Universidade Federal do Maranhão - ufma
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia - ccet
Programa de Pós-Graduação em Matemática - ppgmat
Dissertação de Mestrado

Carla Regina da Silva Santos

controlabilidade nula e aproximada para uma equação parabólica não linear

São Luís - MA
2018

Carla Regina da Silva Santos

CONTROLABILIDADE NULA E APROXIMADA PARA UMA EQUAÇÃO PARABÓLICA NÃO LINEAR

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo.

São Luís - MA

2018

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Santos, Carla Regina da Silva.
CONTROLABILIDADE NULA E APROXIMADA PARA UMA EQUAÇÃO PARABÓLICA NÃO LINEAR / Carla Regina da Silva Santos. - 2018.
90 p.

Orientador(a): Marcos Antônio Ferreira de Araújo.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2018.

1. Controlabilidade. 2. Desigualdade de Carleman. 3. Desigualdade de Observabilidade. I. Araújo, Marcos Antônio Ferreira de. II. Título.

Carla Regina da Silva Santos

CONTROLABILIDADE NULA E APROXIMADA PARA UMA EQUAÇÃO PARABÓLICA NÃO LINEAR

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Maranhão como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 23 de abril de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo (Orientador)
UFMA

Profª. Drª Renata De Farias Limeira Carvalho
UFMA

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra
UFPB

Aos meus pais pelo apoio e motivação durante toda a minha vida acadêmica pois sem eles eu não conseguiria chegar até aqui.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ser o grande compositor de todas as melodias da minha vida. Sem ele, nada seria possível.

Aos meus pais, José dos Santos e Maria do Socorro da Silva Santos, presentes em todos os momentos.

A todos os professores que ao longo desta jornada tem contribuído para minha formacão, em particular ao Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo pela orientação, paciência e por acreditar em minha potencialidade.

A todos os colegas da Pós-Graduação, em especial a William Luis Lima Pereira, Felipe Ferreira Olivera e Daylane Ferreira Ribeiro por todo impulso que me deram nos momentos mais relevantes, pelas palavras de conforto e pelos momentos de entretenimento.

*"A mente que se abre a uma nova ideia
jamais volta ao seu tamanho original."*

Albert Einstein

RESUMO

A teoria de controle matemático é uma área da matemática aplicada que se ocupa da análise de sistemas de controle de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) ou de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Essa teoria teve um grande desenvolvimento com os trabalhos de Russel, J. L. Lions, O.Yu. Imanuvilov, A. V. Fursikov, E. Zuazua, dentre outros. Neste trabalho estudaremos a controlabilidade nula e aproximada de uma equação parabólica: a equação não linear do calor. Nossa prova baseia-se no fato de que a não linearidade é globalmente Lipschitz. Assim, demonstraremos a existência de um controle u em um espaço com peso que ao atuar no domínio, conduz o sistema ao estado de equilíbrio. Mostramos que controlabilidade nula pode ser obtida através da desigualdade de Carleman , da desigualdade observabilidade e empregando-se os argumentos do Teorema do ponto fixo para uma aplicacão de múltiplos valores. No caso da controlabilidade aproximada, utilizando a desigualdade de Carleman, mostraremos que o conjunto de estados admissíveis $R_L(T)$ é denso em $L^2(\Omega)$.

Palavras-chave: Controlabilidade. Desigualdade de Carleman. Desigualdade de Observabilidade.

ABSTRACT

The Mathematical control theory is an area of applied mathematics that deals with the analysis of Partial Differential Equations (EDPs) or Ordinary Differential Equations (ODE) control systems. This theory had a great development with the works of Russel, J. Lions, O.Yu. Imanuvilov, A. V. Fursikov, E. Zuazua, among others. In this work we will study the null and approximate controllability of a parabolic equation: the nonlinear heat equation. Our proof is based on the fact that non-linearity is globally Lipschitz. Thus, we will demonstrate the existence of a control u in a space with weight that, when acting in the domain, leads the system to the state of equilibrium. We show that null controllability can be obtained through Carleman's inequality, inequality of observability and using the arguments of the fixed-point theorem for a multi-value application. In the case of approximate controllability, using Carleman's inequality, we show that the set of admissible states $R_L(T)$ is dense in $L^2(\Omega)$.

Keywords: Controllability. Carleman Inequality. Inequality of Observability.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Desde os tempos mais remotos, a humanidade sempre interessou-se por investigar o comportamento de determinados fenômenos da natureza. No decorrer de tais averigações, uma pergunta natural que surge é a possibilidade de agir ou influenciar tal fenômeno de modo a obter um comportamento desejado. Assim, a principal vocábulo presente em tais indagações é o de *controle*.

A palavra *controle* tem um duplo significado. Primeiro, controlar um sistema pode ser entendido simplismente testando ou certificando-se que seu comportamento é satisfatório. Em um sentido mais profundo, o controle é também agir, com a finalidade de garantir que o sistema se comporte como desejado. Por outro lado, os problemas de controle além de possuirem como característica uma incógnita natural, o estado, que queremos controlar, possuem também uma outra variável a nossa disposição, o controle, que atua sobre o estado com o intuito de alcançar ou aproximar os objetivos almejados.

Relembrando um pouco a história, verificamos que os romanos foram um dos primeiros povos a utilizar alguns elementos da teoria de controle na construção de seus arquedutos. Mais precisamente, sistemas engenhosos regulavam válvulas de modo a obter o nível de água constante. Além disso, muitos estudiosos afirmam que na Antiga Mesopotâmia, mais de 2000 anos antes de Cristo, o sistema de controle de irrigação também era uma arte conhecida.

Os trabalhos de Ch. Huygens e R. Hooke no final no século XVII sobre oscilação do pêndulo é um dos modelos mais modernos no desenvolvimento da teoria de controle. O objetivo deles era alcançar uma medida precisa de tempo e localização, os quais são tão valiosos na navegação. Estes trabalhos futuramente foram adaptados para regular a velocidade de moinhos de vento. Posteriormente, J. Watt adaptou este modelo em seu motor a vapor que constitui um mecanismo importantíssimo na Revolução Industrial. Neste mecanismo, quando a velocidade das esferas aumentava, uma ou várias esferas destapavam algumas válvulas diminuindo a pressão e reduzindo a velocidade, consequentemente as esferas voltavam a tapar as válvulas novamente de modo a aumentar velocidade. Este mecanismo tinha por objetivo controlar a velocidade de forma a ficar aproximadamente constante.

O astrônomo britânico G. Aéreo foi o primeiro cientista a analisar matematicamente o sistema regulador inventado por Watt. Porém a primeira descrição matemática definitiva só foi dada nos trabalhos de J. C. Maxwell, em 1968, onde alguns dos comportamentos irregulares encontrados na máquina a vapor eram descritos e alguns mecanimsos de controle foram propostos. Assim, podemos dizer que a teoria de controle possui uma vasta literatura cuja origem encontra-se na Revolução Industrial, pois foi naquela época que surgiu a automatização dos processos de produção e, com ela, a necessidade de garantir que o objetivo buscado fosse almejado. Por outo lado, no final dos anos 30 já se pensava em dois modos de abordar os problemas de controle: a utilização de equações diferenciais e, portanto, os desenvolvimentos matemáticos notáveis que haviam-se produzido neste campo nos séculos XVIII e XIX, e a utilização das técnicas em análise frequencial, desenvolvidas pelo matemático francês Joseph Fourier.

R. Kalman, um dos grandes protagonistas da teoria de controle moderna, em seu artigo [23] de 1974 sinalizava que, no futuro, os avanços na teoria de controle e a otimização de sistemas complexos vinham da mão de grandes progressos matemáticos mais que dos tecnológicos e, embora hoje não seja tão forte essa afirmação, o papel da matemática tem crescido bastante nas últimas décadas na teoria de controle. A partir dos anos 60 é reconhecida a necessidade de entrar no mundo do não-linear e do não determinístico que culminou na necessidade de utilizar cada vez mais a matemática para descobrir os mistérios do controle de sistemas.

A controlabilidade de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) tem sido objeto de um estudo intenso durante as duas últimas décadas. Em 1965 Markus [34] introduziu o conceito de controlabilidade de sistemas descritos por Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Já controlabilidade de EDPs, teve um grande impulso com os trabalhos de Russel em [38] e [39], quando em 1978 publicou um artigo onde apresentava uma boa perspectiva sobre os resultados mais relevantes que até esse momento haviam sido desenvolvidos. Esses frequentemente estavam relacionados com outras áreas de EDPs: multiplicadores, análise de Fourier não-harmônica, etc. Desde então, diversos autores tem contribuído com resultados significativos para o estudo da controlabilidade. Neste contexto podemos citar J. L. Lions que nos anos 80 em [31] e [32] apresentou o Método de Unicidade Hilbertiana (HUM). O HUM consiste em reduzir o problema da controlabilidade exata de sistemas lineares em um resultado de continuação única, que é equivalente a encontrar uma desigualdade de observabilidade para o sistema adjunto homogêneo.

As principais contribuições para área de controlabilidade nula de sistemas de equações parabólica são devidas a O.Yu. Imanuvilov e a M. Yamamoto, que em [20] e [21] popularizaram o uso de estimativas globais de Carleman no contexto da controlabilidade nula. Outro colaborador relevante foi E. Zuazua, que foi capaz de deduzir resultados globais de controlabilidade para alguns sistemas não-lineares pela primeira vez em [42].

Vamos indicar brevemente como os problemas de controle são apesentados, hoje em dia, em termos matemáticos. Para fixar as ideias , suponha que desejamos obter um bom comportamento de um sistema físico governado pela equação estado

$$A(y) = f(v) \tag{1.1}$$

onde y é a solução, o estado, a variável, pertencente ao espaço vetorial Y, que fornece informações sobre o " status " do sistema e v é o controle, a variável que podemos escolher livremente no conjunto de controles admissíveis $\mathcal{U}_{ad}$ para atuar sobre o mesmo.

Consideremos $A : D(A) \subset Y \to Y$ e $f : \mathcal{U}_{ad} \to Y$ duas aplicações (lineares ou não lineares). O operador A determina a equação que deve ser satisfeita pela variável estado y, de acordo com as leis da física. A função f indica a forma como o controle v atua sobre o sistema. Por simplicidade, assumamos que, para cada $v \in \mathcal{U}_{ad}$, a equação (1.1) possua exatamente uma solução $y = y(v)$ em Y . Então, de acordo com Zuazua [41], " controlar " o sistema (1.1) é encontrar v em $\mathcal{U}_{ad}$ de modo que a solução de (1.1) verifique um objetivo pré fixado. Quando esta propriedade é satisfeita, diz-se que o sistema é controlável. Veremos que, quando o sistema é controlável, o controle pode ser construído por minimização de um funcional (funcional custo). Entre todos os controles admissíveis, o controle obtido pela minimização do funcional é de norma mínima, e é frequentemente chamado de " melhor controle ".

O trabalho que aqui apresentamos constitui minha dissertação de mestrado, apresentada como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. Ele é baseado no artigo devido a J. Limaco, H. R. Clark, S. B. Menezes e L. A. Medeiros apresentado na referência [29] cujo título é *Carleman Inequality and Null Controllability for Parabolic Equations.*

O objetivo deste trabalho é obter a controlabilidade nula e aproximada e da equação não linear do calor em um domínio cilíndrico onde assumimos que a não linearidade é globalmente Lipschitz. Para atingir nosso objetivo, necessitaremos do auxílio de uma desigualdade de Carleman , de uma desigualdade de observabilidade e do Teorema do ponto Fixo de Kakutani.

Buscando uma abordagem significativa referente ao problema de controle, o presente trabalho está dividido como segue:

No primeiro capítulo apresentamos algumas noções básicas sobre distribições, espaços L^p, espaços de Sobolev, espaços envolvendo tempo e alguns resultados clásssicos que são de grande importância para a compreensão do estudo proposto. Contudo, não apresentaremos a demonstração dos resultados aqui apresentados, mas citaremos as referências onde os mesmos poderão ser encontrados.

No segundo capítulo apresentaremos a formulação do problema de controlabilidade bem como a definição de controlabilidade nula e controlabilidade aproximada. Entretanto, não demostraremos a existência e unicidade de soluções para o sistema (3.1) visto que existem muitos resultados na literatura falando sobre tal questão.

No terceiro capítulo enuciaremos e demostraremos a desigualdade de Carleman para o sistema adjunto (3.3).

No quarto capítulo provamos a desigualdade de observabilidade para o sistema adjunto (3.3).

No quinto capítulo estudamos o problema de controlabilidade nula e aproximada para a equação não linear do calor.

