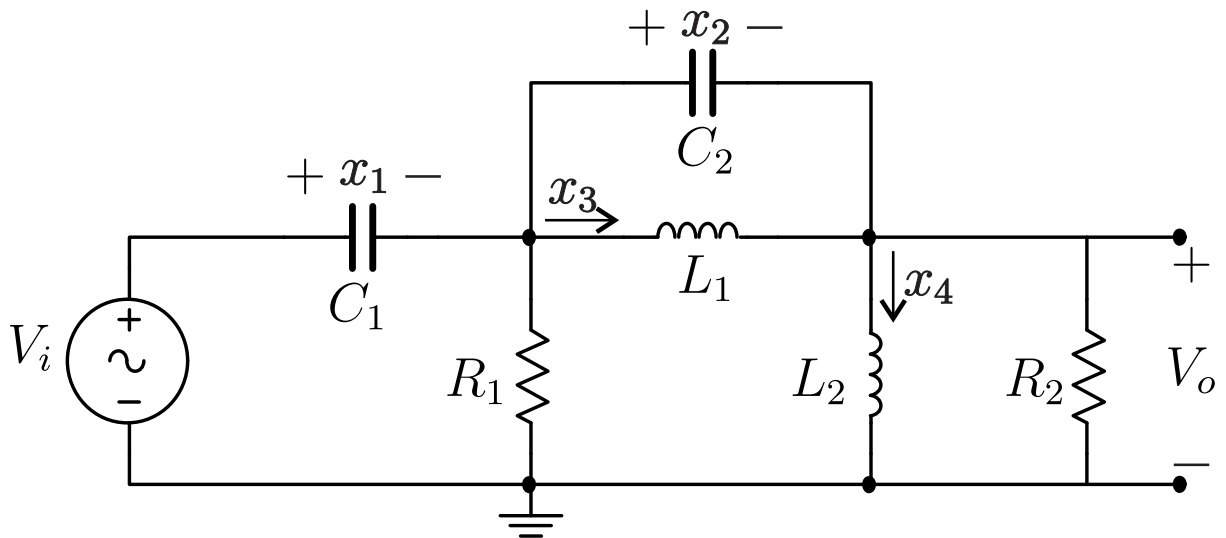
**Figura 2.8** – Potência média de um ruído branco.



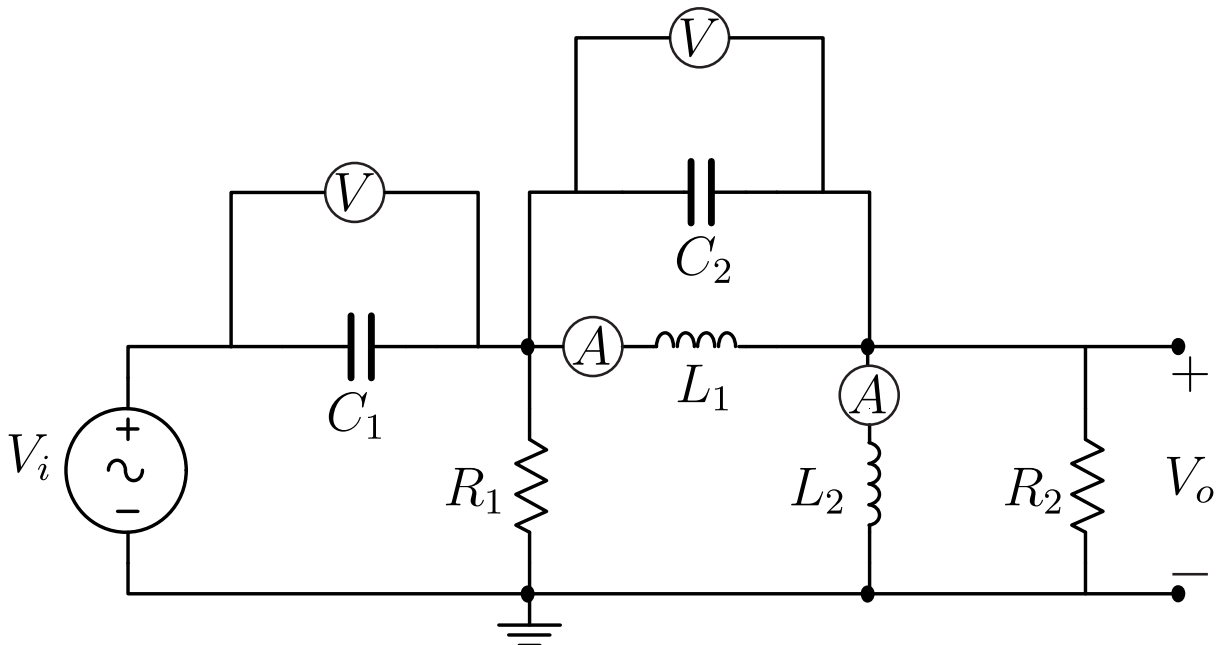
**Figura 2.9** – Potência média de um ruído branco.

sensores para medição dos estados pode gerar um custo adicional inviável (LUENBERGER, 1979, p. 300). Como exemplo, para obter os estados do circuito da Figura 2.10, os quais são as tensões nos capacitores  $C_1$  e  $C_2$ , e correntes nos indutores  $L_1$  e  $L_2$ , seriam necessários 2 amperímetros e 2 voltímetros, ou seja, 4 sensores. Desta forma, o circuito resultaria na Figura 2.11. A inserção deste sensores para tal aplicação é inviável, uma vez que são de alto custo em relação ao sistema utilizado.

Uma vez que nem sempre é possível obter os estados por sensores, os *estimadores de estados* passaram a se tornar uma solução para esta problemática. Estes estimadores *consistem em construir uma aproximação do vetor de estados utilizando as medições disponíveis* (LUENBERGER, 1979, p. 301). Qualquer técnica de controle baseada na realimentação de estados pode utilizar os estados estimados no lugar dos estados reais, apesar de o uso dos estados estimados ocasionar deterioração da resposta transitória (KAILATH, 1980, p. 259).



**Figura 2.10** – Exemplo de circuito elétrico em que se deseja obter os estados.

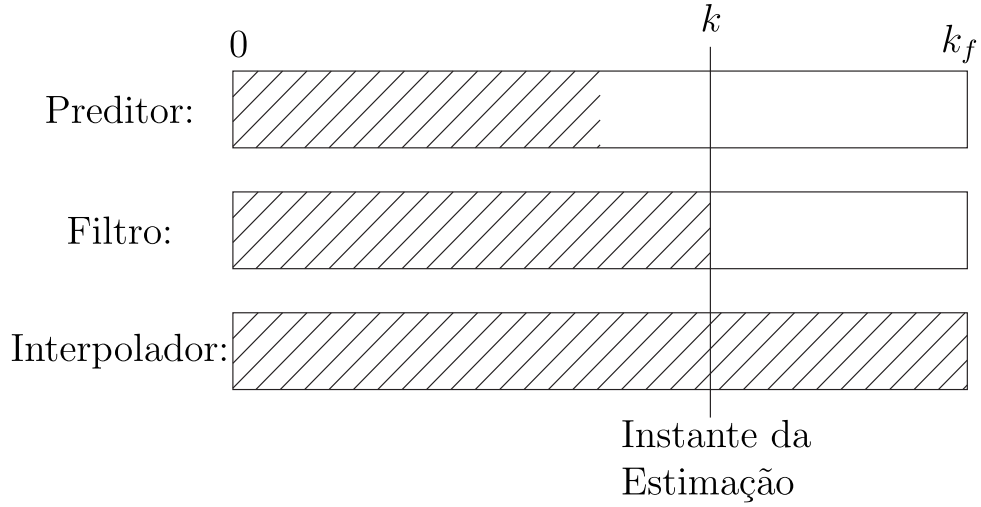


**Figura 2.11** – Exemplo de circuito elétrico com estados medidos.

De acordo com o uso dos dados disponíveis, os estimadores de estados podem ser classificados como (GREWAL, 2011, p. 132-133):

- Preditor - Utiliza as observações estritamente *a priori* ao instante em que os estados do sistema dinâmico são estimados;
- Filtro - Utiliza observações até e incluindo o instante em que os estados do sistema são estimados;
- Suavizador/Interpolador - Utiliza observações além do instante em que os estados do sistema são estimados.

Tal classificação pode ser compreendida através da Figura 2.12.



**Figura 2.12** – Tipos de estimadores de acordo com os dados utilizados. O instante  $k$  corresponde ao instante da estimação dos estados, o instante  $k_f$  corresponde ao instante final que compreende todas as medições disponíveis, a área com traços diagonais corresponde às medições utilizadas para estimação e a área total de cada retângulo corresponde às todas as medições disponíveis.

## 2.7 Métrica de Performance

Para realizar a comparação entre as técnicas, foram definidas as seguintes funções de performance baseadas no erro absoluto:

- Primeiramente, uma métrica para avaliar o erro de estimação dada por:

$$e_{i,k} = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{r=1}^{N_{MC}} \sqrt{(\hat{x}_{k,i,r} - x_{k,i,r})^2}. \quad (2.38)$$

onde  $N_{MC}$  é o número de realizações de Monte Carlo,  $r$  é o índice referente a realização,  $i$  é o índice referente ao estado,  $k$  é o índice temporal,  $\hat{x}_{k,i,r}$  é o estado estimado e  $x_{k,i,r}$  é o estado real.

- Uma segunda métrica para apresentar o erro de todos os estados juntos:

$$e_k = \frac{1}{n_x} \sum_{i=1}^{n_x} e_{i,k} \quad (2.39)$$

onde  $n_x$  é a dimensão do vetor de estados.

- E, por fim, uma métrica escalar dada por

$$e = \frac{1}{t_f} \sum_{k=1}^{t_f} e_k \quad (2.40)$$

onde  $t_f$  é o índice de tempo no final das realizações utilizadas.

## 2.8 Observadores de Estados

Os estados estimados podem ser convenientemente calculados através de um dispositivo denominado observador (LUENBERGER, 1979, p. 301). O observador é um sistema linear dinâmico. Seus dados de entrada são os valores de entrada e saída do sistema real obtidos através de medições. O observador pode ser definido como um dispositivo dinâmico que, quando conectado as saídas disponíveis do sistema, gera o vetor de estados (LUENBERGER, 1979, p. 301-302).

Para derivação de um observador, define-se um sistema modelado matematicamente por

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (2.41)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k. \quad (2.42)$$

Uma vez conhecidas as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  e as condições iniciais, é possível estimar a sequência de  $\mathbf{x}_k$  utilizando (2.41). Entretanto, na maioria dos casos, as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  podem não ser tão precisas e as condições iniciais serem desconhecidas. Para tais casos, a utilização de um observador de estados permite uma melhor estimação da sequência de  $\mathbf{x}_k$  (JACQUOT, 1995, p. 241).

### 2.8.1 Realimentação de Estados

Nesta seção, uma rápida e simples explicação sobre controle através da realimentação de estados é feita.

Um regulador é um sistema que controla a saída em torno de zero na presença de perturbações externas (JACQUOT, 1995, p. 235-236). Portanto, o controle é realizado através da realimentação negativa dos estados, a qual é dada por

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{F}\mathbf{x}_k \quad (2.43)$$

onde  $\mathbf{F}$  é a matriz de ganho de realimentação. O diagrama em blocos desta configuração pode ser observado na Figura 2.13. Sendo a entrada regida por (2.43), tem-se a seguinte equação de atualização dos estados:

$$\mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F})\mathbf{x}_k \quad (2.44)$$

e os autovalores deste sistema podem ser encontrados através de

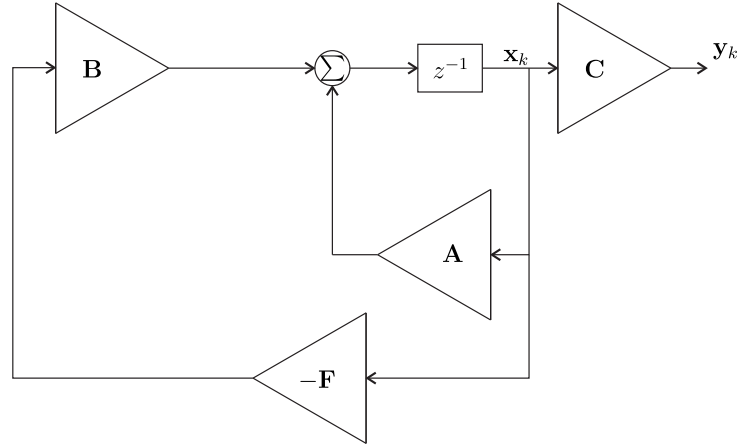
$$\lambda_c(z) = \det[z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}] = 0 \quad (2.45)$$

onde  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ ,  $n_u$  é a dimensão da entrada e  $n_x$  é a dimensão do vetor de estados.

### 2.8.2 Equações do Observador de Estados com Realimentação

Considerando que o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  é observável, o erro de estimação é dado por

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k \quad (2.46)$$



**Figura 2.13** – Diagrama em blocos de um sistema regulador por realimentação de estados.

onde  $\hat{x}_k$  é o estado estimado. Uma opção de estimador linear é dada por

$$\hat{x}_{k+1} = M\hat{x}_k + Ky_k + z_k \quad (2.47)$$

onde  $M$  e  $K$  são matrizes que serão especificadas e  $z_k$  é um vetor que será especificado. Desenvolvendo o erro de estimação, tem-se

$$\tilde{x}_{k+1} = Ax_k - M\hat{x}_k + Bu_k - Ky_k - z_k. \quad (2.48)$$

Uma vez que a entrada  $Bu_k$  já é conhecida, faz-se  $z_k = Bu_k$ , resultando em

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= Ax_k - M\hat{x}_k - Ky_k \\ &= (A - KC)x_k - M\hat{x}_k. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Se  $M = (A - KC)$ , tem-se que

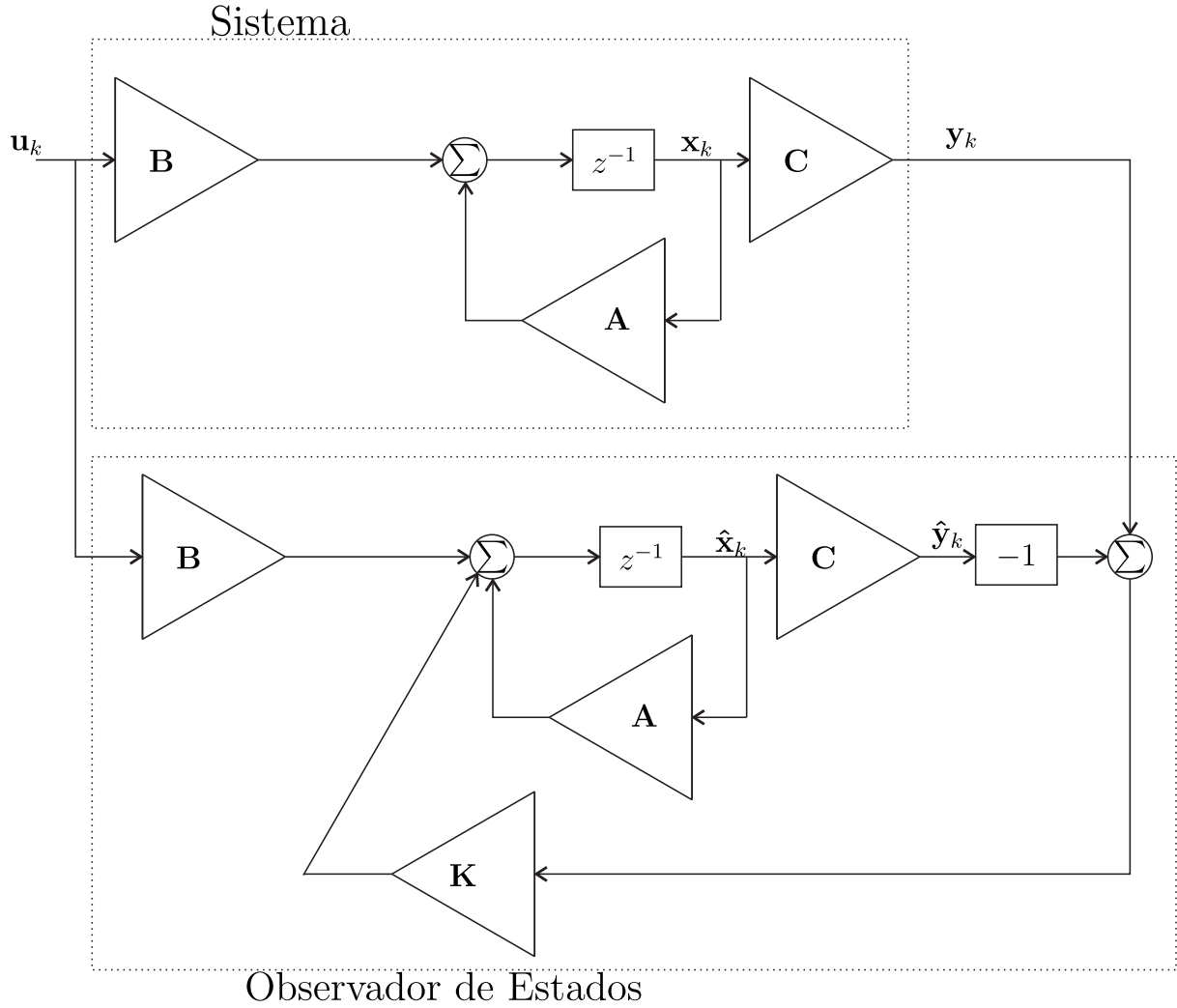
$$\tilde{x}_{k+1} = (A - KC)\tilde{x}_k. \quad (2.50)$$

A escolha da matriz  $K$  pode ser feita utilizando alocação de polos e esta governará a dinâmica do erro (JACQUOT, 1995, p. 242-243). Portanto, o estimador de estados tem como equação de estimação

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= (A - KC)\hat{x}_k + Ky_k + Bu_k \\ &= A\hat{x}_k + K(y_k - C\hat{x}_k) + Bu_k. \end{aligned} \quad (2.51)$$

É importante notar que o estimador é uma réplica do sistema com o adicional de uma realimentação do erro da saída real para a saída estimada para realizar o ajuste dos estados. O diagrama em blocos do sistema e do observador pode ser visto na Figura 2.14. Se o estimador for estável, o erro irá para zero assintoticamente. É possível controlar o erro da dinâmica escolhendo a matriz de ganho  $K$  para alocar os polos onde for desejado. Os polos da dinâmica do erro são os autovalores da matriz  $(A - KC)$ , portanto, as raízes são obtidas por (LUENBERGER, 1979, p. 303)

$$\det[Iz - A + KC] = 0. \quad (2.52)$$



**Figura 2.14** – Diagrama em blocos de um observador de estados.

Através do estimador de estados é possível realizar o controle de um sistema através da realimentação destes estados com um ganho  $F$  (JACQUOT, 1995, p. 245-246). Para este caso, tem-se um sistema controlado pelo observador. Note que, para este caso, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{B}\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_k \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{B}\mathbf{F}(\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k) \end{aligned} \quad (2.53)$$

escrevendo na forma matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \\ \mathbf{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}\mathbf{F} & \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_k \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

e seus autovalores são obtidos através de

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{I}z - (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}) & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}\mathbf{F} & \mathbf{I}z - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F}) \end{bmatrix} = 0. \quad (2.55)$$



Devido a matriz 0 no topo direito, o determinante pode ser calculado como a multiplicação de dois determinantes

$$\det[\mathbf{I}z - (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})]\det[\mathbf{I}z - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F})] = 0. \quad (2.56)$$

Após os elementos de  $\mathbf{F}$  serem selecionados para realizar o controle em malha fechada, os elementos de  $\mathbf{K}$  devem ser calculados de tal forma que os polos do estimador em malha aberta sejam mais rápidos (geralmente 2 vezes mais rápidos) que os polos em malha fechada (JACQUOT, 1995, p. 244-245).

### 2.8.3 Observador com Referência Não Nula

Sendo a referência não nula, a entrada é dada por

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{F}\mathbf{x}_k + \mathbf{G}\mathbf{r}_k \quad (2.57)$$

onde  $\mathbf{r}_k$  é o sinal de referência e  $\mathbf{G}$  é uma matriz a ser encontrada. Desenvolvendo a equação de estados com esta entrada, tem-se

$$\mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F})\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{r}_k. \quad (2.58)$$

Tomando a transformada  $z$ ,

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{R}(z) \quad (2.59)$$

a transformada da saída é dada por

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{R}(z). \quad (2.60)$$

Escolhendo-se  $\mathbf{G}$  para que o ganho DC seja igual a 1, ou seja,

$$\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{G}|_{z=1} = \mathbf{I} \quad (2.61)$$

a matriz  $\mathbf{G}$  será (JACQUOT, 1995, p. 262-263)

$$\mathbf{G} = [\mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{B}]^{-1}. \quad (2.62)$$

### 2.8.4 Passo a Passo para Implementação de Controle com Realimentação de Estados Obtidos por Observador

1. Encontra-se os polos da planta real calculando os autovalores de  $\mathbf{A}$ ;
2. Realiza-se o controle da planta utilizando realimentação de estados. Para isso, define-se os polos desejados (escolha do projetista) e, através da alocação de polos utilizando (2.45), faz-se o cálculo da matriz  $\mathbf{F}$ . Pode-se utilizar a função do MatLab®

```
place(A,B,polos_controle)
```

para encontrar a matriz  $\mathbf{F}$ , onde  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são as matrizes de realimentação de estado e entrada, respectivamente, e  $\text{polos\_controle}$  é um vetor contendo os polos determinados pelo projetista.

3. Os polos do observador devem ser mais rápidos que os polos em malha fechada da planta, portanto os polos do observador são definidos como os polos em malha fechada com sua parte real multiplicada por dois;
4. Uma vez conhecido os polos do observador, calcula-se  $\mathbf{K}$  através da alocação de polos utilizando (2.52). Pode-se utilizar a função do MatLab®

```
place(A',C',polos_observador)
```

para encontrar  $\mathbf{K}$ , onde  $\mathbf{A}'$  e  $\mathbf{C}'$  são as matrizes de estado e de saída transpostas, respectivamente, e  $\text{polos\_observador}$  é um vetor contendo os polos do observador, os quais devem ser duas vezes mais rápidos que os polos do sistema em malha fechada.

5. Por fim, calcula-se a matriz  $\mathbf{G}$  através de (2.62).

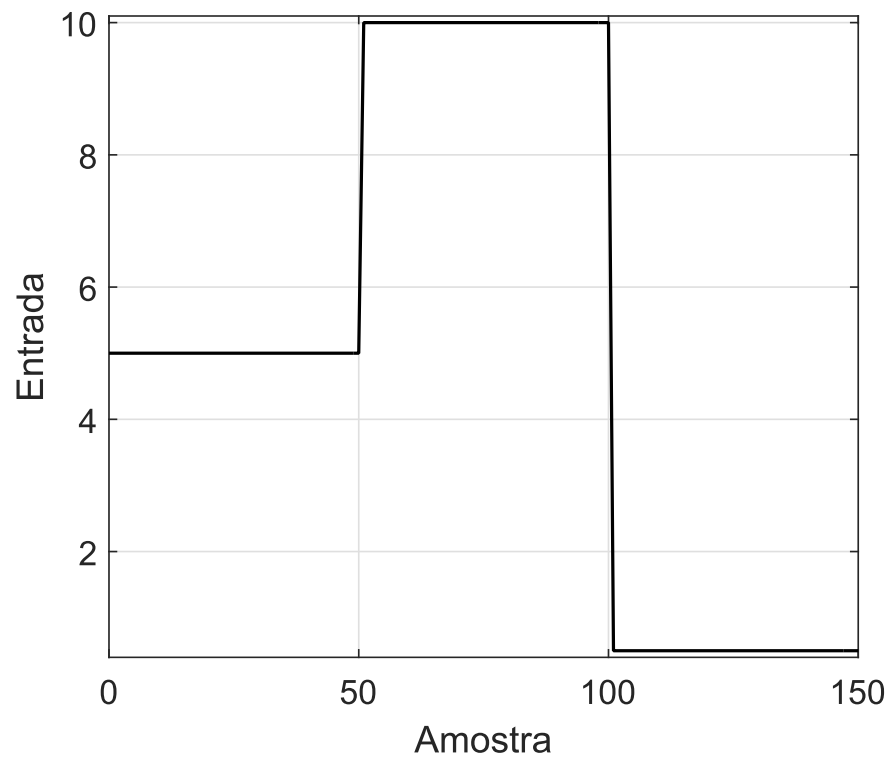
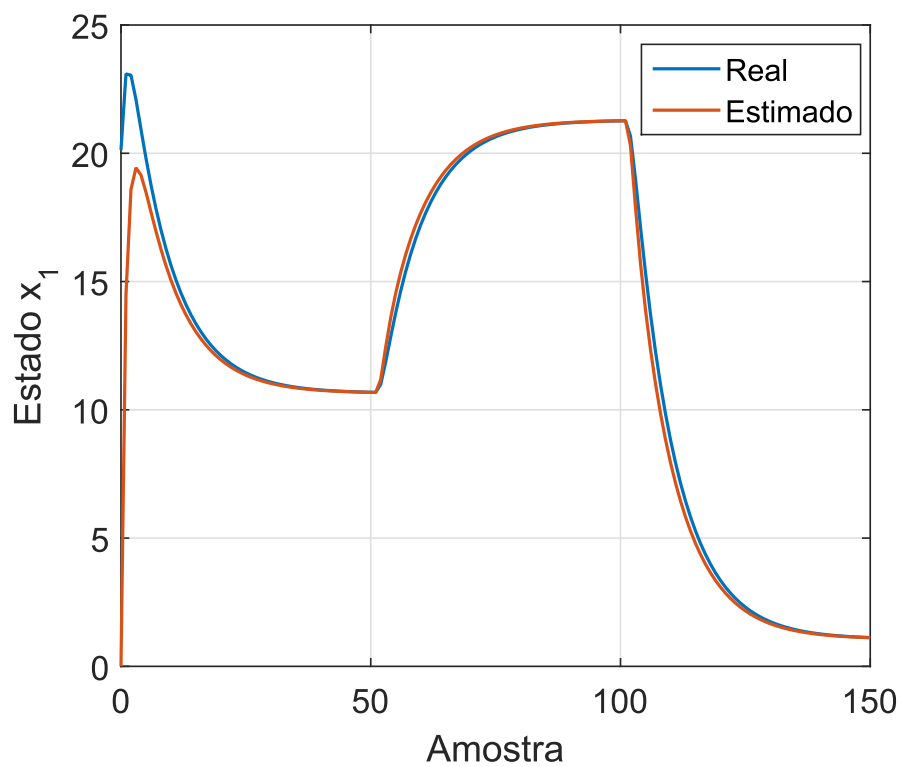
### 2.8.5 Exemplo

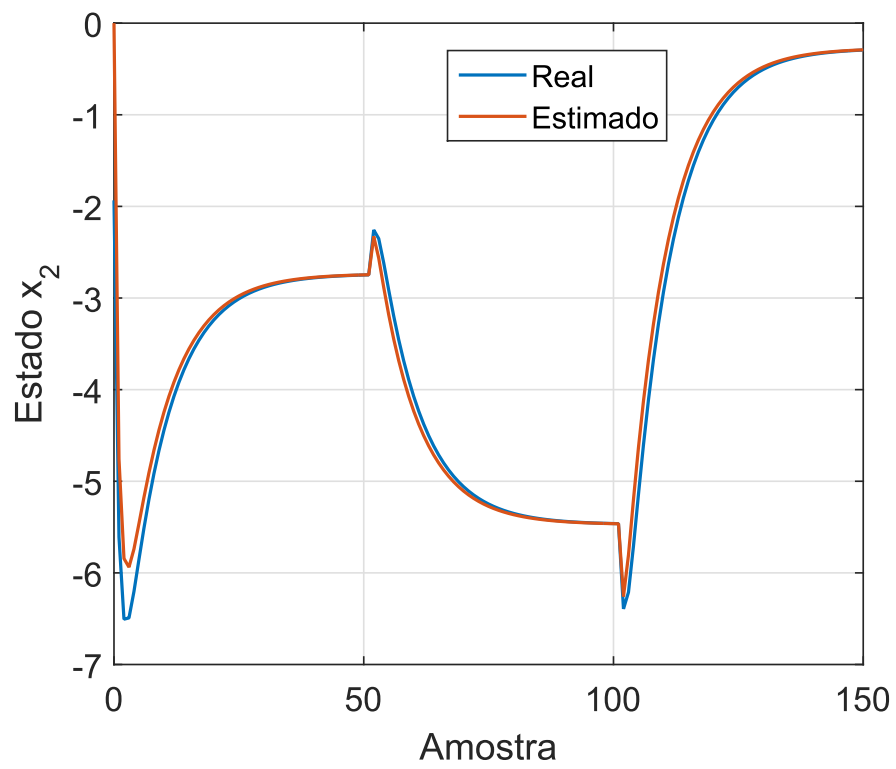
Um observador de estados foi implementado para estimar os estados do sistema cujo modelo matemático é dado por

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1,2272 & 1 \\ -0,3029 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0,0634 \\ 0,0978 \end{bmatrix} u_k \quad (2.63)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k. \quad (2.64)$$

A entrada utilizada é mostrada na Figura 2.15. As condições iniciais do sistema foram  $\mathbf{x}_0 = [8 \ 10]^T$  e do observador foram  $\hat{\mathbf{x}}_0 = [0 \ 0]^T$ . A simulação foi realizada até 150 amostras. Os polos encontrados da matriz  $\mathbf{A}$  foram  $[0,8849 \ 0,3423]$ , e os polos utilizados para o observador foram  $[0,4425 \ 0,1711]$ . Utilizando a função `place` do MatLab®, o ganho de realimentação do observador obtido foi  $\mathbf{K} = [0,6136 \ -0,2272]^T$ . Os estados estimados pelo observador podem ser observados nas Figuras 2.16 e 2.17.

**Figura 2.15** – Entrada aplicada.**Figura 2.16** – Estado  $x_1$  real e estimado pelo observador.



**Figura 2.17** – Estado  $x_2$  real e estimado pelo observador.

### 3 FILTRO DE KALMAN

Neste capítulo, a teoria e derivação do filtro de Kalman é apresentada tanto para o caso discreto quanto para o caso contínuo. O fluxograma que visa facilitar o entendimento e a implementação destes filtros é apresentado. Além disso, para fins didáticos, alguns exemplos foram adicionados, onde o filtro de Kalman é comparado ao observador de estados.

#### 3.1 Filtro de Kalman Discreto

A teoria de filtragem moderna iniciou com Wiener em 1940 com seu trabalho *Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series* (WIENER, 1949). Seu trabalho tinha o objetivo de minimizar o erro médio quadrático, o qual ficou conhecido como filtragem por mínimos quadrados, separando o sinal e o ruído (BROWN; HWANG, 1997, p. 141). Sua obra ficou conhecida por seu alto nível matemático, além de dificuldades de implementação prática (SIMON, 2006, p. 94).

Em 1960, o trabalho desenvolvido por Rudolph Emil Kalman considerou os mesmos problemas com os quais Wiener havia trabalhado, o que levou a publicação de uma nova, simples e prática técnica de estimação de estados (KALMAN et al., 1960). O filtro de Kalman baseia-se na aplicação da teoria de variáveis de estado ao filtro de Wiener-Kolmogorov e realiza a estimação de estados em sistemas dinâmicos lineares estatísticos (GREWAL, 2011, p. 14-15). A primeira formulação do filtro de Kalman foi realizada no domínio do tempo discreto (BROWN; HWANG, 1997, p. 141), sendo a formulação contínua publicada em 1961, a qual é conhecida como filtro de Kalman-Bucy (KALMAN; BUCY, 1961). Ainda na década de 1960, o filtro de Kalman rapidamente se popularizou como um método prático de separar sinal e ruído (BROWN; HWANG, 1997, p. 141). Os principais usos do filtro de Kalman têm sido em controle moderno, rastreamento e sistemas de navegação de todo tipo de veículos, além do projeto preditivo de sistemas de controle e estimação (GREWAL, 2011, p. 17). Mais informações sobre o contexto em que o Filtro de Kalman surgiu pode ser lido em Grewal (2011, p. 14-18).

Antes de adentrar na derivação do filtro de Kalman, é necessário estabelecer as informações referentes ao sistema. A modelagem de processos aleatórios é obtida a partir do próprio modelo determinístico de espaço de estados, mas com a adição de termos referentes a ruídos. Os estados, por sua vez, são um vetor  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ , comandados pela entrada  $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{n_u}$  e também por um ruído  $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ , o qual é um processo aleatório multivariável chamado ruído de processo, que modifica os estados através da matriz  $\mathbf{G}_k$ . Portanto, a equação de estados é dada por

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{A}_k$  é a matriz dos estados,  $\mathbf{B}_k$  é a matriz de entrada e  $k$  é o índice temporal discreto.

Uma vez que o ruído de processo é um processo aleatório, o estado  $\mathbf{x}_k$  também é um processo aleatório. O segundo termo ao lado direito,  $\mathbf{B}_k \mathbf{u}_k$ , é um termo determinístico. Na estimação de estados estocástica a seguir, a parte determinística é desnecessária, uma vez que sua influência sobre o estado é completamente previsível, portanto ela pode ser eliminada sem perda de generalidade. Então, a equação de estados fica na seguinte forma:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k. \quad (3.2)$$

A saída do sistema também é corrompida por ruído aditivo, consequência dos sensores com os quais se obtém a medição. Seja  $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^{n_y}$  um outro processo aleatório multivariável, chamado ruído de medição, a equação da saída é dada por

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \quad (3.3)$$

Os ruídos de processo e de medição são ruídos brancos gaussianos com média nula, ou seja,

$$\mathbf{E}[\mathbf{w}_k] = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{v}_k] = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

e descorrelacionados entre si. Suas covariâncias são

$$\text{Cov}[\mathbf{w}_k] = \mathbf{Q}_k \quad (3.6)$$

$$\text{Cov}[\mathbf{v}_k] = \mathbf{R}_k. \quad (3.7)$$

Outra consideração é que os ruídos de processo e de medição são descorrelacionados.