2 PRELIMINARES

O presente capítulo tem por objetivo apresentar algumas definições e os principais resultados que são necessários ao desenvolvimento deste trabalho, bem como fixar as notações que serão utilizadas nos próximos capítulos. Desta forma, não apresentaremos as demonstrações dos resultados utilizados, mas citaremos as referências onde as mesmas poderão ser encontradas.

2.1 Distribuições

Sejam $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ pontos de $\mathbb{R}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, n-uplas de inteiros não negativos. Considerando $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ e $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n!$, denotaremos o operador derivação em $\mathbb{R}^n$ por:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Definição 2.1.1. Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Definimos o suporte de f, o qual denotamos por $supp(f)$, como sendo o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$. Se esse conjunto for um compacto de $\mathbb{R}^n$, então dizemos que f possui suporte compacto.

Representa-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções continuamente e infinitamente diferenciáveis em Ω e com suporte compacto em Ω.

A seguir, definiremos uma noção de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$ que o tornará um espaço vetorial topológico.

Definição 2.1.2. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que:

(i) $supp(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) a sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ uniformemente em K, juntamente com suas derivadas de todas as ordens.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, munido da noção de convergência acima , é chamado de *Espaço das Funções Testes sobre* Ω e é representado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 2.1.3. Denomina-se distribuição sobre um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a toda forma linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ contínua no sentido da convergência em $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é,

(i) $T(a\varphi + b\psi) = aT(\varphi) + bT(\psi)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$;

(ii) Se φ_n converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $T(\varphi_n)$ converge para $T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

Observação 2.1.1. O valor da distribuição T em φ, representa-se por $\langle T, \varphi \rangle$.

Definição 2.1.4. Considere-se o espaço vetorial de todas as distribuições sobre Ω. Neste espaço, diz-se que a sucessão $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para T, quando a sucessão $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$, para toda φ em $\mathcal{D}(\Omega)$.

O espaço das distribuições sobre Ω, com esta noção de convergência, é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Denotaremos por $L^1_{loc}(\Omega)$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $|u|$ é integrável no sentido de Lesbegue sobre cada compacto $K \subset \Omega$.

Exemplo 1. Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. O funcional $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ é uma distribuição .

De fato, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, a integral existe, pois φ possui suporte compacto K contido em Ω. Sendo T_u linear, para provar que T_u é uma distribuição é suficiente demonstrar que ela é contínua. Assim para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tem-se :

$$|\langle T_u, \varphi \rangle| \leq \int_\Omega |u(x)||\varphi(x)|dx \leq (\max_{x\in K} |\varphi(x)|) \int_K |u(x)|dx$$

ou

$$|\langle T_u, \varphi \rangle| \leq C(\max_{x\in K} |\varphi(x)|). \tag{2.1}$$

Se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero em $\mathcal{D}(\Omega)$, todas as φ_n possui suporte em um compacto K fixo e converge para zero uniformemente em K. Deste fato e de (2.1) conclui-se que $(\langle T_n, \varphi_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero provando ser T_u uma distribuição sobre Ω.

Lema 2.1.1 (Du Bois Raymund)**.** *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Então para toda* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0$, *se e somente se* $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

Demonstração. Vide [35]. □

Observação 2.1.2. Segue do Lema de Du Bois Raymond que se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se, e somente, se $u = v$. Desta forma, temos uma correspondência biunívoca entre as distribuições do tipo T_u com o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$.

Definição 2.1.5. Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada $D^\alpha T$ (no sentido das distribuições) de ordem $|\alpha|$ de T é o funcional definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação 2.1.3. Decorre da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim, as funções de L^1_{loc} possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições.

Observação 2.1.4. $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω, onde $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. De fato, claramente temos que $D^\alpha T$ é linear. Agora, para a continuidade, consideremos $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergindo para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Assim, $|\langle D^\alpha T, \varphi_n\rangle - \langle D^\alpha, \varphi\rangle| \leq |\langle T, D^\alpha\varphi_n - D^\alpha\varphi\rangle| \to 0$ quando $n \to \infty$.

2.2 O espaço L^p

Definição 2.2.1. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$, o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis u, definidas em Ω tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lesbegue em Ω.

O espaço L^p munido da norma $||u||_{L^p(\Omega)} = ||u||_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ é um espaço de Banach.

Quando $p = \infty$, defini-se por $L^\infty(\Omega)$ o espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que u é mensurável e existe uma constante $C > 0$ tal que $|u(x)| \leq C$ para todo $x \in \Omega$. A norma neste espaço é dada por $||u||_{L^\infty(\Omega)} = ||u||_\infty = inf\{C; |u(x)| \leq C, q.t.p.\ em\ \Omega\}$.

No caso $p = 2$, o espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert quando munido com o produto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

e norma induzida

$$|u|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)^2 dx.$$

Apresentaremos a seguir, algumas propriedades relacionadas ao espaço $L^p(\Omega)$.

Proposição 2.2.1 (Desigualdade de Young)**.** Se a e b são números reais não negativos, então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

sempre que $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Demonstração. Vide [37]. □

Proposição 2.2.2 (Desigualdade de Hölder)**.** Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e $||uv||_1 \leq ||u||_p \; ||v||_q$.

Demonstração. Vide [2] ou [3] ou [37]. □

Proposição 2.2.3 (Desigualdade de Minkowski)**.** Se $1 \leq p < \infty$ e $u, v \in L^p(\Omega)$, então $||u + v||_p \leq ||u||_p + ||v||_p$.

Demonstração. Vide [16]. □

Definição 2.2.2. Um espaço normado E que contém um subconjunto enumerável e denso em E é dito separável.

Definição 2.2.3. Um espaço normado E é dito reflexivo se o mergulho canônico

$$J_E : E \to E''$$

for sobrejetor, isto é, $J_E(E) = E''$. Neste caso, J_E é um isomorfismo.

Proposição 2.2.4. $L^p(\Omega)$ é reflexivo para qualquer $p, \; 1 < p < \infty$.

Demonstração. Vide [3]. □

Proposição 2.2.5. Suponha que Ω é um espaço de medida separável. Então, $L^p(\Omega)$ é separável para qualquer $p, \; 1 \leq p < \infty$.

Demonstração. Vide [3]. □

Proposição 2.2.6. O espaço $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$.

Demonstração. Vide [35]. □

Proposição 2.2.7. C_0^∞ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.

Demonstração. Vide [35]. □

Teorema 2.2.1 (Teorema da Representação de Riez)**.** Sejam $1 < p < \infty$ e $\phi \in (L^p(\Omega))'$. Então existe uma única função $u \in L^q(\Omega)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tal que

$$\langle \phi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^p(\Omega).$$

Além disso, $||u||_q = ||\phi||_{L^p(\Omega)'}$.

Demonstração. Vide [3]. □

Nas condições do Teorema de Representação de Riesz, a aplicação $\phi \mapsto u$ é um operador linear isométrico e sobrejetivo, e portanto, podemos identificar $(L^p(\Omega))'$ com $L^q(\Omega)$. Isto é $(L^p(\Omega))' \approx L^q(\Omega)$.

2.3 Espaço de Sobolev

Nesta seção definiremos o Espaço de Sobolev e apresentaremos algumas de suas principais propriedades.

Definição 2.3.1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjuto aberto, p um número real tal que $1 \leq p < \infty$. Dado um número inteiro $m > 0$, chama-se Espaço de Sobolev de ordem m e denota-se por $W^{m,\ p}(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq m$, sendo $D^\alpha u$ a derivada de u no sentido das distribuições. Simbolicamente, temos:

$$W^{m,\ p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \ com \ |\alpha| \leq m\}.$$

Definição 2.3.2. Para cada $u \in W^{m,\ p}(\Omega)$ define-se a norma de u por:

$$||u||_{m,\ p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leq p < \infty.$$

$$||u||_{m,\ \infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} ess \ |D^\alpha u(x)|.$$

Verifica-se facilmente que a função $||u||_{m,\ p}$, $1 \leq p \leq \infty$, é uma norma em $W^{m,\ p}(\Omega)$.

Proposição 2.3.1. O espaço de Sobolev $W^{m,\ p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Vide [1] ou [11] . □

O caso $p = 2$, o espaço de Sobolev $W^{m,\ p}(\Omega)$ será denotado por $H^m(\Omega)$, isto é, $W^{m,\ 2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Verifica-se que $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno

$$((u, v))_{H^m(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \sum_{|\alpha|=1}^{m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x)dx$$

e norma induzida

$$||u||^2_{H^m(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^2 dx + \sum_{|\alpha|=1}^{m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx.$$

Definição 2.3.3. Define-se o espaço $W_0^{m,\ p}(\Omega)$ como sendo o fecho $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,\ p}(\Omega)$.

Quando $p = 2$ escreve-se $H_0^m(\Omega)$ em vez de $W_0^{m,\ 2}(\Omega)$.

Proposição 2.3.2. $\mathcal{D}(\mathbb{R})^n$ é denso em $W^{m,\ p}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Vide [35]. □

Suponha $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,\ q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,\ p}(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ denota-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Definição 2.3.4. Define-se por $H_0^1(\Omega)$ o núcleo do traço do mapa $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$, isto é, $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u(x) = 0, \forall x \in \Gamma \text{ no sentido do traço}\}$, onde Γ é a fronteira de Ω.

$H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno

$$((u, v))_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

e norma induzida

$$||u||^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx.$$

O dual do espaço $H_0^1(\Omega)$ é denotado por $H^{-1}(\Omega)$.

Definição 2.3.5. Dizemos que $u \in H^2(\Omega)$ se $u \in H^1(\Omega)$ e $\frac{\partial u}{\partial xi} \in H^1(\Omega)$, para $i = 1, 2, \cdots, n$.

Definição 2.3.6. Sejam X e Y espaços de Banach, com $X \subset Y$ e $i : X \to Y$ a injeção canônica de X em Y , que a cada elemento $x \in X$ fazemos corresponder $i(x) = x$ como um elemento de Y. Dizemos que a imersão de X em Y é contínua quando existe uma constante $C > 0$, tal que $||x||_X \leq C||x||_Y, \forall x \in X$.

Definição 2.3.7. Sejam X e Y espaços de Banach, com $X \subset Y$. Dizemos que X está compactamente imerso em Y se as seguintes condiçoes são satisfeitas:

(i) Existe uma constante $C > 0$, tal que $||x||_X \leq C||x||_Y, \forall x \in X$.

(ii) Qualquer sequência limitada em X é um pré-compacto em Y.

Denotamos as imersões contínuas e compactas de X em Y, respectivamente, por $X \hookrightarrow Y$ e $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$

Se Ω é limitado e $1 \leq p \leq \infty$ então $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.

Teorema 2.3.1 (Imersão de Sobolev)**.** Sejam Ω um subconjunto limtado de $\mathbb{R}^n, (n \geq 2)$, Ω de classe C^m e $1 \leq p < \infty$, então

(a) $W^{m,\,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ 1 \leq q \leq \frac{np}{n-mp} = p^*$ se $mp < n$;

(b) $W^{m,\,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ 1 \leq q < \infty$ e $mp = n$;

(d) Se $n = 1$ e $m \geq 1$, então $W^{m,\,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Demonstração. Vide [3] e [35] . □

Teorema 2.3.2 (Rellich-Kondrachov)**.** Sejam Ω um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^1 e $1 \leq p < \infty$. Então as seguintes imersões são compactas:

(a) $W^{1,\,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ 1 \leq q \leq \frac{np}{n-p} = p^*$ se $p < n$;

(b) $W^{1,\,p}(\Omega) \hookrightarrow L^a(\Omega),\ 1 \leq q < \infty$ e $p = n$;

(d) $W^{1,\,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ se $p > n$, onde $C(\overline{\Omega})$ é o espaço das funções contínuas em $\overline{\Omega}$.

Demonstração. Vide [25] . □

2.4 Espaços envolvendo tempo

Nesta seção apresentamos alguns outros tipos de espaço Sobolev, estes compreendendo o tempo de mapeamento de funções no espaço de Banach. Além disso, estes espaços são essenciais nas construções de solução fracas de equações diferenciais linear parabólica e hiperbólica e equações diferenciais parabólica não-linear.

Seja X um espaço de Banach com norma $||.||$.

Definição 2.4.1. Define-se o espaço $L^p(0,\ T;\ X)$ como sendo o espaço de todas as funções mensuráveis $u : [0,\ T] \to X$ tal que $||u(t)||_X^p$ é integrável a Lesbegue em [0,T] com :

$$||u||_{L^p(0,\ T;\ X)} := \left(\int_0^T ||u(t)||^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad para \quad 1 \leq p < \infty \quad e$$
$$||u||_{L^\infty(0,\ T;\ X)} := \sup_{0\leq t\leq T} ess||u(t)|| < \infty.$$

Definição 2.4.2. Define-se espaço $C^0([0,\ T]; X)$ como sendo o espaço de todas as funções contínuas $u : [0,\ T] \to X$ com :

$$||u||_{C^0([0,\ T];\ X)} := \max_{0\leq t\leq T} ||u(t)|| < \infty.$$

Teorema 2.4.1. Sejam X e Y espaços de Hilbert tal que $X \hookrightarrow Y$ e $u \in L^p(0,\ T;\ X)$, $u' \in L^p(0,\ T;\ Y)$; $1 \leq p < \infty$. Então $u \in C^0([0,\ T];\ Y)$.

Demonstração. Vide [3]. □

Definição 2.4.3. Seja $u \in L^1(0,\ T;\ X)$. Dizemos que $v \in L^1(0,\ T;\ X)$ é a derivada fraca de u, e escrevemos $u' = v$, fornecendo

$$\int_0^T \phi'(t)u(t)dt = \int_0^T \phi(t)v(t)dt$$

para toda $\phi \in C_0^\infty(0,\ T)$.

Definição 2.4.4. O espaço de Sobolev $W^{1,\ p}(0,\ T;\ X)$ consiste de todas as funções $u \in L^p(0,\ T;\ X)$ tal que u' existe no sentido fraco e pertence a $L^p(0,\ T;\ X)$. Além disso,

$$||u||_{W^{1,\ p}(0,\ T\ X)} := \begin{cases} \left(\int_0^T ||u(t)||^p dt + \int_0^T ||u'(t)||^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, & se\ 1 \leq p < \infty; \\ \sup\limits_{0\leq t\leq T} ess\left(||u(t)|| + ||u'(t)||\right), & se\ p = \infty. \end{cases}$$

Escrevemos $H^1(0,\ T;\ X) = W^{1,\ 2}(0,\ T;\ X)$.

Os dois teoremas seguintes dizem respeito ao que acontece quando você está em diferentes espaços.

Teorema 2.4.2. Seja $u \in W^{1,\ p}(0,\ T;\ X)$ para algum $1 \leq p < \infty$. Então

(i) $u \in C^0([0,\ T]; X)$ (depois de possivelmente ser redefinida em um conjunto de medida nula.)

(ii) $u(t) = u(s) + \int_s^t u'(\tau)d\tau$ para todo $0 \leq s \leq T$.

(iii) $\max\limits_{0\leq t\leq T} ||u(t)|| \leq C||u(t)||_{W^{1,\ p}(0,\ T;\ X)}$, onde a constante C depende apenas de T.

Demonstração. Vide [11]. □

Teorema 2.4.3. Suponha que $u \in L^2(0,\ T; H_0^1(X))$, com $u' \in L^2(0,\ T; H^{-1}(X))$. Então

(i) $u \in C^0([0,\ T]; L^2(X))$ (depois de possivelmente ser redefinida em um conjunto de medida nula.)

(ii) O mapeamento $t \mapsto ||u(t)||^2_{L^2(X)}$ é absolutamente contínuo, com

$$\frac{d}{dt}||u(t)||^2_{L^2(X)} = 2\,\langle u'(t), u(t)\rangle$$

para quase todo $0 \leq t \leq T$.

(iii) Além disso, temos a estimativa

$$\max_{0\leq t\leq T} ||u(t)||_{L^2(X)} \leq C\left(||u||_{L^2(0,\ T;\ H_0^1(X))} + ||u'||_{L^2(0,\ T;\ H^{-1}(X))}\right),$$

com a constante C dependendo apenas de T.

Demonstração. Vide [11]. □

Teorema 2.4.4. Vale as afirmações abaixo :

(i) $W^1\Bigg(0, T; H^1(\Omega), (H^1(\Omega))^*\Bigg) \subset L^2\Bigg(0, T; L^2(\Omega)\Bigg)$ com imersão compacta.

(ii) $W^1\Bigg(0, T; H^1(\Omega), (H^1(\Omega))^*\Bigg) \subset C^0\Bigg([0, T]; L^2(\Omega)\Bigg)$ com imersão contínua.

Demonstração. Vide [7]. □

2.5 Resultados clássicos

Nesta seção, apresentamos algumas definições e resultados clássicos que serão úteis na demonstração do problema de controlabilidade.

Teorema 2.5.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se $|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|$, valendo a igualdade se, e somente se, um dos vetores x, y é múltiplo do outro.

Demonstração. Vide [27]. $\square$

Teorema 2.5.2 (Desigualdade de Cauchy)**.** Dados $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$.

Demonstração. Vide [11]. $\square$

Definição 2.5.1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $k \in \{1, 2, \cdots\}$. Dizemos que $\partial\Omega$ é C^k se para cada ponto $x_0 \in \partial\Omega$, existe $r > 0$ e uma função $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, C^k tal que - ao redirecionar e reorientar os eixos coordenados, se necessário - temos:

$$\Omega \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r); x_n > \gamma(x_1, \cdots, x_{n-1})\}.$$

Da mesma forma, $\partial\Omega$ é C^∞ se $\partial\Omega$ é $C^k, k = 1, 2, 3, \cdots$, e $\partial\Omega$ é analítica se o mapeamento γ é analítico.

Para os três próximos teoremas, consideramos Ω um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ tal que $\partial\Omega$ é C^1.

Teorema 2.5.3 (Teorema de Gauss-Green)**.** Suponha que $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Então

$$\int_\Omega u_{x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u\eta^i dS, \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Demonstração. Vide [11]. $\square$

Teorema 2.5.4 (Fórmula da integração por partes)**.** Sejam $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$. Então,

$$\int_\Omega u_{x_i} v dx = -\int_\Omega u v_{x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uv\eta^i dS, \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Demonstração. Vide [11]. $\square$

Teorema 2.5.5 (Fórmulas de Green)**.** Sejam $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então,

(1) $\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} dS$;

(2) $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = -\int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \eta} dS$;

(3) $\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) dS$.

Demonstração. Vide [11]. □

Teorema 2.5.6 (Teorema da compacidade de Aubin-Lions)**.** Sejam $X_0,\ X_1$ e X espaços de Banach tais que:

(i) $X_0 \subset X \subset X_1$;

(ii) $X_0,\ X_1$ são reflexivos;

(iii) $X_0 \hookrightarrow X$ é compacta.

Definimos

$$W = \left\{ v; v \in L^{p_0}(0,\ T;\ X_0),\ v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0,\ T;\ X_1) \right\},\ \ 0 < T < \infty\ \ e\ \ 1 < p_i < \infty,\ i = 0, 1,$$

munido da norma

$$||v||_{L^{p_0}(0,\ T;\ X_0)} + ||v'||_{L^{p_1}(0,\ T;\ X_1)}.$$

Resulta W é um espaço de Banach e W está continuamente imerso em $L^{p_0}(0,\ T;\ X)$. Então, sob as hipóteses acima temos que a imersão de W em $L^{p_0}(0,\ T;\ X)$ é compacta.

Demonstração. Vide [30]. □

Lema 2.5.1 (Lema de Aubin-Lions)**.** *Sejam X_0, X e X_1 três Espaços de Banach tais que:*

(i) $X_0 \subset X \subset X_1$;

(ii) $X \hookrightarrow X_1$;

(iii) $X_0 \overset{c}{\hookrightarrow} X$.

Então para todo $\eta > 0$, existe C_η dependendo de η, tais que:

$$||v||_X \leq \eta ||v||_{X_0} + C_\eta ||v||_{X_1},\ \ \forall v \in X_0.$$

Portanto, $\forall \eta > 0, \exists\ d_n$ tal que

$$||v_n||_{L^{p_0}(0,\ T;\ X)} \leq \eta ||v_n||_{L^{p_0}(0,\ T;\ X_0)} + d_\eta ||v_n||_{L^{p_0}(0,\ T;\ X_1)}$$

Demonstração. Vide [30]. □

Definição 2.5.2 (Convergência forte)**.** Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em um espaço normado X é dita ser fortemente convergente (ou converge na norma) se existe $x \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0.$

Denotamos a convergência forte por $x_n \to x$.

Definição 2.5.3 (Convergência fraca)**.** Sejam X um espaço de Banach, X' o seu dual e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos $x_n \in X$. Dizemos que x_n converge fracamente para $x \in X$ e denotamos por $x_n \rightharpoonup x$, se para todo $f \in X'$ tem-se $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Teorema 2.5.7 (Aubin-Lion)**.** Sejam $X,\ Y,\ Z$ espaços de Banach, sendo X reflexivo e $X \overset{c}{\hookrightarrow} Z \hookrightarrow Y$. Suponha que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência uniformemente limitada em $L^p(0,\ T;\ X)$ tal que $(\frac{du_n}{dt})_{n\in\mathbb{N}} = (u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja limitada em $L^p(0,\ T;\ Y)$ para $p > 1$. Então existe uma subsequência de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge fortemente em $L^p(0,\ T;\ Z)$.

Demonstração. Vide [6]. □

Teorema 2.5.8 (Kakutani)**.** Seja X um espaço de Banach. X reflexivo se e somente se toda sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fortemente limitada em X possui uma subsequência $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge fraco, isto é, $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em X.

Demonstração. Vide [3]. □

Lema 2.5.2 (Lema de Lions)**.** *Sejam Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n, g$ e g_i funções de $L^q(\Omega)$, onde $1 < q < \infty$ e $i \in \mathbb{N}$ tais que $||g_i||_{L^q(\Omega)} \leq C, \forall i$ e $g_i \to g$ quase sempre em Ω. Então $g_i \rightharpoonup g$ em $L^q(\Omega)$.*

Demonstração. Vide [6] ou [30] . □

Teorema 2.5.9 (Desigualdade de Gronwall)**.** Sejam $C \geq 0$ uma constante, $u \geq 0$ quase sempre em $]0, T[$, uma função integrável em (s, T) e $\varphi : [s, T] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não negativa tal que

$$\varphi(t) \leq C + \int_s^T u(\tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad \forall t \in [s, T].$$

Então

$$\varphi(t) \leq Ce^{\int_s^T u(\tau)d\tau},\ \forall t \in [s, T].$$

Demonstração. Vide [11] . □

Lema 2.5.3 (Desigualdade de Gronwall). *Seja $z(t)$ uma função real, absolutamente contínua em $[0, a[$ tal que para todo $t \in [0, a[$ tem-se*

$$z(t) \leq C + \int_0^t z(s)ds.$$

Então

$$z(t) \leq Ce^t, \ \forall t \in [0, a[.$$

Consequentemente z(t) é limitada.

Demonstração. Vide [36] . □

Definição 2.5.4. Seja X um espaço normado. Uma forma bilinear $a : X \times X \to \mathbb{R}$ é dita

(i) contínua se existe uma constante positiva C tal que

$$|a(u, v)| \leq C||u||_X||v||_X, \quad \forall u, \ v \ \in X;$$

(ii) coerciva se existe uma contante $\alpha > 0$ tal que

$$a(u, v) \geq \alpha||v||_X^2, \quad \forall v \ \in X.$$

Definição 2.5.5. Dado um conjunto X e uma função $f : X \to X$, $x^* \in X$ é um ponto fixo de f se $f(x^*) = x^*$.

Definição 2.5.6. Sejam X um espaço vetorial topológico localmente convexo, $B \subset X$ e a aplicação $\Phi : B \to X$ que para cada $\overline{p} \in B$ corresponde um subconjunto convexo não vazio $\Phi(\overline{p})$ de X. Dizemos que Φ é fechada se o seu gráfico, $\bigcup_{\overline{p} \in B} (\overline{p}, \Phi(\overline{p}))$, é um subconjunto fechado do produto cartesiano $X \times X$.

Em termos de conjuntos diretos, pode ser indicado o seguinte:

$$x_\epsilon \to x \quad em \quad X, \quad y_\epsilon \in \Phi(x_\epsilon) \quad e \quad y_\epsilon \to y, \quad então \quad y \in \Phi(x).$$

Este argumento generaliza a terminologia para o operador fechado A com A uma função com o domínio $D(X)$ denso em X. De fato, dizemos que $A : D(A) \to X$ é um operador fechado, quando $x_n \to x \quad e \quad Ax_n \to y$ então $x \in D(A)$ e $y = Ax$. Isto significa que o gráfico de A é fechado em $X \times X$.