Deseja-se, então, obter uma estimação ótima dos estados do sistema, levando em consideração o conhecimento da dinâmica do sistema e as observações da saída (SIMON, 2006, p. 124). Um critério desejável pode ser a minimização do erro quadrático médio dado por (CRASSIDIS; JUNKINS, 2011, p. 146) (BROWN; HWANG, 1997, p. 144-145)

$$J_k = \mathbf{E}[(\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k)(\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k)^T] \quad (3.8)$$

o qual corresponde à filosofia do Filtro de Kalman.

A ideia principal do Filtro de Kalman é composta por dois passos: propagação e correção.

Na primeira etapa, é realizada a propagação da média e da covariância dos estados utilizando o modelo matemático que representa a dinâmica do sistema. Este conhecimento sobre a dinâmica do sistema é um conhecimento que se tem antes mesmo da filtragem. Por este motivo, a média e covariância obtidas nesta etapa são denominadas *a priori*.

Na segunda etapa, a média e a covariância são corrigidas através da minimização da função custo (3.8), utilizando as observações disponíveis do instante da estimação. Uma vez

que esta correção é realizada após a medição estar disponível, a média e covariância obtidas são denominadas *a posteriori* (CRASSIDIS; JUNKINS, 2011, p. 147) (SIMON, 2006, p. 126). Por esta razão, alguns autores citam o filtro de Kalman como sendo um filtro da forma preditor-corretor (CRASSIDIS; JUNKINS, 2011, p. 147).

O filtro de Kalman necessita de uma média e uma covariância inicial como entrada. Tais dados de entrada para o filtro podem ser dados a partir do conhecimento *a priori* dos estados do sistema. Entretanto, se não houver nenhuma ideia sobre o estado inicial, então inicializa-se a matriz de covariância inicial como  $\mathbf{P}_0^+ = \infty \mathbf{I}$ , onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade (SIMON, 2006, p. 127). No caso de implementação computacional, é importante considerar a ordem de grandeza com a qual se é possível trabalhar para correta inicialização da matriz de covariância. A estimativa *a posteriori* é definida como

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (3.9)$$

onde  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  é o vetor de estados estimados *a priori* e  $\mathbf{K}_k$  é o ganho de Kalman. A equação (3.9) é utilizada para realizar a correção da média, pois ela é o melhor estimador linear de  $\mathbf{x}_k$ , dada a medição  $\mathbf{y}_k$  (LEWIS; XIE; POPA, 2007, p. 70).

### 3.1.1 Propagação da Média

A propagação da média é realizada através do valor médio da equação de atualização dos estados (3.2), resultando no estado estimado *a priori* dado por (SIMON, 2006, p. 126-127)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^- &= \mathbf{E}[\mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k] \\ &= \mathbf{A}_k \mathbf{E}[\mathbf{x}_k] + \mathbf{G}_k \mathbf{E}[\mathbf{w}_k] \\ &= \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ \end{aligned} \quad (3.10)$$

Definindo o erro de estimativa *a priori* como

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- - \mathbf{x}_{k+1} \quad (3.11)$$

e substituindo (3.2) e (3.10), tem-se que o erro de estimativa *a priori* também pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} &= \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k^+ - (\mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k) \\ &= \mathbf{A}_k (\hat{\mathbf{x}}_k^+ - \mathbf{x}_k) - \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k \end{aligned} \quad (3.12)$$

O erro em (3.12) é necessário para a compreensão da propagação da covariância dos estados.

### 3.1.2 Propagação da Covariância

Definindo o erro de estimativa *a posteriori* como  $\mathbf{e}_k = (\hat{\mathbf{x}}_k^+ - \mathbf{x}_k)$ , tem-se que

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{e}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k \quad (3.13)$$

A matriz de covariância *a priori* é dada por

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^T] \quad (3.14)$$

a qual pode ser desenvolvida utilizando a equação (3.11), obtendo-se

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1}^- &= \mathbf{E}[(\mathbf{A}_k \mathbf{e}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k)(\mathbf{A}_k \mathbf{e}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k)^T] \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{A}_k \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T \mathbf{A}_k^T - \mathbf{A}_k \mathbf{e}_k \mathbf{w}_k^T \mathbf{G}_k^T - \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k \mathbf{e}_k^T \mathbf{A}_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T \mathbf{G}_k^T] \\ &= \mathbf{A}_k \mathbf{E}[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T] \mathbf{A}_k^T - \mathbf{A}_k \mathbf{E}[\mathbf{e}_k \mathbf{w}_k^T] \mathbf{G}_k^T - \mathbf{G}_k \mathbf{E}[\mathbf{w}_k \mathbf{e}_k^T] \mathbf{A}_k^T \\ &\quad + \mathbf{G}_k \mathbf{E}[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] \mathbf{G}_k^T. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Os termos  $\mathbf{E}[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T]$  e  $\mathbf{E}[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T]$  correspondem à matriz de covariância do erro de estimação *a posteriori*,  $\mathbf{P}_k^+$ , e à covariância do ruído de processo,  $\mathbf{Q}_k$ , respectivamente. Portanto, resta avaliar os valores esperados restantes,  $\mathbf{E}[\mathbf{e}_k \mathbf{w}_k^T]$  e  $\mathbf{E}[\mathbf{w}_k \mathbf{e}_k^T]$ . Desenvolvendo  $\mathbf{E}[\mathbf{e}_k \mathbf{w}_k^T]$ , tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\mathbf{e}_k \mathbf{w}_k^T] &= \mathbf{E}[(\hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{x}_k) \mathbf{w}_k^T] \\ &= \mathbf{E}[(\hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{x}_k) \mathbf{w}_k^T] \\ &= \mathbf{E}[(\mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{K}_k(\mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+) - \mathbf{x}_k) \mathbf{w}_k^T] \\ &= \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{E}[\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ \mathbf{w}_k^T] + \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{E}[\mathbf{v}_k \mathbf{w}_k^T] + \mathbf{K}_k \mathbf{E}[\mathbf{v}_k \mathbf{w}_k^T] \\ &\quad - \mathbf{k}_k \mathbf{C}_k \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{E}[\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ \mathbf{w}_k^T] - \mathbf{E}[\mathbf{x}_k \mathbf{w}_k^T]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

$\mathbf{E}[\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ \mathbf{w}_k^T] = 0$ , pois  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$  não depende de  $\mathbf{w}_k^T$ .  $\mathbf{E}[\mathbf{x}_k \mathbf{w}_k^T]$  pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\mathbf{x}_k \mathbf{w}_k^T] &= \mathbf{E}[(\mathbf{A}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}) \mathbf{w}_k^T] \\ &= \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{E}[\mathbf{x}_{k-1} \mathbf{w}_k^T] + \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{E}[\mathbf{w}_{k-1} \mathbf{w}_k^T]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Sabe-se que  $\mathbf{E}[\mathbf{w}_{k-1} \mathbf{w}_k^T] = 0$ , pois  $\mathbf{w}_k$  é um ruído branco, ou seja, descorrelacionado entre si, e  $\mathbf{E}[\mathbf{x}_{k-1} \mathbf{w}_k^T] = 0$ , pois  $\mathbf{x}_{k-1}$  depende apenas dos valores  $\mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-2}, \dots$ . Por último,  $\mathbf{E}[\mathbf{v}_k \mathbf{w}_k^T] = 0$ , pois uma das hipóteses iniciais é que  $\mathbf{w}_k$  e  $\mathbf{v}_k$  são descorrelacionados. Portanto, pode-se concluir que

$$\mathbf{E}[\mathbf{e}_k \mathbf{w}_k^T] = \mathbf{E}[\mathbf{w}_k \mathbf{e}_k^T] = 0 \quad (3.18)$$

e a matriz de covariância *a priori* é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1}^- &= \mathbf{A}_k \mathbf{E}[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T] \mathbf{A}_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{E}[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] \mathbf{G}_k^T \\ &= \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k^+ \mathbf{A}_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{G}_k^T \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde  $\mathbf{P}_k^+$  corresponde a matriz de covariância do erro *a posteriori*. Portanto, a equação (3.19) corresponde à propagação da matriz de covariância.



### 3.1.3 Ganho de Kalman

Uma vez que a média e a covariância foram propagadas, elas são corrigidas pelo método de otimização do erro quadrático com base na medição obtida através dos sensores de saída (CRASSIDIS; JUNKINS, 2011, p. 145). Sabendo que o erro de estimação *a posteriori* é dado por

$$\mathbf{e}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^+ - \mathbf{x}_k \quad (3.20)$$

pode-se desenvolver este erro, resultando em

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_k &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{x}_k \\ &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{x}_k \\ &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{C}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{x}_k + \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)(\hat{\mathbf{x}}_k^- - \mathbf{x}_k) + \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Sendo o erro *a priori*  $\boldsymbol{\varepsilon}_k = (\hat{\mathbf{x}}_k^- - \mathbf{x}_k)$ , tem-se que o erro *a posteriori* é dado por

$$\mathbf{e}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \boldsymbol{\varepsilon}_k + \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \quad (3.22)$$

e, uma vez que o objetivo é reduzir o erro médio quadrático, calcula-se o erro quadrático *a posteriori*

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_k^T \mathbf{e}_k &= [(\boldsymbol{\varepsilon}_k - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k) + \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k][(\boldsymbol{\varepsilon}_k - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k) + \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k]^T \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \boldsymbol{\varepsilon}_k - \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k - (\mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k)^T \boldsymbol{\varepsilon}_k + (\mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k \\ &\quad - (\mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k + (\mathbf{K}_k \mathbf{v}_k)^T \boldsymbol{\varepsilon}_k - (\mathbf{K}_k \mathbf{v}_k)^T \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k + (\mathbf{K}_k \mathbf{v}_k)^T \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \boldsymbol{\varepsilon}_k - \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k - \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{C}_k^T \mathbf{K}_k^T \boldsymbol{\varepsilon}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{C}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k \\ &\quad - \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{C}_k \mathbf{K}_k \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_k^T \mathbf{K}_k^T \boldsymbol{\varepsilon}_k + \mathbf{v}_k^T \mathbf{K}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k + \mathbf{v}_k^T \mathbf{K}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \boldsymbol{\varepsilon}_k - \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k - (\boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k)^T + \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{C}_k^T \mathbf{K}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k \\ &\quad - (\mathbf{v}_k^T \mathbf{K}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k)^T + (\boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k)^T - \mathbf{v}_k^T \mathbf{K}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k + \mathbf{v}_k^T \mathbf{K}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Como  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  é um vetor coluna,  $\boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_k$  é um escalar, para qualquer matriz quadrada  $\mathbf{A}$  de dimensões apropriadas. Portanto,  $(\boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_k)^T = (\boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_k)$ . Da mesma forma ocorre para  $\mathbf{v}_k^T \mathbf{A} \mathbf{v}_k$ . Portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_k^T \mathbf{e}_k &= \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \boldsymbol{\varepsilon}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{C}_k^T \mathbf{K}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k - 2\boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k + 2\boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \\ &\quad - 2\mathbf{v}_k^T \mathbf{K}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k + \mathbf{v}_k^T \mathbf{K}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Uma vez em posse do erro quadrático, encontra-se o valor de  $\mathbf{K}_k$  o qual satisfaz a condição de otimalidade

$$\frac{\partial \mathbf{e}_k^T \mathbf{e}_k}{\partial \mathbf{K}_k} = \mathbf{0}. \quad (3.25)$$

Sendo  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{l \times 1}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{t \times 1}$  dois vetores quaisquer, e  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{l \times t}$  uma matriz qualquer

$$\frac{\partial[\mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{b}]}{\partial \mathbf{K}} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T$$

$$\frac{\partial[\mathbf{a}^T \mathbf{K}^T \mathbf{K} \mathbf{b}]}{\partial \mathbf{K}} = \mathbf{K} \mathbf{b} \mathbf{a}^T + \mathbf{K} \mathbf{a} \mathbf{b}^T$$

Portanto, o erro quadrático é dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_k^T \mathbf{e}_k}{\partial \mathbf{K}_k} = & 0 + 2\mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{C}_k^T - 2\boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{C}_k^T + 2\boldsymbol{\varepsilon}_k \mathbf{v}_k^T - 2\mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k \mathbf{v}_k^T \\ & - 2\mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{C}_k^T + 2\mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T. \end{aligned} \quad (3.26)$$

A condição de otimalidade é (CRASSIDIS; JUNKINS, 2011, p. 146)

$$\frac{\partial \mathbf{e}_k^T \mathbf{e}_k}{\partial \mathbf{K}_k} = 0 \quad (3.27)$$

e, uma vez que o interesse é no valor médio, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{E}[\mathbf{e}_k^T \mathbf{e}_k]}{\partial \mathbf{K}_k} &= \mathbb{E}[\mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{C}_k^T - \boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{C}_k^T + \boldsymbol{\varepsilon}_k \mathbf{v}_k^T - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k \mathbf{v}_k^T - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^T \mathbf{C}_k^T + \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] \\ &= \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^T] \mathbf{C}_k^T - \mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^T] \mathbf{C}_k^T + \mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_k \mathbf{v}_k^T] - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_k \mathbf{v}_k^T] \\ &\quad - \mathbf{K}_k \mathbb{E}[\mathbf{v}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^T] \mathbf{C}_k^T + \mathbf{K}_k \mathbb{E}[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Avaliando os valores esperados na equação (3.28),  $\mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_k \mathbf{b}_k^T]$  resulta em

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_k \mathbf{b}_k^T] &= \mathbb{E}[(\hat{\mathbf{x}}_k^- - \mathbf{x}_k) \mathbf{v}_k^T] \\ &= \mathbb{E}[\hat{\mathbf{x}}_k^- \mathbf{v}_k^T] - \mathbb{E}[\mathbf{x}_k \mathbf{v}_k^T] \end{aligned} \quad (3.29)$$

e avaliando  $\mathbb{E}[\hat{\mathbf{x}}_k^- \mathbf{v}_k^T]$ , tem-se

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{\mathbf{x}}_k^- \mathbf{v}_k^T] &= \mathbb{E}[(\mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^- + \mathbf{K}_{k-1}(\mathbf{y}_{k-1} - \mathbf{C}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^-))] \\ &= \mathbb{E}[(\mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^- + \mathbf{K}_{k-1}(\mathbf{C}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{C}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^-))] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^- + \mathbf{K}_{k-1}(\mathbf{C}_{k-1} \mathbf{A}_{k-2} \mathbf{x}_{k-2} \\ &\quad + \mathbf{G}_{k-2} \mathbf{w}_{k-2} + \mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{C}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^-) \mathbf{v}_k^T]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Portanto,  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  é dirigido apenas por  $\mathbf{v}_{k-1}$  e seus antecessores,  $\mathbf{w}_{k-1}$  e seus antecessores, e como  $\mathbf{v}_k$  é um ruído descorrelacionado,  $\mathbb{E}[\hat{\mathbf{x}}_k^- \mathbf{v}_k^T] = 0$ . Agora, deve-se avaliar  $\mathbb{E}[\mathbf{x}_k \mathbf{v}_k^T]$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{x}_k \mathbf{v}_k^T] &= \mathbb{E}[(\mathbf{A}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}) \mathbf{v}_k^T] \\ &= \mathbb{E}[(\mathbf{A}_{k-1}(\mathbf{A}_{k-2} \mathbf{x}_{k-2} + \mathbf{G}_{k-2} \mathbf{w}_{k-2}) + \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}) \mathbf{v}_k^T]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Como é possível observar,  $\mathbf{x}_k$  é dirigido apenas pelos valores de  $\mathbf{w}_{k-1}$ ,  $\mathbf{w}_{k-2}$ , ..., logo

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}_k \mathbf{v}_k^T] = 0. \quad (3.32)$$

Quanto a  $E[\varepsilon_k \mathbf{v}_k^T]$ , este pode ser reescrito como

$$E[\varepsilon_k \mathbf{v}_k^T] = E[\hat{\mathbf{x}}_k^- \mathbf{v}_k^T] - E[\mathbf{x}_k \mathbf{v}_k^T] = 0. \quad (3.33)$$

Portanto, após a substituição dos valores esperados, a condição de otimalidade resulta em (CRASSIDIS; JUNKINS, 2011, p. 146) (BROWN; HWANG, 1997, p. 144-146)

$$\mathbf{K}_k \mathbf{C}_k E[\varepsilon_k \varepsilon_k^T] \mathbf{C}_k^T - E[\varepsilon_k \varepsilon_k^T] \mathbf{C}_k^T + \mathbf{K}_k E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] = 0 \quad (3.34)$$

e, lembrando que  $E[\varepsilon_k \varepsilon_k^T] = \mathbf{P}_k^-$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T - \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k &= 0 \\ \mathbf{K}_k (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k) - \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T &= 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

O valor de  $\mathbf{K}_k$  que otimiza o erro quadrático médio é dado por

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}. \quad (3.36)$$

A equação (3.36) corresponde ao ganho que minimiza o erro de estimação médio quadrático, também conhecido como ganho de Kalman.

A estrutura do filtro de Kalman é semelhante ao do observador de estados, entretanto a diferença está na alocação de polos. Enquanto o observador realiza alocação de polos através do conhecimento específico do projetista, o filtro de Kalman realiza a alocação de polos a partir de uma estratégia baseada em otimalidade probabilística (CRASSIDIS; JUNKINS, 2011, p. 147). Além desta diferença em relação ao observador, o leitor já deve ter percebido até este ponto que o filtro de Kalman realiza o tratamento de ruído, algo que não está compreendido na problemática do observador.

### 3.1.4 Correção da Matriz de Covariância

Tal como a média *a priori* é corrigida através do ganho  $\mathbf{K}_k$ , o mesmo ocorre para a matriz de covariância *a priori* (CRASSIDIS; JUNKINS, 2011, p. 145-146) (SIMON, 2006, p. 127). Portanto, para encontrar a correção da matriz de covariância, parte-se de sua definição, a qual é dada por

$$\mathbf{P}_k^+ = E[(\hat{\mathbf{x}}_k^+ - \mathbf{x}_k)(\hat{\mathbf{x}}_k^+ - \mathbf{x}_k)^T] = E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T]. \quad (3.37)$$

Desenvolvendo, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^+ &= E[((\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \varepsilon_k) + \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k] ((\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \varepsilon_k) + \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k)^T] \\ &= E[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \varepsilon_k \varepsilon_k^T (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)^T + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \varepsilon_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{K}_k^T \\ &\quad + \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \varepsilon_k^T (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{K}_k^T] \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) E[\varepsilon_k \varepsilon_k^T] (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{K}_k E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] \mathbf{K}_k^T \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T. \end{aligned} \quad (3.38)$$

A equação (3.38) já pode ser utilizada no algoritmo, entretanto uma forma ainda mais simples pode ser derivada. Ao continuar manipulando matematicamente (3.38), tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_k^+ &= (\mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^-)(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \\
&= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^- (\mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)^T - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- + \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- (\mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \\
&= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T \mathbf{K}_k^T - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- + \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \\
&= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T \mathbf{K}_k^T - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k) \mathbf{K}_k^T \\
&= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T [\mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}]^T - \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \\
&\quad + \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k) [\mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}]^T \\
&= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T [\mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}]^T - \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \\
&\quad + \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T [\mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}]^T \\
&= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \\
&= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_k^-
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Portanto, através de (3.39) é possível corrigir a matriz de covariância *a priori*. A equação de propagação da covariância (3.19) incrementa a covariância, enquanto que a equação de correção da covariância (3.38) decrementa a covariância (CRASSIDIS; JUNKINS, 2011, p. 146).

A matriz de correção da covariância deve ser checada quanto a simetria e se é definida positiva. Uma falha em satisfazer estas duas condições é um sinal de que há algum problema com o algoritmo ou algum *bug* de programação. Para evitar tais problemas, a formulação dada pela equação (3.38) é mais utilizada do ponto de vista de estabilidade computacional (GREWAL, 2011, p. 139).

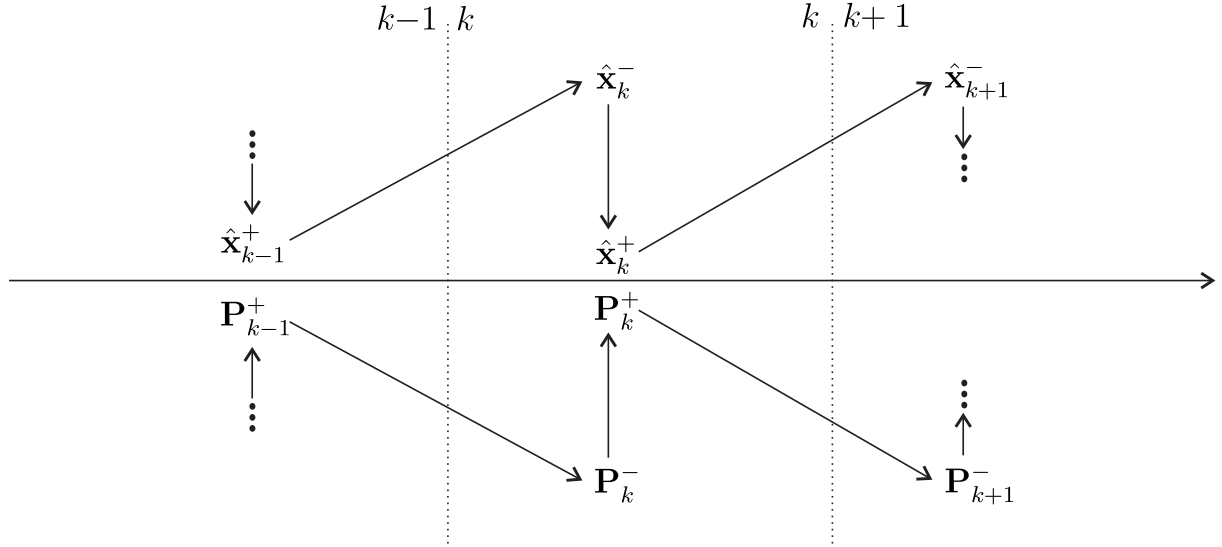
Ainda sobre o ponto de vista prático, a propagação e correção da matriz de covariância em todos os instantes de tempo, inclusive o ganho de Kalman, podem ser calculadas *online*, uma vez que não necessitam da medição da saída. Por esta razão, é possível realizar uma análise sobre a performance do filtro de Kalman antes mesmo de implementá-lo ao analisar a evolução da matriz de covariância. Além disso, uma vez que nas equações da estimação dos estados apenas o ganho de Kalman é necessário, pode-se utilizar o ganho de Kalman que já foi calculado, sem necessitar salvar ou calcular a matriz de covariância *offline* (SIMON, 2006, p. 129).

Ainda com base na derivação do filtro de Kalman, é importante citar que, para o caso de estimação de estados de sistemas lineares invariantes ou variantes no tempo (SIMON, 2006, p. 130):

- Se  $\mathbf{w}_k$  e  $\mathbf{v}_k$  forem ruídos brancos gaussianos de média zero e descorrelacionados, então o filtro de Kalman provém uma estimação ótima.
- Se  $\mathbf{w}_k$  e  $\mathbf{v}_k$  forem ruídos brancos descorrelacionados e de média nula, o filtro de Kalman resulta na melhor solução linear.

### 3.1.5 Fluxograma do Filtro de Kalman

Um diagrama esquemático apresentando as etapas de transição dos estados estimados e da matriz de covariância pode ser visualizado na Figura 3.1.



**Figura 3.1** – Esquemático do filtro de Kalman. A seta contínua central na horizontal indica o sentido temporal do filtro de Kalman. As retas pontilhadas verticais indicam a transição entre um instante e outro. As setas diagonais representam a etapa de propagação através da dinâmica do sistema, enquanto que as setas verticais indicam a etapa de correção através do método de otimização e da medição obtida. Vale notar que as setas de propagação se afastam da seta central que indica o tempo, enquanto que as setas referentes a correção se aproximam da seta central. Tal perspectiva é utilizada para que se compreenda que a etapa de propagação tende a aumentar o erro de estimação e, por consequência, a covariância. A etapa de correção, por outro lado, tende a reduzir o erro de estimação e minimizar a covariância dos estados.

Finalmente, o fluxograma do algoritmo do filtro de Kalman é apresentado na Figura 3.2.

## 3.2 Derivação do Filtro de Kalman Contínuo

O filtro de Kalman discreto é utilizado para sistemas discretos em que a equação de saída é também discreta. Quando a obtenção das medições é contínua, o filtro de Kalman deve ser reformulado para o caso contínuo.

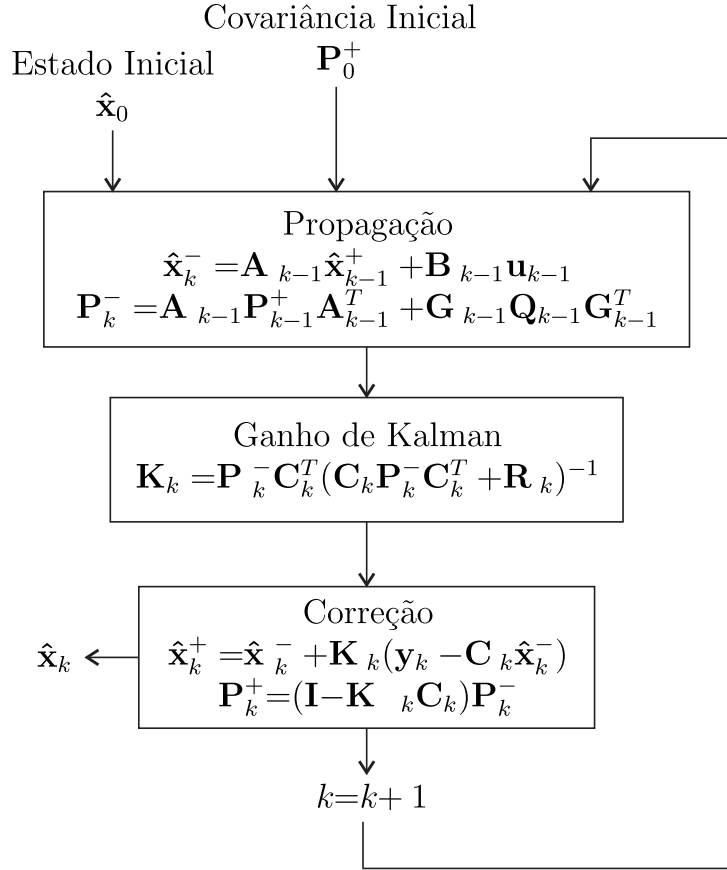
Há várias formas de derivar o filtro de Kalman contínuo. Uma das mais satisfatórias é obtida através da desamostragem do filtro de Kalman discreto. Esta abordagem também mostra uma relação entre o caso discreto e o contínuo e também facilita o melhor entendimento das extensões do filtro de Kalman para sistemas não lineares (LEWIS; XIE; POPA, 2007).

### 3.2.1 Filtro de Kalman Bucy

Seja um sistema cuja representação matemática é dada por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}\mathbf{w}(t) \quad (3.40)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (3.41)$$



**Figura 3.2** – Fluxograma referente às equações e etapas do filtro de Kalman.

sendo  $\mathbf{w}(t)$  e  $\mathbf{v}(t)$  ruídos gaussianos brancos determinados por  $\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$ ,  $\mathbf{v} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$ ,  $\mathbf{x}(0) \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0)$  e  $\mathbf{w}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$  e  $\mathbf{x}_0$  são descorrelacionados. Utilizando a aproximação da derivada dada por

$$\frac{d[x(t)]}{dt} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \tau)}{\tau}$$

para discretizar o sistema, onde  $\tau$  é o período de amostragem, obtém-se o sistema discretizado representado pelas seguintes equações:

$$\mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}\tau)\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\tau\mathbf{u}_k + \mathbf{G}\mathbf{w}_k \quad (3.42)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (3.43)$$

sendo  $\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}\tau)$ ,  $\mathbf{Q}\tau = \mathbf{Q}_k$ ,  $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}/\tau)$ ,  $\mathbf{R}/\tau = \mathbf{R}_k$ , onde  $\mathbf{w}_k$  e  $\mathbf{v}_k$  são ruídos brancos gaussianos mutuamente descorrelacionados. Desta forma, as equações dos filtros de Kalman se tornam

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = (\mathbf{I} + \mathbf{A}\tau)\mathbf{P}_k^+(\mathbf{I} + \mathbf{A}\tau)^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}_k\mathbf{G}^T\tau \quad (3.44)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T \left( \mathbf{C} \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T + \frac{\mathbf{R}_k}{\tau} \right)^{-1} \quad (3.45)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_k^- \quad (3.46)$$

Estas equações, portanto, devem ser manipuladas a fim de que  $\tau \rightarrow 0$  para encontrar a matriz de atualização de covariância, o ganho de Kalman e a equação de estimação dos estados. Analisando

primeiramente o ganho de Kalman quando  $\tau \rightarrow 0$ :

$$\frac{1}{\tau} \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T \tau + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (3.47)$$

portanto

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T \mathbf{R}_k^{-1} \quad (3.48)$$

isto implica que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \mathbf{K}_k = 0. \quad (3.49)$$

O ganho do filtro de Kalman tende para zero quando o período de amostragem se torna muito pequeno. Portanto, para o caso contínuo,  $\mathbf{K}(k\tau) = \mathbf{K}_k$  obtido através do limite fazendo  $\tau \rightarrow 0$  não é interessante. Analisando a matriz de covariância, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1}^- &= (\mathbf{I} + \mathbf{A}\tau) \mathbf{P}_k^+ (\mathbf{I} + \mathbf{A}\tau)^T + \mathbf{G} \mathbf{Q}_k \mathbf{G}^T \tau \\ &= (\mathbf{P}_k^+ + \mathbf{A} \mathbf{P}_k^+ \tau) (\mathbf{I} + \mathbf{A}^T \tau) + \mathbf{G} \mathbf{Q}_k \mathbf{G}^T \tau \\ &= \mathbf{P}_k^+ + \mathbf{P}_k^+ \mathbf{A}^T \tau + \mathbf{A} \mathbf{P}_k^+ \tau + \mathbf{A} \mathbf{P}_k^+ \mathbf{A}^T \tau^2 + \mathbf{G} \mathbf{Q}_k \mathbf{G}^T \tau \end{aligned}$$

que pode ser reescrita como

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{P}_k^+ + (\mathbf{A} \mathbf{P}_k^+ + \mathbf{P}_k^+ \mathbf{A}^T + \mathbf{G} \mathbf{Q}_k \mathbf{G}^T) \tau + \mathbf{A} \mathbf{P}_k^+ \mathbf{A}^T \tau^2. \quad (3.50)$$

Sabendo que  $\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_k^-$ , tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1}^- &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_k^- + [\mathbf{A} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_k^- + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_k^- \mathbf{A}^T - \\ &\quad \mathbf{G} \mathbf{Q}_k \mathbf{G}^T] \tau + [\mathbf{A} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_k^- \mathbf{A}^T] \tau^2 \end{aligned} \quad (3.51)$$

dividindo tudo por  $\tau$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} (\mathbf{P}_{k+1}^- - \mathbf{P}_k^-) &= [\mathbf{A} \mathbf{P}_k^- + \mathbf{P}_k^- \mathbf{A}^T + \mathbf{G} \mathbf{Q}_k \mathbf{G}^T - \mathbf{A} \mathbf{K}_k \mathbf{C} \mathbf{P}_k^- - \\ &\quad \mathbf{K}_k \mathbf{C} \mathbf{P}_k^- \mathbf{A}^T] - \frac{1}{\tau} \mathbf{K}_k \mathbf{C} \mathbf{P}_k^- + (\mathbf{A} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_k^- \mathbf{A}^T) \tau. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Agora, aplicando o limite e fazendo  $\tau \rightarrow 0$  e utilizando as equações (3.48) e (3.49),

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}_{k+1}^- - \mathbf{P}_k^-}{\tau} &= [\mathbf{A} \mathbf{P}_k^- + \mathbf{P}_k^- \mathbf{A}^T + \mathbf{G} \mathbf{Q}_k \mathbf{G}^T - \mathbf{A} \mathbf{K}_k \mathbf{C} \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{C} \mathbf{P}_k^- \mathbf{A}^T] - \\ &\quad \frac{1}{\tau} \mathbf{K}_k \mathbf{C} \mathbf{P}_k^- + (\mathbf{A} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_k^- \mathbf{A}^T) \tau \\ &= \mathbf{A} \mathbf{P}_k^- + \mathbf{P}_k^- \mathbf{A}^T + \mathbf{G} \mathbf{Q}_k \mathbf{G}^T - \mathbf{0} - \mathbf{0} - \lim_{\tau \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\tau} \mathbf{K}_k \right) \mathbf{C} \mathbf{P}_k^- + \mathbf{0} \end{aligned}$$

o que resulta em

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}_{k+1}^- - \mathbf{P}_k^-}{\tau} = \mathbf{A} \mathbf{P}_k^- + \mathbf{P}_k^- \mathbf{A}^T + \mathbf{G} \mathbf{Q}_k \mathbf{G}^T - \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}_k^-. \quad (3.53)$$

Portanto, a matriz de covariância de erro contínuo  $\mathbf{P}(t)$  satisfaz

$$\mathbf{P}(kT) = \mathbf{P}_k^- . \quad (3.54)$$

Assim, a matriz de covariância é calculada por

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T - \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}(t). \quad (3.55)$$

Esta é a equação de Riccati no tempo contínuo para a propagação da covariância do erro dos estados. Agora, analisando a propagação e correção da média do filtro de Kalman discreto, tem-se

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^- &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k^+ &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k^-) \end{aligned}$$

as quais podem ser reescritas como uma única equação dada por

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1}) . \quad (3.56)$$

Fazendo a volta da discretização, tem-se

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^+ &= (\mathbf{I} + \tau\mathbf{A}) \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \tau\mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{K}_k [\mathbf{y}_k - \mathbf{C}(\mathbf{I} + \tau\mathbf{A}) \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ - \mathbf{C}\tau\mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1}] \\ \hat{\mathbf{x}}_k^+ &= \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \tau\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \tau\mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} \\ &\quad + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ - \mathbf{C}\tau\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ - \mathbf{C}\tau\mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1}) . \end{aligned} \quad (3.57)$$

Dividindo por  $\tau$

$$\frac{\hat{\mathbf{x}}_k^+ - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+}{\tau} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} + \frac{\mathbf{K}_k}{\tau} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+) - \mathbf{K}_k\mathbf{C} (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1}) \tau \quad (3.58)$$

e aplicando o limite com  $\tau \rightarrow 0$ , resulta em

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\hat{\mathbf{x}}_k^+ - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+}{\tau} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+) . \quad (3.59)$$

Dessa forma,  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  satisfaz

$$\hat{\mathbf{x}}(k\tau) = \frac{1}{\tau} \hat{\mathbf{x}}_k .$$

Logo,

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)) \quad (3.60)$$

é a equação de estimação de estados para o caso contínuo.

Se o ganho de Kalman for definido como

$$\mathbf{K}(kT) = \frac{1}{\tau} \mathbf{K}_k$$

aplicando o limite com  $\tau \rightarrow 0$ , então tem-se que o ganho de Kalman para o caso contínuo é

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1} \quad (3.61)$$

e a equação de estimação de estados (3.60) pode ser reescrita como

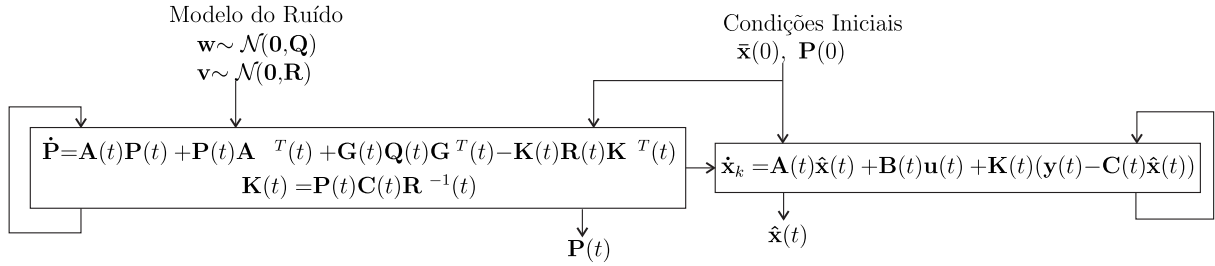
$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}(t) (\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)) . \quad (3.62)$$

As equações aqui obtidas para o caso contínuo também são aplicáveis caso as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  sejam variantes no tempo.



### 3.2.2 Equações do Filtro de Kalman Bucy

O esquema do filtro Kalman Bucy pode ser resumido através da Figura 3.3.



**Figura 3.3** – Equações do Filtro de Kalman Bucy.

É importante notar que, no limite com  $\tau \rightarrow 0$ ,  $\mathbf{P}_k^-$  é uma versão amostrada da covariância de erro contínua,  $\mathbf{P}(t)$ . Entretanto o ganho de Kalman discreto não é uma versão amostrada do ganho de Kalman contínuo. Em vez disso,  $\mathbf{K}_k$  representa amostras de  $\tau \mathbf{K}(t)$  no limite  $\tau \rightarrow 0$ .

Se todas as estatísticas forem gaussianas, então, tal como no caso discreto, o filtro de Kalman provém a estimativa ótima de  $\hat{\mathbf{x}}(t)$ . Em geral, para outras estatísticas, ele provém a melhor estimativa linear (SIMON, 2006, p. 130).

Se todas as matrizes do sistema e de covariância dos ruídos são conhecidas *a priori*, então  $\mathbf{P}(t)$  e  $\mathbf{K}(t)$  podem ser calculados *offline* e guardados antes de qualquer medição ser tomada. Isto permite avaliar o projeto do filtro antes de implementá-lo e salvar tempo de computação durante a implementação. O mesmo pode ser feito para o caso discreto (SIMON, 2006, p. 129).

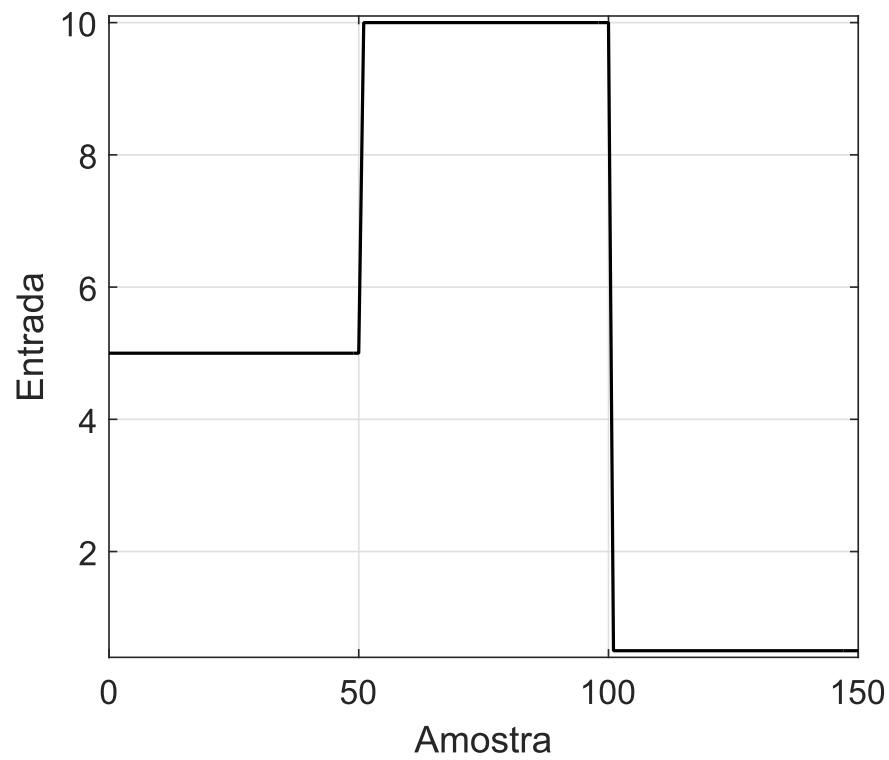
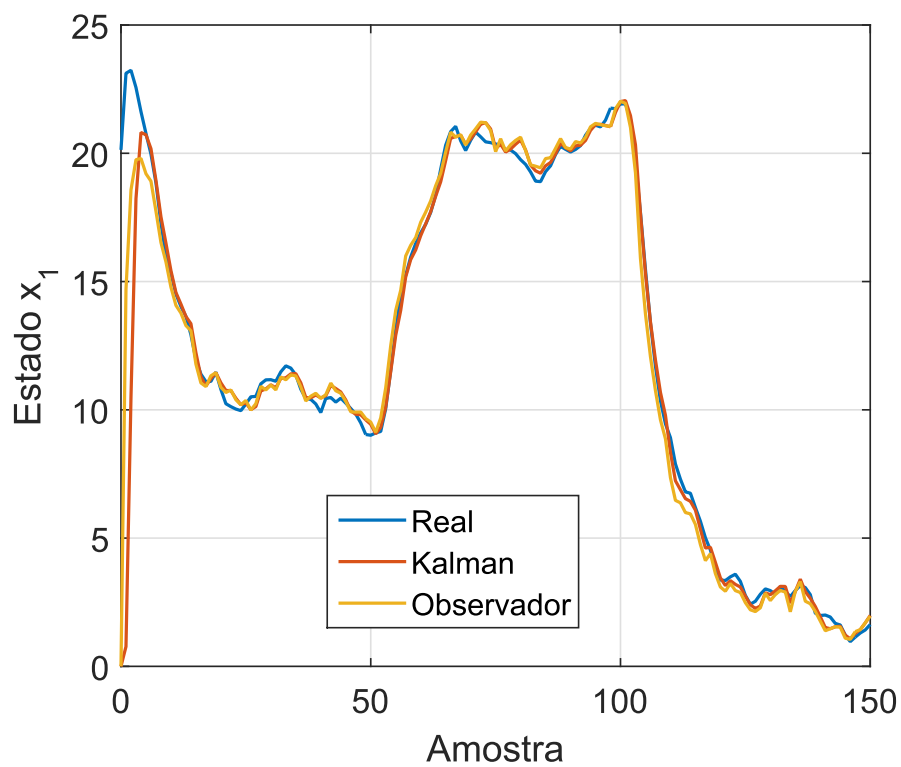
### 3.3 Exemplos

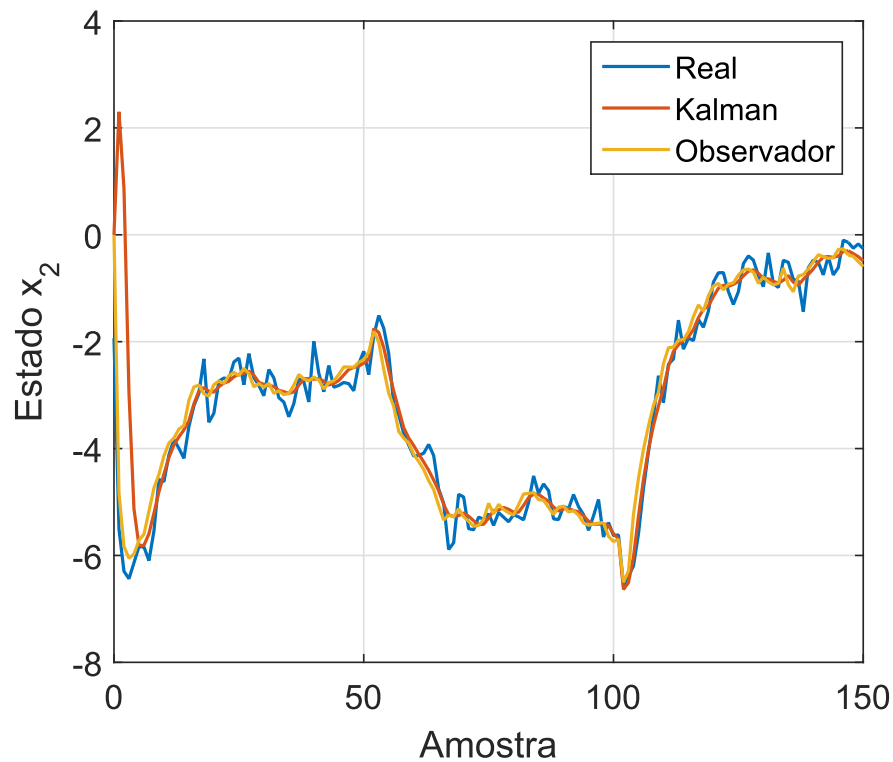
O filtro de Kalman foi implementado para estimar os estados de um sistema modelado matematicamente por

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1,2272 & 1 \\ -0,3029 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0,0634 \\ 0,0978 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,8 \end{bmatrix} \mathbf{w}_k \quad (3.63)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (3.64)$$

onde  $\mathbf{w}_k$  e  $\mathbf{v}_k$  são ruídos brancos gaussianos de processo e de medição, respectivamente, dados por  $\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$  e  $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$ , sendo  $\mathbf{Q} = \text{diag}\{[0, 1 \ 0, 1]\}$  e  $\mathbf{R} = 0,2$ . A entrada do sistema utilizada é mostrada na Figura 3.4. As condições iniciais do sistema foram  $\mathbf{x}_0 = [8 \ 10]^T$  e do filtro foram  $\hat{\mathbf{x}}_0 = [0 \ 0]^T$ , sendo que a matriz de covariância inicial do filtro foi  $\text{diag}\{[1 \ 1]^T\}$ . A simulação foi realizada até 150 amostras. Para efeitos de comparação, o observador obtido no exemplo da seção 2.14 foi aplicado. Os estados estimados pelo filtro de Kalman e pelo observador podem ser observados nas Figuras 3.5 e 3.6.

**Figura 3.4** – Entrada aplicada.**Figura 3.5** – Estado  $x_1$  real e estimado pelo filtro de Kalman e pelo observador.



**Figura 3.6** – Estado  $x_2$  real e estimado pelo filtro de Kalman e pelo observador.

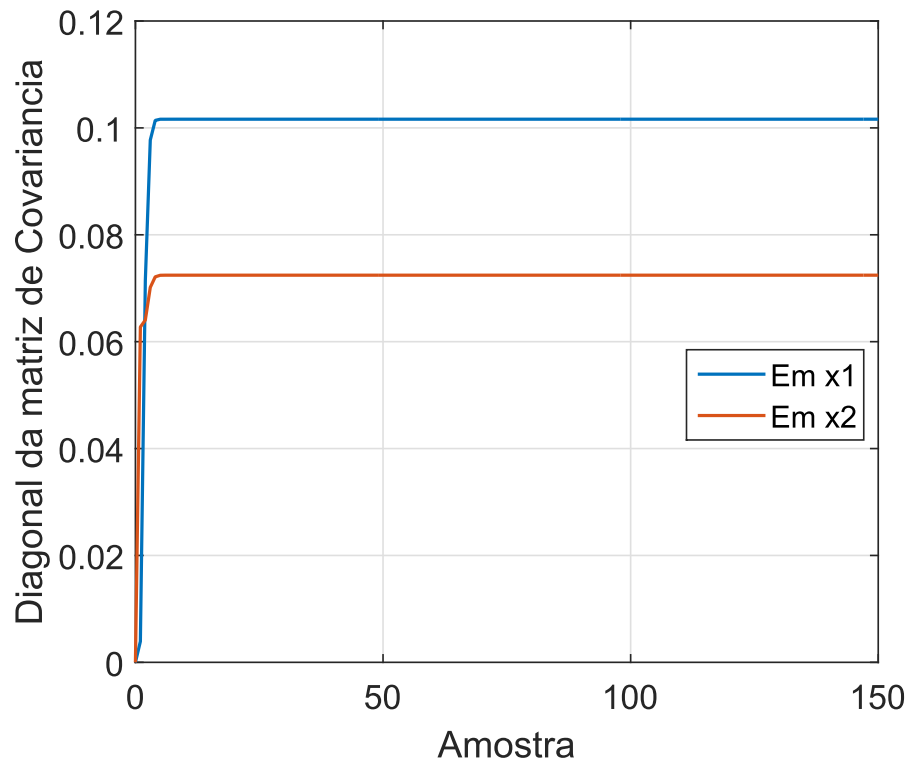
A diagonal da matriz de covariância obtida durante a simulação é apresentada na Figura 3.7.

As métricas  $e_{i,k}$  foram calculadas para o observador e para o filtro de Kalman para efeito de comparação. Os resultados obtidos podem ser observados nas Figuras 3.8 e 3.9. No exemplo observado, o filtro de Kalman, após a aproximação dos estados estimados aos estados reais, apresenta menor erro em relação ao observador de estados, o que é esperado uma vez que o filtro de Kalman é baseado na minimização do erro quadrático médio, enquanto que o observador utiliza a metodologia de alocação de polos e não realiza tratamento de ruído. A variação do erro no início da estimação é afetada diretamente pela matriz de covariância que inicializa o algoritmo. Apesar de neste exemplo ter sido considerado que a covariância do erro inicial era unitária, ainda sim o filtro foi capaz de convergir para os estados reais.

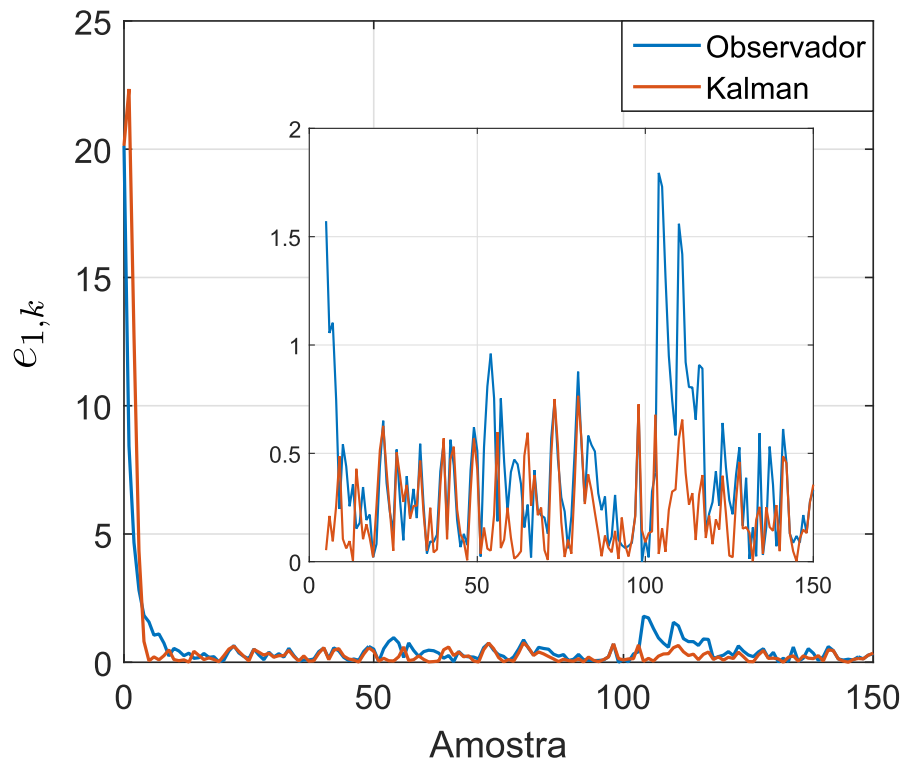
Um sinal do tipo PRBS gerado pela linha de comando

```
idinput([100,1,3],'prbs',[0 0.5],[0 10])
```

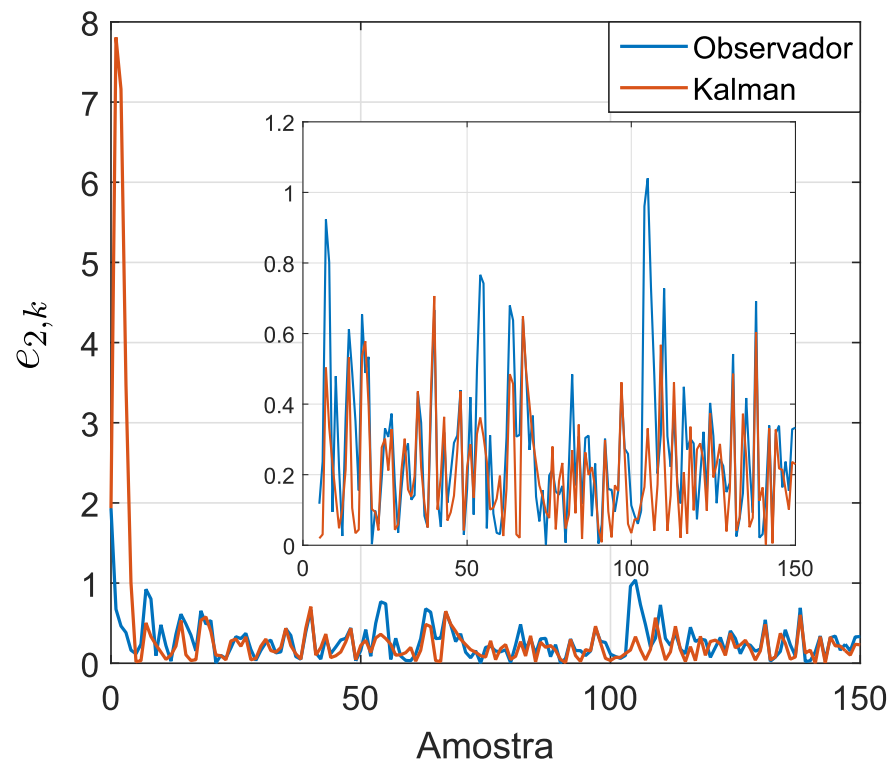
no MatLab®, mostrado na Figura 3.10, foi aplicado ao mesmo sistema com as mesmas condições iniciais. Os estados estimados podem ser observados nas Figuras 3.11 e 3.12. Nesta simulação, é possível perceber através do erro, que a diferença entre as estimações do observador e do filtro de Kalman é ainda maior. O erro absoluto obtido para tal caso pode ser observado nas Figuras 3.13 e 3.14.



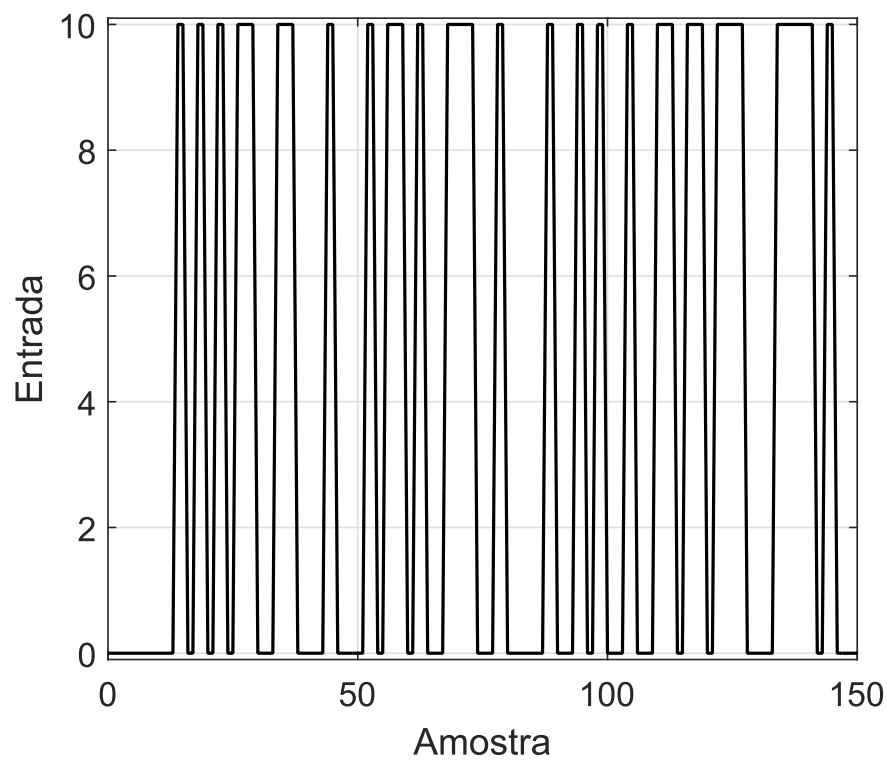
**Figura 3.7** – Elementos da diagonal da matriz de covariância obtida durante a implementação do filtro de Kalman.



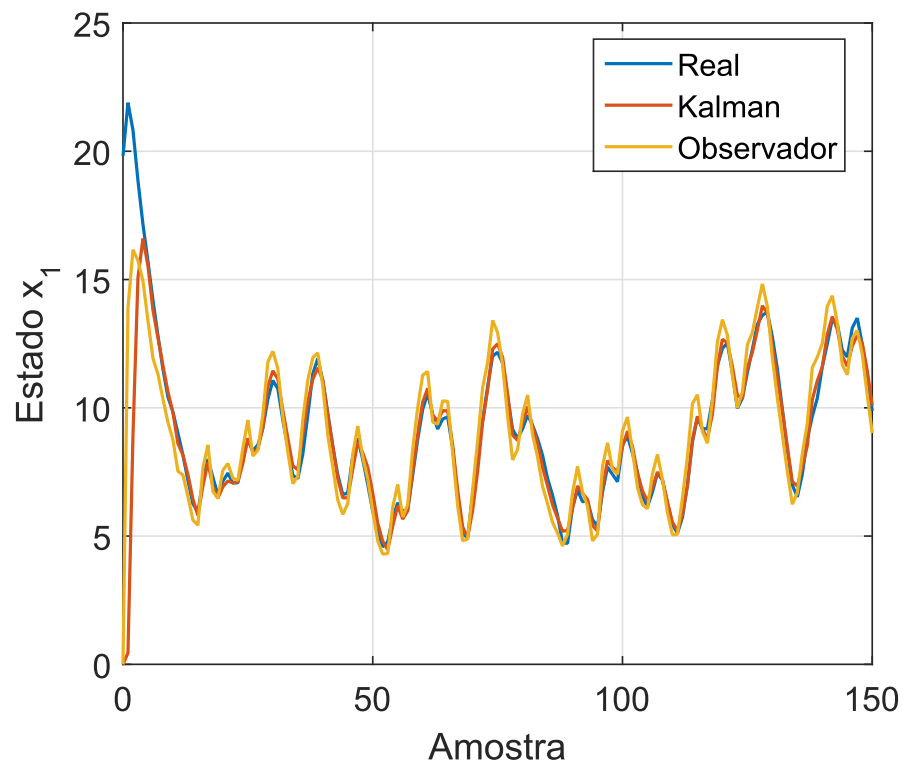
**Figura 3.8** – Métrica  $e_{1,k}$  da estimação feita pelo observador e pelo filtro de Kalman.



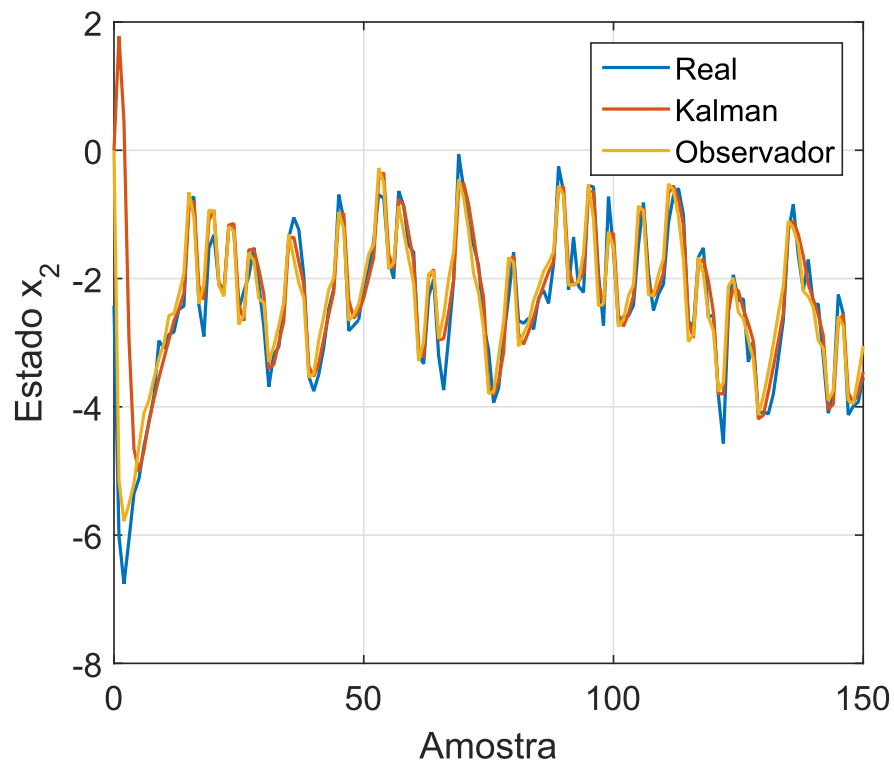
**Figura 3.9** – Métrica  $e_{2,k}$  da estimação feita pelo observador e pelo filtro de Kalman.



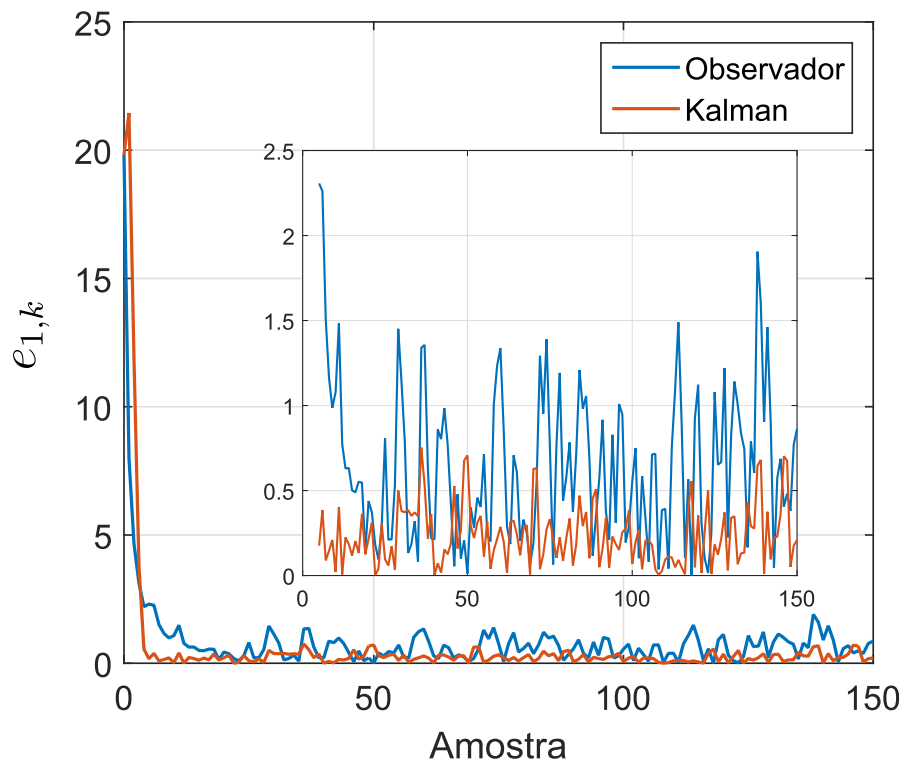
**Figura 3.10** – Entrada do tipo PRBS gerada a partir do programa MatLab®.



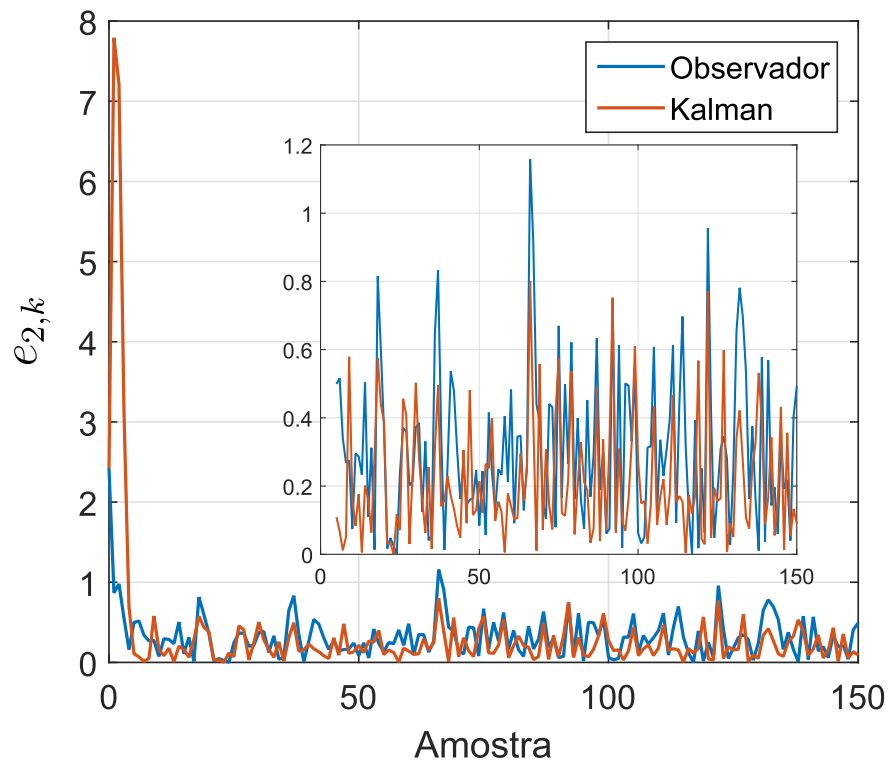
**Figura 3.11** – Estado real e estimado através do filtro de Kalman e do observador.



**Figura 3.12** – Estado real e estimado através do filtro de Kalman e do observador.



**Figura 3.13** – Métrica  $e_{1,k}$  da estimação feita pelo observador e pelo filtro de Kalman para a entrada do tipo PRBS.



**Figura 3.14** – Métrica  $e_{2,k}$  da estimação feita pelo observador e pelo filtro de Kalman para a entrada do tipo PRBS.

## 4 ESTIMAÇÃO NÃO LINEAR

Neste capítulo, o filtro de Kalman linearizado, estendido, *unscented* e estendido iterativo são apresentados. Além disso, o filtro de partículas, a qual é uma técnica de estimação muito utilizada na estimação de estados de sistemas não lineares também é explicitada. Por fim, um exemplo é apresentado para consolidar o conteúdo.

### 4.1 Filtro de Kalman Estendido

Como já comentado na seção 2.1.2, sistemas lineares não existem. Algumas vezes, um sistema pode ser considerado linear por ter seu desempenho muito próximo da teoria linear. Entretanto, quando este não é o caso, a aplicação de métodos de filtragem linear não é mais conveniente, o que abre caminho para a teoria de filtragem não linear (SIMON, 2006, p. 395).

Algumas técnicas não lineares têm se tornado conhecidas e obtiveram um desempenho satisfatório. Dentre estas, as extensões do filtro de Kalman ganham destaque. A primeira extensão que será apresentada aqui é o filtro de Kalman estendido, o qual consiste na linearização de um sistema não linear para que as equações do filtro de Kalman possam ser aplicadas (SIMON, 2006, p. 396).

O filtro de Kalman estendido, apesar de não ser precisamente ótimo, tem sido aplicado com sucesso na estimação de estados de sistemas não lineares desde sua invenção, em 1967 (CRASSIDIS; JUNKINS, 2011, p. 185) (SIMON, 2006, p. 400). A teoria do filtro de Kalman estendido está no fato de que o estado real está suficientemente próximo do estado estimado. Neste caso, o erro da dinâmica pode ser representado de forma razoável através de uma linearização do sistema em série de Taylor até a primeira ordem em torno da última estimação obtida (CRASSIDIS; JUNKINS, 2011, p. 185) (SIMON, 2006, p. 400) (BROWN; HWANG, 1997, p. 257) (SÄRKKÄ, 2013, p. 64).

Considere o seguinte sistema não linear<sup>1</sup>:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{w} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}) \quad (4.3)$$

$$\mathbf{v} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}). \quad (4.4)$$

Ao linearizar a equação de atualização dos estados (4.1) em torno de um ponto nominal<sup>2</sup> definido

<sup>1</sup> Os índices temporais foram suprimidos para simplificar a notação.