Teorema 2.5.10 (Teorema de Ponto Fixo de Kakutani). Seja B um subconjunto não vazio convexo, compacto de um espaço vetorial X localmente convexo e Φ uma aplicação que leva $p \in B$ a um subconjunto não vazio $\Phi(p)$ de X, tal que seja convexo, compacto e tenha gráfico fechado. Então o conjunto dos pontos fixos de Φ é não vazio e compacto.

Demonstração. Vide [24] . □

Teorema 2.5.11 (Teorema de Glicksberg)**.** Dado um ponto x_0 para uma aplicação fechada e convexa $\Phi : S \to S$ de um subconjunto compacto convexo S de um espaço topológico linear, convexo e Hausdorff, existe um ponto fixo $x \in \Phi(x)$.

Demonstração. vide [19]. □

Assim como para funções em $\mathbb{R}^n$, podemos definir derivadas direcionais em espaços de Banach. Nestes espaços ela é conhecida como derivada de Gâteaux.

Definição 2.5.7. Sejam X, Y e espaços de Banach e $U \subset X$ um aberto. Considere a aplicação $F : U \to Y$. Dizemos que F é Gâteaux diferenciável em $x \in U$ se existe $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que para todo $h \in X$ o limite abaixo existe e é finito

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{F(u + \epsilon h) - F(u)}{\epsilon} = A(h).$$

A aplicação A é univocamente determinada e é chamada derivada de Gâteaux de F em u.

Definição 2.5.8. Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita convexa se

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \quad \forall x,\ y\ \in \mathbb{R}^n \ \ e \ \ 0 \leq t \leq 1.$$

3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLABILIDADE

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, conexo e com fronteira $\partial\Omega = \Gamma$ de classe C^2 e seja $\omega \subset \Omega$. Para um número real $T > 0$, consideremos o cilindro $Q = \Omega \times (0, T)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$.

Representamos os pontos de Ω por $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, onde $x_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, \cdots, n$. Os pontos de Q são representados por (x, t), com $x \in \Omega$ e $0 < t < T$.

Consideremos o seguinte sistema não-linear:

$$\begin{cases} p_t(x,t) - \Delta p(x,t) + g(p(x,t)) = \chi_\omega u(x,t), \quad em \quad Q \quad ; \\ p(x,t) = 0, \quad em \quad \Sigma \; ; \\ p(x,0) = p_0(x), \quad em \quad \Omega \; . \end{cases} \tag{3.1}$$

Em (3.1) temos:

(i) As funções reais $p = p(x,t)$, $u = u(x,t)$ definidas em Q são, respectivamente, o estado e o controle;

(ii) χ_ω é a função característica de ω;

(iii) $p_0(x)$ representa o dado inicial do problema de valor de fronteira (3.1);

(iv) A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $C^1(\mathbb{R})$, globalmente Lipschitz, isto é ,

$$|g(p_1) - g(p_2)| \leq M|p_1 - p_2|, \forall p_1, p_2 \in \mathbb{R} \text{ e } g(0) = 0;$$

(v) p_t representa a derivada parcial $\frac{\partial p}{\partial t}$;

(vi) Δ representa o operador laplaciano, isto é, $\frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{x_2^2} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n^2}$.

Neste texto, todas as derivadas estão no sentido da Teoria das Distribuições de Laurent-Schawartz.

No presesente trabalho não apresentaremos a demostração da existência e unicidade para o problema dado em (3.1). Uma demonstração de tal fato pode ser encontrada em [28] ou em [10].

O problema de controlabilidade nula para o sistema (3.1) pode ser formulado como segue :

Dados $T > 0$ e $p_0(x) \in L^2(\Omega)$, encontrar um controle $u \in L^2(Q)$ tal que a solução de (3.1) satisfaz

$$p(x,T) = 0 \text{ em } \Omega.$$

Analogamente, o problema de controlabilidade aproximada para o sistema (3.1) pode ser formulado da seguinte forma : dados $T > 0$, $p_0(x)$, $p_T(x) \in L^2(\Omega)$ e $\epsilon > 0$, encontrar um controle $u \in L^2(Q)$ tal que a solução de (3.1) satisfaz

$$| \ p(x,T) - p_T(x) \ |_{L^2(\Omega)} < \epsilon.$$

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(p) = \begin{cases} \frac{g(p)}{p}, & se \quad |p| > 0 \quad ; \\ g'(0), & se \quad p = 0 \quad . \end{cases}$$

Note que f é uniformemente limitada em $L^\infty(Q)$, pois g é globalmente Lipschitz.

Com o auxílio da função f, obtemos o sistema linearizado associado com (3.1) dado por :

$$\begin{cases} p_t(x,t) - \Delta p(x,t) + f(\overline{p}(x,t))p(x,t) = \chi_\omega u(x,t), & em \quad Q \quad ; \\ p(x,t) = 0, & em \quad \Sigma \ ; \\ p(x,0) = p_0(x), & em \quad \Omega \ . \end{cases} \tag{3.2}$$

Definição 3.0.9. O sistema (3.2) é dito aproximadamente controlável em $L^2(\Omega)$, no tempo $T > 0$, se para cada $\epsilon > 0$, dado $p_0 \in L^2(\Omega)$ e $p_T(x) \in L^2(\Omega)$, existe um controle $u \in L^2(Q_\omega)$, com $Q_\omega = \omega \times (0,T)$, de modo que a correspondente solução $p(x,t)$ de (3.2) satisfaz $| \ p(x,T) - p_T(x) \ |_{L^2(\Omega)} < \epsilon$.

Definição 3.0.10. O sistema (3.2) é dito de controlabilidade nula no tempo $T > 0$, se para cada $p_0 \in L^2(\Omega)$ existe um controle $u \in L^2(Q_\omega)$ tal que solução $p(x,t)$ de (3.2) satisfaz $p(x,T) = 0$, quase sempre em Ω.

Consideremos a função real $a(x,t)$ uniformemente limitada no sentido

$$| \ a(x,t) \ |_{L^\infty(Q)} < M.$$

Façamos $a(x,t) = f(\overline{p}(x,t))$ e considere o sistema adjunto de (3.2) dado por :

$$\begin{cases} w_t(x,t) + \Delta w(x,t) - a(x,t)w(x,t) = f_1(x,t), & em \quad Q \quad ; \\ w(x,t) = 0, & em \quad \Sigma \ ; \\ w(x,T) = w_T, & em \quad \Omega \ . \end{cases} \tag{3.3}$$

com $w_T \in L^2(\Omega)$ e $f_1 \in L^2(Q)$.

A partir do sistema adjunto (3.3) vamos estabelecer a desigualdade de Carleman e a desigualdade de observabilidade.

4 DESIGUALDADE DE CARLEMAN

Neste capítulo iremos provar a desigualdade de Carleman para o sistema adjunto (3.3). A demonstração será feita seguindo o método de Fursikov- Imanuvilov [18].

As desigualdades de Carleman são estimativas de peso inicialmente introduzidas por Carleman em [5] para provar a continuação única de um sistema de EDP. Elas já passaram por grandes desenvolvimentos e se revelaram ferramentas muito eficazes na demonstração de problemas de controlabilidade. Embora esta seja uma ferramenta técnica de cálculos extensos, ela nos fornece informações sobre o comportamento de um sistema definido em um subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ a partir de dados referentes a uma pequena parte desse domínio ou fronteira. Com o auxílio desta ferramenta, podemos estabelecer uma desigualdade de observabilidade e assim garantir a controlabilidade do sistema (3.3).

O seguinte resultado é de importância fundamental para o desenvolvimento deste trabalho, pois ele nos possibilitará definir funções peso que nos auxiliarão na prova da desigualdade de Carleman.

Lema 4.0.4. *Seja $\omega_0 \subset \omega \subset \Omega$ um subconjunto aberto não vazio. Então existe uma função $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\overline{\Omega}$ fecho de Ω , tal que*

$$\begin{cases} \psi(x) > 0, \ \ para \ \ todo \ x \in \ \Omega; \\ \psi = 0, \ \ para \ \ todo \ x \in \ \Gamma; \\ |\nabla\psi(x)| > 0, \ \ para \ \ todo \ x \in \ \Omega - \omega_0 \quad . \end{cases}$$

Demonstração. vide [18] ou [22]. □

Usando a função ψ do lema acima, introduzimos as funções:

$$\phi(x,t) = \frac{e^{\lambda\psi(x)}}{\beta(t)} \qquad e \qquad \alpha(x,t) = \frac{e^{\lambda\psi(x)} - e^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)} \tag{4.1}$$

com $\beta(t) = t(T-t), \ \ 0 < t < T, \ \lambda > 0$ um parâmetro real e $||\psi|| = \max_{x\in\overline{\Omega}} |\psi(x)|$.

Note que $\phi_{x_i} = \lambda\psi_{x_i}\frac{e^{\lambda\psi(x)}}{\beta(t)}$ e $\alpha_{x_i} = \lambda\psi_{x_i}\frac{e^{\lambda\psi(x)}}{\beta(t)}$. Logo,

$$\nabla\phi = \lambda\frac{e^{\lambda\psi(x)}}{\beta(t)}\nabla\psi = \lambda\phi\nabla\psi = \nabla\alpha. \tag{4.2}$$

Teorema 4.0.12. Sejam $\psi,\ \phi,\ \alpha$ funções definidas acima. Então existem constantes positivas $\lambda_0,\ s_0$ e C tal que

$$\begin{aligned}&\int_Q \left((s\phi)^{-1}\left(|w_t|^2+|\Delta w|^2\right)+\lambda^2 s\phi|\nabla w|^2+\lambda^4(s\phi)^3|w|^2\right)e^{2s\alpha}dxdt \le C\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2dxdt\\ &+\ C\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\lambda^4(s\phi)^3|w|^2dxdt\end{aligned} \tag{4.3}$$

para todo $s \ge s_0$ e $\lambda \ge s\lambda_0$, onde $s_0 = s_1(\Omega,\ \omega)(T+T^2)$, $\lambda_0 = \lambda_0(\Omega,\ \omega)$, $C = C(\Omega,\omega)$, $w = w(x,t)$ é solução do sistema adjunto (3.3), $|.|$ é o valor absoluto de números reais e s_1 é uma constante apropriada.

Esta desigualdade é denominada desigualdade de Carleman.

Demonstração. A demonstração da desigualdade de Carleman será feitas em etapas seguindo Fursikov-Imanuvilov [18] e, dentre os resultados que nos auxiliarão na demosntração do mesmo, podemos citar as Fórmulas de Green (Teorema 2.5.5), o Teorema de Gauss-Green (Teorema 2.5.3), a desigualdade de Yong (Proposição 2.2.1), a desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 2.5.1), desigualdade de Cauchy (Teorema 2.5.2), e o Lema de Fursikov-Imanuvilov (Lema 4.0.4).