<sup>2</sup> Ponto nominal é um ponto que deve estar suficientemente próximo do estado real a fim de que a linearização em série de Taylor resulte num pequeno erro.



por  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{u}_0$ , tem-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{w} \quad (4.5)$$

$$= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t) + \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{w} \quad (4.6)$$

$$= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t) + \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{w}. \quad (4.7)$$

Note que, uma vez que a entrada é conhecida,  $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) = \mathbf{0}$ , portanto o trecho linearizado referente a entrada desaparece. Linearizando a equação de saída (4.2) também em torno de  $\mathbf{x}_0$ , tem-se

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{v} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t) + \mathbf{C}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{v}. \quad (4.9)$$

Definindo a trajetória nominal<sup>3</sup> como

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t) \quad (4.10)$$

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t) \quad (4.11)$$

pode-se definir também o desvio da trajetória nominal como

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_0 \quad (4.12)$$

$$\Delta\mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0. \quad (4.13)$$

A partir destas definições, obtém-se

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (4.14)$$

$$\Delta\mathbf{y} = \mathbf{C}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{v}. \quad (4.15)$$

As equações (4.14) e (4.15) obtidas constituem um sistema linear cujo estados são  $\Delta\mathbf{x}$  e as medições são  $\Delta\mathbf{y}$ . Uma vez em posse de um sistema linear, as equações do filtro de Kalman podem ser utilizadas, resultando em

$$\Delta\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0} \quad (4.16)$$

$$\Delta\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\Delta\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}(\Delta\mathbf{y} - \mathbf{C}\Delta\hat{\mathbf{x}}) \quad (4.17)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{R}^{-1} \quad (4.18)$$

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} - \mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P} \quad (4.19)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_0 + \Delta\hat{\mathbf{x}}. \quad (4.20)$$

A inicialização da covariância  $\mathbf{P}_0$  é feita da mesma forma que no filtro de Kalman linear. A formulação dada por (4.16) a (4.20) é conhecida como filtro de Kalman linearizado. Neste caso, a definição de uma trajetória nominal é necessária. Esta trajetória é construída levando em consideração o conhecimento especialista e estatístico sobre o sistema e deve-se compreender que tal trajetória deve estar sempre próxima aos estados estimados, caso contrário, causará a divergência do filtro (BROWN; HWANG, 1997, p. 257).

<sup>3</sup> A trajetória nominal constitui um conjunto de pontos nominais ao longo do tempo.

### 4.1.1 Filtro de Kalman Estendido Contínuo

No filtro de Kalman linearizado, é necessário que seja definida a trajetória nominal. Para o filtro de Kalman estendido, propõe-se que a última estimação realizada é um ponto satisfatório para se linearizar o sistema. De (4.20), tem-se que

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \dot{\mathbf{x}}_0 + \Delta \dot{\hat{\mathbf{x}}} \quad (4.21)$$

o que é igual a somar as equações (4.10) e (4.17), resultando em

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t) + \mathbf{A}\Delta\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0 - \mathbf{C}\Delta\hat{\mathbf{x}}) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t) + \mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_0) + \mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t) - \mathbf{C}(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_0)). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Escolhendo  $\hat{\mathbf{x}}$  como trajetória nominal e sendo a trajetória do estado estimado nominal a mesma trajetória do estado nominal,  $\mathbf{x}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0$ , tem-se que  $\mathbf{x}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{x}}$ , o que resulta na equação

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}_0, t) + \mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}, t)). \quad (4.23)$$

### 4.1.2 Filtro de Kalman Estendido Discreto

A derivação para o filtro de Kalman estendido discreto ocorre de maneira paralela ao caso contínuo. Em posse de um sistema discreto regido por

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, k-1) + \mathbf{w}_{k-1} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, k-1) + \mathbf{v}_{k-1} \quad (4.25)$$

$$\mathbf{w}_k = \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k) \quad (4.26)$$

$$\mathbf{v}_k = \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k). \quad (4.27)$$

É possível expandir o sistema em série de Taylor até a primeira ordem em torno da última estimativa obtida  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$ . Realizando a linearização, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{u}_{k-1}, k-1) \\ &\quad + \frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, k-1)}{\partial \mathbf{x}_{k-1}} \Big|_{\mathbf{x}_{k-1}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+} (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+) + \mathbf{w}_{k-1} \\ &= \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{u}_{k-1}, k-1) + \mathbf{A}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+) + \mathbf{w}_{k-1} \\ &= \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + [\mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{u}_{k-1}, k-1) - \mathbf{A}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+] + \mathbf{w}_{k-1}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Pode-se observar que a parcela  $[\mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{u}_{k-1}, k-1) - \mathbf{A}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+]$  é uma constante. Portanto, a etapa de atualização do filtro de Kalman estendido discreto é dado por

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}^+\mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (4.29)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{u}_{k-1}, k-1). \quad (4.30)$$

A equação de saída é linearizada por

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k &= \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_k^-, k) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^-} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) + \mathbf{v}_k \\ &= \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_k^-, k) + \mathbf{C}_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) + \mathbf{v}_k \\ &= \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + [\mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_k^-, k) - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-] + \mathbf{v}_k. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Uma vez em posse da equação de saída linearizada, a etapa de correção é dada por

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^+ &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k) \\ &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^- - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_k^-, k) + \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \\ &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_k^-, k)) \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_k^-. \quad (4.34)$$

Tais equações compreendem o filtro de Kalman estendido discreto e realizam a propagação e correção da média e covariância dos estados.

Devido a matriz de covariância do filtro de Kalman estendido ser atualizada a cada instante, é importante utilizar simulações de Monte Carlo para verificar a acurácia do filtro (GELB, 1974, p. 189).

Por vezes, trabalhar com o filtro de Kalman linearizado gera resultados melhores que o filtro de Kalman estendido. Ambos os filtros de Kalman estendido e linearizado foram utilizados em várias aplicações ao longo do tempo. Cada um deles possui vantagens e desvantagens, e nenhuma afirmação genérica pode ser feita para determinar qual deles resulta na melhor estimativa (BROWN; HWANG, 1997, p. 258).

Além disso, provar a convergência do filtro de Kalman estendido é difícil (se não impossível), mesmo para os sistemas mais simples em que as condições iniciais não são bem conhecidas (BROWN; HWANG, 1997, p. 188).

Uma vez que as jacobianas<sup>4</sup> dependem do estado atual, a covariância e o ganho de Kalman não podem mais ser calculados *offline*, como no filtro de Kalman, sendo necessário calcular tais valores *online* assim que o estado atual estimado estiver disponível (LEWIS; XIE; POPA, 2007, p. 273).

Além do filtro de Kalman estendido, existem outras técnicas baseadas em série de Taylor. Uma delas desenvolve a série até a segunda ordem, e é denominada filtro de Kalman de segunda ordem (SIMON, 2006, p. 396).

### 4.1.3 O Filtro de Kalman *Unscented*

Esta subseção tem por objetivo apresentar o filtro de Kalman *unscented* (UKF), uma vez que tal técnica tornou-se popular no eixo de estimação de estados em sistemas não lineares com

<sup>4</sup> Derivadas utilizadas para linearizar o sistema.

ruídos gaussianos. Apesar de tal técnica não ser utilizada neste trabalho, esta subseção pode ser vista como um incentivo para que novos pesquisadores desenvolvam a metodologia proposta nesta dissertação, utilizando o UKF ao invés do IEKF.

O UKF é um método numérico utilizado para aproximar distribuições conjuntas. Ao contrário do filtro de Kalman estendido, o UKF calcula de forma direta uma aproximação da média e covariância da distribuição em questão. A ideia da transformação *unscented* é escolher, de forma determinística, pontos sigma que capturam a média e covariância da distribuição original e propagá-los através da não linearidade. Uma vez propagados, a média e a covariância destes pontos sigmas representarão a estimação da média e covariância da distribuição propagada pela não linearidade (SÄRKKÄ, 2013, p. 81-82).

Para aplicar o método do UKF, considerando um sistema não linear como nas equações (4.1) a (4.4), primeiramente inicializa-se o filtro através de

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = \mathbf{E}(\mathbf{x}_0) \quad (4.35)$$

$$\mathbf{P}_0^+ = \mathbf{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)^T]. \quad (4.36)$$

Em seguida, calculam-se os pontos sigma por (LI et al., 2016)

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^i = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \tilde{x}^i \quad i = 1, \dots, 2n_x \quad (4.37)$$

$$\tilde{x}^i = \left( \sqrt{n_x \mathbf{P}_{k-1}^+} \right) \quad i = 1, \dots, n_x \quad (4.38)$$

$$\tilde{x}^i = \left( -\sqrt{n_x \mathbf{P}_{k-1}^+} \right) \quad i = n_x + 1, \dots, 2n_x. \quad (4.39)$$

Uma vez definidos os pontos sigma, estes pontos são propagados pela equação de propagação não linear do sistema

$$\hat{\mathbf{x}}_k^i = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^i, \mathbf{u}_k, t) + \mathbf{w}_k. \quad (4.40)$$

Agora, pode-se obter o estado *a priori* através da média dos pontos sigma, a qual é dada por

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \frac{1}{2n_x} \sum_{i=1}^{2n_x} \hat{\mathbf{x}}_k^i \quad (4.41)$$

e a covariância do erro, a qual é obtida através de

$$\mathbf{P}_k^- = \frac{1}{2n_x} \sum_{i=1}^{2n_x} [(\hat{\mathbf{x}}_k^i - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\hat{\mathbf{x}}_k^i - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T] + \mathbf{Q}_{k-1}. \quad (4.42)$$

Uma vez que a equação de propagação foi completamente trabalhada, a metodologia dos pontos sigma é aplicada também ao modelo de medição. Portanto, geram-se  $2n_x$  pontos sigma através de

$$\hat{\mathbf{x}}_k^i = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \tilde{x}^i \quad i = 1, \dots, 2n_x \quad (4.43)$$

$$\tilde{x}^i = \left( \sqrt{n_x \mathbf{P}_k^-} \right) \quad i = 1, \dots, n_x \quad (4.44)$$

$$\tilde{x}^i = \left( -\sqrt{n_x \mathbf{P}_k^-} \right) \quad i = n_x + 1, \dots, 2n_x. \quad (4.45)$$

Em seguida, aplicam-se os pontos sigma pela equação de medição

$$\hat{\mathbf{y}}_k^i = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^i, t). \quad (4.46)$$

Calcula-se, então, a média

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \frac{1}{2n_x} \sum_{i=1}^{2n_x} \hat{\mathbf{y}}_k^i. \quad (4.47)$$

A covariância do modelo de medição é dada por

$$\mathbf{P}_y = \frac{1}{2n_x} \sum_{i=1}^{2n_x} [(\hat{\mathbf{y}}_k^i - \hat{\mathbf{y}}_k)(\hat{\mathbf{y}}_k^i - \hat{\mathbf{y}}_k)^T] + \mathbf{R}^T \quad (4.48)$$

e a covariância cruzada entre  $\hat{\mathbf{x}}^-$  e  $\hat{\mathbf{y}}_k$  é dada por

$$\mathbf{P}_{xy} = \frac{1}{2n_x} \sum_{i=1}^{2n_x} [(\hat{\mathbf{x}}_k^i - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\hat{\mathbf{y}}_k^i - \hat{\mathbf{y}}_k)^T]. \quad (4.49)$$

Por fim, a correção do estado estimado pode ser realizada pelas equações do filtro de Kalman

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} \quad (4.50)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k) \quad (4.51)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_y \mathbf{K}_k^T. \quad (4.52)$$

O UKF estima a média com precisão até a terceira ordem da expansão em série de Taylor (SIMON, 2006, p. 444). Além disso, o algoritmo do UKF não torna necessário o cálculo da derivada das funções de propagação dos estados, o que reduz consideravelmente a complexidade do método (MENEGAZ et al., 2015).

É importante ressaltar que os pontos sigma são escolhidos de forma determinística, o que é uma característica que difere este método dos métodos numéricos de Monte Carlo, uma vez que as partículas dos métodos de Monte Carlo são escolhidas aleatoriamente (SÄRKÄ, 2013, p. 81).

Caso a o sistema seja linear, a estimação do UKF resultará na mesma estimação obtida pelo filtro de Kalman (SIMON, 2006, p. 448).

#### 4.1.4 Otimização pelo Método de Gauss-Newton

O método de otimização de Gauss-Newton tem por objetivo minimizar uma função custo do tipo (BERTSEKAS, 1999, p. 107)

$$J = \frac{1}{2} \|r(\mathbf{x})\|^2 \quad (4.53)$$

sendo considerado um método especializado na solução de mínimos quadrados. A função  $r(\mathbf{x}_k)$  é geralmente uma função residual<sup>5</sup>. Em posse de um ponto  $\mathbf{x}^i$ , lineariza-se a função  $r(\mathbf{x})$  em

<sup>5</sup> Ou seja, valor estimado menos valor real.

torno de  $x^i$  até a primeira ordem, resultando em

$$\tilde{r}(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}) = r(\mathbf{x}^i) + \nabla r(\mathbf{x}^i)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^i) \quad (4.54)$$

Portanto, o  $\mathbf{x}$  que minimiza tal função é obtido através do ponto de estacionariedade determinado por (BERTSEKAS, 1999, p. 107)

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} = 0. \quad (4.55)$$

Substituindo a equação (4.54) em (4.53), tem-se

$$J = \|r(\mathbf{x}^i)\|^2 + 2(\mathbf{x} - \mathbf{x}^i)^T \nabla r(\mathbf{x}^i) r(\mathbf{x}^i) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^i)^T \nabla r(\mathbf{x}^i) \nabla r(\mathbf{x}^i)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^i). \quad (4.56)$$

Derivando  $J$  em relação a  $\mathbf{x}$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} &= 2\nabla r(\mathbf{x}^i) r(\mathbf{x}^i) + (\nabla r(\mathbf{x}^i) \nabla r(\mathbf{x}^i)^T + \nabla r(\mathbf{x}^i) \nabla r(\mathbf{x}^i)^T) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^i) \\ &= 2\nabla r(\mathbf{x}^i) r(\mathbf{x}^i) + 2\nabla r(\mathbf{x}^i) \nabla r(\mathbf{x}^i)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^i) \\ &= 2\nabla r(\mathbf{x}^i) r(\mathbf{x}^i) + 2\nabla r(\mathbf{x}^i) \nabla r(\mathbf{x}^i)^T \mathbf{x} - 2\nabla r(\mathbf{x}^i) \nabla r(\mathbf{x}^i)^T \mathbf{x}^i. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Substituindo (4.55) em (4.57), obtém-se

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla r(\mathbf{x}^i) r(\mathbf{x}^i) + \nabla r(\mathbf{x}^i) \nabla r(\mathbf{x}^i)^T \mathbf{x} - \nabla r(\mathbf{x}^i) \nabla r(\mathbf{x}^i)^T \mathbf{x}^i \\ \nabla r(\mathbf{x}^i) \nabla r(\mathbf{x}^i)^T \mathbf{x} &= \nabla r(\mathbf{x}^i) r(\mathbf{x}^i) - \nabla r(\mathbf{x}^i) \nabla r(\mathbf{x}^i)^T \mathbf{x}^i \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x}^i - [\nabla r(\mathbf{x}^i) \nabla r(\mathbf{x}^i)^T]^{-1} \nabla r(\mathbf{x}^i) r(\mathbf{x}^i). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Portanto, se  $\nabla r(\mathbf{x}^i) \nabla r(\mathbf{x}^i)^T$  for inversível, a minimização é realizada através da seguinte equação:

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i - [\nabla r(\mathbf{x}^i) \nabla r(\mathbf{x}^i)^T]^{-1} \nabla r(\mathbf{x}^i) r(\mathbf{x}^i). \quad (4.59)$$

Caso  $r(\mathbf{x})$  seja uma função linear, uma única iteração é o suficiente para a convergência do método (BERTSEKAS, 1999, p. 107). Vale ressaltar que a direção

$$-[\nabla r(\mathbf{x}^i) \nabla r(\mathbf{x}^i)^T]^{-1} \nabla r(\mathbf{x}^i) \quad (4.60)$$

é uma direção de descida, uma vez que  $\nabla r(\mathbf{x}^i) r(\mathbf{x}^i)$  é o gradiente em  $\mathbf{x}^i$  da função custo  $J$  e  $[\nabla r(\mathbf{x}^i) \nabla r(\mathbf{x}^i)^T]^{-1}$  é uma matriz definida positiva (BERTSEKAS, 1999, p. 107).

#### 4.1.5 Filtro de Kalman Estendido como um Método de Otimização de Gauss-Newton

Por conveniência, o índice temporal será suprimido e serão utilizadas as seguintes notações

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}. \quad (4.61)$$

E também

$$\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{g}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}), \quad \text{onde } \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{bmatrix}. \quad (4.62)$$

A função de verossimilhança para o caso gaussiano é dada por (SIMON, 2006, p. 466)(NIU et al., 2009)

$$L(\phi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_x+n_y} |\boldsymbol{\sigma}|}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{Z} - \mathbf{g}(\phi))^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} (\mathbf{Z} - \mathbf{g}(\phi)) \right] \quad (4.63)$$

onde  $\phi$  é a variável aleatória que representa  $\mathbf{x}$ . Satisfazendo o critério de *máxima verossimilhança*, deseja-se maximizar a função  $L(\phi)$ , o que é equivalente a minimizar (BELL; CATHEY, 1993)(NIU et al., 2009)

$$l(\phi) = \frac{1}{2} (\mathbf{Z} - \mathbf{g}(\phi))^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} (\mathbf{Z} - \mathbf{g}(\phi)) \quad (4.64)$$

uma vez que  $\boldsymbol{\sigma}$  é definida positiva. O ponto de mínimo de  $l(\phi)$  é dado por (BELL; CATHEY, 1993)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial l(\phi)}{\partial \phi} \\ 0 &= \frac{\partial \mathbf{g}(\phi)}{\partial \phi} \boldsymbol{\sigma}^{-1} (\mathbf{Z}_k - \mathbf{g}(\phi)). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Se  $\mathbf{g}(\phi)$  é não linear, tal função pode ser representada por (BELL; CATHEY, 1993)(NIU et al., 2009)

$$\mathbf{g}(\phi) = \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{G}(\phi - \hat{\mathbf{x}}) \quad (4.66)$$

onde

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{g}(\phi)}{\partial \phi} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}}. \quad (4.67)$$

Sendo  $\mathbf{V} = \mathbf{Z} - \mathbf{g}(\mathbf{x})$ , onde  $\mathbf{V} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma})$  e substituindo  $\phi$  por  $\hat{\mathbf{x}}$ , tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} \boldsymbol{\sigma}^{-1} (\mathbf{Z} - \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}})) \\ &= \mathbf{G} \boldsymbol{\sigma}^{-1} (\mathbf{G}^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{V}) \\ \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} &= [\mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Portanto, obtém-se a matriz de covariância através de

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^* &= \mathbf{E}[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T] \\ &= [\mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{E}[\mathbf{V} \mathbf{V}^T] \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{G} [\mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{G}]^{-1} \\ &= [\mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{G}]^{-1} \end{aligned} \quad (4.69)$$

e, uma vez que

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

onde  $\mathbf{H} = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}}$ , tem-se que

$$\mathbf{P}^* = [\mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{G}]^{-1} = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{P}^{-1})^{-1}. \quad (4.71)$$

Utilizando o lema da matriz inversa de WoodBurg, tem-se (BELL; CATHEY, 1993)(NIU et al., 2009)

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}. \quad (4.72)$$

Mas como o ganho de Kalman é definido como  $\mathbf{K} = \mathbf{P} \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{H}^T)^{-1}$ , então obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^* &= \mathbf{P} + \mathbf{K} \mathbf{H} \mathbf{P} \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{K} \mathbf{H}) \mathbf{P} \end{aligned} \quad (4.73)$$

o qual corresponde à mesma matriz de atualização da covariância do filtro de Kalman. Portanto, a equação (4.73) representa a atualização da matriz de covariância (BELL; CATHEY, 1993). O próximo passo é avaliar a atualização dos estados.

Ao definir a função resíduo como sendo

$$\mathbf{r}(\phi) = \mathbf{S}(\mathbf{Z} - \mathbf{g}(\phi)) \quad (4.74)$$

onde  $\mathbf{S}^T \mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma}^{-1}$ , ou seja,  $\mathbf{S}$  é a raiz quadrada de  $\boldsymbol{\sigma}$ , a solução obtida através do método de Gauss-Newton é dada por

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^* &= \hat{\mathbf{x}} + (\mathbf{G}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} (\mathbf{Z} - \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}})) \\ &= \hat{\mathbf{x}} + (\mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma}^{-1} (\mathbf{Z} - \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}})) \end{aligned} \quad (4.75)$$

onde  $\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}}$ . Expandindo as matrizes  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{G}$ ,

$$\hat{\mathbf{x}}^* = \hat{\mathbf{x}} + \left( \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) \\ \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

onde  $\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}}$ . A simplificação da equação (4.76) resulta em

$$\hat{\mathbf{x}}^* = \hat{\mathbf{x}} + [\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{P}^{-1}]^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})] \quad (4.77)$$

a qual corresponde a estimação de estados através do filtro de Kalman estendido. Sendo o ganho de Kalman  $\mathbf{K} = [\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{P}^{-1}]^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}$  a equação (4.77) pode ser reescrita como

$$\hat{\mathbf{x}}^* = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K} [\mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})]. \quad (4.78)$$

Caso a função  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  seja não linear, o processo iterativo pode ser realizado através das seguintes equações (BELL; CATHEY, 1993)(NIU et al., 2009)(GELB, 1974, p. 190-191)(CRASSIDIS; JUNKINS, 2011, p. 188-189):

$$\mathbf{P}_{k,i}^+ = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_{k,i-1} \mathbf{H}_{k,i}) \mathbf{P}_{k,i-1}^+ \quad (4.79)$$

$$\mathbf{K}_{k,i} = [\mathbf{H}_{k,i}^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_{k,i} + \mathbf{P}_{k,i}^{-1}]^{-1} \mathbf{H}_{k,i}^T \mathbf{R}_k^{-1} \quad (4.80)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k,i}^+ = \hat{\mathbf{x}}_{k,i-1}^+ + \mathbf{K}_{k,i} [\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k,i-1}^+)]. \quad (4.81)$$



#### 4.1.6 Exemplo de Aplicação

Um sistema comum utilizado na aplicação de estimadores de estados é dado pelo seguinte modelo (ARULAMPALAM et al., 2002) (SIMON, 2006, p. 469) (GORDON; SALMOND; SMITH, 1993):

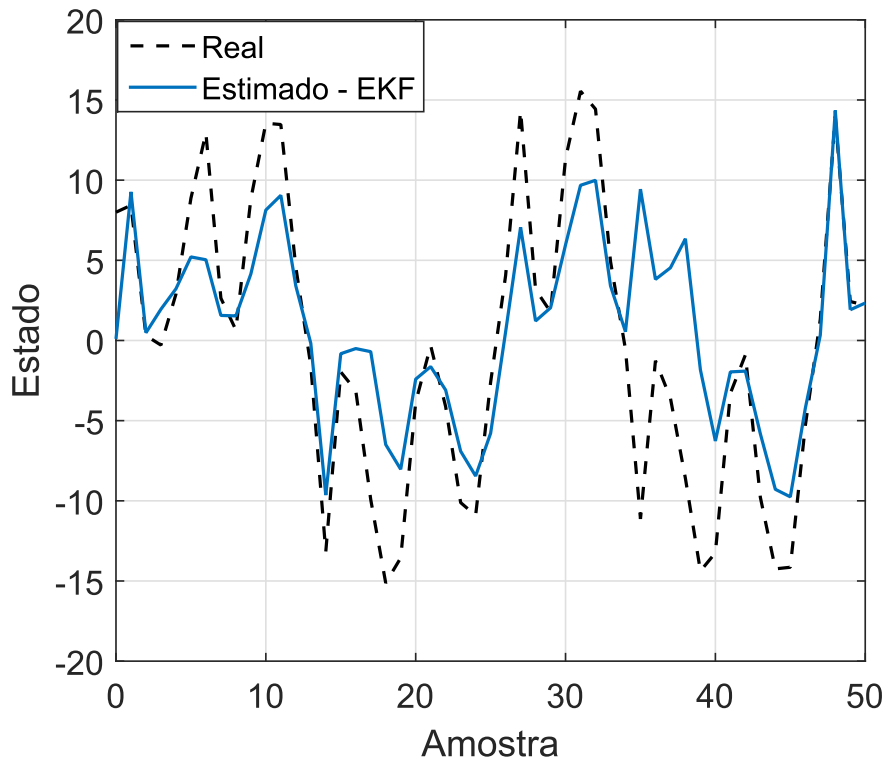
$$x_k = \frac{x_{k-1}}{2} + \frac{25x_{k-1}}{1 + x_{k-1}^2} + 8\cos(1, 2k) + w_k \quad (4.82)$$

$$y_k = \frac{x_k^2}{20} + v_k \quad (4.83)$$

sendo  $w_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$  um ruído de processo gaussiano branco,  $v_k \sim \mathcal{N}(0, R)$  um ruído de medição gaussiano branco e  $Q = R = 0, 1$ . A condição inicial do sistema foi  $x_k = 8$ .

Para a estimação dos estados, o filtro de Kalman estendido discreto foi utilizado. A inicialização do filtro de Kalman estendido foi  $\hat{x}_0 = 0$  e  $P_0^+ = 1$ .

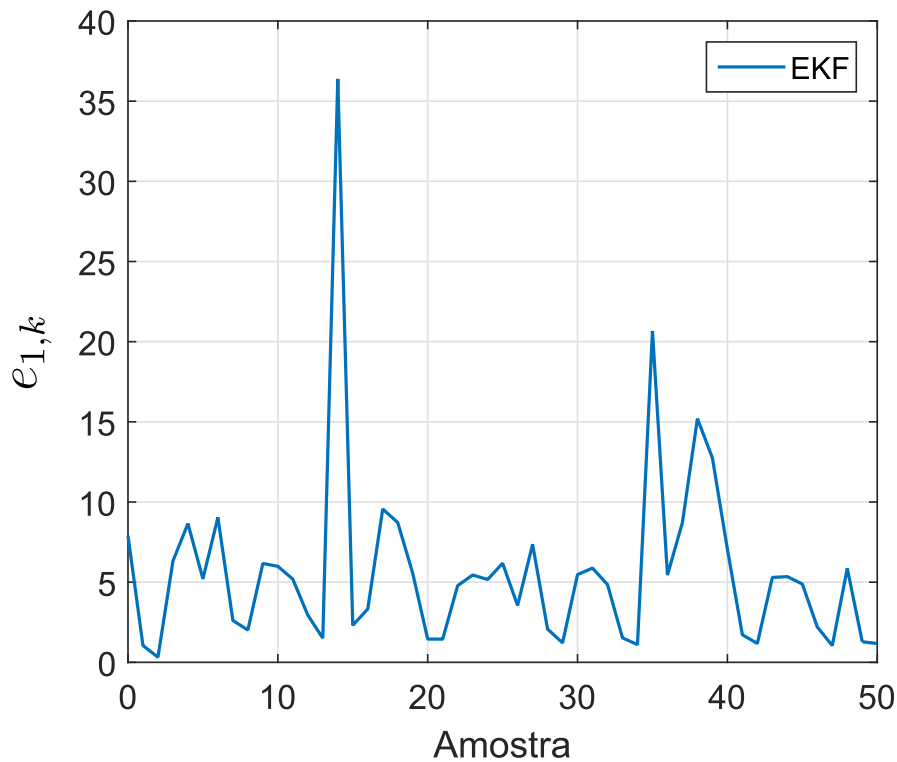
O estado estimado pode ser observado na Figura 4.1 e o erro absoluto de estimação na Figura 4.2.



**Figura 4.1** – Estados real e estimado obtidos através de 200 realizações de Monte Carlo utilizando o filtro de Kalman estendido discreto para o sistema dado por (4.82).

#### 4.2 Filtro de Partículas

O filtro de partículas consiste de uma classe de filtros os quais implementam numericamente o filtro Bayesiano (CHEN et al., 2003, p. 25). Um método numérico baseado no filtro



**Figura 4.2** – Métrica  $e_{1,k}$  obtida através de 200 realizações de Monte Carlo utilizando o filtro de Kalman estendido discreto para o sistema dado por (4.82).

Bayesiano é implementado através do método de Monte Carlo. Este método de Monte Carlo consiste de uma classe de métodos em que distribuições de probabilidade desconhecidas são obtidas através de um conjunto de amostras retiradas desta distribuição (SÄRKKÄ, 2013, p. 140)(CANDY, 2016, p. 64).

A chave para a abordagem de Monte Carlo é gerar amostras aleatórias independentes da distribuição de probabilidade e, com base nestas amostras, calcular momentos estatísticos de interesse (CANDY, 2016, p. 64).

Algumas vezes, a retirada de amostras de uma função de distribuição é árdua. Para tais casos, pode-se retirar as amostras a partir de uma função de distribuição proporcional. Tal técnica é conhecida como Monte Carlo via amostragem por importância (LIANG; LIU; CARROLL, 2011, p. 9-10)(KALOS; WHITLOCK, 2008, p. 77-80)(DOUCET; FREITAS; GORDON, 2001, p. 8-9). Caso se esteja trabalhando com processos estocásticos, é possível desenvolver a teoria de amostragem por importância de forma recursiva, resultando na amostragem por importância sequencial (SIS - *Sequential Importance Sampling*) (ARULAMPALAM et al., 2002).

A abordagem sequencial de Monte Carlo gera um problema denominado degeneração das partículas, em que uma possível solução é realizar a reamostragem, dando origem a reamostragem por importância sequencial (SIR - *Sampling Importance Resampling*) (DOUCET; FREITAS; GORDON, 2001, p. 10-12).

Nesta seção, é apresentado as cadeias de Markov, uma vez que um sistema estatístico descrito em espaço de estados pode ser interpretado como uma cadeia de Markov oculta de primeira ordem, e o estimador bayesiano analítico também é apresentado. Em seguida, é apresentado o Método de Monte Carlo como uma forma de aproximação da média estatística, e também o método SIS e SIR. Por fim, o algoritmo conhecido como *Bootstrap* (GORDON; SALMOND; SMITH, 1993), o qual constitui um filtro de partículas, é apresentado.

#### 4.2.1 Modelos de Markov

Os modelos de Markov são modelos matemáticos utilizados na representação de sistemas em que o estado futuro do sistema depende apenas do estado do sistema atual (DOUCET; FREITAS; GORDON, 2001, p. 18). Um modelo de Markov pode ser representado através do modelo em espaço de estados. Sempre que a observação da variável aleatória que se deseja estimar for obtida através de uma outra variável aleatória, denomina-se cadeia de Markov oculta. O caso aqui trabalhado<sup>6</sup> corresponde a uma cadeia de Markov oculta, pois não são obtidas observações de  $\mathbf{x}_k$ , mas sim de  $\mathbf{y}_k$  (ROBERT, 2004, p. 430) (SÄRKKÄ, 2013, p. 7-8). No decorrer deste trabalho, todos os modelos de Markov utilizados são cadeias de Markov ocultas.

Do ponto de vista estatístico, o modelo de Markov possui (SÄRKKÄ, 2013, p. 10) (DOUCET; FREITAS; GORDON, 2001, p. 5):

- Uma distribuição inicial que especifica a distribuição de probabilidade *a priori*  $p(\mathbf{x}_0)$  dos estados no instante  $k = 0$ .
- Um modelo dinâmico que descreve a dinâmica do sistema e suas incertezas como uma sequência de Markov, definidas em termo da distribuição de probabilidade de transição  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ .
- Um modelo de medição que descreve como a medição  $\mathbf{y}_k$  depende do estado atual  $\mathbf{x}_k$ . Tal dependência é modelada através de uma distribuição de probabilidade condicional da medição dado o estado atual,  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$ .

Portanto, um modelo probabilístico genérico em espaço de estados é escrito na forma (SÄRKKÄ, 2013, p. 10)

$$\mathbf{x}_0 \sim p(\mathbf{x}_0), \quad (4.84)$$

$$\mathbf{x}_k \sim p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}), \quad (4.85)$$

$$\mathbf{y}_k \sim p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k). \quad (4.86)$$

Uma abordagem mais aprofundada sobre modelos de Markov pode ser vista em Candy (2016), Liang, Liu e Carroll (2011) e Doucet, Freitas e Gordon (2001).

<sup>6</sup> A modelagem em espaço de estados.

### 4.2.2 Inferência Bayesiana

O propósito da inferência Bayesiana é prover um maquinário matemático o qual pode ser utilizado para modelagem de sistemas e estimação de estados, em que as incertezas do sistema são levadas em consideração (SÄRKKÄ, 2013, p. 1). Desta forma, a inferência bayesiana estima estados de uma cadeia de Markov oculta utilizando as medições do sistema e reconstrói a distribuição de probabilidade dos estados dadas as medições (SÄRKKÄ, 2013, p. 9).

O filtro de Kalman é uma técnica que utiliza os dois primeiros momentos estatísticos, média e covariância, para gerar sua estimativa. A ideia da inferência bayesiana é estimar não apenas a média e covariância, mas a função densidade de probabilidade dos estados (LIANG; LIU; CARROLL, 2011, p. 2) (BOX; TIAO, 2011, p. 10).

Sendo  $\mathbf{x}$  uma variável aleatória desconhecida e  $\mathbf{y}$  uma observação indireta desta variável aleatória, a regra de Bayes é dada por

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})}{p(\mathbf{y})} \quad (4.87)$$

onde  $p(\mathbf{y})$  no denominador é uma constante de normalização que garante que a integração de  $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$  seja unitária, portanto, pode-se substituir o valor referente a  $p(\mathbf{y})$  por uma constante  $c$ . Assim, a equação (4.87) pode ser reescrita como

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = c p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x}). \quad (4.88)$$

Uma vez recebida a medição  $\mathbf{y}$ ,  $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$  pode ser considerada não como uma função de  $\mathbf{y}$ , mas de  $\mathbf{x}$ , sendo chamada de função de verossimilhança de  $\mathbf{x}$  dado  $\mathbf{y}$  e é definida como  $l(\mathbf{x}|\mathbf{y})$  (BOX; TIAO, 2011, p. 10-12), permitindo que a regra de Bayes seja reescrita como

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \propto c l(\mathbf{x}|\mathbf{y})p(\mathbf{x}). \quad (4.89)$$

Da equação (4.89), compreende-se que a distribuição de probabilidade *a posteriori* de  $\mathbf{x}$  dado  $\mathbf{y}$  é proporcional ao produto entre a distribuição de  $\mathbf{x}$  *a priori* e a verossimilhança de  $\mathbf{x}$  dado  $\mathbf{y}$ . A função de verossimilhança modifica o conhecimento *a priori* a partir da informação sobre a medição  $\mathbf{y}$ .