Etapa 1: Mudança de variáveis e análise de algumas integrais

Consideremos uma mudança conveniente de variáveis para introduzir no sistema adjunto (3.3) a função de regularização $e^{s\alpha(x,t)}$. De fato, definindo $w(x,t) = e^{-s\alpha(x,t)}p(x,t)$ ou $p(x,t) = e^{s\alpha(x,t)}w(x,t)$, obtemos :

$$w_t(x,t) = -s\alpha_t e^{-s\alpha}p + e^{-s\alpha}p_t\ . \tag{4.4}$$

Além disso,

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = -s\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}p + e^{-s\alpha}\frac{\partial p}{\partial x_i}\ . \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} &= -s\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_i^2}e^{-s\alpha}p + s^2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\right)^2 e^{-s\alpha}p - s\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}e^{-s\alpha}\frac{\partial p}{\partial x_i} - s\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}e^{-s\alpha}\frac{\partial p}{\partial x_i} + e^{-s\alpha}\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2}\\ &= -s\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_i^2}e^{-s\alpha}p + s^2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\right)^2 e^{-s\alpha}p - 2s\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}e^{-s\alpha}\frac{\partial p}{\partial x_i} + e^{-s\alpha}\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2}\ .\end{aligned} \tag{4.6}$$

Portanto, obtemos :

$$\Delta w = -s\Delta\alpha e^{-s\alpha}p + s^2|\nabla\alpha|^2 e^{-s\alpha}p - 2se^{-s\alpha}\nabla\alpha\cdot\nabla p + e^{-s\alpha}\Delta p\ . \tag{4.7}$$

De (4.2), temos:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \nabla^2\alpha = \nabla\cdot(\nabla\alpha) = \nabla\cdot(\lambda\phi\nabla\psi) = \lambda\nabla\phi\cdot\nabla\psi + \lambda\phi\nabla\cdot(\nabla\psi) \\ &= \lambda\left(\lambda\phi\nabla\psi\right)\cdot\nabla\psi + \lambda\phi\Delta\psi = \lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 + +\lambda\phi\Delta\psi \end{aligned} \tag{4.8}$$

e

$$|\nabla\alpha|^2 = |\lambda\phi\nabla\psi|^2 = \lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 \ . \tag{4.9}$$

Daí, substituindo (4.8) e (4.9) em (4.7), obtemos :

$$\Delta w = -s\left(\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 + \lambda\phi\Delta\psi\right)e^{-s\alpha}p + s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 e^{-s\alpha}p - 2s\lambda\phi e^{-s\alpha}\nabla\psi\cdot\nabla p + e^{-s\alpha}\Delta p \ . \tag{4.10}$$

Assim de (4.4), (4.10), podemos reescrever $(3.3)_1$ da seguinte forma :

$$\begin{aligned} &e^{-s\alpha}p_t - s\alpha_t e^{-s\alpha}p + e^{-s\alpha}(-2s\lambda\phi\nabla\phi\cdot\nabla p + s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 p - s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p - s\lambda\phi\Delta\psi p + \Delta p) = \\ &f_1 + a(t)e^{-s\alpha}p \ . \end{aligned} \tag{4.11}$$

Afirmamos que :

$$p(x,0) = e^{s\alpha(x,0)}w(x,0) = 0 \quad em \quad \Omega \ . \tag{4.12}$$

De fato, pelo Lema 4.0.4 temos $\psi(x) > 0, \ \forall x \in \Omega$. Logo,

$$\begin{aligned} \psi(x) < 2||\psi|| \ &\Rightarrow \ \lambda\psi(x) < 2\lambda||\psi|| \\ &\Rightarrow \ e^{\lambda\psi(x)} < e^{2\lambda||\psi||} \\ &\Rightarrow \ e^{\lambda\psi(x)} - e^{2\lambda||\psi||} < 0 \ . \end{aligned}$$

Como $\beta(t) > 0$, então $\alpha(x,t) = \frac{e^{\lambda\psi(x)} - e^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)} < 0$ e $e^{-s\alpha(x,0)} = \lim\limits_{t\to 0^+} e^{s\alpha(x,t)} = 0$. Logo, vale (4.12).

Por argumento análogo, obtém-se :

$$p(x,T) = e^{-s\alpha(x,0)}w(x,T) = 0 \quad em \quad \Omega \ . \tag{4.13}$$

Assim, usando (4.11), (4.12) e (4.13) podemos reescrever a equação estado (3.3) nas novas variáveis da seguinte forma :

$$\begin{cases} p_t - s\alpha_t p - 2s\lambda\phi\nabla\phi\cdot\nabla p + s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 p - s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p + \Delta p - \\ -s\lambda\phi\Delta\psi p = f_1 e^{s\alpha} + a(t), \quad em \quad Q \ ; \\ p(x,t) = 0, \quad em \quad \Sigma \ ; \\ p(x,0) = p(x,T) = 0, \quad em \quad \Omega \ . \end{cases} \tag{4.14}$$

Note que $-s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p = -2s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p + s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p$.

Consideremos a seguinte notação :

$$\begin{cases} U(t)p = -2s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p - 2s\lambda\phi\nabla\psi\cdot\nabla p & ; \\ V(t)p = -\Delta p - s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 p - s\lambda^2|\nabla\psi|^2 p + \alpha_t s p & ; \\ Z(t)p = s\lambda\phi\Delta\psi\ p + a(t)p. \end{cases} \tag{4.15}$$

Desta forma, podemos reescrever a equação $(4.14)_1$ como

$$p_t + U(t)p - V(t)p = e^{s\alpha} f_1 + Z(t)p\ . \tag{4.16}$$

Note que :

$$\frac{d}{dt}\Big((V(t)p)\,p\Big) = \Big(\frac{d}{dt}\,(V(t)p)\Big)\,p + (V(t)p)\,p_t$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \Big(\frac{d}{dt}\,(V(t)p)\Big)\,p &= \big(-\Delta p_t - 2s^2\lambda^2\phi\phi_t|\nabla\psi|^2 p - s\lambda^2\phi_t|\nabla\psi|^2 p + \alpha_{tt} s p\big)\,p + (-s^2\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p_t \\ &- s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p_t + \alpha_t s p_t)p = (V_t(t)p)p + (V(t)p_t)p\ , \end{aligned}$$

onde $(V_t(t)p)\,p = (\Delta p_t - 2s^2\lambda^2\phi\phi_t|\nabla\psi|^2 p - s\lambda^2\phi_t|\nabla\psi|^2 p + \alpha_{tt} s p)\,p$. Desta forma, temos:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (V(t)p)\,p\ dx = \int_\Omega (V(t)p_t)\,p\ dx + \int_\Omega (V(t)p)\,p_t\ dx + \int_\Omega (V_t(t)p)\,p\ dx\ .$$

As duas primeiras integrais acima podem ser escritas como :

$$2\int_\Omega (V(t)p)\,p_t.$$

Assim, substituindo a expressão de p_t dada em (4.16), obtemos :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (V(t)p)\,p\ dx = 2\int_\Omega (V(t)p)\,(e^{s\alpha} f_1 + Z(t)p - U(t)p + V(t)p)\ \ dx + \int_\Omega (V_t(t)p)\,p\ dx\ . \tag{4.17}$$

De (4.12) e (4.13) temos que $p(0) = p(x,0) = 0$ em Ω e $p(T) = p(x,T) = 0$ em Ω. Logo, integrando (4.17) de 0 a T, temos :

$$\begin{aligned} 0 &= 2\int_Q (V(t)p)^2\ \ dx\ dt + 2\int_Q (V(t)p)\,(e^{s\alpha} f_1 + Z(t)p)\ \ dx\ dt + \int_Q (V_t(t)p)\,p\ dx\ dt \\ &+ 2\Big(-\int_Q (V(t)p)\,(U(t)p)\Big)\ \ dx\ dt\ . \end{aligned} \tag{4.18}$$

Análise dos termos de (4.18)

Denotando por X a última integral de (4.18), temos :

$$\begin{aligned} X &= -\int_Q (V(t)p)\,(U(t)p)\ dx\ dt \\ &= -\int_Q \left(\Delta p + s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 p + s\lambda^2|\nabla\psi|^2 p - \alpha_t s p\right)\left(2s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p + 2s\lambda\phi\nabla\psi\cdot\nabla p\right)\ dx\ dt\ . \end{aligned} \tag{4.19}$$

Como $\psi(x) > 0,\ \forall x \in \Omega$, então :

$$||\psi|| - \psi(x) \leq ||\psi|| \Rightarrow 2\lambda||\psi|| - 2\lambda\psi(x) \leq 2\lambda||\psi|| \Rightarrow e^{2\lambda||\psi|| - 2\lambda\psi(x)} \leq e^{2\lambda||\psi||}\ .$$

Agora, note que da definição de ϕ e α, obtemos :

$$\begin{aligned} |\phi_t| &= \left|\frac{-\beta'(t)}{\beta(t)^2}e^{\lambda\psi}\right| = \left|\frac{-(T-2t)}{\beta(t)^2}e^{\lambda\psi}\right| = \left|\frac{-(T-2t)}{\beta(t)^2}e^{\lambda\psi}\cdot\frac{e^{\lambda\psi}}{e^{\lambda\psi}}\right| = \left|\frac{-(T-2t)}{e^{\lambda\psi}}\cdot\frac{e^{2\lambda\psi}}{\beta(t)^2}\right| \\ &= \frac{|T-2t|}{e^{\lambda\psi}}\phi^2 \leq |T-2t|\phi^2 \leq \overline{C}\phi^2. \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} |\alpha_t| &= \left|\frac{-\beta'(t)}{\beta(t)^2}\left(e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}\right)\right| = \frac{|\beta'(t)|}{\beta(t)^2}\left|e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}\right| = \frac{|\beta'(t)|}{\beta(t)^2}\left|e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}\right|\cdot\frac{e^{2\lambda\psi}}{e^{2\lambda\psi}} \\ &= |T-2t|\cdot\left|\frac{e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}}{e^{2\lambda\psi}}\right|\frac{e^{2\lambda\psi}}{\beta(t)^2} = |T-2t|\cdot\left|\frac{1}{e^{\lambda\psi}} - e^{2\lambda||\psi|| - 2\lambda\psi}\right|\phi^2 \\ &\leq |T-2t|\cdot\left|\frac{1}{e^{\lambda\psi}} + e^{2\lambda||\psi|| - 2\lambda\psi}\right|\phi^2 \leq |T-2t|\cdot|1 + e^{2\lambda||\psi||}|\phi^2 \leq \overline{C}\phi^2. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Sendo que a constante $\overline{C}$ depende de $T, \lambda, ||\psi||$ e Ω, isto é, $\overline{C} = \overline{C}(T, \lambda, ||\psi||, \Omega)$.

Temos ainda :

$$\begin{aligned} |\alpha_{tt}| &= \left|\frac{-\beta''(t)\left(e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}\right)\beta(t)^2 + \beta'(t)\left(e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}\right)2\beta'(t)\beta(t)}{\beta(t)^4}\right| \\ &= \left|\frac{-\beta''(t)\beta(t)^2 + 2\beta(t)\beta'(t)^2}{\beta(t)^4}\right|\left|e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}\right| \\ &= \left|\frac{-\beta''(t)\beta(t) + 2|T-2t|^2}{\beta(t)^3}\right|\left|e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}\right| \\ &\leq \left|\frac{2\beta(t) + 2|T-2t|^2}{\beta(t)^3}\right|\left|e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}\right| \\ &= \left|\frac{2\beta(t) + 2|T-2t|^2}{\beta(t)^3}\right|\left|e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}\right|\cdot\frac{e^{3\lambda\psi}}{e^{3\lambda\psi}} \\ &= \left|\frac{2\beta(t) + 2|T-2t|^2}{e^{\lambda\psi}}\right|\left|\frac{e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}}{e^{2\lambda\psi}}\right|\cdot\phi^3 \\ &\leq \left(2|\beta(t)| + 2|T-2t|^2\right)\left(1 + e^{2\lambda||\psi||}\right)\phi^3 \\ &\leq \overline{C}\phi^3. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Sabendo que $p = 0$ em $\sum$, então pela fórmula de Green, temos :

$$\int_Q \nabla p_t \cdot \nabla p \; dxdt = -\int_Q p\Delta p_t \; dxdt \cdot$$

Logo,

$$\begin{aligned}
-\int_Q p\Delta p_t \; dxdt &= \int_Q \nabla p_t \cdot \nabla p \; dxdt = \int_0^T \int_\Omega \nabla p_t \cdot \nabla p \; dxdt \\
&= \int_0^T (\nabla p_t, \nabla p)_{L^2(\Omega)} dt = \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}|\nabla p|^2_{L^2(\Omega)} dt \cdot
\end{aligned} \tag{4.23}$$

De (4.18), definimos $X_1 = \left| \int_Q (V_t(t)p)\, p \;\, dxdt \right|$. Assim, sabendo que existe $\widehat{C}_1 > 0$ tal que $|\nabla\psi|^2 \leq \widehat{C}_1$, então de (4.20), (4.21), (4.22) e (4.23), obtemos :

$$\begin{aligned}
X_1 &= \left| \int_Q (V_t(t)p)\, p \; dxdt \right| = \left| \int_Q \left(-\Delta p_t - 2s^2\lambda^2\phi\phi_t|\nabla\psi|^2 p - s\lambda^2\phi_t|\nabla\psi|^2 p + \alpha_{tt} sp\right) p \; dxdt \right| \\
&\leq \int_Q |p\Delta p_t| \; dxdt + 2\int_Q s^2\lambda^2\phi|\phi_t||\nabla\psi|^2|p|^2 \; dxdt + \int_Q s\lambda^2|\phi_t||\nabla\psi|^2|p|^2 \; dxdt \; + \\
&+ \int_Q |\alpha_{tt}|s|p|^2 \; dxdt = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^T |\nabla p|^2_{L^2(\Omega)} \; dt \; + \; 2\int_Q s^2\lambda^2\phi|\phi_t||\nabla\psi|^2|p|^2 \; dxdt \quad + \\
&+ \int_Q s\lambda^2|\phi_t||\nabla\psi|^2|p|^2 \; dxdt + \int_Q |\alpha_{tt}|s|p|^2 \; dxdt \leq \; \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^T |\nabla p|^2_{L^2(\Omega)} \; dt \quad + \\
&+ \; 2\overline{C}\widehat{C}_1 \int_Q s^2\lambda^2\phi^3|p|^2 \; dxdt + \overline{C}\widehat{C}_1 \int_Q s\lambda^2\phi^2|p|^2 \; dxdt + \overline{C}\int_Q s\phi^3|p|^2 \; dxdt \\
&\leq \; \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^T |\nabla p|^2_{L^2(\Omega)} \; dt + C_1 \int_Q \left(s^2\lambda^2\phi^3 + s\lambda^2\phi^2 + s\phi^3\right)|p|^2 \; dxdt
\end{aligned} \tag{4.24}$$

onde $C_1 = m\acute{a}x \; \{ \; 2\overline{C}\widehat{C}_1, \overline{C}\widehat{C}_1, \overline{C} \; \}$. Por outro lado, como $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^T |\nabla p|^2_{L^2(\Omega)} \; dt = 0$, então :

$$X_1 \leq C_1 \int_Q \left(s^2\lambda^2\phi^3 + s\lambda^2\phi^2 + s\phi^3\right)|p|^2 \; dxdt \cdot \tag{4.25}$$

Temos ainda de (4.18) que :

$$\begin{aligned}
X_2 &= \left| 2\int_Q (V(t)p)\,(e^{s\alpha}f_1 + Z(t)p) \;\; dx \; dt \right| \\
&= \left| 2\int_Q (V(t)p)\, e^{s\alpha}f_1 \; dxdt + 2\int_Q (V(t)p)\,(Z(t)p) \;\; dxdt \right| \\
&\leq \int_Q |2\,(V(t)p)\, e^{s\alpha}f_1| \; dxdt + \int_Q |2\,(V(t)p)\,(Z(t)p)\,| \; dxdt \\
&\leq \int_Q |V(t)p|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt + \int_Q |V(t)p|^2 dxdt + \int_Q |Z(t)p|^2 dxdt \\
&= 2\int_Q |V(t)p|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt + \int_Q |Z(t)p|^2 dxdt \cdot
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Da definição de $Z(t)p$ e sabendo que existe $\widehat{C}_2 > 0$ tal que $|\Delta\psi|^2 \leq \widehat{C}_2$, temos:

$$\begin{aligned}
\int_Q |Z(t)p|^2 dxdt &= \int_Q |s\lambda\phi\Delta\psi\ p|^2\ dxdt \\
&\leq \int_Q \left(2|s\lambda\phi\Delta\psi\ p|^2 + 2|a(t)p|^2\right)\ dxdt \\
&= 2\int_Q s^2\lambda^2\phi^2|\Delta\psi|^2\ |p|^2\ dxdt + 2\int_Q |a(t)|^2|p|^2\ dxdt \\
&\leq 2\widehat{C}_2\int_Q s^2\lambda^2\phi^2|p|^2\ dxdt + 2M^2\int_Q |p|^2\ dxdt \\
&\leq C_2\int_Q \left(s^2\lambda^2\phi^2 + M\right)|p|^2\ dxdt
\end{aligned} \tag{4.27}$$

onde $C_2 = máx\ \{\ 2\widehat{C}_2, 2M\ \}$. Assim, (4.26) torna-se :

$$X_2 \leq 2\int_Q |V(t)p|^2 dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt + C_2\int_Q \left(s^2\lambda^2\phi^2 + M\right)|p|^2\ dxdt\ \cdot \tag{4.28}$$

Segue de (4.18) que $2X + 2\int_Q |V(t)p|^2\ dxdt \leq X_1 + X_2$. Logo, de (4.25) e (4.28), temos :

$$\begin{aligned}
2X\ &+\ 2\int_Q |V(t)p|^2\ dxdt \leq C_1\int_Q \left(s^2\lambda^2\phi^3 + s\lambda^2\phi^2 + s\phi^3\right)|p|^2\ dxdt + 2\int_Q |V(t)p|^2 + dxdt \\
&+\ \int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt + C_2\int_Q \left(s^2\lambda^2\phi^2 + M\right)|p|^2\ dxdt\ \cdot
\end{aligned}$$

Fazendo $\overline{C}_0 = máx\{\ C_1, C_2\ \}$, obtemos :

$$\begin{aligned}
2X\ &+\ 2\int_Q |V(t)p|^2\ dxdt \leq \overline{C}_0\int_Q \left(s^2\lambda^2\phi^3 + s\lambda^2\phi^2 + s\phi^3\right)|p|^2\ dxdt + 2\int_Q |V(t)p|^2 + dxdt \\
&+\ \int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt + \overline{C}_0\int_Q \left(s^2\lambda^2\phi^2 + M\right)|p|^2\ dxdt\ \cdot
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Logo, decorre de (4.29) que :

$$X \leq \overline{C}_0\int_Q \left(s^2\lambda^2\phi^2 + s^2\lambda^2\phi^3 + s\phi^3 + 1\right)|p|^2\ dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt\ \cdot \tag{4.30}$$

Etapa 2: Análise dos termos de X

Nesta etapa, calculamos X e obteremos estimativas para seus termos. De fato, temos que :

$$
\begin{aligned}
X &= -\int_Q (V(t)p)\,(U(t)p)\;\, dx\; dt \\
&= -2\int_Q \left(s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2\right)\Delta p\; dxdt - 2\int_Q s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4p^2\; dxdt - 2\int_Q s^2\lambda^4\phi^2|\nabla\psi|^4p^2\; dxdt\; - \\
&- \;2\int_Q (s\lambda\phi\nabla\psi\cdot\nabla p)\,\Delta p\; dxdt - 2\int_Q \left(s^3\lambda^3\phi^3|\nabla\psi|^2\nabla\psi\cdot\nabla p\; p + s^2\lambda^3\phi^2|\nabla\psi|^2\nabla\psi\cdot\nabla p\; p\right) dxdt \\
&+ \;2\int_Q \left(s^2\lambda^2\alpha_t\phi|\nabla\psi|^2p + s^2\lambda\alpha_t\phi\nabla\psi\cdot\nabla p\right) pdxdt\;\cdot
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

Consideremos a seguinte notação :

$$
\begin{aligned}
M_1 &= -2\int_Q \left(s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2\right)\Delta p\; dxdt\;; \\
M_2 &= -2\int_Q s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4p^2\; dxdt - 2\int_Q s^2\lambda^4\phi^2|\nabla\psi|^4p^2\; dxdt\;; \\
M_3 &= -2\int_Q (s\lambda\phi\nabla\psi\cdot\nabla p)\,\Delta p\; dxdt \\
M_4 &= -2\int_Q \left(s^3\lambda^3\phi^3|\nabla\psi|^2\nabla\psi\cdot\nabla p\; p + s^2\lambda^3\phi^2|\nabla\psi|^2\nabla\psi\cdot\nabla p\; p\right) dxdt\;; \\
M_5 &= 2\int_Q \left(s^2\lambda^2\alpha_t\phi|\nabla\psi|^2p + s^2\lambda\alpha_t\phi\nabla\psi\cdot\nabla p\right) pdxdt\;\cdot
\end{aligned}
$$

Assim, podemos escrever :

$$X = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5. \tag{4.32}$$

Passemos agora a análise dos termos de X.

Análise de M_1

Aplicando a fórmula de Green a M_1 e sabendo que $p = 0$ em Σ, temos :

$$
\begin{aligned}
M_1 &= -2\int_Q \left(s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2\right)\Delta p\ dxdt \\
&= -2\left(\int_\Sigma \left(s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 p\right)\frac{\partial p}{\partial\eta}\ d\Sigma - \int_Q s\lambda^2\nabla\left(\phi|\nabla\psi|^2 p\right)\cdot\nabla p\ dxdt\right) \\
&= 2\int_Q s\lambda^2\nabla\left(\phi|\nabla\psi|^2 p\right)\cdot\nabla p\ dxdt = 2\int_Q (s\lambda^2\nabla\phi|\nabla\psi|^2 p)\cdot\nabla p\ dxdt \\
&+ 2\int_Q s\lambda^2\phi\nabla(|\nabla\psi|^2)p\nabla p\ dxdt + 2\int_Q (s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2)\nabla p\cdot\nabla p\ dxdt \\
&= 2\int_Q s\lambda^2(\lambda\phi\nabla\psi)|\nabla\psi|^2\cdot\nabla p\ p\ dxdt + 2\int_Q s\lambda^2\phi\nabla(|\nabla\psi|^2)\cdot\nabla p\ p\ dxdt \\
&+ 2\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\ dxdt = 2\int_Q s\lambda^3\phi|\nabla\psi|^2 p\nabla\psi\cdot\nabla p\ dxdt \\
&+ 2\int_Q s\lambda^2\phi\nabla(|\nabla\psi|^2)\cdot\nabla p\ p\ dxdt + 2\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\ dxdt\ \cdot
\end{aligned}
$$

Note que $\nabla(|\nabla\psi|^2) = 2|\nabla\psi|(\nabla|\nabla\psi|)$ e sendo $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$, existe uma constante $\widehat{C}_3 > 0$ com $\widehat{C}_3 = \widehat{C}_3(\Omega)$ tal que $|\nabla\psi|^4 \leq \widehat{C}_3$ e $|\nabla(|\nabla\psi|)|^2 \leq \widehat{C}_3$. Assim, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos :

$$
\begin{aligned}
\left|2\int_Q s\lambda^3\phi|\nabla\psi|^2 p\nabla\psi\cdot\nabla p\ dxdt\right| &= 2\int_Q s\lambda^3\phi|\nabla\psi|^2|p||\nabla\psi\cdot\nabla p|\ dxdt \\
&\leq 2\int_Q s\lambda^3\phi|\nabla\psi|^2|p||\nabla\psi||\nabla p|\ dxdt \\
&= \int_Q s\phi\left[2\left(2\lambda^2|\nabla\psi|^2|p|\right)\left(\frac{\lambda}{2}|\nabla\psi||\nabla p|\right)\right]\ dxdt \\
&= 4\int_Q s\lambda^4\phi|\nabla\psi|^4|p|^2\ dxdt + \frac{1}{4}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\ dxdt \\
&\leq 4\widehat{C}_3\int_Q s\lambda^4\phi|p|^2\ dxdt + \frac{1}{4}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\ dxdt\ \cdot
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

De onde segue que :

$$
-2\int_Q s\lambda^3\phi|\nabla\psi|^2 p\nabla\psi\cdot\nabla p\ dxdt \ \geq\ -4\widehat{C}_3\int_Q s\lambda^4\phi|p|^2\ dxdt - \frac{1}{4}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\ dxdt\ \cdot
\tag{4.34}
$$

Temos também :

$$
\begin{aligned}
\left|2\int_Q s\lambda^2\phi\nabla(|\nabla\psi|^2)\cdot\nabla p\; p\; dxdt\right| &= \left|2\int_Q s\lambda^2\phi 2|\nabla\psi|(\nabla(|\nabla\psi|))\cdot\nabla p\; p\; dxdt\right| \\
&\leq 2\int_Q s\lambda^2\phi 2|\nabla\psi||\nabla(|\nabla\psi|)||\nabla p||p|\; dxdt \\
&= \int_Q s\phi 2\left[\left(4\lambda|\nabla(|\nabla\psi|)||p|\right)\left(\frac{\lambda}{2}|\nabla\psi||\nabla p|\right)\right] dxdt \\
&= 16\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla(|\nabla\psi|)|^2|p|^2 dxdt + \frac{1}{4}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\; dxdt \\
&\leq 16\widehat{C}_3\int_Q s\lambda^2\phi|p|^2 dxdt + \frac{1}{4}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\; dxdt\ \cdot
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

Logo,

$$
-2\int_Q s\lambda^2\phi\nabla(|\nabla\psi|^2)\cdot\nabla p\; p\; dxdt \;\geq\; -16\widehat{C}_3\int_Q s\lambda^2\phi|p|^2 dxdt - \frac{1}{4}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\; dxdt\ \cdot
\tag{4.36}
$$

Assim, de (4.34) e (4.36), temos :

$$
\begin{aligned}
M_1 &= 2\int_Q s\lambda^3\phi|\nabla\psi|^2 p\nabla\psi\cdot\nabla p\; dxdt + 2\int_Q s\lambda^2\phi\nabla(|\nabla\psi|^2)\cdot\nabla p\; p\; dxdt \\
&+ 2\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\; dxdt \geq -4\widehat{C}_3\int_Q s\lambda^4\phi|p|^2\; dxdt - \frac{1}{4}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\; dxdt - \\
&- 16\widehat{C}_3\int_Q s\lambda^2\phi|p|^2 dxdt - \frac{1}{4}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\; dxdt + \int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\; dxdt \\
&\geq \frac{3}{2}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|\; \widetilde{C}\int_Q s\phi(\lambda^4+\lambda^2)|p|^2\; dxdt\ \cdot
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

Análise de M_3

Aplicando a fórmula de Green a M_3, temos :

$$
\begin{aligned}
M_3 &= -2\int_Q (s\lambda\phi\nabla\psi\cdot\nabla p)\,\Delta p\; dxdt = -2\int_\Sigma (s\lambda\phi\nabla\psi\cdot\nabla p)\nabla p\cdot\eta\; d\Sigma \\
&+ 2\int_Q s\lambda\nabla(\phi\nabla\psi\cdot\nabla p)\cdot\nabla p\; dxdt = 2\int_Q s\lambda\nabla\phi(\nabla\psi\cdot\nabla p)\cdot\nabla p\; dxdt \\
&+ 2\int_Q s\lambda\phi\nabla(\nabla\psi)\nabla p\cdot\nabla p\; dxdt + 2\int_Q (s\lambda\phi\nabla\psi\nabla(\nabla p))\cdot\nabla p\; dxdt \\
&- 2\int_\Sigma (s\lambda\phi\nabla\psi\cdot\nabla p)\nabla p\cdot\eta\; d\Sigma = 2\int_Q s\lambda^2(\nabla\psi\cdot\nabla p)^2\; dxdt + \\
&+ 2\int_Q s\lambda\psi_{x_ix_j}p_{x_i}p_{x_j}\; dxdt + 2\int_Q s\lambda\psi_{x_i}p_{x_ix_j}p_{x_j}\; dxdt - 2\int_\Sigma (s\lambda\phi\nabla\psi\cdot\nabla p)\,\nabla p\cdot\eta\; d\Sigma\ \cdot
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

onde $\nabla p \cdot \eta = \frac{\partial p}{\partial \eta}$ e η é o vetor normal exterior a Σ .