Para o caso de modelos de Markov, a densidade condicional de  $\mathbf{x}_1$  no instante  $k = 1$  é dada por

$$p(\mathbf{x}_1|\mathbf{y}_1) \propto c p(\mathbf{x}_1)l(\mathbf{x}_1|\mathbf{y}_1). \quad (4.90)$$

Uma vez que a observação  $\mathbf{y}_2$  é recebida, a estimativa de  $\mathbf{x}_2$  é

$$p(\mathbf{x}_2|\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1) \propto c p(\mathbf{x}_2)l(\mathbf{x}_2|\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1). \quad (4.91)$$

Considerando que as observações são independentes, (BOX; TIAO, 2011, p. 10-12)

$$p(\mathbf{x}_2|\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1) \propto c p(\mathbf{x}_2)l(\mathbf{x}_2|\mathbf{y}_2)l(\mathbf{x}_2|\mathbf{y}_1). \quad (4.92)$$

De forma genérica, tem-se

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_k, \dots, \mathbf{y}_1) \propto c p(\mathbf{x}_k) l(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_k) \times \dots \times l(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1). \quad (4.93)$$

Tal formulaoo gera uma alta carga computacional, uma vez que o número de funoes de verossimilhanças a serem calculadas  igual a  $k$ , ou seja, a carga computacional tende a infinito quando  $k \rightarrow \infty$ .

Realizando outra análise a partir da regra de Bayes,  possível reescrever (4.93) de forma recursiva (SIMON, 2006, p. 464-465) (ARULAMPALAM et al., 2002). Denotando-se  $\mathbf{x}_{i:j} = \{\mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_j\}$  e  $\mathbf{y}_{i:j} = \{\mathbf{y}_i, \dots, \mathbf{y}_j\}$ , tem-se

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) &= \frac{p(\mathbf{y}_{1:k} | \mathbf{x}_{0:k}) p(\mathbf{x}_{0:k})}{p(\mathbf{y}_{1:k})} \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{1:k-1} | \mathbf{x}_{0:k}) p(\mathbf{x}_{0:k})}{p(\mathbf{y}_{1:k})} \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{0:k}, \mathbf{y}_{1:k-1}) p(\mathbf{y}_{1:k-1} | \mathbf{x}_{0:k}) p(\mathbf{x}_{0:k})}{p(\mathbf{y}_{1:k})} \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{0:k}, \mathbf{y}_{1:k-1}) p(\mathbf{x}_{0:k})}{p(\mathbf{y}_{1:k})} \frac{p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k-1}) p(\mathbf{y}_{1:k-1})}{p(\mathbf{x}_{0:k})} \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{0:k}, \mathbf{y}_{1:k-1}) p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k-1}) p(\mathbf{y}_{1:k-1})}{p(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{1:k-1})} \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{0:k}, \mathbf{y}_{1:k-1}) p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k-1})}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})}. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Ento, desenvolvendo  $p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k-1})$ ,

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) &= \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{0:k}, \mathbf{y}_{1:k-1}) p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{0:k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1})}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})} \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{0:k}, \mathbf{y}_{1:k-1}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1})}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})} p(\mathbf{x}_{0:k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1})} p(\mathbf{x}_{0:k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) \end{aligned} \quad (4.95)$$

$$\propto p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{0:k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) \quad (4.96)$$

onde

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) &= \int p(\mathbf{y}_k, \mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_k \\ &= \int p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_{1:k-1}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_k \\ &= \int p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) d\mathbf{x}_k. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Portanto, a equaoo (4.95)  a forma recursiva da estimacoo Bayesiana, a qual  proporcional a (4.96).

### 4.2.3 Aproximação do Valor Médio pelo Método de Monte Carlo

A técnica de Monte Carlo é um método de integração numérica simples e de precisão utilizada principalmente para casos em que a ordem do sistema é elevada (LIANG; LIU; CARROLL, 2011, p. 8).

No problema de estimação, deseja-se obter a média de determinada variável, a qual é dada por

$$E[f(\mathbf{x})] = \int_{\chi} f(\mathbf{x})p(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (4.98)$$

onde  $\chi \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$  é um subespaço euclidiano que contém todas as possíveis soluções de  $\mathbf{x}$ . Supondo que seja simples simular  $n$  amostras denotadas por  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$  de  $p(\mathbf{x})$ , a média de uma função  $f(\mathbf{x})$  de interesse é dada por (LIANG; LIU; CARROLL, 2011, p. 9)

$$\bar{f} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{x}^i) \quad (4.99)$$

e tal aproximação pode ser utilizada para aproximar (4.98), pois  $\bar{f}$  converge devido a lei dos grandes números (LIANG; LIU; CARROLL, 2011, p. 9). O erro de tal aproximação pode ser calculado por

$$\frac{\bar{f} - E_p[f(\mathbf{x})]}{\sqrt{n\sigma_f}} \quad (4.100)$$

onde  $\sigma_f$  é a variância de  $f(\mathbf{x})$ , a qual pode ser aproximada por

$$\sigma_f = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (f(\mathbf{x}^i) - \bar{f})^2. \quad (4.101)$$

Tal método de aproximação é conhecido como método de Monte Carlo (METROPOLIS; ULAM, 1949).

### 4.2.4 Monte Carlo via Amostragem por Importância

Quando a obtenção de amostras através de  $p(\mathbf{x})$  é árdua, a técnica de amostragem por importância pode ser utilizada. Esta consiste na seguinte identidade (LIANG; LIU; CARROLL, 2011, p. 9-10)(KALOS; WHITLOCK, 2008, p. 77-80)(DOUCET; FREITAS; GORDON, 2001, p. 8-9):

$$E[f(\mathbf{x})] = \int_{\chi} f(\mathbf{x})p(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\chi} f(\mathbf{x})\frac{p(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}g(\mathbf{x})d\mathbf{x} = E\left[f(\mathbf{x})\frac{p(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}\right] \quad (4.102)$$

onde  $g(\mathbf{x})$  é uma função densidade de probabilidade (também conhecida como função densidade de importância) em  $\chi$  e é positiva para todo  $\mathbf{x}$  em que  $p(\mathbf{x})$  é positiva. Tal identidade sugere que as amostras de  $\mathbf{x}$  possam ser retiradas de funções de densidades diferentes de  $p(\mathbf{x})$  na aproximação de (4.98). Então, devido a (4.102), o estimador de  $E[p(\mathbf{x})]$  é dada por

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^n \frac{p(\mathbf{x}^i)}{g(\mathbf{x}^i)} f(\mathbf{x}^i) \quad (4.103)$$

onde  $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n$  são amostras independentes e identicamente retiradas de  $g(\mathbf{x})$ . A fração  $\frac{p(\mathbf{x}^i)}{g(\mathbf{x}^i)} = \gamma^i$  é o peso referente a amostra  $\mathbf{x}^i$ . Devido a tal ponderação, tal método é denominado como método da amostragem por importância. A densidade  $g(\mathbf{x})$  deve ser escolhida visando simplicidade para gerar as amostras e precisão na estimação da média (LIANG; LIU; CARROLL, 2011, p. 10).

#### 4.2.5 Amostragem por Importância Sequencial

A amostragem por importância sequencial (*sequential importance sampling - SIS*) é utilizada para realizar a estimação recursivamente (ARULAMPALAM et al., 2002).

A função densidade de importância pode ser derivada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k}) &= g(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{0:k-1}|\mathbf{y}_{1:k}) \\ &= g(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k})g(\mathbf{x}_{0:k-1}|\mathbf{y}_{1:k}). \end{aligned} \quad (4.104)$$

Como os pesos são dados por

$$\gamma_k^i = \frac{p(\mathbf{x}_{0:k}^i|\mathbf{y}_{1:k})}{g(\mathbf{x}_{0:k}^i|\mathbf{y}_{1:k})} \quad (4.105)$$

pode-se recalculá-los de forma recursiva substituindo (4.104) e (4.96) em (4.105), logo

$$\begin{aligned} \gamma_k^i &\propto \frac{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k^i)p(\mathbf{x}_k^i|\mathbf{x}_{k-1}^i)p(\mathbf{x}_{0:k-1}^i|\mathbf{y}_{1:k-1})}{g(\mathbf{x}_k^i|\mathbf{x}_{0:k-1}^i, \mathbf{y}_{1:k})g(\mathbf{x}_{0:k-1}^i|\mathbf{y}_{1:k})} \\ &\approx \frac{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k^i)p(\mathbf{x}_k^i|\mathbf{x}_{k-1}^i)}{g(\mathbf{x}_k^i|\mathbf{x}_{0:k-1}^i, \mathbf{y}_{1:k})}\gamma_{k-1}^i. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Caso a densidade  $g(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k})$  seja baseada em um processo de Markov, então

$$g(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k}) = g(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{1:k}) \quad (4.107)$$

podendo os pesos serem reescritos como

$$\gamma_k^i = \frac{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k^i)p(\mathbf{x}_k^i|\mathbf{x}_{k-1}^i)}{g(\mathbf{x}_k^i|\mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_{1:k})}\gamma_{k-1}^i. \quad (4.108)$$

Para este caso, apenas a estimação de  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$  é necessária a cada instante de tempo, a qual pode ser aproximada por

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N \gamma_k^i \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^i) \quad (4.109)$$

onde  $N$  é o número de amostras ou partículas<sup>7</sup> e  $\delta$  é o delta de Dirac.

O filtro SIS apresenta o problema de degeneração das amostras. Tal problema consiste no fato de que, após algumas iterações, apenas uma amostra possuirá um peso relevante, uma vez que a variância das partículas só aumenta com o tempo, o que pode ser verificado aplicando (4.101)

<sup>7</sup> Nomenclatura utilizada no filtro de partículas.

durante a execução do método. Uma forma de avaliar o nível de degeneração das partículas é através de

$$N_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (\gamma_k^i)^2}. \quad (4.110)$$

Apenas para alguns casos a escolha de uma densidade de importância  $g(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_{1:k})$  que minimiza a degeneração de partículas de maneira ótima pode ser aplicado. Além disso, há várias outras formas de escolher a densidade de importância (ARULAMPALAM et al., 2002). Uma forma conveniente de determinar tal densidade é fazendo

$$g(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_{1:k}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i) \quad (4.111)$$

pois, uma vez escolhida, as amostras são retiradas de  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i)$ , a qual corresponde à equação de propagação dos estados, e os pesos são calculados por

$$\gamma_k^i = p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^i) \gamma_{k-1}^i. \quad (4.112)$$

E, por fim, utilizando uma função de verossimilhança proporcional (BOX; TIAO, 2011) a  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^i)$ , ou seja,

$$l(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{y}_k) \propto p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^i) \quad (4.113)$$

tem-se que os pesos são calculados por

$$\gamma_k^i \propto l(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{y}_k) \gamma_{k-1}^i. \quad (4.114)$$

Devido ao fato de tal peso ser calculado proporcionalmente, a normalização deles é necessária para fazer com que sua soma resulte na unidade, portanto

$$\bar{\gamma}_k^i = \frac{\gamma_k^i}{\sum_{j=1}^N \gamma_k^j}. \quad (4.115)$$

Outras formas da abordagem sequencial podem ser vistas em Candy (2016) e Doucet, Freitas e Gordon (2001).

#### 4.2.6 Reamostragem Sistemática para Redução da Degeneração das Partículas

Com o intuito de reduzir o efeito de degeneração de partículas, a etapa de reamostragem tem por objetivo gerar  $N$  novas amostras a partir da representação aproximada de  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$  (CANDY, 2016). Desta forma, amostras com baixa ponderação são eliminadas e amostras com alta ponderação devem aumentar em quantidade (DOUCET; FREITAS; GORDON, 2001, p. 10-12). Para isso, faz-se com que a probabilidade de a amostra  $\mathbf{x}_k^i$  ser reamostrada seja de  $\bar{\gamma}_k^i$ , ou



seja,  $p(\mathbf{x}_k^{i*} = \mathbf{x}_k^i) = \bar{\gamma}_k^i$ . O resultado desta reamostragem é uma densidade discreta independente e igualmente distribuída. Portanto, os pesos são reestabelecidos como

$$\bar{\gamma}_k^i = \frac{1}{N}. \quad (4.116)$$

Tal técnica de reamostragem é chamada de reamostragem sistemática e implementada através dos seguintes passos:

1. Definir, dentro da faixa  $[0, 1]$ , intervalos de tamanhos numericamente iguais aos pesos  $\bar{\gamma}_{k,1:N}$ , não superpostos, e de tal forma que a soma de tais intervalos<sup>8</sup> seja igual a 1;
2. Gerar um vetor de pontos aleatórios  $\mathbf{z}_k = \{z_{k,1}, \dots, z_{k,\beta}, \dots, z_{k,N}\}$  uniformemente distribuído entre 0 e 1;
3. A quantidade de pontos aleatórios dentro de cada intervalo determinará a quantidade de vezes que a partícula correspondente àquele peso aparecerá no novo grupo de partículas *a posteriori*.

Um exemplo de reamostragem sequencial monovariável utilizando 6 amostras pode ser observado na Figura 4.3.

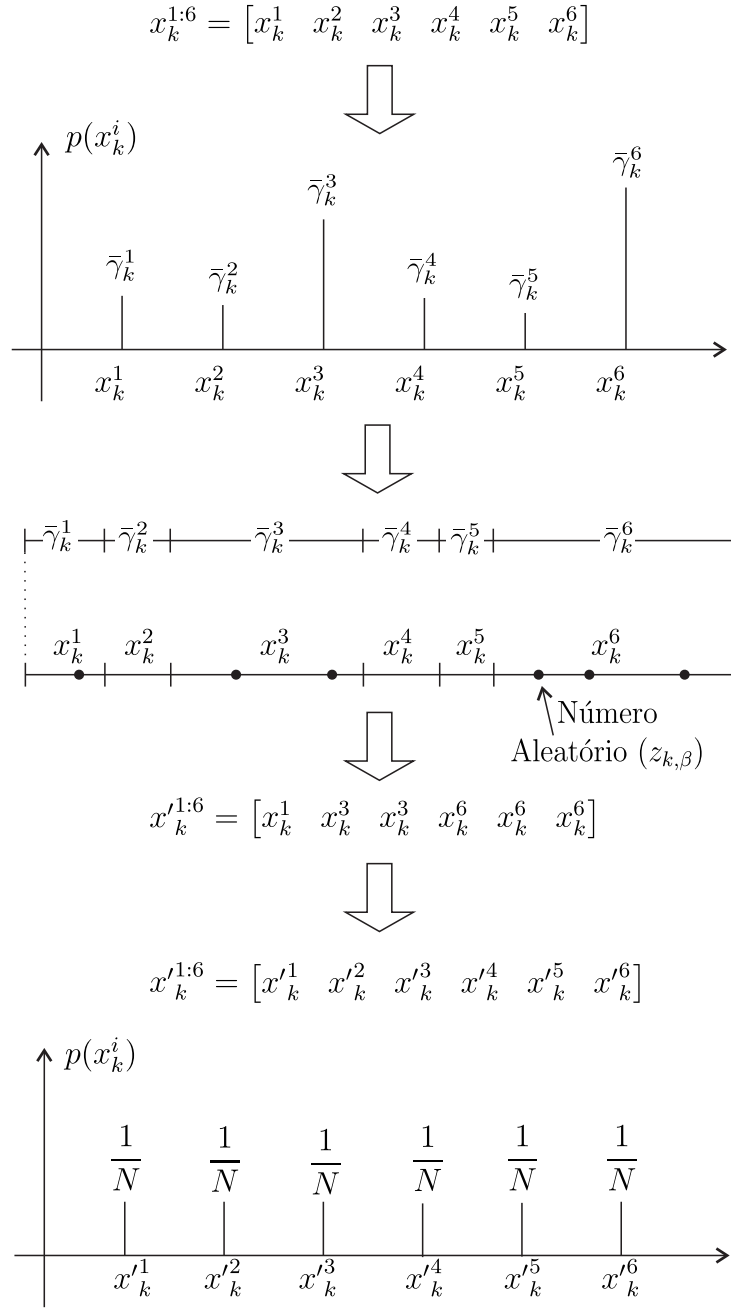
Apesar de solucionar o problema de degeneração das amostras, o processo de amostragem causa um segundo problema que se agrava em casos de baixa potência de ruído (ARULAMPALAM et al., 2002). Tal problema é conhecido como o empobrecimento de amostras. Após várias reamostragens, a tendência é que as amostras se tornem homogêneas, tornando-as ineficazes em reproduzir a densidade condicional  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_k)$  desejada.

Além da reamostragem sequencial, outras técnicas de reamostragem podem ser utilizadas, como a reamostragem multinomial (CANDY, 2016), a reamostragem residual (CANDY, 2016), a reamostragem estratificada (ARULAMPALAM et al., 2002), técnicas utilizando algoritmo genético (PARK et al., 2009; YIN; ZHU, 2015; WANG et al., 2016) (as quais são denominadas como filtro de partículas evolucionários), entre outras.

#### 4.2.7 Algoritmo do Filtro de Partículas

A técnica de Monte Carlo sequencial é conhecida por diversos nomes variados, como o filtro *bootstrap*, algoritmo de condensação, filtro de partículas, sobrevivência do melhor (*survival of the fittest*) (ARULAMPALAM et al., 2002). O filtro *bootstrap* é um exemplo comum de filtro de partículas o qual baseia-se em Monte Carlo sequencial e na reamostragem. Seu algoritmo é dado por (ARULAMPALAM et al., 2002)

<sup>8</sup> Note que partículas com maior peso terão intervalos maiores, enquanto partículas com menor peso terão intervalos menores.



**Figura 4.3** – Exemplo de reamostragem monovariável com 6 partículas.

Algoritmo bootstrap

for i=1:N

$\mathbf{x}_0^i \sim p(\mathbf{x}_0)$

end for

for k=1, 2, ...

for i=1:N

Amostre  $\mathbf{x}_k \sim g(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_k^i, \mathbf{y}_k)$

Calcule os pesos das amostras por

$$\gamma_k^i = \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^i) p(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i)}{g(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_{1:k})} \gamma_{k-1}^i$$

```

end for
Normalize os pesos por

$$\bar{\gamma}_k^i = \frac{\gamma_k^i}{\sum_{j=1}^N \gamma_k^j}$$

Obtenha a densidade condicional aproximada
por

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N \bar{\gamma}_k^i \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^i)$$

Se  $N_{eff} < N_T$ 
    Realize a reamostragem
end Se
end for

```

#### 4.2.8 Exemplo de Aplicação

Um sistema comum utilizado na aplicação do filtro de partículas é dado pelo seguinte modelo (ARULAMPALAM et al., 2002) (SIMON, 2006, p. 469) (GORDON; SALMOND; SMITH, 1993):

$$x_k = \frac{x_{k-1}}{2} + \frac{25x_{k-1}}{1 + x_{k-1}^2} + 8\cos(1, 2k) + w_k \quad (4.117)$$

$$y_k = \frac{x_k^2}{20} + v_k \quad (4.118)$$

sendo  $w_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$  um ruído de processo gaussiano branco,  $v_k \sim \mathcal{N}(0, R)$  um ruído de medição gaussiano branco e  $Q = R = 0, 1$ . A condição inicial do sistema foi  $x_0 = 8$ .

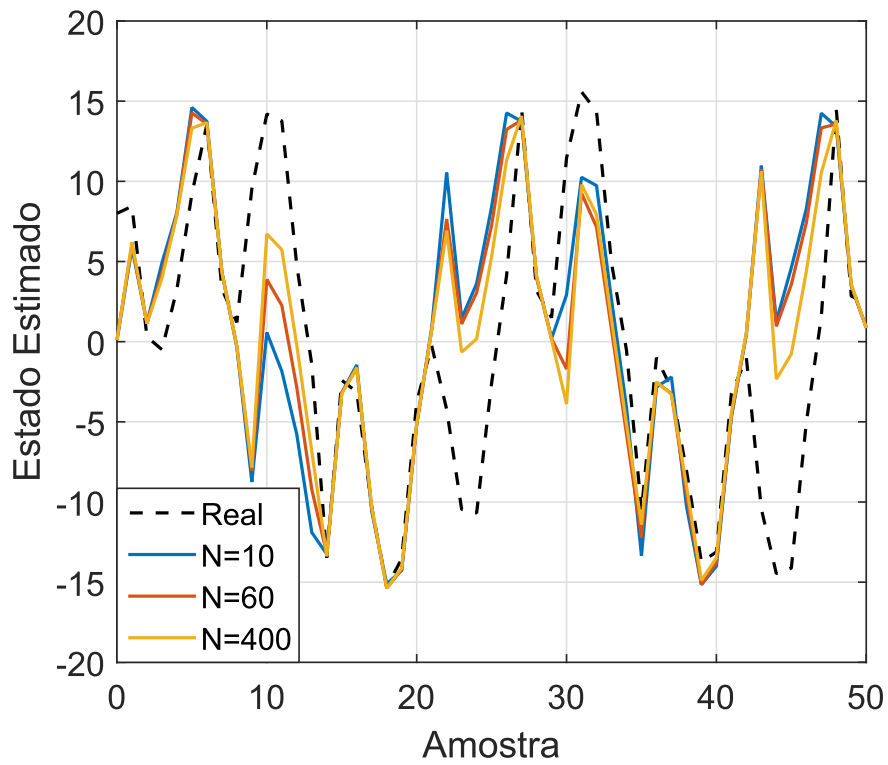
Para a estimação dos estados, o filtro *bootstrap* foi utilizado e a função densidade de importância escolhida foi  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ . Assim, os pesos foram calculados através da equação (4.114), em que a função de verossimilhança utilizada foi

$$l(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{y}_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \exp \left( -R^{-1} \frac{\left( \frac{y_k - (\mathbf{x}_k^i)^2}{20} \right)^2}{2} \right). \quad (4.119)$$

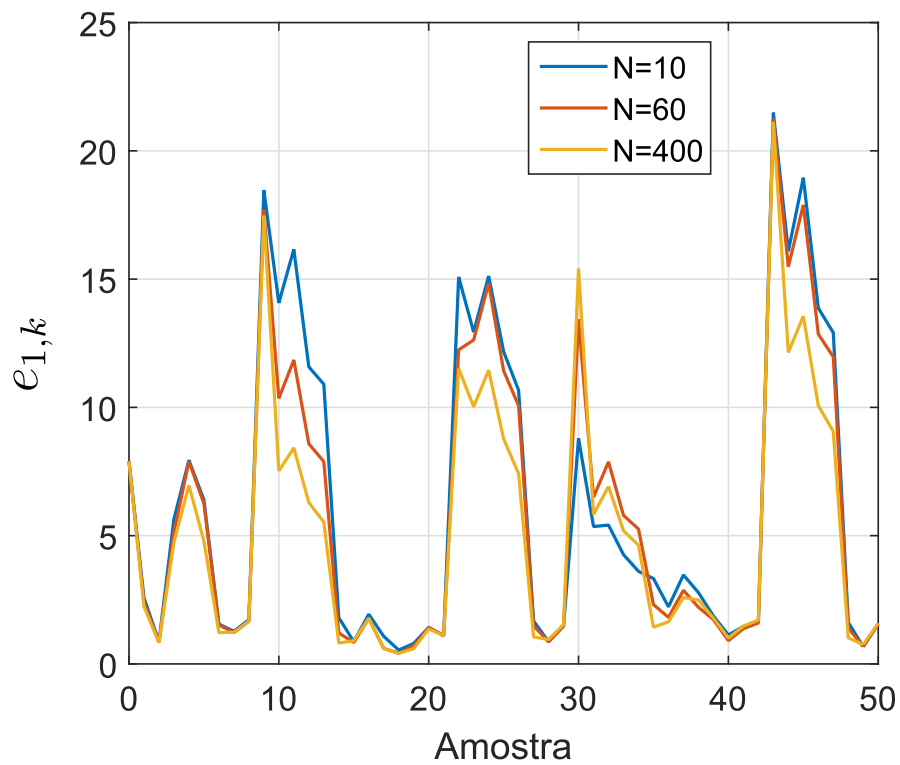
A inicialização das partículas foi feita através de

$$\mathbf{x}_k^i \sim \mathcal{N}(0, Q). \quad (4.120)$$

Foram utilizados 3 diferentes quantidades de partículas  $N$ , a fim de que seja possível observar que a métrica de erro é reduzida conforme o número de partículas é aumentado. O estado estimado pode ser observado na Figura 4.4 e o erro absoluto de estimação na Figura 4.5.



**Figura 4.4** – Estados estimados obtidos através de 200 realizações de Monte Carlo utilizando  $N$  partículas para o sistema dado por (4.117).



**Figura 4.5** – Métrica  $e_{1,k}$  obtida através de 200 realizações de Monte Carlo utilizando  $N$  partículas para o sistema dado por (4.117).

## 5 METODOLOGIA PROPOSTA E RESULTADOS

Desde a publicação e divulgação dos trabalhos seminais de Kalman (KALMAN et al., 1960) e Luenberger (LUENBERGER, 1964), o problema de estimação para sistemas lineares ganhou uma teoria sólida (BONNABEL; SLOTINE, 2015). Entretanto, a estimação de estados de sistemas não lineares continua sem metodologias genéricas.

A teoria de filtragem não linear é um tópico complexo e difícil, o qual não é tão bem formulado como o entendimento para a filtragem linear. Portanto, ainda há muito espaço para avanços nas pesquisas sobre técnicas de estimação ou filtragem não linear (SIMON, 2006, p. 396).

Nesta seção, propõe-se um filtro de partículas com amostragem e reamostragem por importância aliado ao filtro de Kalman estendido iterativo (FPA-FKEI) para estimação de estados em sistemas não lineares. A ideia da metodologia proposta é inserir duas partículas a partir do filtro de Kalman estendido iterativo a cada iteração. A motivação para a metodologia proposta é embasada na seção a seguir.

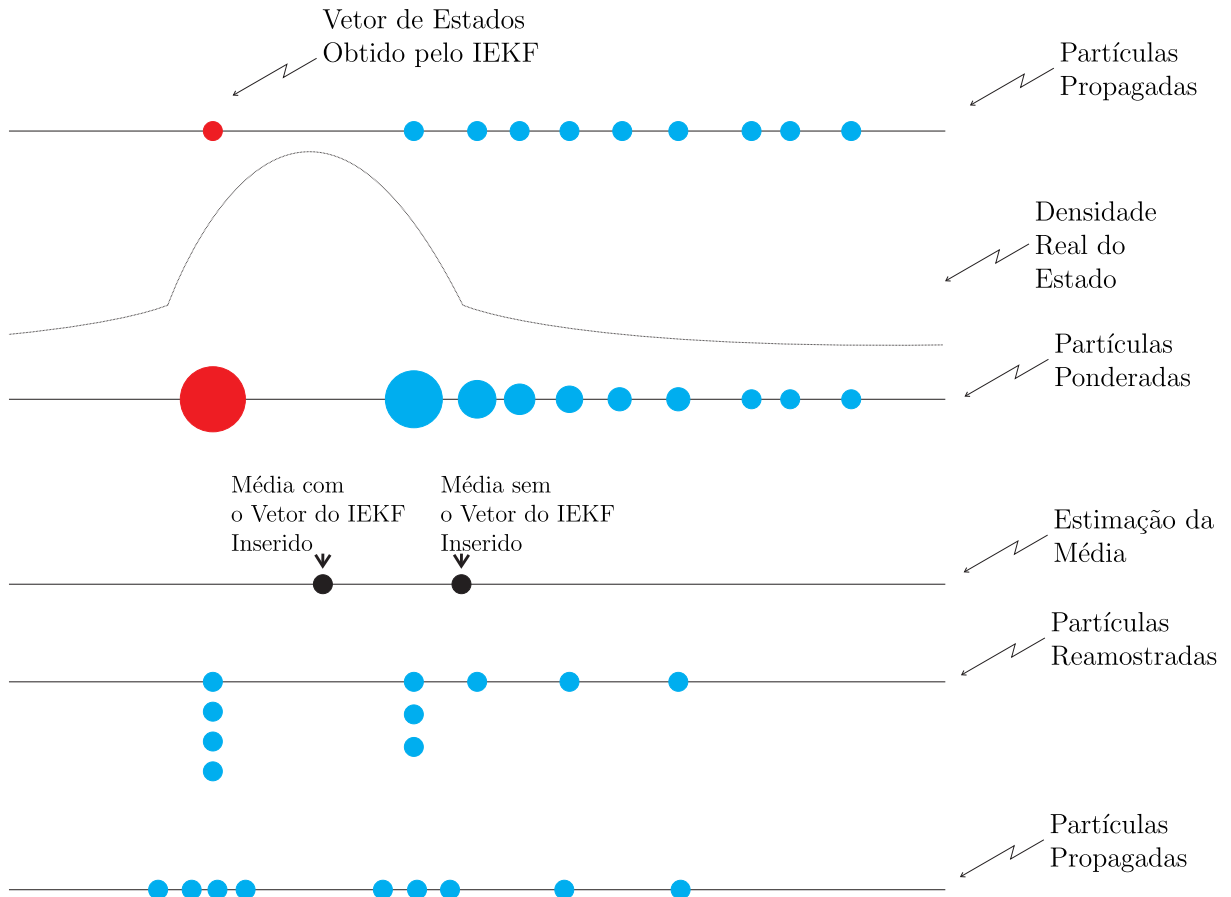
### 5.1 Motivação da Metodologia Proposta

Uma vez que o vetor de estados gerado pelo filtro de Kalman estendido iterativo (IEKF) é uma amostra retirada de  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_k)$ , este vetor de estados pode ser considerado como uma partícula e ser analisada pela função de verossimilhança gaussiana, a qual lhe atribui um peso. A inserção deste vetor no conjunto de partículas permite que o espaço amostral configurado pelo conjunto de  $N$  partículas possa ser incrementado. Além disso, nas situações em que a não linearidade do sistema é baixa, o vetor de estados estimados obtido a partir do IEKF pode ser de grande auxílio na convergência do filtro de partículas (PF). Na Figura 5.1, o vetor de estados (em vermelho) inserido no conjunto das partículas (em azul) aumenta o espaço de busca do PF. Para que o IEKF tenha uma boa estimativa, ao invés de seus dados de entrada ser uma partícula qualquer do filtro de partículas, é utilizado a média das partículas e a covariância destas.

Em seguida, todas as partículas, inclusive o vetor de estados, são avaliados pela função de verossimilhança, a qual atribui pesos as partículas e ao vetor de estados. Na sequência, os pesos são utilizados para realizar a reamostragem, gerando um conjunto de partículas independente e igualmente distribuídas. Por fim, as partículas são novamente propagadas.

Para o sistema não linear, variante no tempo e monovariável utilizado no capítulo 4, o vetor de estados foi inserido no conjunto de partículas substituindo aquela de menor ponderação. Foram geradas 8 figuras referentes as 8 primeiras iterações<sup>1</sup> da metodologia proposta. Nas Figuras 5.2 e 5.3, é possível observar que, nas iterações 4, 5 e 7, a inserção do vetor de estado

<sup>1</sup> Da segunda a nona iteração, pois a primeira é considerada como inicialização dos algoritmos.

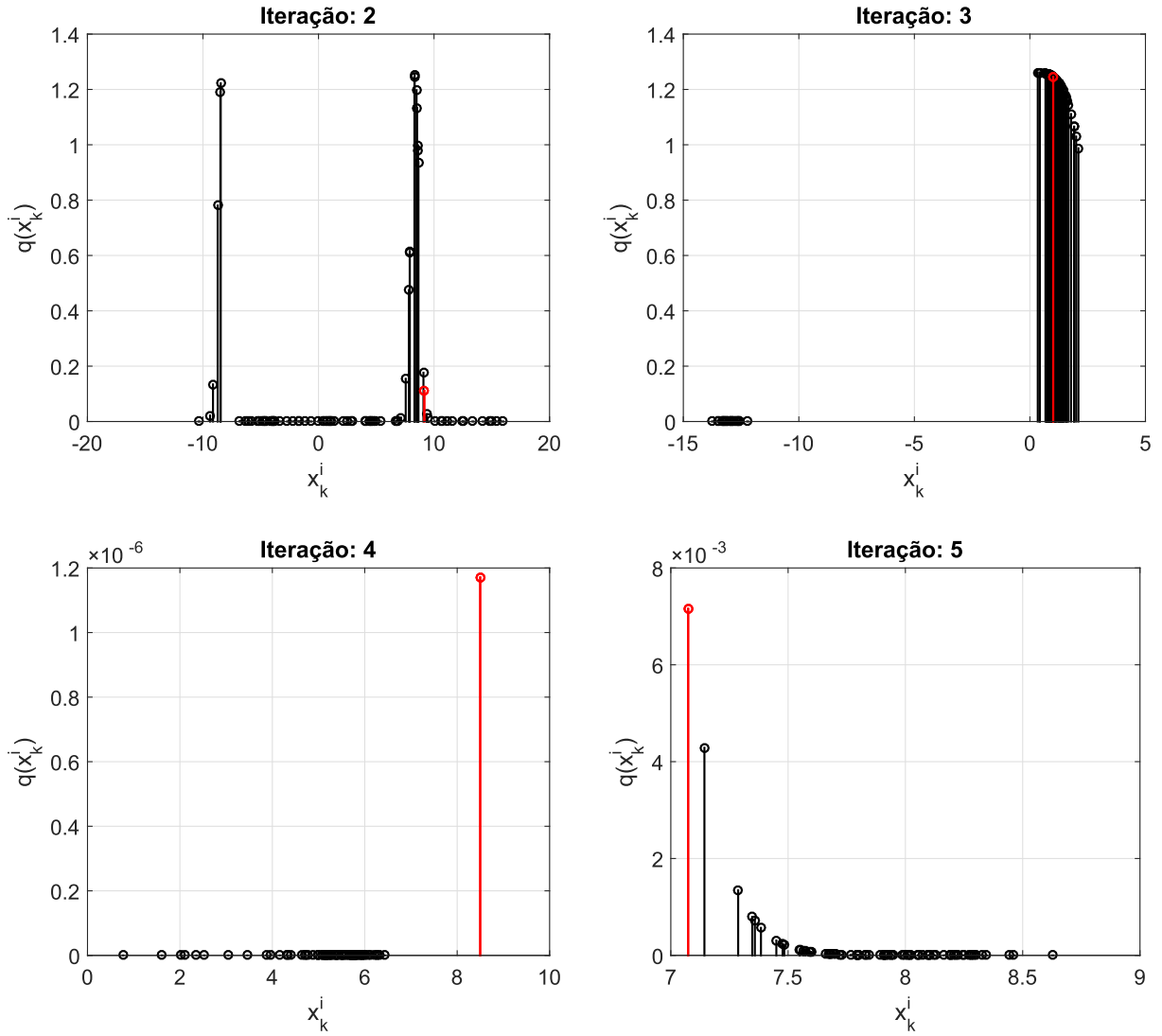


**Figura 5.1** – Exemplo de inserção do vetor de estados do IEKF no PF, conforme a metodologia proposta. Neste caso, a inserção do vetor é capaz de aumentar o espaço de busca do PF, resultando numa melhor estimativa da média da densidade do estado real.

forneceu informação relevante diante das partículas já propagadas pelo PF. Nas iterações 2, 3, 8 e 9, o vetor de estado inserido esteve entre as partículas já existentes. Na iteração 6, apesar de o vetor de estado inserido ter aumentado o espaço de busca, todas as partículas e o vetor de estado receberam a menor ponderação possível, de  $10^{-10}$ , inserida no algoritmo para evitar a não convergência numérica.