Denotemos

$$N_1 = 2\int_Q s\lambda\psi_{x_i}p_{x_ix_j}p_{x_j}\ dxdt\ \cdot$$

Como $p_{x_ix_j}p_{x_j} = \frac{1}{2}\left((p_{x_j})^2\right)_{x_i}$, então podemos reescrever N_1 como segue :

$$\begin{aligned} N_1 &= 2\int_Q s\lambda\psi_{x_i}\frac{1}{2}\left((p_{x_j})^2\right)_{x_i} dxdt \\ &= \int_Q s\lambda\psi_{x_i}\left((p_{x_j})^2\right)_{x_i} dxdt \\ &= \int_Q s\lambda\psi_{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial p}{\partial x_j}\right)^2 dxdt\ \cdot \end{aligned} \tag{4.39}$$

Por outro lado, pelo Teorema de Gauss-Green, temos :

$$\int_Q \frac{\partial}{\partial x_i}\left(s\lambda\phi\psi x_i(p_{x_j})^2\right)\ dxdt = \int_\Sigma s\lambda\phi\psi_{x_i}(p_{x_j})^2\eta_i\ d\Sigma\ \cdot$$

Assim, aplicando a derivada $\frac{\partial}{\partial x_i}$, temos :

$$\begin{aligned} \int_Q s\lambda\phi_{x_i}\psi_{x_i}(p_{x_j})^2\ dxdt &+ \int_Q s\lambda\psi_{x_ix_i}(p_{x_j})^2\ dxdt + \int_Q s\lambda\phi\psi_{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial p}{\partial x_j}\right)^2 dxdt \\ &= \int_\Sigma s\lambda\phi\psi_{x_i}(p_{x_j})^2\eta_i\ d\Sigma\ \cdot \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_Q s\lambda\phi\psi_{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial p}{\partial x_j}\right)^2 dxdt &= \int_\Sigma s\lambda\phi\psi_{x_i}(p_{x_j})^2\eta_i\ d\Sigma - \int_Q s\lambda\phi_{x_i}\psi_{x_i}(p_{x_j})^2\ dxdt - \\ &- \int_Q s\lambda\psi_{x_ix_i}(p_{x_j})^2\ dxdt\ \cdot \end{aligned}$$

Substituindo a igualdade acima na expressão de N_1, temos :

$$\begin{aligned} N_1 &= -\int_Q s\lambda\phi_{x_i}\psi_{x_i}(p_{x_j})^2\ dxdt - \int_Q s\lambda\psi_{x_ix_i}(p_{x_j})^2\ dxdt \\ &+ \int_\Sigma s\lambda\phi\psi_{x_i}(p_{x_j})^2\eta_i\ d\Sigma\ \cdot \end{aligned}$$

Da expressão de ϕ, temos que $\phi_{x_i} = \lambda\phi\psi_{x_i}$. Então, $s\lambda\phi_{x_i}\psi_{x_i} = s\lambda^2(\psi_{x_i})^2$. Logo,

$$\begin{aligned} N_1 &= -\int_Q s\lambda^2\phi(\psi_{x_i})^2(p_{x_j})^2\ dxdt - \int_Q s\lambda\phi\psi_{x_ix_j}(p_{x_j})^2\ dxdt \\ &+ \int_\Sigma s\lambda\phi(p_{x_j})^2\psi_{x_i}\eta_i d\Sigma\ \cdot \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} N_1 &= -\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\ dxdt - \int_Q s\lambda\phi\Delta\psi|\nabla p|^2\ dxdt \\ &+ \int_\Sigma s\lambda\phi\frac{\partial\psi}{\partial\eta}|\nabla p|^2 d\Sigma\ \cdot \end{aligned} \tag{4.40}$$

Substituindo (4.40) em (4.38), temos :

$$\begin{aligned} M_3 &= 2\int_Q s\lambda^2(\nabla\psi\cdot\nabla p)^2\ dxdt + 2\int_Q s\lambda\psi_{x_ix_j}p_{x_i}p_{x_j}\ dxdt - \\ &- 2\int_\Sigma (s\lambda\phi\nabla\psi\cdot\nabla p)\,\nabla p\cdot\eta\ d\Sigma - \int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\ dxdt - \\ &- \int_Q s\lambda\phi\Delta\psi|\nabla p|^2\ dxdt + \int_\Sigma s\lambda\phi\frac{\partial\psi}{\partial\eta}|\nabla p|^2 d\Sigma\ \cdot \end{aligned} \tag{4.41}$$

Afirmação 4.0.1. $\int_0^T\int_\Gamma s\lambda\phi\frac{\partial\psi}{\partial\eta}|\nabla p|^2 d\Gamma\leq 0$ e $-2\int_0^T\int_\Gamma (s\lambda\phi\nabla\psi\cdot\nabla p)\,\nabla p\cdot\eta\ d\Sigma\ \cdot$

De fato, como η é o vetor normal exterior a Γ, então dado $x\in\Gamma$ e $k<0$, com k suficientemente pequeno, temos que $x+k\eta\in\Omega$. Por outro lado, pelo Lema 4.0.4 $\psi(x)=0$ em Γ e $\psi(x)>0,\forall x\in\Omega$. Então, $\psi(x+k\eta)>0$ em Ω. Daí,

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=\lim_{k\to 0^-}\frac{\psi(x+k\eta)-\psi(x)}{k}=\lim_{k\to 0^-}\frac{\psi(x+k\eta)}{k}<0\ \cdot$$

Portanto, $\frac{\partial\psi}{\partial\eta}<0$ em Γ e,

$$\int_\Sigma s\lambda\phi\frac{\partial\psi}{\partial\eta}|\nabla p|^2 d\Sigma\leq 0\ \cdot \tag{4.42}$$

Como $\nabla\psi=\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\eta$ e $\frac{\partial\psi}{\partial\eta}<0$ em Γ, temos :

$$\begin{aligned} -2\int_\Sigma s\lambda\phi(\nabla\psi\cdot\nabla p)\nabla p\cdot\eta d\Sigma &= -2\int_\Sigma s\lambda\phi\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\eta\cdot\nabla p\right)\frac{\partial p}{\partial\eta}d\Sigma \\ &= -2\int_\Sigma s\lambda\phi\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial\eta}\right)^2 d\Sigma\geq 0\ \cdot \end{aligned} \tag{4.43}$$

Portanto, tomando $N_2=-2\int_\Sigma s\lambda\phi(\nabla\psi\cdot\nabla p)\nabla p\cdot\eta\ d\Sigma$ e usando (4.42) e (4.43), temos :

$$\begin{aligned} M_3-N_2 &\leq 2\int_Q s\lambda^2\phi(\nabla\psi\cdot\nabla p)^2\ dxdt + 2\int_Q s\lambda\phi\psi_{x_ix_j}p_{x_i}p_{x_j}\ dxdt \\ &- \int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2 dxdt - \int_Q s\lambda\phi\Delta\psi|\nabla p|^2 dxdt \\ &\leq 2\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2 dxdt + 2\int_Q s\lambda\phi\psi_{x_ix_j}p_{x_i}p_{x_j}\ dxdt \\ &- \int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2 dxdt - \int_Q s\lambda\phi\Delta\psi|\nabla p|^2 dxdt \\ &= \int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2 dxdt + 2\int_Q s\lambda\phi\psi_{x_ix_j}p_{x_i}p_{x_j}\ dxdt - \int_Q s\lambda\phi\Delta\psi|\nabla p|^2 dxdt\ \cdot \end{aligned} \tag{4.44}$$

Então,

$$
\begin{aligned}
|M_3 - N_2| \;&\le\; \int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2 dxdt + 2\int_Q s\lambda\phi|\psi_{x_ix_j}||p_{x_i}||p_{x_j}|\; dxdt \\
&+\; \int_Q s\lambda\phi|\Delta\psi||\nabla p|^2 dxdt \le \int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2 dxdt \\
&+\; 2\widehat{C}_1\int_Q s\lambda\phi||\nabla p|^2 dxdt + \widehat{C}_2\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2 dxdt \\
&=\; \int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2 dxdt + \overline{C}_2\int_Q s\lambda\phi||\nabla p|^2 dxdt
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

onde $\widetilde{C} = 2\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2$. Por outro lado, como $N_2 \ge 0$, então $M_3 \ge M_3 - N_2$. Daí, resulta de (4.45) que :

$$
M_3 \ge -\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2 dxdt - \widetilde{C}\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2 dxdt \;\;\cdot
\tag{4.46}
$$

Portanto, de (4.37) e (4.46), temos :

$$
\begin{aligned}
M_1 + M_3 \;&\ge\; \frac{3}{2}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|\; dxdt - \widetilde{C}\int_Q s\phi(\lambda^4+\lambda^2)|p|^2\; dxdt \\
&-\; \int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2 dxdt - \widetilde{C}\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2 dxdt \\
&=\; \frac{1}{2}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|\; dxdt - \widetilde{C}\int_Q s\phi(\lambda^4+\lambda^2)|p|^2\; dxdt - \widetilde{C}\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2 dxdt \;\;\cdot
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

Análise de M_4

Antes de iniciarmos a análise de M_4, afirmamos que :

Afirmação 4.0.2. $2\nabla p p = \nabla p^2$.