## 5.2 Etapas da Metodologia Proposta

A ideia principal da metodologia proposta é, a cada iteração, utilizar o IEKF para gerar dois vetores de estados estimados, os quais substituem as duas partículas de menor ponderação do PF. A razão de se gerar duas partículas a partir do IEKF é que, tal como mostrado na subseção 4.1.5, a primeira iteração do IEKF corresponde ao EKF. Portanto, na primeira iteração do IEKF, se obtém o primeiro vetor de estados, enquanto que, após  $N_{it}$  iterações, um segundo vetor é obtido, correspondente ao IEKF. Vale ressaltar que, caso a equação de saída do sistema seja linear, os dois vetores são iguais e apenas um vetor deve ser utilizado na substituição. Nas subseções seguintes, as etapas da metodologia proposta são explicitadas.



**Figura 5.2** – Pesos das partículas (em preto) e do vetor de estados (em vermelho) gerado através do EKF, iterações 2, 3, 4 e 5.

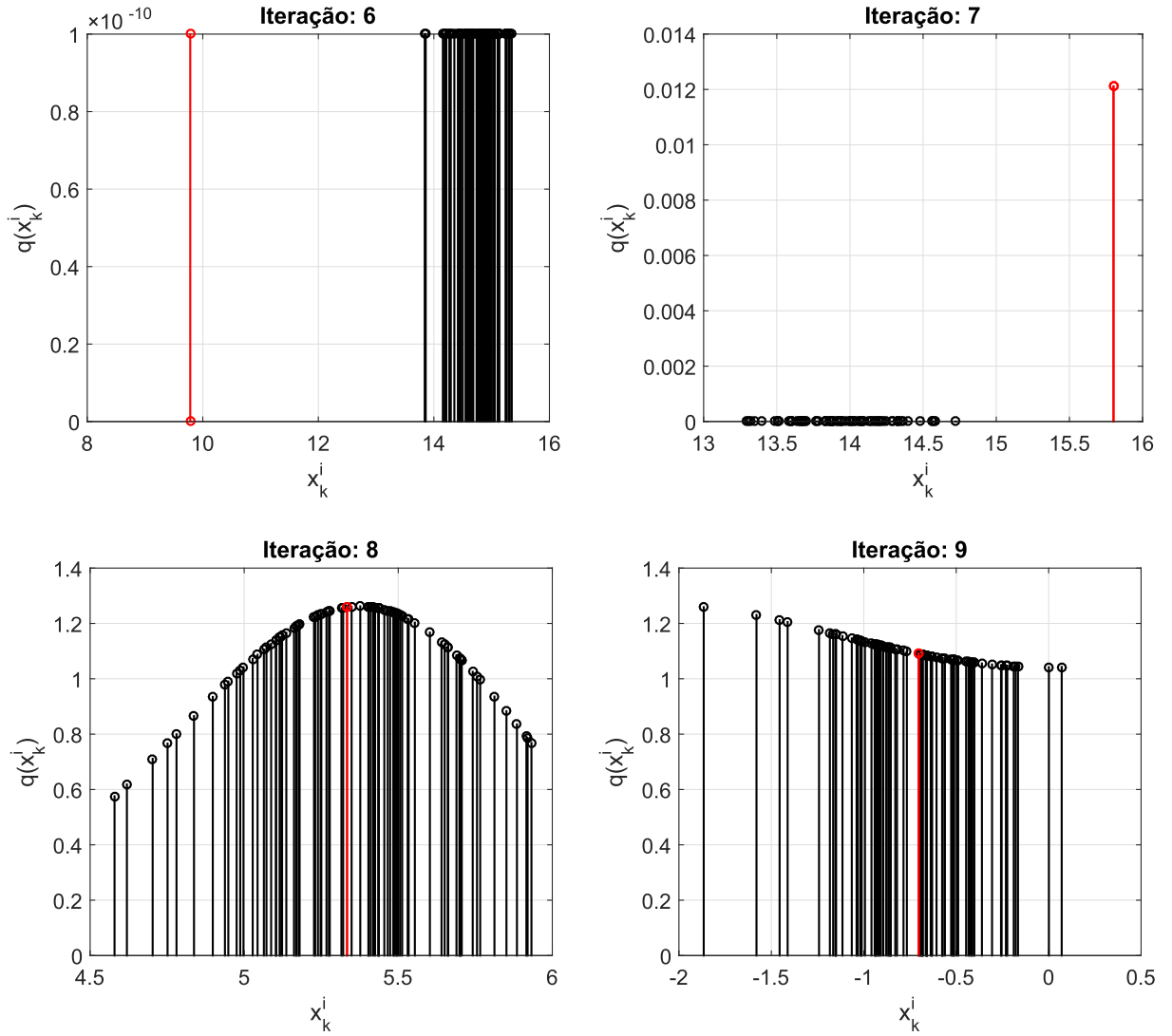
### 5.2.1 Inicialização

No filtro proposto, é necessário realizar a inicialização do PF e do IEKF. Por essa razão, gera-se uma quantidade  $N$  de partículas  $\hat{\mathbf{x}}_{0,1:N}^+$  com base no conhecimento *a priori* dos estados. Essas partículas inicializam a primeira etapa do PF, que é a de propagação das partículas. O IEKF tem como dados de entrada a média e covariância inicial dos estados. Esses valores podem ser calculados a partir do conjunto de partículas geradas inicialmente. A média é dada por

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{x}}_{0,j}^+ \quad (5.1)$$

e a covariância inicial é calculada por

$$\mathbf{P}_0 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (\hat{\mathbf{x}}_{0,j}^+ - \hat{\mathbf{x}}_0)(\hat{\mathbf{x}}_{0,j}^+ - \hat{\mathbf{x}}_0)^T. \quad (5.2)$$



**Figura 5.3** – Pesos das partículas (em preto) e do vetor de estados (em vermelho) gerado através do EKF, iterações 6, 7, 8 e 9.

onde  $\hat{\mathbf{x}}_{0,j}^+$  é a  $j$ -ésima partícula *a posteriori* no instante inicial e  $\hat{\mathbf{x}}_0$  é a média estimada dos estados no instante inicial.

### 5.2.2 Propagação

Nesta etapa, o IEKF é executado simultaneamente com a etapa de propagação do PF. As partículas obtidas da última iteração  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1,1:N}^+$  são propagadas através de

$$\hat{\mathbf{x}}_{k,j}^- = \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1,j}^+, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1,j}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (5.3)$$

onde  $\mathbf{w}_{k-1,j}$  é um vetor amostrado a partir da densidade do ruído de processo  $\mathbf{w}_{k-1}$ . As partículas com índice  $-$  serão denominadas partículas *a priori* e as com índice  $+$ , *a posteriori*. Obtém-se, então, um conjunto de partículas *a priori*  $\hat{\mathbf{x}}_{k,1:N}^-$ .

Simultaneamente a etapa de propagação, a média  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  e covariância  $\mathbf{P}_{k-1}$  são utilizadas para obter dois vetores de estados estimados  $\hat{\mathbf{x}}_{k,EKF}$  e  $\hat{\mathbf{x}}_{k,IEKF}$  através do IEKF. O primeiro



vetor  $\hat{\mathbf{x}}_{k,EKF}$  é obtido na primeira iteração do IEKF, enquanto que o segundo vetor  $\hat{\mathbf{x}}_{k,IEKF}$  é obtido na iteração  $N_{it}$  do IEKF, onde  $N_{it}$  é um valor inteiro especificado pelo projetista que determina a quantidade de iterações de otimização a serem realizadas pelo IEKF. Caso a equação de medição seja linear, apenas o vetor  $\hat{\mathbf{x}}_{k,EKF}$  é gerado, conforme explicado na seção 4.1.5.

### 5.2.3 Ponderação

Na etapa de ponderação, todas as partículas propagadas  $\hat{\mathbf{x}}_{k,1:N}^-$  e os vetores de estados estimados  $\hat{\mathbf{x}}_{k,EKF}$  e  $\hat{\mathbf{x}}_{k,IEKF}$  são ponderados através da função de verossimilhança gaussiana, dada por

$$\gamma_{k,j} = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\mathbf{R}_k|}} \exp \left( \frac{-[\mathbf{y}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k,j}^-)]^T \mathbf{R}_k^{-1} [\mathbf{y}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k,j}^-)]}{2} \right) \quad (5.4)$$

onde  $j = 1, \dots, N, EKF, IEKF$ .

### 5.2.4 Substituição

Uma vez que todas as partículas e os vetores de estado estimado foram ponderados, uma substituição é realizada com o objetivo de manter a quantidade total de partículas igual a  $N$ . Para isso, os dois vetores gerados através do IEKF  $\hat{\mathbf{x}}_{k,EKF}$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_{k,IEKF}$  substituem as duas partículas de menor ponderação. Tem-se, assim, um novo conjunto de partículas  $\hat{\mathbf{x}}_{k,1:N,*}^-$  e de pesos  $\gamma_{k,1:N,*}$ .

### 5.2.5 Normalização dos Pesos

Em seguida, todas os pesos das partículas são normalizados por

$$\bar{\gamma}_{k,1:N,*} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \gamma_{k,j,*} \quad j = 1, \dots, N. \quad (5.5)$$

### 5.2.6 Reamostragem

A etapa de reamostragem continua sendo necessária. Portanto, as partículas são reamostradas conforme o método especificado na seção 4.2.6.

### 5.2.7 Estimação da Densidade, Média e Covariância

A estimação da função densidade de probabilidade dos estados no instante  $k$  é calculada por

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) \approx \sum_{j=1}^N \bar{\gamma}_{k,j,*} \delta(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k,j,*}^-). \quad (5.6)$$

A média pode ser estimada através de

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \sum_{j=1}^N \bar{\gamma}_{k,j,*} \hat{\mathbf{x}}_{k,j,*}^- \quad (5.7)$$

e a covariância através de

$$\mathbf{P}_k = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (\hat{\mathbf{x}}_{k,j,*}^+ - \hat{\mathbf{x}}_k)(\hat{\mathbf{x}}_{k,j,*}^+ - \hat{\mathbf{x}}_k)^T. \quad (5.8)$$

Estes dados são a saída do filtro. A média e covariância aqui geradas realimentam o IEKF na próxima iteração.

### 5.2.8 Fluxograma do FPA-FKEI

O fluxograma do FPA-FKEI pode ser visto na Figura 5.4.

## 5.3 Resultados e Considerações

Nesta seção, quatro sistemas em diferentes condições de operação são utilizados para avaliação da técnica proposta. O primeiro sistema é unidimensional, o qual também é utilizado no capítulo 4. O segundo sistema consiste de um carro-pêndulo invertido em que seus quatro estados consistem da posição e velocidade do carro e ângulo e velocidade angular do pêndulo. O terceiro e último sistema compreende um sistema de potência de 4 geradores, em que os estados são o ângulo e a velocidade angular de cada máquina geradora.

Em cada sistema, 200 realizações de Monte Carlo foram utilizadas para comprovar a convergência das metodologias utilizadas. As métricas de performance explicitadas na seção 2.7 serão apresentadas através de gráficos.

### 5.3.1 Sistema 1

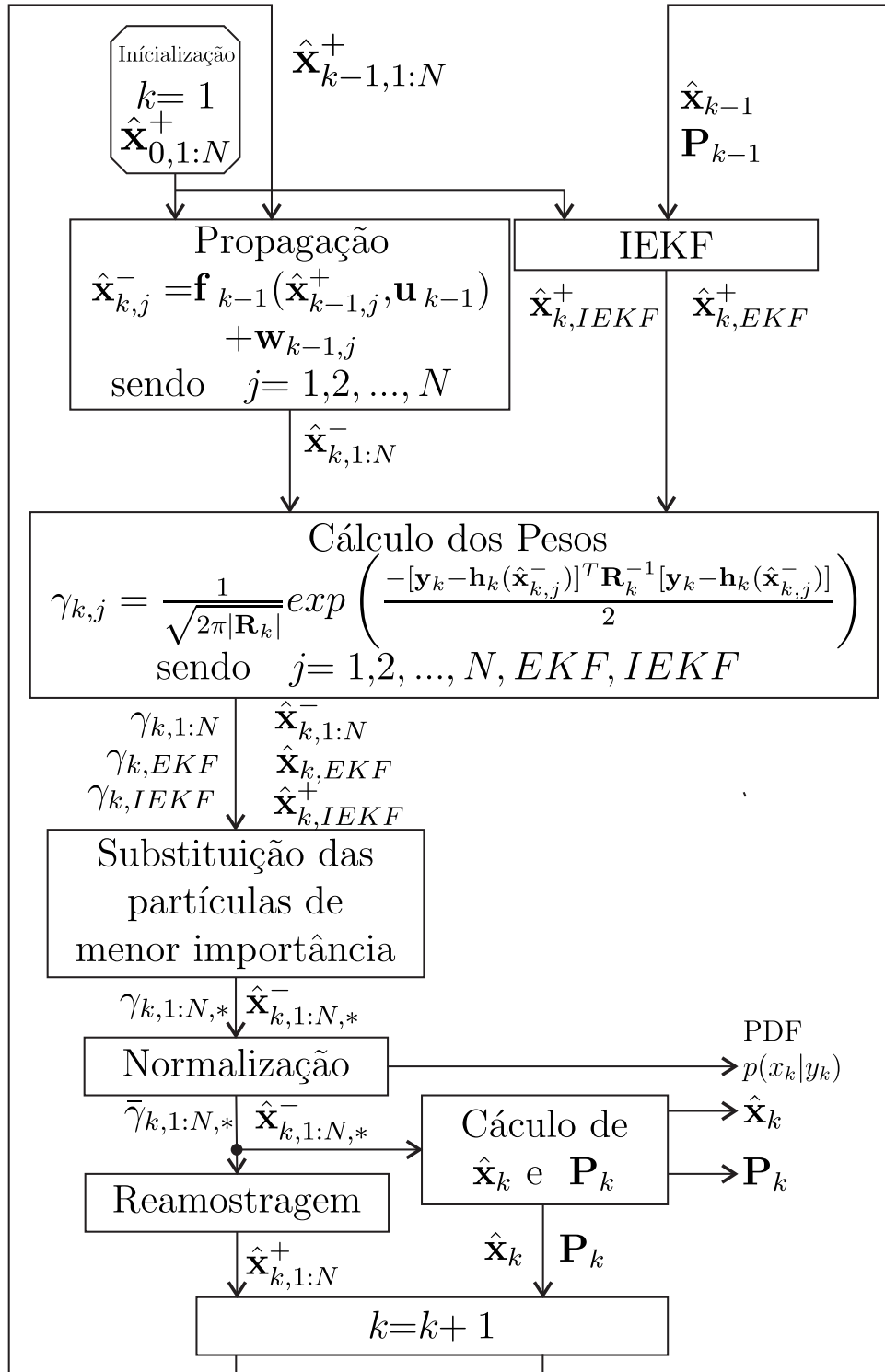
O primeiro sistema está descrito nas equações (4.117) e (4.118), onde  $w_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$  é um ruído de processo gaussiano branco,  $v_k \sim \mathcal{N}(0, R)$  é um ruído de medição gaussiano branco,  $Q = R = 0, 1$ , e a condição inicial do sistema é  $x_k = 8$ , tal como no exemplo da seção 4.2.8.

A inicialização do filtro de Kalman estendido é  $\hat{x}_0^+ = 0$  e  $P_0^+ = 6$ . A inicialização das partículas tanto para o filtro de partículas quanto para a metodologia proposta foi feita através de

$$\hat{x}_{0,1:N}^+ \sim \mathcal{N}(0, Q) \quad (5.9)$$

onde  $N = 100$  é o número total de partículas. A quantidade de iterações do IEKF da metodologia proposta foi  $N_{it} = 2$ .

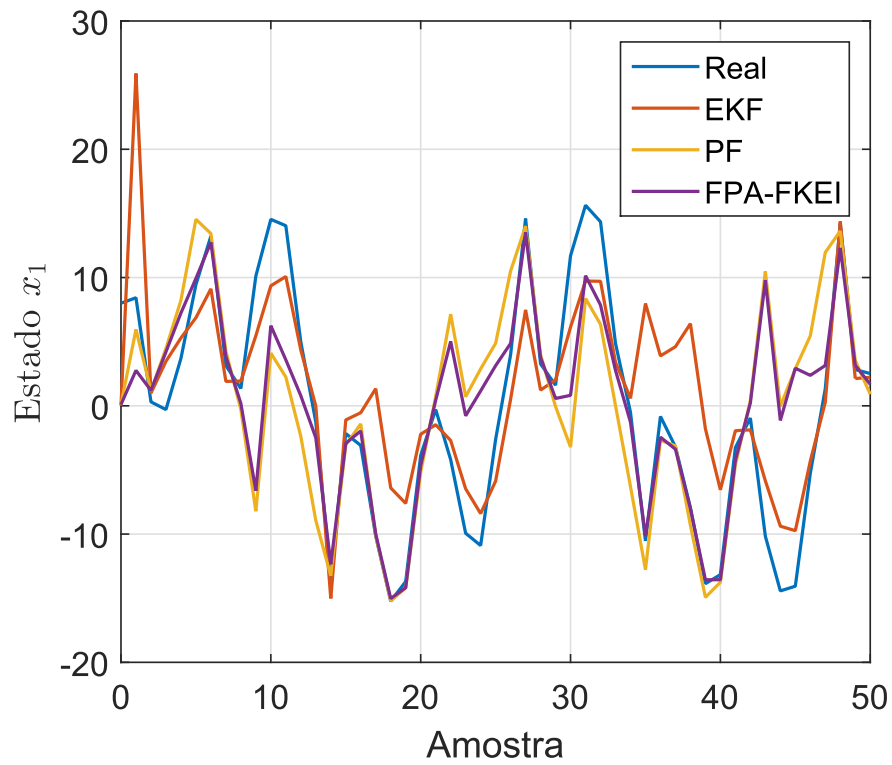
A média de Monte Carlo dos estados pode ser observada na Figura 5.5 e a métrica  $e_k$ , na Figura 5.6. A métrica  $e$  é dada na Tabela 1. Pela métrica  $e$ , é possível observar que o FPA-FKEI proporciona um menor erro diante do EKF e do PF. A estimação da metodologia proposta está próxima da obtida pelo FP, entretanto com o erro levemente menor na maior parte dos instantes, o que pode ser notado na Figura 5.6. No instante  $k = 14$ , o FKE apresenta erro elevado, o que



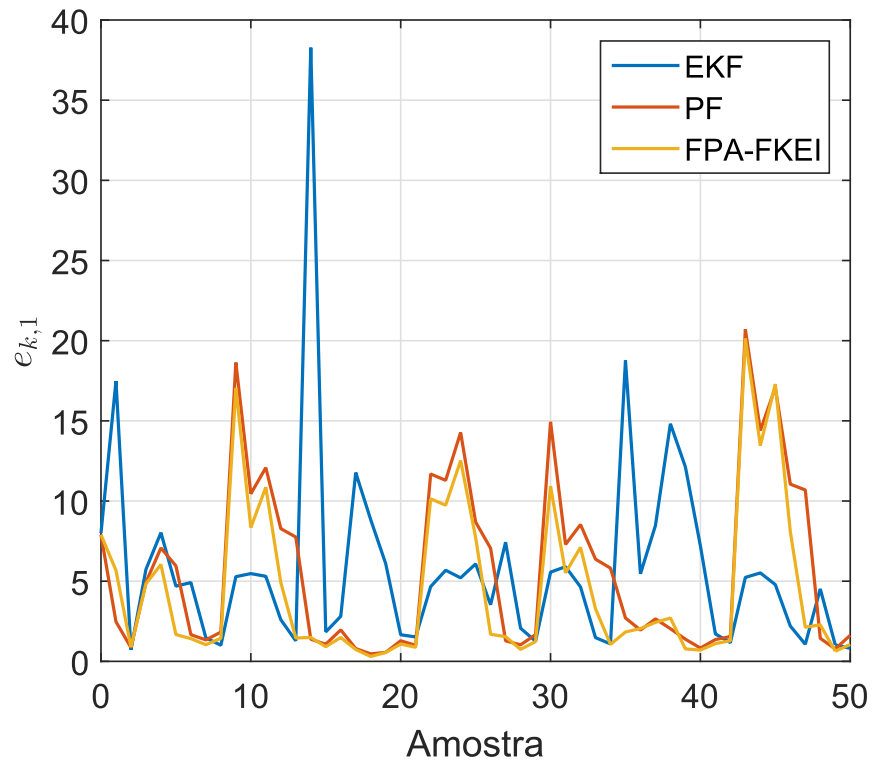
**Figura 5.4** – Fluxograma do método Filtro de Partículas aliado ao Filtro de Kalman Estendido Iterativo.

**Tabela 1** – Métrica de performance escalar calculada para o sistema 1.

	EKF	PF	PFA-FKEI
$e$	5,7700	5,7233	4,5528



**Figura 5.5** – Estados real e estimados através do EKF, PF e FPA-FKEI através de 200 realizações de Monte Carlo.



**Figura 5.6** – Métrica  $e_k$  obtida através de 200 realizações de Monte Carlo para as estimações do EKF, PF e FPA-FKEI.

não está evidente na média de Monte Carlo dos estados. Tal erro é obtido, pois a variância das amostras em  $k = 14$  para o EKF é alta, o que não é perceptível na média, por esta ser uma estatística de primeira ordem.

### 5.3.2 Sistema 2

O segundo sistema consiste de um carro-pêndulo invertido representado matematicamente pelas seguintes equações diferenciais (SANTOS; SOUZA, 2017)(PROHMANN; SOUZA, 2017):

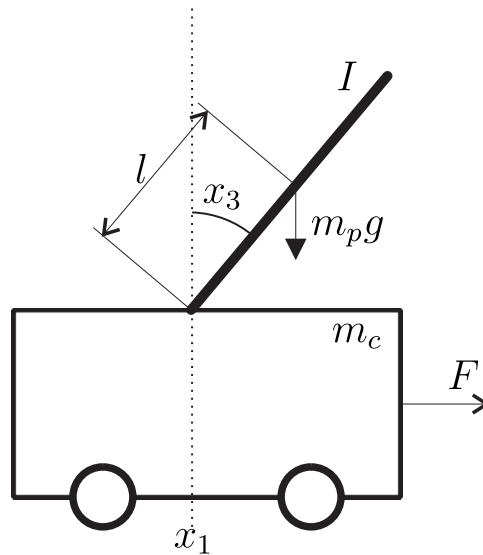
$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) = & -\frac{B_c M_2}{M_3} x_2(t) + \frac{m_p l B_p}{M_3} x_4(t) \cos x_3(t) - \frac{m_p^2 l^2 g}{M_3} \sin x_3(t) \cos x_3(t) + \\ & \frac{m_p l M_2}{M_3} x_4^2(t) \sin x_3(t) + \frac{M_2}{M_3} F(t) \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t) \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4(t) = & -\frac{B_p M_1}{M_3} x_4(t) + \frac{m_p l B_c}{M_3} x_2(t) \cos x_3(t) - \frac{m_p^2 l^2}{M_3} x_4^2(t) \sin x_3(t) \cos x_3(t) + \\ & \frac{m_p l g M_1}{M_3} \sin x_3(t) - \frac{m_p l}{M_3} \cos x_3(t) F(t) \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde  $x_1$  é a posição do carro em relação ao eixo horizontal,  $x_2$  é a velocidade linear do carro,  $x_3$  é a posição angular do pêndulo,  $x_4$  é a velocidade angular do pêndulo,  $m_c$  é a massa do carro,  $m_p$  é a massa do pêndulo,  $l$  é a distância do centro de massa do pêndulo ao pivô que prende o pêndulo ao carro,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $I$  é o momento de inércia do pêndulo,  $F(t)$  é a força aplicada ao carro,  $B_c$  e  $B_p$  são os coeficientes de atrito do carro com o solo e do pêndulo com o pivô, respectivamente. A representação deste sistema pode ser observada na Figura 5.7. O



**Figura 5.7** – Representação do sistema carro-pêndulo invertido.

sistema foi discretizado, resultando nas seguintes equações:

$$x_{1,k} = x_{1,k-1} + T x_{2,k-1} \quad (5.14)$$

$$x_{2,k} = x_{2,k-1} - T \frac{B_c M_2}{M_3} x_{2,k-1} + T \frac{m_p l B_p}{M_3} x_{4,k-1} \cos x_{3,k-1} - T \frac{m_p^2 l^2 g}{M_3} \sin x_{3,k-1} \cos x_{3,k-1} + T \frac{m_p l M_2}{M_3} x_{4,k-1}^2 \sin x_{3,k-1} + T \frac{M_2}{M_3} F_{k-1} \quad (5.15)$$

$$x_{3,k} = x_{3,k-1} + T x_{4,k-1} \quad (5.16)$$

$$x_{4,k} = x_{4,k-1} - T \frac{B_p M_1}{M_3} x_{4,k-1} + T \frac{m_p l B_c}{M_3} x_{2,k-1} \cos x_{3,k-1} - T \frac{m_p^2 l^2}{M_3} x_{4,k-1}^2 \sin x_{3,k-1} \cos x_{3,k-1} + T \frac{m_p l g M_1}{M_3} \sin x_{3,k-1} - T \frac{m_p l}{M_3} \cos x_{3,k-1} F_{k-1} \quad (5.17)$$

onde  $T = 0,001$  s é o período de amostragem. A equação de saída é dada por

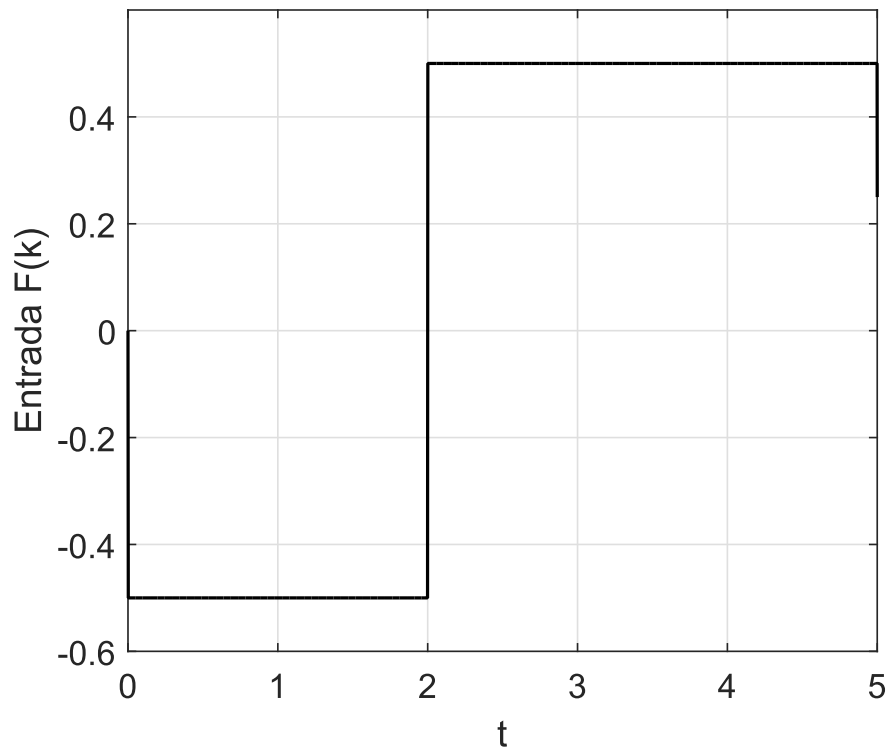
$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \quad (5.18)$$

A entrada e os parâmetros do sistema utilizados nas simulações podem ser observados na Figura 5.8 e na Tabela 2, respectivamente.

**Tabela 2** – Parâmetros utilizados na simulação do sistema do carro-pêndulo invertido.

Parâmetro	Valor
$m_c$	0,94 [kg]
$m_p$	0,23 [kg]
$l$	0,33 [m]
$I$	$\frac{1}{3} \cdot m_p \cdot l^2$ [kg·m <sup>2</sup> ]
$B_c$	0,44 [N·m·s/rad]
$B_p$	0,05 [N·m·s/rad]
$g$	9,81 [m/s <sup>2</sup> ]
$M_1$	$m_c + m_p$
$M_2$	$I + m_p l^2$
$M_3$	$M_1 M_2 - m_p^2 l^2 \cos^2 x_3(k)$

O estado inicial considerado do sistema é  $\mathbf{x}_0 = [0,5 \ 0 \ 1,8 \ 0,5]^T$ . A matriz de covariância do ruído de processo é  $\mathbf{Q}_k = \text{diag}\{0,2 \ 0,2 \ 0,2 \ 0,2\} \forall k$  e do ruído de medição,  $\mathbf{R}_k = \text{diag}\{0,1 \ 0,1 \ 0,1 \ 0,1\} \forall k$ , resultando em uma relação sinal ruído de 28,9257 dB.



**Figura 5.8** – Entrada utilizada na simulação do pêndulo invertido com carro.

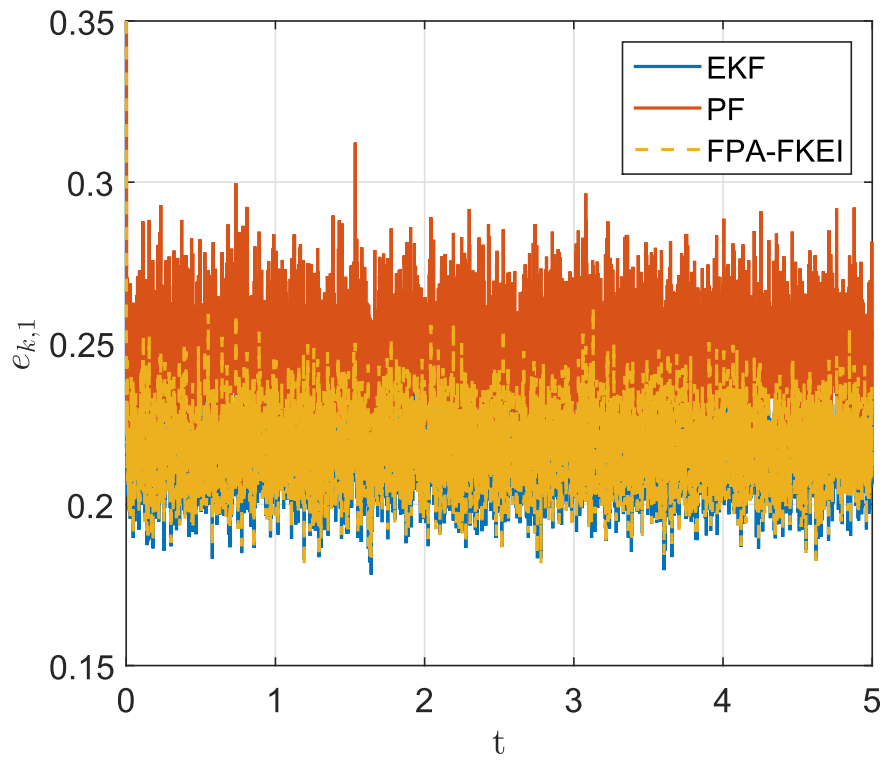
Quanto as entradas de dados para as técnicas, tem-se: a condição inicial do EKF foi de  $\hat{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  e  $P_0 = I$ , e para o PF e para o FPA-FKEI, as partículas iniciais foram amostradas de  $\mathcal{N}(0, Q_0)$ . A quantidade de partículas utilizada para o FP e para o FPA-FKEI foi de 100 partículas, e para a metodologia proposta, a quantidade de iterações do IEKF foi de  $N_{it} = 2$  iterações.

A métrica de performance  $e_{i,k}$  pode ser observada através das Figuras 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12 e a métrica  $e_k$  pode ser visualizada na Figura 5.13. E, a última métrica  $e$ , que é um valor escalar é apresentada na Tabela 3. O erro para todos os instantes, em todos os estados, é

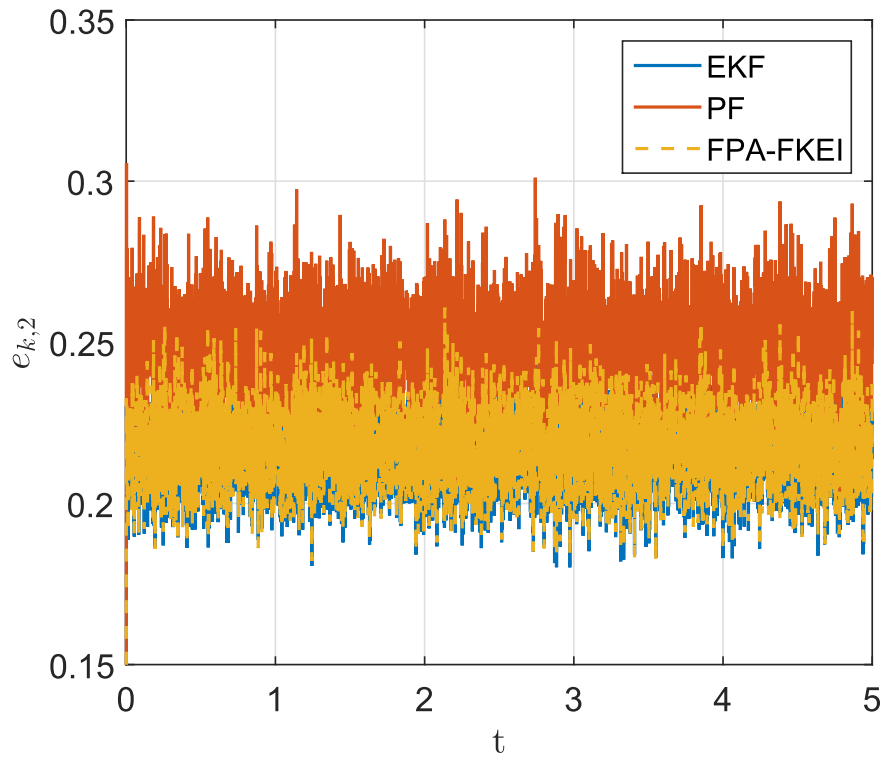
**Tabela 3** – Métrica de performance escalar calculada para o sistema 2.

	EKF	PF	PFA-FKEI
$e$	0,2159	0,2492	0,2177

quase sempre menor que 0,3 para as 3 técnicas. As métricas  $e_{1,k}$ ,  $e_{2,k}$ ,  $e_{3,k}$  e  $e_{4,k}$  do FKE e do FPA-FKEI ficaram sobrepostas no gráfico, possuindo, quase sempre, valores próximos, o que pode ser averiguado também através da métrica  $e_k$  e da métrica escalar  $e$ . Para esta situação, o EKF obteve a melhor estimativa, entretanto, o PFA-FKEI obteve valores bem próximos do EKF. Já o PF obteve uma performance inferior.

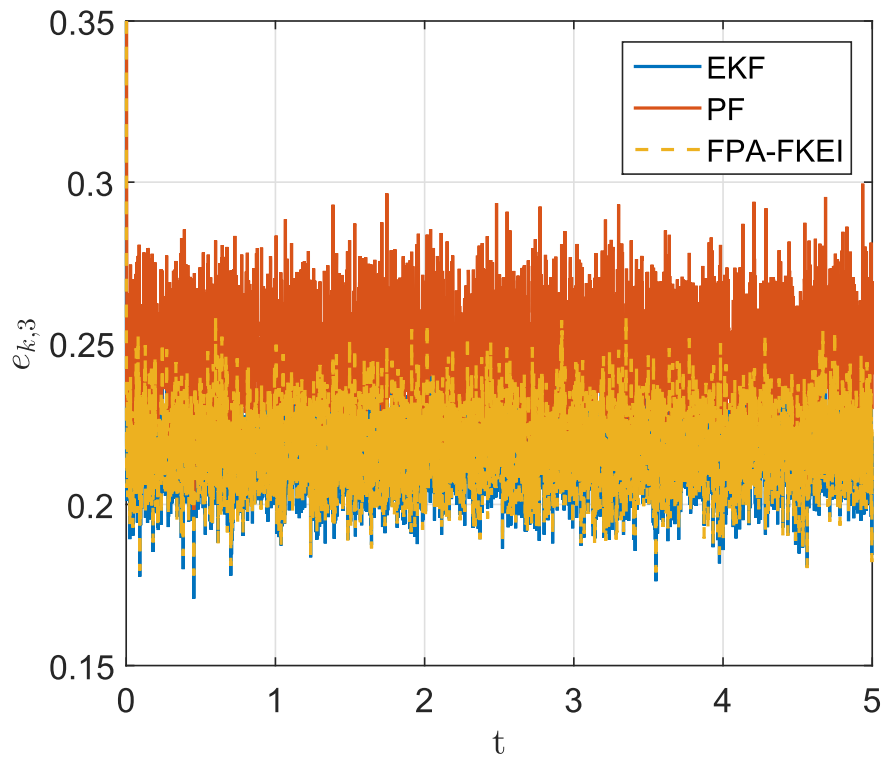


**Figura 5.9** – Métrica  $e_{1,k}$  para o sistema carro-pêndulo invertido obtida através de 200 realizações de Monte Carlo.

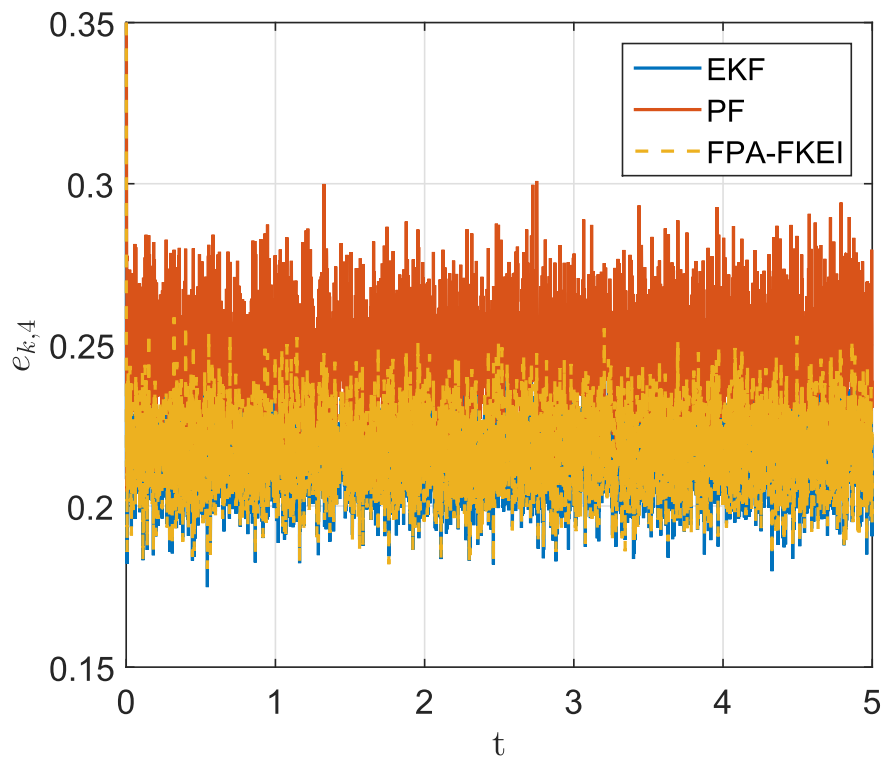


**Figura 5.10** – Métrica  $e_{2,k}$  para o sistema carro-pêndulo invertido obtida através de 200 realizações de Monte Carlo.

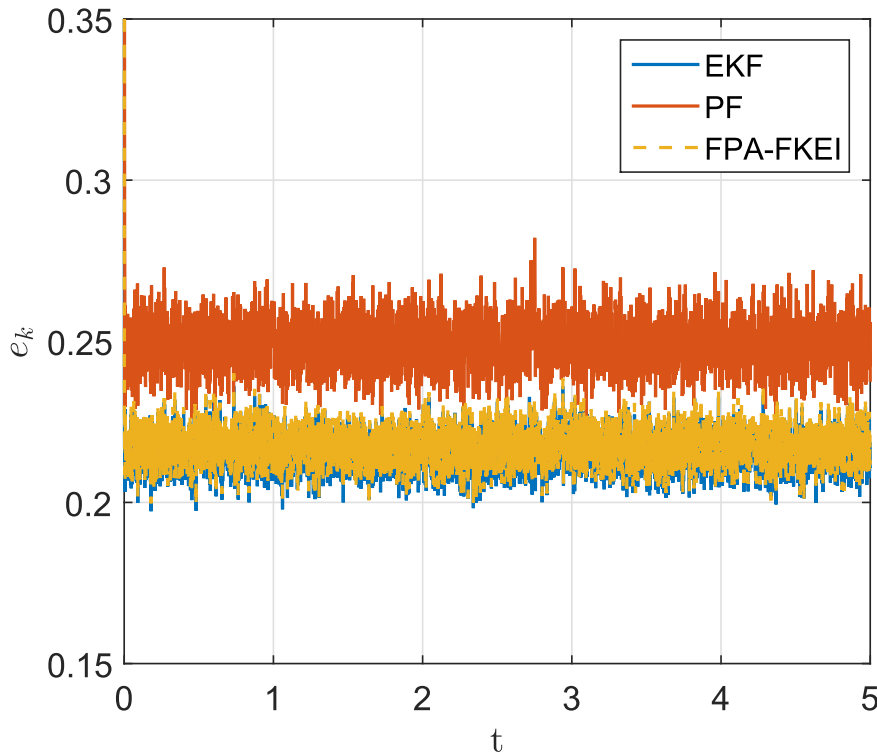




**Figura 5.11** – Métrica  $e_{3,k}$  para o sistema carro-pêndulo invertido obtida através de 200 realizações de Monte Carlo.



**Figura 5.12** – Métrica  $e_{4,k}$  para o sistema carro-pêndulo invertido obtida através de 200 realizações de Monte Carlo.



**Figura 5.13** – Métrica  $e_k$  para o sistema carro-pêndulo invertido obtida através de 200 realizações de Monte Carlo.

### 5.3.3 Sistema 3

O sistema 3 corresponde a um sistema de potência com 4 geradores e 10 barras (DARWISH; FANTIN, 1976), cujo esquema unifilar pode ser observado na Figura 5.14. Os estados os quais se deseja estimar são as posições e velocidades angulares dos rotores das 4 máquinas geradoras. O modelo matemático para a dinâmica deste sistema de potência baseia-se em equações diferenciais não lineares (DARWISH; FANTIN, 1976) dadas por

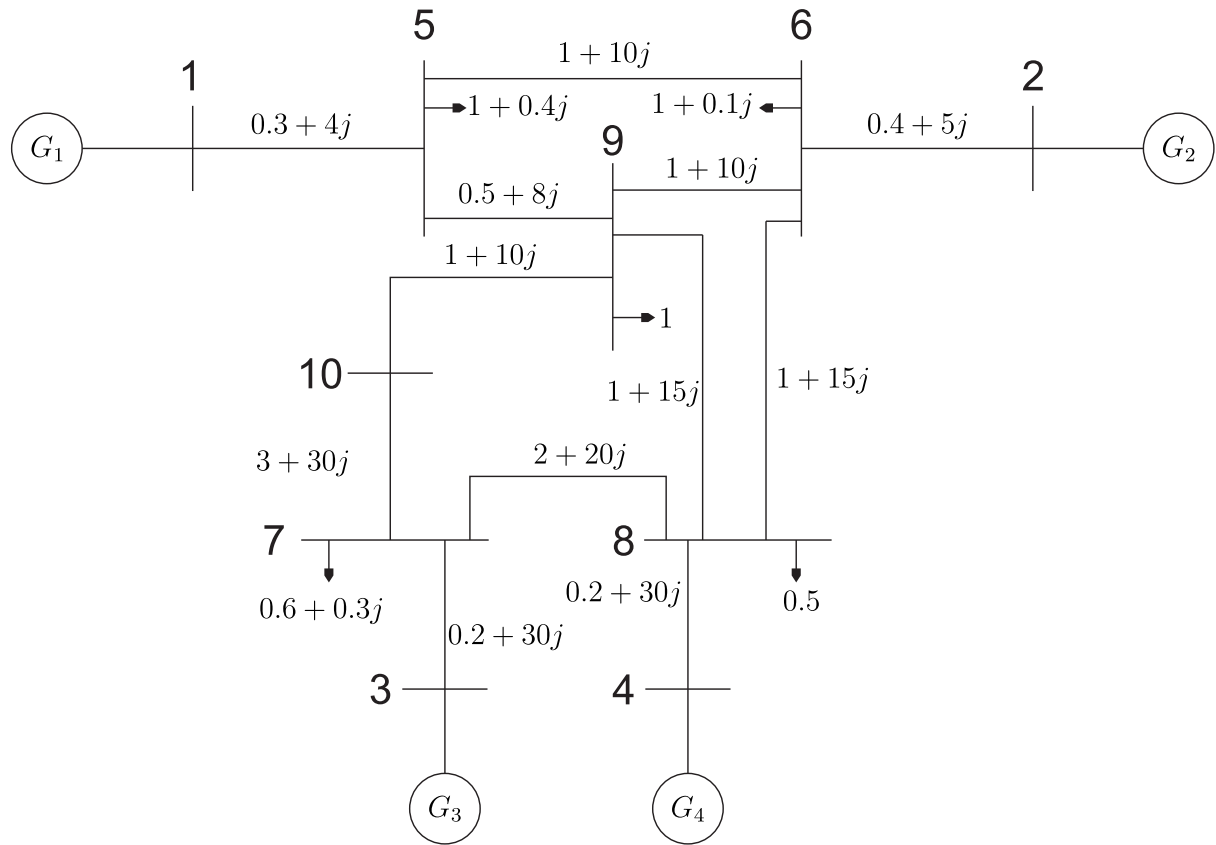
$$M_i \frac{d^2 \delta_i}{dt^2} + a_i \frac{d\delta_i}{dt} = P_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n b_{ij} \sin(\delta_{ij}) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.19)$$

onde  $t$  é o tempo,  $\delta_i$  é o ângulo elétrico em radianos entre o rotor da  $i$ -ésima máquina e da máquina de referência,  $M_i$  é o momento de inércia da  $i$ -ésima máquina,  $a_i$  é o coeficiente de amortecimento da  $i$ -ésima máquina,  $n$  é o número total de máquinas e  $\omega_i = \frac{d\delta_i}{dt}$  é a diferença de velocidade entre a  $i$ -ésima máquina e a máquina síncrona de referência.  $P_i$  e  $b_{ij}$  são dados por

$$P_i = P_{m_i} - E_i^2 G_{ii} \quad (5.20)$$

$$b_{ij} = E_i E_j B_{ij} \quad (5.21)$$

onde  $P_{m_i}$  é a potência mecânica de entrada da  $i$ -ésima máquina (considerada constante),  $E_i$  é a tensão interna da  $i$ -ésima máquina,  $G_{ii}$  é a condutância de curto-circuito da  $i$ -ésima máquina e  $B_{ij}$  é a susceptância existente entre a máquina  $i$  e a  $j$ , a qual pode ser obtida através da admitância



**Figura 5.14** – Representação de sistema multimáquina contendo 4 geradores.

entre os geradores, dada por

$$Y_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}. \quad (5.22)$$

Os parâmetros referentes a condutância de curto-circuito e a susceptância entre os geradores não estão explícitos e devem ser obtidos através da construção da matriz admitância entre os geradores. A obtenção destes valores é dada no Apêndice A e resulta na seguinte matriz admitância:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0.0186 - 0.2486j & -0.0071 + 0.0863j & -0.0028 + 0.0404j & -0.0006 + 0.0183j \\ -0.0071 + 0.0863j & 0.0159 - 0.1987j & -0.0202 + 0.2139j & -0.0005 + 0.0288j \\ -0.0028 + 0.0404j & -0.0202 + 0.2139j & 0.0002 - 0.0333j & 0.0000 + 0.0000j \\ -0.0006 + 0.0183j & -0.0005 + 0.0288j & 0.0000 + 0.0000j & 0.0002 - 0.0333j \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

onde a condutância de curto-circuito é dada pela parte real dos elementos da diagonal e a admitância entre dois geradores quaisquer é dada pelos elementos do triângulo inferior ou superior da matriz. Os demais dados necessários para a simulação referentes aos geradores são dados na Tabela 4.

As equações dos geradores (5.19) devem ser reescritas em espaço de estados e receberem

**Tabela 4** – Tabela de parâmetros das máquinas síncronas do sistema de 4 geradores.

Máquina	$E_i$	$M_i$	$\delta_i$	$P_{m_i}$	$a_i$
1	1.3	0.05	1	0.185	0.1
2	1.4	0.04	0.2	1.556	0.1
3	1.35	0.03	2.6	2.357	0.1
4	1.2	0.03	0.9	1.793	0.1

a adição do ruído de processo, resultando em

$$\dot{x}_1(t) = x_5(t) + w_1(t) \quad (5.24)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_6(t) + w_2(t) \quad (5.25)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_7(t) + w_3(t) \quad (5.26)$$

$$\dot{x}_4(t) = x_8(t) + w_4(t) \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_5(t) = & \frac{1}{\mu_1} [u_1(t) - E_1^2 G_{1,1} - a_1 x_5(t) - (E_1 E_2 B_{1,2} \text{sen}(x_1(t) - x_2(t)) + \\ & E_1 E_3 B_{1,3} \text{sen}(x_1(t) - x_3(t)) + E_1 E_4 B_{1,4} \text{sen}(x_1(t) - x_4(t)))] + w_5(t) \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_6(t) = & \frac{1}{\mu_2} [u_2(t) - E_2^2 G_{2,2} - a_2 x_6(t) - (E_2 E_1 B_{2,1} \text{sen}(x_2(t) - x_1(t)) + \\ & E_2 E_3 B_{2,3} \text{sen}(x_2(t) - x_3(t)) + E_2 E_4 B_{2,4} \text{sen}(x_2(t) - x_4(t)))] + w_6(t) \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_7(t) = & \frac{1}{\mu_3} [u_3(t) - E_3^2 G_{3,3} - a_3 x_7(t) - (E_3 E_1 B_{3,1} \text{sen}(x_3(t) - x_1(t)) + \\ & E_3 E_2 B_{3,2} \text{sen}(x_3(t) - x_2(t)) + E_3 E_4 B_{3,4} \text{sen}(x_3(t) - x_4(t)))] + w_7(t) \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_8(t) = & \frac{1}{\mu_4} [u_4(t) - E_4^2 G_{4,4} - a_4 x_8(t) - (E_4 E_1 B_{4,1} \text{sen}(x_4(t) - x_1(t)) + \\ & E_4 E_2 B_{4,2} \text{sen}(x_4(t) - x_2(t)) + E_4 E_3 B_{4,3} \text{sen}(x_4(t) - x_3(t)))] + w_8(t) \end{aligned} \quad (5.31)$$

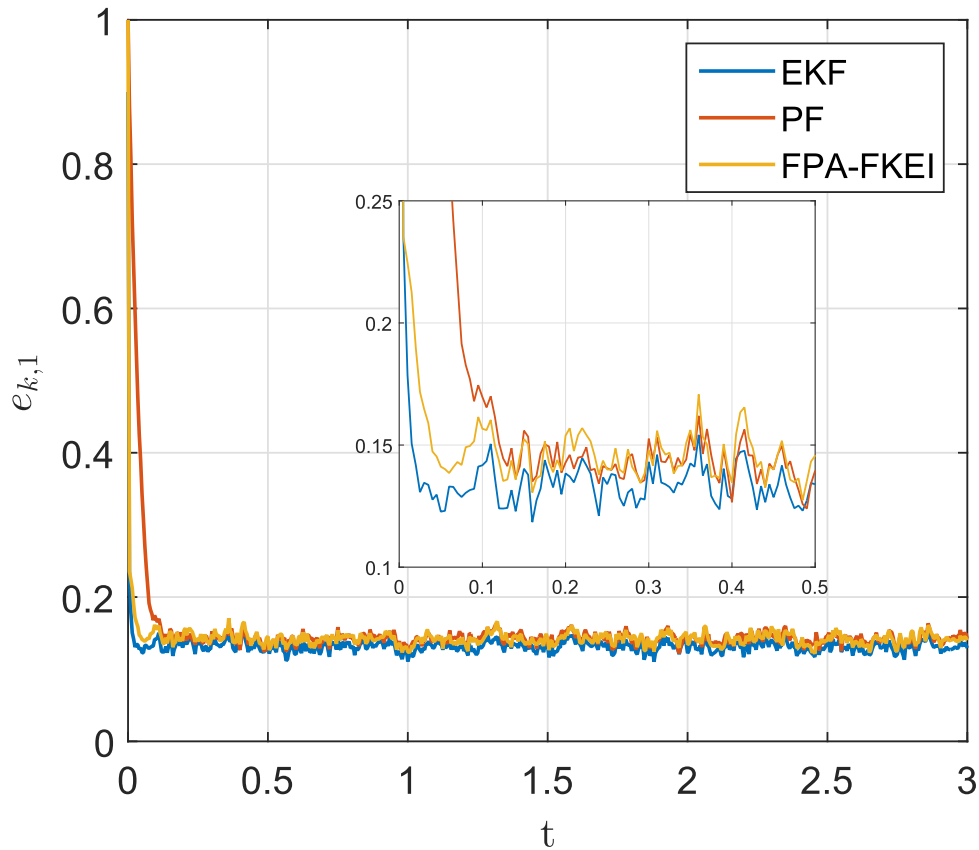
onde  $u_i(t)$  é a entrada, que consiste de  $u_i(t) = P_{m_i}$  para todo  $t$ , e  $w_i(t) \sim \mathcal{N}(0, Q_i)$  é um ruído gaussiano branco com  $Q_i = 0,01$  para  $i = 1, \dots, 4$  e  $Q_i = 0$  para  $i = 5, \dots, 8$ , possuindo uma relação sinal ruído de 27,4918 dB. A equação de saída é dada por

$$y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_4 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (5.32)$$

onde  $\mathbf{I}_4$  é a matriz identidade de dimensão 4 e  $\mathbf{v}(t) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$  é um ruído gaussiano branco, sendo  $\mathbf{R} = 0,1$ . Os estados iniciais dos ângulos do sistema estão presentes na Tabela 4 e as velocidades iniciais são nulas, formando o seguinte vetor de estados iniciais:

$$\mathbf{x}(0) = [1 \ 0,2 \ 2,6 \ 0,9 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Quanto a inicialização dos filtros, tem-se, para o FKE,  $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{P}_0 = 3\mathbf{I}$ . O FP e FPA-FKEI têm suas partículas iniciais amostradas de  $\mathcal{N}(\mathbf{0}, 3\mathbf{I})$ , sendo seus números de partículas  $N = 100$  para ambas as técnicas. O número de iterações do FPA-FKEI é  $N_{it} = 2$ . As métricas



**Figura 5.15** – Métrica  $e_{1,k}$  para o sistema multimáquina obtida através de 200 realizações de Monte Carlo.

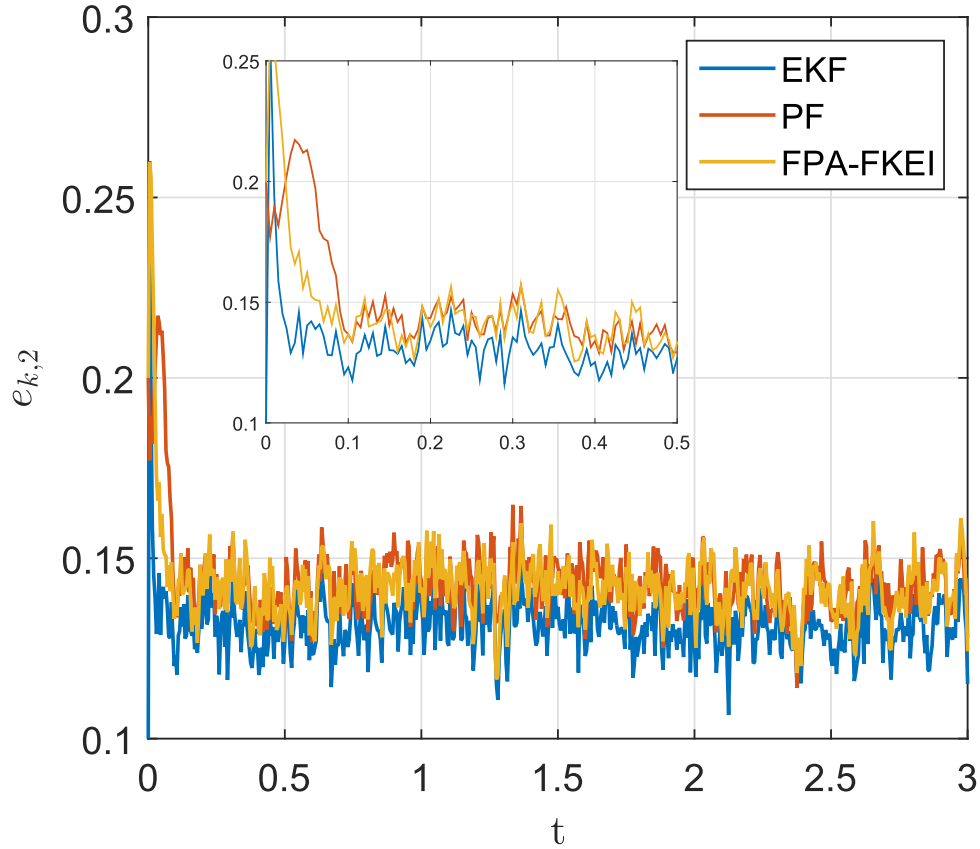
de performance  $e_{i,k}$  e  $e_k$  (versões amostradas) podem ser observadas nas Figuras 5.15 a 5.23. A métrica escalar  $e$  obtida é apresentada na Tabela 5.

**Tabela 5** – Métrica de performance escalar calculada para o sistema 3.

	EKF	PF	PFA-FKEI
$e$	0,1171	0,1199	0,1103

Nas métricas  $e_{i,k}$  para  $i = 1, \dots, 4$ , durante a região transitória, o EKF obteve um menor erro dentre as técnicas comparadas, seguido pelo FPA-FKEI, estando em último o PF, o qual tem intervalo transitório mais duradouro. Para a região de regime, tais métricas trazem o FKE com uma performance levemente melhor que as demais técnicas, o que é notado principalmente na Figura 5.16. Ainda para a região de regime, o FPA-FKEI e o FP tiveram desempenho semelhante.

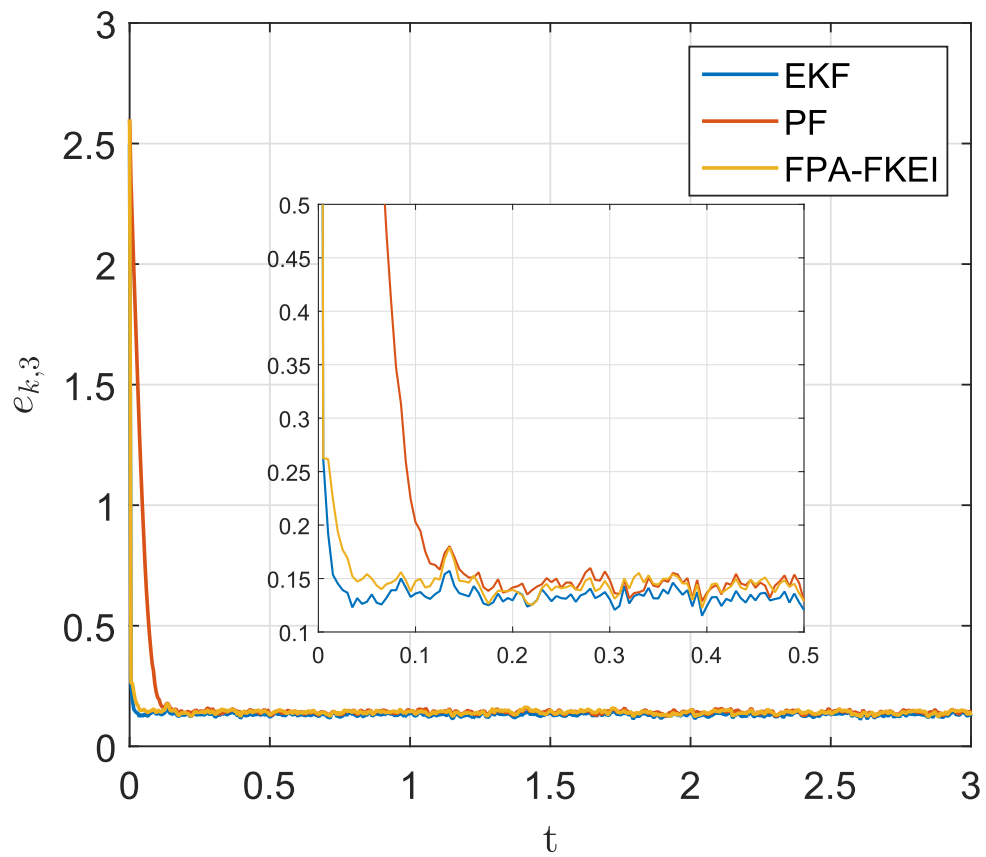
Já as métricas  $e_{i,k}$  com  $i = 5, \dots, 8$ , na região transitória, o EKF apresenta tal região com elevada duração, com destaque para  $e_{5,k}$  e  $e_{6,k}$ , onde o transitório do EKF dura em torno de 1,5 e 1 segundo, respectivamente, enquanto que o FPA-FKEI apresentou uma melhor performance que está evidenciada principalmente nas métricas  $e_{5,k}$ ,  $e_{7,k}$  e  $e_{8,k}$ . Para a região em regime, o FKE apresentou melhor resultado, deixando o FPA-FKEI com uma performance levemente melhor que o PF.



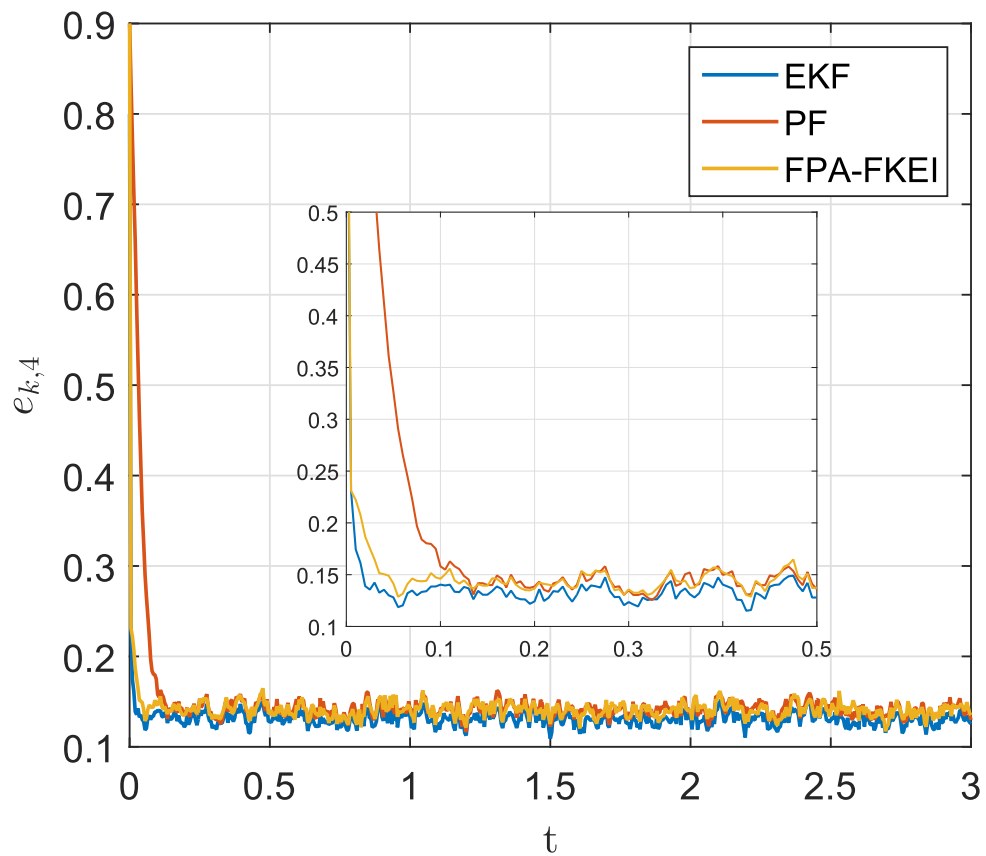
**Figura 5.16** – Métrica  $e_{2,k}$  para o sistema multimáquina obtida através de 200 realizações de Monte Carlo.

A métrica  $e_k$  mostra a performance de todos os estados de forma geral. Nela é possível observar que, durante o transitório, o FKE possui um erro elevado, enquanto que o FP converge em menos de 0,25 segundos, e o FPA-FKEI possui uma performance ainda melhor, concluindo sua fase transitória em torno de 0,15 segundos. Para a região permanente, o que já foi possível notar das métricas  $e_{i,k} \forall i$ , é que o FKE possui o menor erro, enquanto que o FPA-FKEI apresenta uma leve melhora em relação ao PF.

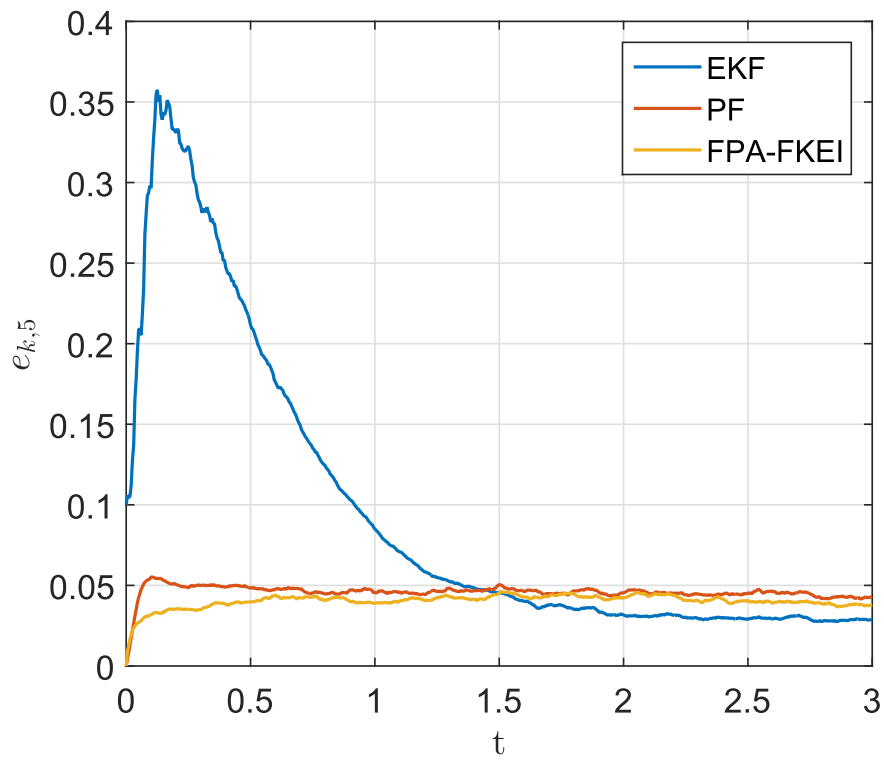
Em um contexto escalar e mais objetivo, a métrica  $e$  indica o FPA-FKEI como melhor estimador, com uma diferença de 0,0068 em relação ao EKF, o qual possui um erro, em média, próximo ao PF, cuja diferença é de 0,0028. Portanto, para esta situação de operação deste sistema de potência de 4 geradores, o FPA-FKEI obteve a melhor estimativa geral, enquanto que o FKE apresenta a melhor estimativa para a região de regime.



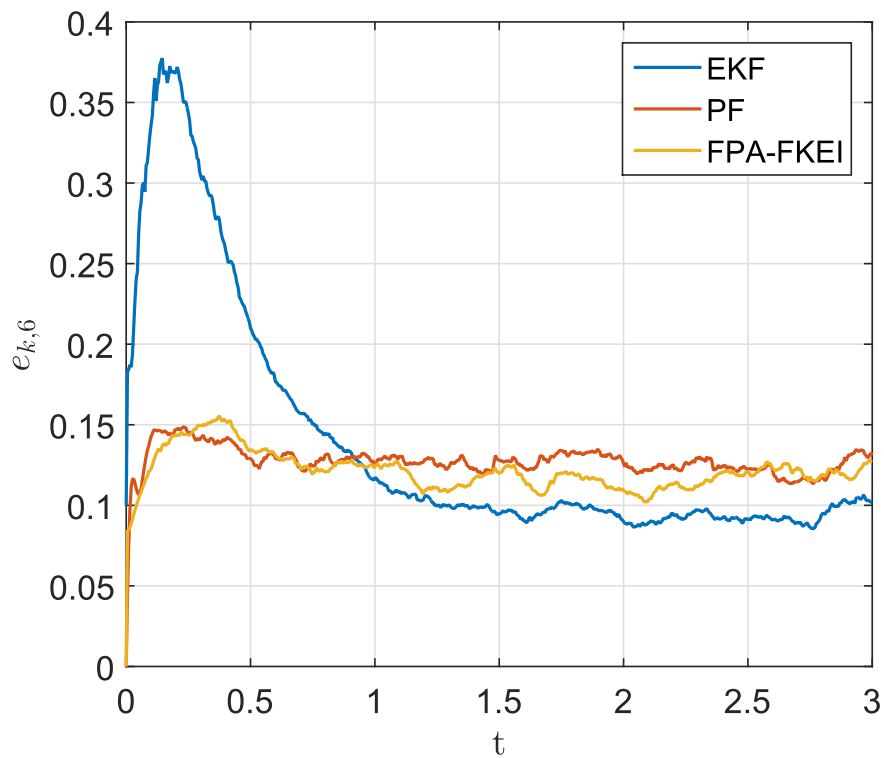
**Figura 5.17** – Métrica  $e_{3,k}$  para o sistema multimáquina obtida através de 200 realizações de Monte Carlo.



**Figura 5.18** – Métrica  $e_{4,k}$  para o sistema multimáquina obtida através de 200 realizações de Monte Carlo.

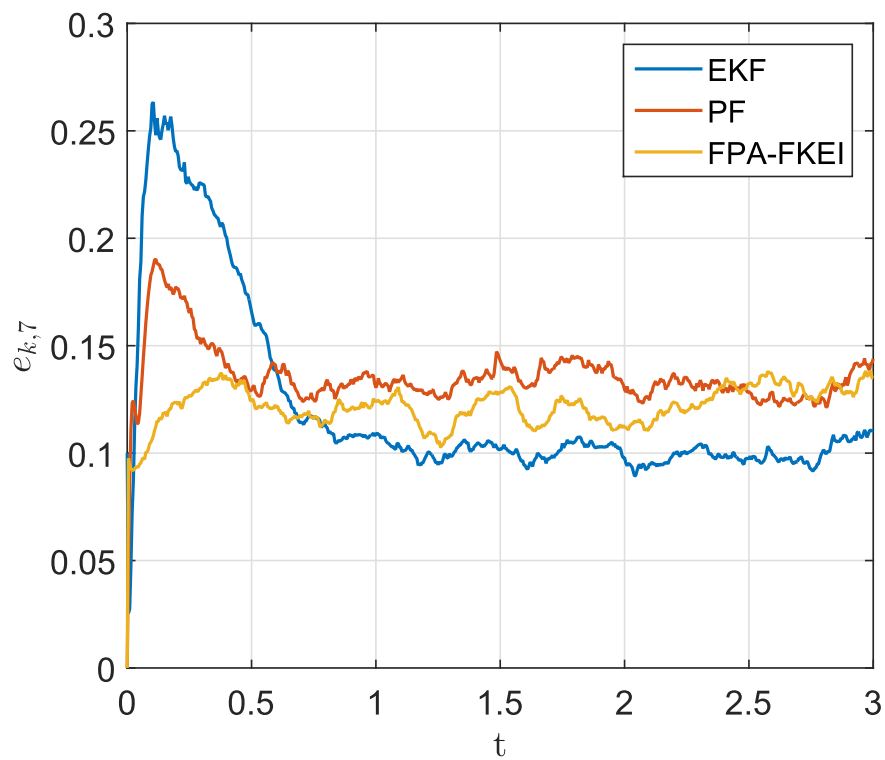


**Figura 5.19** – Métrica  $e_{5,k}$  para o sistema multimáquina obtida através de 200 realizações de Monte Carlo.

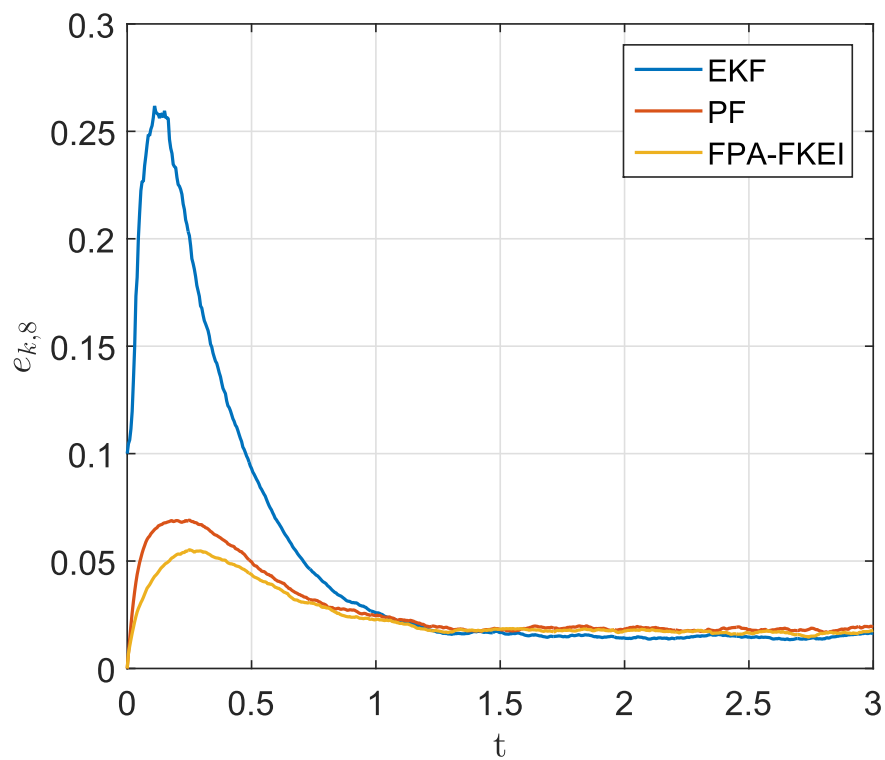


**Figura 5.20** – Métrica  $e_{6,k}$  para o sistema multimáquina obtida através de 200 realizações de Monte Carlo.

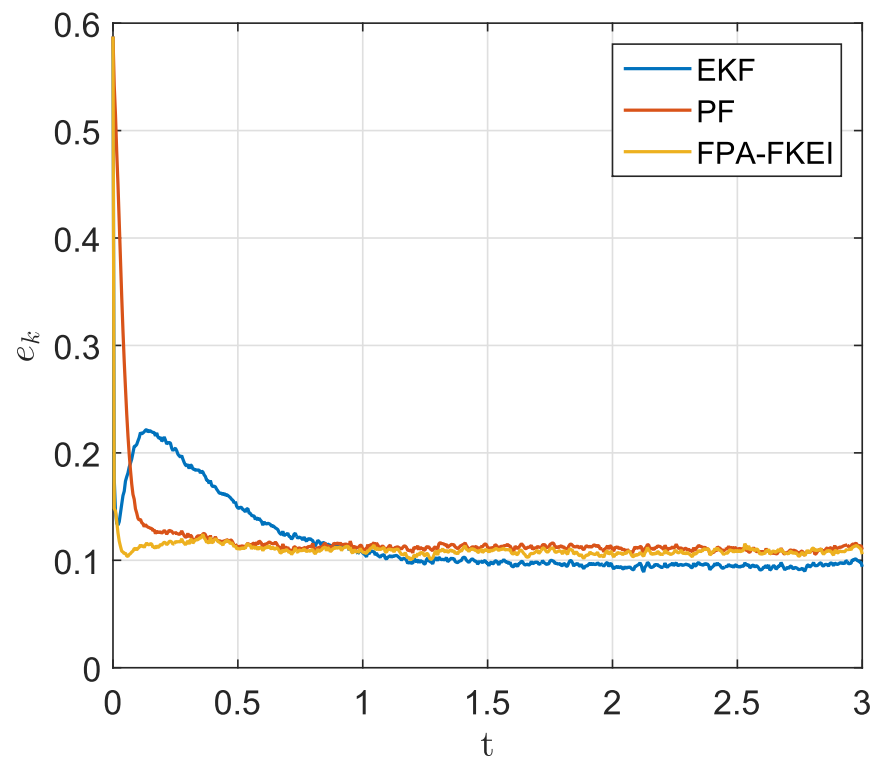




**Figura 5.21** – Métrica  $e_{7,k}$  para o sistema multimáquina obtida através de 200 realizações de Monte Carlo.



**Figura 5.22** – Métrica  $e_{8,k}$  para o sistema multimáquina obtida através de 200 realizações de Monte Carlo.



**Figura 5.23** – Métrica  $e_k$  para o sistema multimáquina obtida através de 200 realizações de Monte Carlo.

## 6 CONCLUSÃO

Esta dissertação apresentou a técnica filtro de partículas aliado ao filtro de Kalman estendido iterativo (FPA-FKEI), a qual consiste de um filtro de partículas em que duas de suas partículas são substituídas por vetores de estados obtidos através do filtro de Kalman estendido iterativo (IEKF). O método proposto foi comparado ao filtro de Kalman estendido (EKF) e ao filtro de partículas (PF) para 3 diferentes sistemas não lineares, um monovariável, um pêndulo-invertido com carro e um sistema multimáquina. A influência da inserção dos vetores de estados obtido pelo IEKF no PF, o que constitui o FPA-FKEI, resultou na melhora das métricas de performance para os 3 sistemas, e na melhor estimação para o sistema monovariável e para o sistema multimáquina. Para o pêndulo invertido, a metodologia proposta obteve uma performance próxima do melhor resultado, que foi obtido pelo EKF. Desta forma, a metodologia proposta se mostra aplicável a problemática da estimação de estados em sistemas não lineares com ruídos gaussianos, podendo superar a performance do PF e do EKF.

### 6.1 Trabalhos Futuros

Esta dissertação abre espaço para novas pesquisas envolvendo a técnica proposta. Entre elas, pode-se citar:

- o desenvolvimento de uma variação da técnica proposta considerando ruídos não estacionários;
- o desenvolvimento de uma variação da técnica proposta considerando ruídos não gaussianos;
- a ampliação da técnica proposta para considerar também casos em que as estatísticas dos ruídos são desconhecidas, o que pode envolver tanto ruídos gaussianos quanto não gaussianos, visando, desta forma, obter um FPA-FKEI robusto ao ruído;
- a ampliação da técnica proposta para considerar casos em que há incertezas na modelagem da planta, resultando em um FPA-FKEI robusto a incertezas da modelagem;
- o desenvolvimento de uma variação da metodologia proposta, utilizando uma técnica semelhante ao IEKF, tal como o filtro de Kalman *unscented* ou filtro de Kalman de cubatura, permitindo, desta forma, uma comparação entre as derivações não lineares do filtro de Kalman atuando juntamente ao filtro de partículas.

## REFERÊNCIAS

- ARULAMPALAM, M. S. et al. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking. *IEEE Transactions on signal processing*, Ieee, v. 50, n. 2, p. 174–188, 2002. Citado 8 vezes nas páginas 19, 72, 73, 76, 78, 79, 80 e 82.
- BEIDES, H. M.; HEYDT, G. T. Dynamic state estimation of power system harmonics using kalman filter methodology. *IEEE Transactions on Power Delivery*, IEEE, v. 6, n. 4, p. 1663–1670, 1991. Citado na página 33.
- BELL, B. M.; CATHEY, F. W. The iterated kalman filter update as a gauss-newton method. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 38, n. 2, p. 294–297, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 70 e 71.
- BERTSEKAS, D. P. *Nonlinear programming*. [S.l.]: Athena scientific Belmont, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 69.
- BERTSEKAS, D. P.; TSITSIKLIS, J. N. *Introduction to probability*. [S.l.]: Athena Scientific Belmont, MA, 2002. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 30.
- BONNABEL, S.; SLOTINE, J.-J. A contraction theory-based analysis of the stability of the deterministic extended kalman filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 60, n. 2, p. 565–569, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 84.
- BOX, G. E.; TIAO, G. C. *Bayesian inference in statistical analysis*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. v. 40. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 79.
- BROWN, R. G.; HWANG, P. Y. Introduction to random signals and applied kalman filtering: with matlab exercises and solutions. *Introduction to random signals and applied Kalman filtering: with MATLAB exercises and solutions*, by Brown, Robert Grover.; Hwang, Patrick YC New York: Wiley, c1997., v. 1, 1997. Citado 6 vezes nas páginas 44, 45, 50, 63, 64 e 66.
- CANDY, J. V. *Bayesian signal processing: classical, modern, and particle filtering methods*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2016. v. 54. Citado 4 vezes nas páginas 73, 74, 79 e 80.
- CHEN, C. et al. Extended real model of kalman filter for time-varying harmonics estimation. *IEEE Transactions on Power Delivery*, IEEE, v. 25, n. 1, p. 17–26, 2010. Citado na página 19.
- CHEN, C.-T. Linear system theory and design. p. 17–18;90–91, 1999. Citado 5 vezes nas páginas 22, 23, 24, 26 e 27.
- CHEN, Z. et al. Bayesian filtering: From kalman filters to particle filters, and beyond. *Statistics*, v. 182, n. 1, p. 1–69, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 72.
- CRASSIDIS, J. L.; JUNKINS, J. L. *Optimal estimation of dynamic systems*. [S.l.]: CRC press, 2011. Citado 8 vezes nas páginas 45, 46, 48, 49, 50, 51, 63 e 71.
- CUI, Y.; KAVASSERI, R. A particle filter for dynamic state estimation in multi-machine systems with detailed models. *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 30, n. 6, p. 3377–3385, 2015. Citado na página 20.

- DARWISH, M.; FANTIN, J. The application of lyapunov methods to large power systems using decomposition and aggregation techniques. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 24, n. 2, p. 247–260, 1976. Citado na página 97.
- DAUM, F. Nonlinear filters: beyond the kalman filter. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, IEEE, v. 20, n. 8, p. 57–69, 2005. Citado na página 19.
- DOUCET, A.; FREITAS, N. D.; GORDON, N. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice. Series Statistics For Engineering and Information Science*. [S.l.]: Springer New York, 2001. Citado 4 vezes nas páginas 73, 74, 77 e 79.
- GELB, A. *Applied optimal estimation*. [S.l.]: MIT press, 1974. Citado 2 vezes nas páginas 66 e 71.
- GHAHREMANI, E.; KAMWA, I. Dynamic state estimation in power system by applying the extended kalman filter with unknown inputs to phasor measurements. *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 26, n. 4, p. 2556–2566, 2011. Citado na página 19.
- GORDON, N. J.; SALMOND, D. J.; SMITH, A. F. Novel approach to nonlinear/non-gaussian bayesian state estimation. In: IET. *IEE Proceedings F (Radar and Signal Processing)*. [S.l.], 1993. v. 140, n. 2, p. 107–113. Citado 3 vezes nas páginas 72, 74 e 82.
- GREWAL, M. S. Kalman filtering. In: *International Encyclopedia of Statistical Science*. [S.l.]: Springer, 2011. p. 705–708. Citado 5 vezes nas páginas 17, 18, 35, 44 e 51.
- JACQUOT, R. G. *Modern Digital Control Sys 2e*. [S.l.]: CRC PressI Llc, 1995. v. 89. Citado 4 vezes nas páginas 37, 38, 39 e 40.
- JAZWINSKI, A. H. *Stochastic processes and filtering theory*. [S.l.]: Courier Corporation, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- KAILATH, T. *Linear systems*. [S.l.]: Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1980. v. 156. Citado 4 vezes nas páginas 24, 25, 26 e 34.
- KALMAN, R. E.; BUCY, R. S. New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of basic engineering*, American Society of Mechanical Engineers, v. 83, n. 1, p. 95–108, 1961. Citado na página 44.
- KALMAN, R. E. et al. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basic Engineering*, v. 82, n. 1, p. 35–45, 1960. Citado 3 vezes nas páginas 18, 44 e 84.
- KALOS, M. H.; WHITLOCK, P. A. *Monte carlo methods*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 77.
- LATHI, B. P. *Signal processing and linear systems*. [S.l.]: Oxford university press New York, 1998. Citado 5 vezes nas páginas 17, 22, 23, 24 e 25.
- LEWIS, F. L.; XIE, L.; POPA, D. *Optimal and robust estimation: with an introduction to stochastic control theory*. [S.l.]: CRC press, 2007. v. 29. 151-156 p. Citado 4 vezes nas páginas 25, 46, 52 e 66.
- LI, G.; YANG, H. Iterated square root unscented kalman particle filter. In: IEEE. *Information Computing and Telecommunications (YC-ICT), 2010 IEEE Youth Conference on*. [S.l.], 2010. p. 222–225. Citado na página 20.

- LI, W. et al. Weighted average consensus-based unscented kalman filtering. *IEEE transactions on cybernetics*, IEEE, v. 46, n. 2, p. 558–567, 2016. Citado na página 67.
- LIANG, F.; LIU, C.; CARROLL, R. *Advanced Markov chain Monte Carlo methods: learning from past samples*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. v. 714. Citado 5 vezes nas páginas 73, 74, 75, 77 e 78.
- LINDSEY, J. K. *Statistical analysis of stochastic processes in time*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. v. 14. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 32.
- LUENBERGER, D. G. Observing the state of a linear system. *IEEE transactions on military electronics*, IEEE, v. 8, n. 2, p. 74–80, 1964. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 84.
- LUENBERGER, D. G. D. G. *Introduction to dynamic systems; theory, models, and applications*. [S.l.], 1979. Citado 7 vezes nas páginas 17, 22, 23, 33, 34, 37 e 38.
- MA, H.; GIRGIS, A. A. Identification and tracking of harmonic sources in a power system using a kalman filter. *IEEE Transactions on Power Delivery*, IEEE, v. 11, n. 3, p. 1659–1665, 1996. Citado na página 33.
- MANOLAKIS, D. G.; INGLE, V. K.; KOGON, S. M. *Statistical and adaptive signal processing: spectral estimation, signal modeling, adaptive filtering, and array processing*. [S.l.]: McGraw-Hill Boston, 2000. Citado 6 vezes nas páginas 27, 28, 30, 31, 32 e 33.
- MENEGAZ, H. M. et al. A systematization of the unscented kalman filter theory. *IEEE Transactions on automatic control*, IEEE, v. 60, n. 10, p. 2583–2598, 2015. Citado na página 68.
- MERWE, R. V. D. et al. The unscented particle filter. In: *Advances in neural information processing systems*. [S.l.: s.n.], 2001. p. 584–590. Citado na página 20.
- METROPOLIS, N.; ULAM, S. The monte carlo method. *Journal of the American statistical association*, Taylor & Francis Group, v. 44, n. 247, p. 335–341, 1949. Citado na página 77.
- NIU, X.-l. et al. An improvement on the iterated kalman filter. In: *IET. Radar Conference, 2009 IET International*. [S.l.], 2009. p. 1–4. Citado 2 vezes nas páginas 70 e 71.
- PAPOULIS, A.; PILLAI, S. U. *Probability, random variables, and stochastic processes*. [S.l.]: Tata McGraw-Hill Education, 2002. Citado 5 vezes nas páginas 27, 28, 30, 32 e 33.
- PARK, S. et al. A new evolutionary particle filter for the prevention of sample impoverishment. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 13, n. 4, p. 801–809, 2009. Citado na página 80.
- PROHMANN, E. A. V.; SOUZA, F. C. de. Desenvolvimento de um filtro de partículas aliado ao filtro de kalman estendido iterativo para estimação de estados de sistemas não lineares com ruído gaussiano. In: *SBA. XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI)*. [S.l.], 2017. p. 809 – 814. Citado na página 92.
- ROBERT, C. P. *Monte carlo methods*. [S.l.]: Wiley Online Library, 2004. Citado na página 74.
- SANTOS, R. J. M.; SOUZA, F. C. de. Controle h-infinito baseado na equação de riccati dependente das variáveis de estado aplicado a um sistema carro-pêndulo invertido. In: *SBA. XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI)*. [S.l.], 2017. p. 650 – 655. Citado na página 92.

SÄRKKÄ, S. *Bayesian filtering and smoothing*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. v. 3. Citado 8 vezes nas páginas 19, 25, 63, 67, 68, 73, 74 e 75.

SIMON, D. *Optimal state estimation: Kalman,  $H_\infty$ , and nonlinear approaches*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2006. Citado 19 vezes nas páginas 17, 18, 19, 23, 25, 44, 45, 46, 50, 51, 56, 63, 66, 68, 70, 72, 76, 82 e 84.

THERRIEN, C. W. *Discrete random signals and statistical signal processing*. [S.l.]: Prentice Hall PTR, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 33.

WANG, W. et al. Particle filter based on improved genetic algorithm resampling. In: IEEE. *Guidance, Navigation and Control Conference (CGNCC), 2016 IEEE Chinese*. [S.l.], 2016. p. 346–350. Citado na página 80.

WIENER, N. *Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series*. [S.l.]: MIT press Cambridge, MA, 1949. v. 7. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 44.

YIN, S.; ZHU, X. Intelligent particle filter and its application to fault detection of nonlinear system. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, IEEE, v. 62, n. 6, p. 3852–3861, 2015. Citado na página 80.

ZHANG, J. et al. A two-stage kalman filter approach for robust and real-time power system state estimation. *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, IEEE, v. 5, n. 2, p. 629–636, 2014. Citado na página 33.

ZHOU, N. et al. Dynamic state estimation of a synchronous machine using pmu data: A comparative study. *IEEE Transactions on Smart Grid*, IEEE, v. 6, n. 1, p. 450–460, 2015. Citado na página 19.

ZUO, J.; JIA, Y. Particle filter guided by iterated extended kalman filter. In: IEEE. *Control, Automation and Systems (ICCAS), 2013 13th International Conference on*. [S.l.], 2013. p. 1605–1609. Citado na página 20.

ZUO, J.-Y. et al. Adaptive iterated particle filter. *Electronics letters*, IET, v. 49, n. 12, p. 742–744, 2013. Citado na página 20.

## **Apêndices**



## APÊNDICE A – MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS DE POTÊNCIA

As admitâncias de curto-circuito correspondem à diagonal da matriz admitância construída para o cálculo do fluxo de potência do sistema. A admitância de curto-circuito é dada por

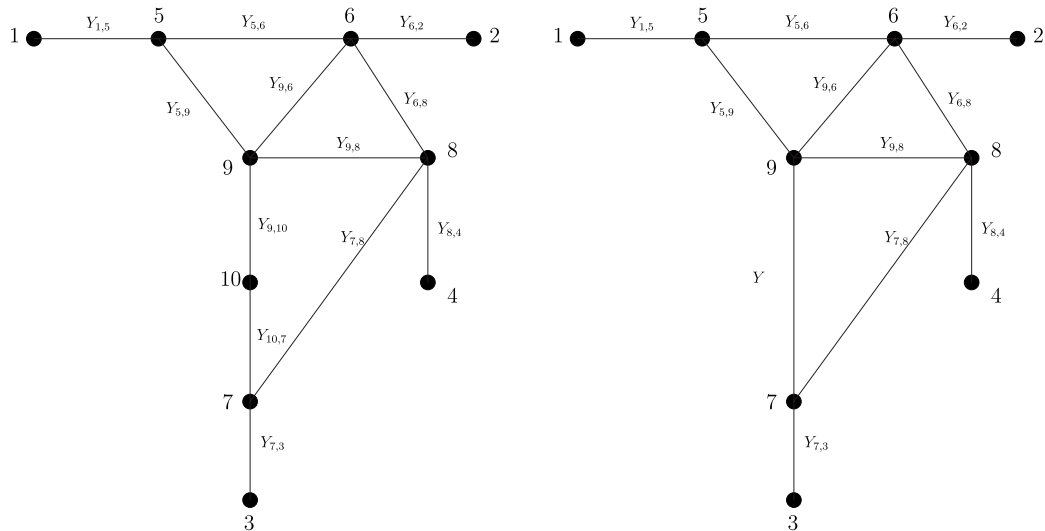
$$Y_{i,i} = Y_i^{sh} + \sum_{j \in \Omega i}^{N_{bar}} (Y_{i,j} + Y_{i,j}^{sh}) \quad (A.1)$$

onde  $Y_{i,i}$  é a admitância de curto-circuito da barra  $i$ ,  $Y_i^{sh}$  é a admitância dos elementos ligados diretamente a barra  $i$  e a terra,  $\Omega i$  é o conjunto de barras adjacentes a barra  $i$ ,  $N_{bar}$  é o número de barras adjacentes,  $Y_{i,j}$  é a admitância da linha que liga a barra  $i$  a barra  $j$  e  $Y_{i,j}^{sh}$  é a admitância de elementos em derivação (susceptância capacitiva da linha).

A admitância entre os geradores é obtida através da simplificação do sistema de potência. Dada uma representação simplória do sistema como na Figura A.1a. Calculando a admitância série existente entre as barras 7 e 9, resulta no diagrama da Figura A.1b. A admitância equivalente do trecho 7 a 9 é dada por

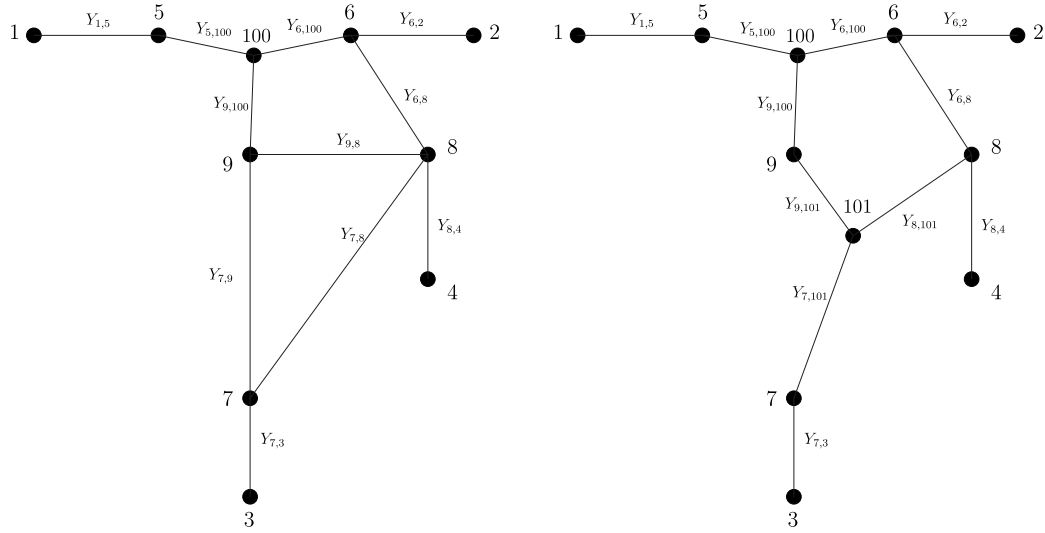
$$Y_{7,9} = \frac{Y_{9,10} + Y_{10,7}}{Y_{9,10} Y_{10,7}}. \quad (A.2)$$

Em seguida, aplica-se a transformação triângulo-estrela no triângulo existente entre as barras 5,6 e 9. Fazendo surgir uma barra fictícia, a qual é numerada de barra 100. As admitâncias entre as



(a) Representação do sistema de 4 geradores (b) Substituição da linha entre as barras 7 e 9 sem alterações. pela admitância equivalente.

**Figura A.1** – Representação do diagrama de barras do sistema multimáquina com 4 máquinas em que os círculos representam as barras e as linhas que ligam os círculos representam as admitâncias entre as barras.



(a) Transformação da configuração triângulo existente entre os nós 5, 6 e 9 para estrela, surgindo um nó fictício enumerado como 100.

(b) Transformação da configuração triângulo existente entre os nós 7, 8 e 9 para estrela, surgindo um nó fictício enumerado como 101.

**Figura A.2** – Representação do diagrama de barras do sistema multimáquina com 4 máquinas em que os círculos representam as barras e as linhas que ligam os círculos representam as admitâncias entre as barras.

barras 5 e 100, 6 e 100, 9 e 100 são dadas por

$$Y_{5,100} = \frac{Y_{5,6}Y_{5,9} + Y_{5,6}Y_{6,9} + Y_{5,9}Y_{6,9}}{Y_{6,9}} \quad (\text{A.3})$$

$$Y_{6,100} = \frac{Y_{5,6}Y_{5,9} + Y_{5,6}Y_{6,9} + Y_{5,9}Y_{6,9}}{Y_{5,9}} \quad (\text{A.4})$$

$$Y_{9,100} = \frac{Y_{5,6}Y_{5,9} + Y_{5,6}Y_{6,9} + Y_{5,9}Y_{6,9}}{Y_{5,6}} \quad (\text{A.5})$$

e a representação se dá como na Figura A.2a. Da mesma forma, o triângulo entre as barras 7, 8 e 9 é transformado em estrela. A barra fictícia criada é numerada 101. As admitâncias dos novos trechos são dadas por

$$Y_{9,101} = \frac{Y_{8,9}Y_{7,8} + Y_{8,9}Y_{9,7} + Y_{7,8}Y_{9,7}}{Y_{7,8}} \quad (\text{A.6})$$

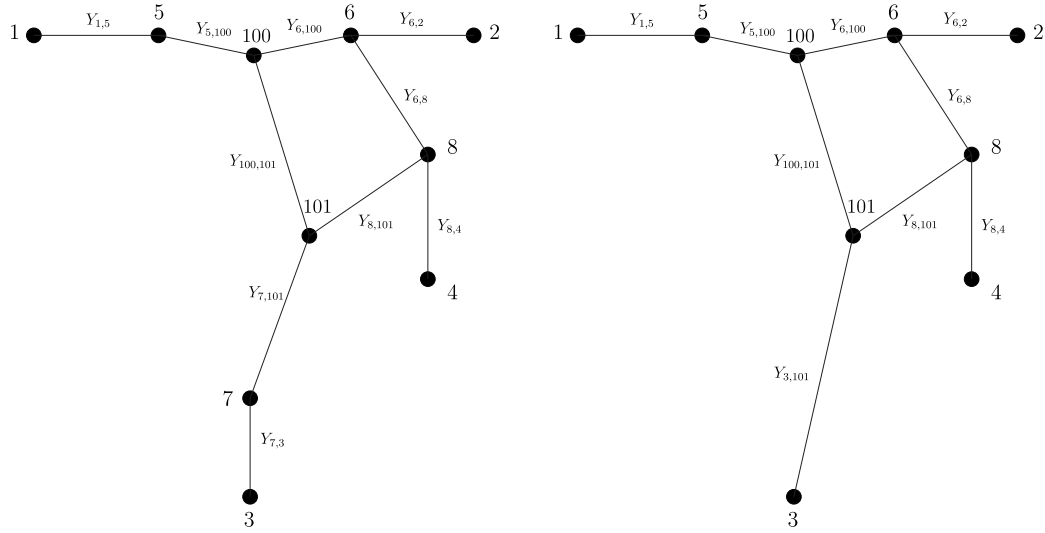
$$Y_{8,101} = \frac{Y_{8,9}Y_{7,8} + Y_{8,9}Y_{9,7} + Y_{7,8}Y_{9,7}}{Y_{7,9}} \quad (\text{A.7})$$

$$Y_{7,101} = \frac{Y_{8,9}Y_{7,8} + Y_{8,9}Y_{9,7} + Y_{7,8}Y_{9,7}}{Y_{8,9}} \quad (\text{A.8})$$

e o diagrama é dado como na Figura A.2b. A admitância entre as barras 100 e 101 pode ser dada diretamente, calculando a admitância série envolvendo  $Y_{9,100}$  e  $Y_{9,101}$ . Portanto, tem-se que a admitância resultante é dada por

$$Y_{100,101} = \frac{Y_{9,100} + Y_{9,101}}{Y_{9,100}Y_{9,101}} \quad (\text{A.9})$$

Em seguida, a admitância entre as barras 3 e 101 também pode ser dado diretamente, calculando a admitância série envolvendo  $Y_{7,101}$  e  $Y_{7,3}$ . Portanto, tem-se que a admitância resultante é dada



(a) Substituição da linha entre as barras 100 e 101 pela admitância equivalente. (b) Substituição da linha entre as barras 3 e 101 pela admitância equivalente.

**Figura A.3** – Representação do diagrama de barras do sistema multimáquina com 4 máquinas em que os círculos representam as barras e as linhas que ligam os círculos representam as admitâncias entre as barras.

por

$$Y_{3,101} = \frac{Y_{7,3} + Y_{7,101}}{Y_{7,3}Y_{7,101}} \quad (\text{A.10})$$

Com o sistema já reconfigurado, pode-se facilmente encontrar a admitância existente entre 2 máquinas aterrando as restantes e encontrando a admitância equivalente entre os 2 pontos de interesse. A matriz admitância entre as máquinas encontrada foi

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0.0186 - 0.2486j & -0.0071 + 0.0863j & -0.0028 + 0.0404j & -0.0006 + 0.0183j \\ -0.0071 + 0.0863j & 0.0159 - 0.1987j & -0.0202 + 0.2139j & -0.0005 + 0.0288j \\ -0.0028 + 0.0404j & -0.0202 + 0.2139j & 0.0002 - 0.0333j & 0.0000 + 0.0000j \\ -0.0006 + 0.0183j & -0.0005 + 0.0288j & 0.0000 + 0.0000j & 0.0002 - 0.0333j \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Desta matriz admitância é possível retirar a condutância de curto-circuito dada pela parte real dos elementos da diagonal e também a admitância entre dois geradores quaisquer, dada pelos elementos do triângulo inferior ou superior da matriz.