De fato, como $p(x,t) = e^{s\alpha(x,t)}w(x,t)$, então $p(x,t)^2 = e^{2s\alpha(x,t)}w(x,t)^2$. Daí,

$$
\frac{\partial p}{\partial x_i} = s\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}p + e^{s\alpha}\frac{\partial w}{\partial x_i}, \qquad \nabla p = s\nabla\alpha\; p + e^{s\alpha}\nabla w \qquad e \qquad \frac{\partial p^2}{\partial x_i} = 2s\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}p^2 + 2e^{s\alpha}\frac{\partial w}{\partial x_i}p \;\cdot
$$

Portanto,

$$
\nabla p^2 = 2s\nabla\alpha p^2 + 2e^{s\alpha}\nabla w p = 2(s\nabla\alpha p + 2e^{s\alpha}\nabla w)p = 2\nabla p\; p \;\cdot
$$

Agora, note que da expressão de ϕ temos que $\phi^2 = \frac{e^{2\lambda\psi}}{\beta(t)^2}$ e $\phi^3 = \frac{e^{3\lambda\psi}}{\beta(t)^3}$ · Então, $\phi^2_{x_i} = 2\lambda\psi_{x_i}\frac{e^{2\lambda\psi}}{\beta(t)^2}$ e $\phi^3_{x_i} = 3\lambda\psi_{x_i}\frac{e^{3\lambda\psi}}{\beta(t)^3}$ · Logo,

$$
\nabla\phi^2 = 2\lambda\phi^2\nabla\psi = 2\phi(\lambda\phi\nabla\psi) = 2\phi\nabla\phi,
$$

$$\nabla \phi^3 = 3\lambda\phi^3\nabla\psi = 3\phi^2(\lambda\phi\nabla\psi) = 3\phi^2\nabla\phi \cdot$$

Agora, passemos a análise de M_4. De fato, pela fórmula de Green, temos:

$$\begin{aligned}
M_4 &= -2\int_Q \left(s^3\lambda^3\phi^3|\nabla\psi|^2\nabla\psi\cdot\nabla p\; p + s^2\lambda^3\phi^2|\nabla\psi|^2\nabla\psi\cdot\nabla p\; p\right)dxdt \\
&= -\int_Q \left(s^3\lambda^3\phi^3|\nabla\psi|^2\nabla\psi\cdot(2\nabla p\; p) + s^2\lambda^3\phi^2|\nabla\psi|^2\nabla\psi\cdot(2\nabla p\; p)\right)dxdt \\
&= -\int_Q s^3\lambda^3\phi^3|\nabla\psi|^2\nabla\psi\cdot\nabla p^2 - \int_Q s^2\lambda^3\phi^2|\nabla\psi|^2\nabla\psi\cdot\nabla p^2 dxdt \\
&= \int_Q s^3\lambda^3\nabla\cdot(\phi^3|\nabla\psi|^2\nabla\psi)p^2 dxdt + \int_Q s^2\lambda^3\nabla\cdot(\phi^2|\nabla\psi|^2\nabla\psi)p^2 dxdt \\
&= \int_Q \left(s^3\lambda^3\nabla\phi^3|\nabla\psi|^2\nabla\psi p^2 + s^3\lambda^3\phi^3\nabla\cdot\left(|\nabla\psi|^2\nabla\psi\right)p^2\ \right)dxdt \\
&+ \int_Q \left(s^2\lambda^3\nabla\phi^2|\nabla\psi|^2\nabla\psi p^2 + s^2\lambda^3\phi^2\nabla\cdot\left(|\nabla\psi|^2\nabla\psi\right)p^2\ \right)dxdt \\
&= \int_Q \left(s^3\lambda^3(3\lambda\phi^3\nabla\psi)|\nabla\psi|^2\nabla\psi p^2 + s^3\lambda^3\phi^3\nabla\cdot\left(|\nabla\psi|^2\nabla\psi\right)p^2\ \right)dxdt \\
&+ \int_Q \left(s^2\lambda^3(2\lambda\phi^2\nabla\psi)|\nabla\psi|^2\nabla\psi p^2 + s^2\lambda^3\phi^2\nabla\cdot\left(|\nabla\psi|^2\nabla\psi\right)p^2\ \right)dxdt \\
&= 3\int_Q s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4p^2\ dxdt + \int_Q s^3\lambda^3\phi^3\nabla\cdot\left(|\nabla\psi|^2\nabla\psi\right)p^2\ dxdt \\
&+ 2\int_Q s^2\lambda^4\phi^2|\nabla\psi|^4p^2\ dxdt + \int_Q s^2\lambda^3\phi^2\nabla\cdot\left(|\nabla\psi|^2\nabla\psi\right)p^2\ dxdt\ \cdot
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Por outro lado, como $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ então $|\nabla\left(|\nabla\psi|^2\nabla\psi\right)| \leq \widetilde{C}$. Daí,

$$\begin{aligned}
\left|M_4 - \int_Q \lambda^4\left(3s^3\phi^3 + 2s^2\phi^2\right)|\nabla\psi|^4p^2\ dxdt\right| &= \left|\int_Q \lambda^3\left(s^3\phi^3 + s^2\phi^2\right)\nabla\cdot\left(|\nabla\psi|^2\nabla\psi\right)p^2\ dxdt\right| \\
&\leq \int_Q \lambda^3\left(s^3\phi^3 + s^2\phi^2\right)|\nabla\cdot\left(|\nabla\psi|^2\nabla\psi\right)|\ |p|^2\ dxdt \\
&\leq \widetilde{C}\int_Q \lambda^3\left(s^3\phi^3 + s^2\phi^2\right)|p|^2\ dxdt\ \cdot
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Logo,

$$M_4 \geq \int_Q \lambda^4\left(3s^3\phi^3 + 2s^2\phi^2\right)|\nabla\psi|^4p^2\ dxdt - \widetilde{C}\int_Q \lambda^3\left(s^3\phi^3 + s^2\phi^2\right)|p|^2\ dxdt\ \cdot \tag{4.50}$$

Portanto, de (4.50) e da definição de M_2, obtemos :

$$M_4 + M_2 \geq \int_Q s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4p^2\ dxdt - \widetilde{C}\int_Q \left(s^3\lambda^3\phi^3 + s^2\lambda^3\phi^2\right)|p|^2\ dxdt\ \cdot \tag{4.51}$$

Análise de M_5

Procedendo agora com a análise de M_5, temos que :

$$\begin{aligned} M_5 &= 2\int_Q s^2\lambda^2\alpha_t\phi|\nabla\psi|^2p^2\ dxdt + 2\int_Q s^2\lambda\alpha_t\phi\nabla\psi\cdot\nabla p\ p\ dxdt \\ &= 2\int_Q s^2\lambda^2\alpha_t\phi|\nabla\psi|^2p^2\ dxdt + \int_Q s^2\lambda\alpha_t\phi\nabla\psi\cdot(2\nabla p\ p)\ dxdt \\ &= 2\int_Q s^2\lambda^2\alpha_t\phi|\nabla\psi|^2p^2\ dxdt + \int_Q s^2\lambda\alpha_t\phi\nabla\psi\cdot\nabla p^2\ dxdt\ \cdot \end{aligned} \tag{4.52}$$

Aplicando a fórmula de Green a segunda integral e sabendo que $p = 0$ em Σ, temos :

$$\begin{aligned} M_5 &= 2\int_Q s^2\lambda^2\alpha_t\phi|\nabla\psi|^2p^2\ dxdt - \int_Q s^2\lambda\nabla(\phi\alpha_t\nabla\psi)p^2\ dxdt \\ &= 2\int_Q s^2\lambda^2\alpha_t\phi|\nabla\psi|^2p^2\ dxdt - \int_Q s^2\lambda\nabla\phi\alpha_t\nabla\psi p^2\ dxdt - \int_Q s^2\lambda\phi\nabla\alpha_t\nabla\psi p^2\ dxdt \\ &- \int_Q s^2\lambda\phi\alpha_t\nabla(\nabla\psi)p^2\ dxdt = 2\int_Q s^2\lambda^2\alpha_t\phi|\nabla\psi|^2p^2\ dxdt - \int_Q s^2\lambda(\lambda\phi\nabla\psi)\alpha_t\nabla\psi p^2\ dxdt \\ &- \int_Q s^2\lambda\phi(\lambda\phi_t\nabla\psi)\nabla\psi p^2\ dxdt - \int_Q s^2\lambda\phi\alpha_t\Delta\psi p^2\ dxdt = 2\int_Q s^2\lambda^2\alpha_t\phi|\nabla\psi|^2p^2\ dxdt \\ &- \int_Q s^2\lambda^2\phi\alpha_t|\nabla\psi|^2p^2\ dxdt - \int_Q s^2\lambda^2\phi\phi_t|\nabla\psi|^2p^2\ dxdt - \int_Q s^2\lambda\phi\alpha_t\Delta\psi p^2\ dxdt\ \cdot \end{aligned} \tag{4.53}$$

Então, obtemos :

$$\begin{aligned} |M_5| &\leq 2\int_Q s^2\lambda^2\phi|\alpha_t||\nabla\psi|^2|p|^2\ dxdt + \int_Q s^2\lambda^2\phi|\alpha_t||\nabla\psi|^2|p|^2\ dxdt \\ &+ \int_Q s^2\lambda^2\phi|\phi_t||\nabla\psi|^2|p|^2\ dxdt + \int_Q s^2\lambda\phi|\alpha_t||\Delta\psi||p|^2\ dxdt \\ &\leq 2\overline{C}\widehat{C}_1\int_Q s^2\lambda^2\phi^3|p|^2\ dxdt + \overline{C}\widehat{C}_1\int_Q s^2\lambda^2\phi^3|p|^2\ dxdt + \overline{C}\widehat{C}_1\int_Q s^2\lambda^2\phi^3|p|^2\ dxdt \\ &+ \overline{C}\widehat{C}_2\int_Q s^2\lambda\phi^3|p|^2\ dxdt\ = 4\overline{C}\widehat{C}_1\int_Q s^2\lambda^2\phi^3|p|^2\ dxdt + \overline{C}\widehat{C}_2\int_Q s^2\lambda\phi^3|p|^2\ dxdt \\ &\leq \widetilde{C}\left(\int_Q s^2\lambda^2\phi^3|p|^2\ dxdt + \int_Q s^2\lambda\phi^3|p|^2\ dxdt\right)\ \cdot \end{aligned} \tag{4.54}$$

Portanto,

$$M_5 \ \geq\ -\widetilde{C}\int_Q \left(s^2\lambda^2\phi^3 + s^2\lambda\phi^3\right)|p|^2\ dxdt\ \cdot \tag{4.55}$$

Como temos $X = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5$, então segue de (4.30), (4.47), (4.51) e (4.55) que :

$$\frac{1}{2}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2dxdt + \int_Q s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4|p|^2dxdt \le \widetilde{C}\int_Q s\phi(\lambda^4+\lambda^2)|p|^2\ dxdt +$$
$$\widetilde{C}\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2\ dxdt + \widetilde{C}\int_Q (s^3\lambda^3\phi^3 + s^2\lambda^3\phi^2)|p|^2\ dxdt + \widetilde{C}\int_Q (s^2\lambda^2 + s^2\lambda)\phi^3|p|^2\ dxdt +$$
$$\widetilde{C}\int_Q \left[\lambda^2(s^2\phi^2 + s^2\phi^3) + s\phi^3 + 1\right]|p|^2\ dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\ dxdt\ \cdot \tag{4.56}$$

Considerando $\lambda \ge \lambda_0 \ge 1$, $\lambda^4 s \ge \lambda^4 + \lambda^2$ e $C_0 > 0$ tal que $C_0 \le \phi$, temos :

$$C_0{}^2 \le \phi^2 \Rightarrow C_0{}^2 s\phi \le s\phi^3 \quad e \quad C_0 s^3\lambda^3\phi^2p^2 \le s^3\lambda^3\phi^3p^2;$$

$$C_0 s^3\lambda^3\phi^2p^2 \le s^3\lambda^3\phi^3p^2 \quad e \quad C_0 s^2\lambda^3\phi^2p^2 \le s^2\lambda^4\phi^3p^2;$$

$$s^2\lambda\phi^3p^2 \le s^2\lambda^4\phi^3p^2 \quad e \quad s^2\lambda^2\phi^3p^2 \le s^2\lambda^4\phi^3p^2\ \cdot$$

Tomando $m_0 = min\{\ C_0, C_0^2\ \}$, obtemos :

$$m_0 s\phi \le s\phi^3 \quad e \quad m_0 s\phi(\lambda^4+\lambda^2)p^2 \le s^2\lambda^4\phi^3p^2;$$

$$m_0 s^3\lambda^3\phi^2p^2 \le s^3\lambda^3\phi^3p^2 \quad e \quad m_0 s^2\lambda^3\phi^2p^2 \le s^2\lambda^4\phi^3p^2\ \cdot$$

Então destes fatos temos que :

$$\frac{\widetilde{C}}{m_0}\int_Q m_0 s\phi(\lambda^4+\lambda^2)|p|^2dxdt + \widetilde{C}\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2dxdt + \widetilde{C}\int_Q s^3\lambda^3\phi^3p^2dxdt +$$
$$\frac{\widetilde{C}}{m_0}\int_Q m_0 s^2\lambda^3\phi^2|p|^2dxdt + \widetilde{C}\int_Q (s^2\lambda^2\phi^3|p|^2 + s^2\lambda\phi^3|p|^2)dxdt + \frac{\widetilde{C}}{m_0}\int_Q m_0 s^2\lambda^2|p|^2dxdt +$$
$$\widetilde{C}\int_Q s\phi^3|p|^2dxdt + C\int_Q |p|^2dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2dxdt \le \frac{\widetilde{C}}{m_0}\int_Q s^2\lambda^4\phi^3|p|^2dxdt +$$
$$\widetilde{C}\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2 + \widetilde{C}\int_Q s^3\lambda^3\phi^3p^2dxdt + \frac{\widetilde{C}}{m_0}\int_Q s^2\lambda^4\phi^3|p|^2dxdt + \frac{\widetilde{C}}{m_0}\int_Q s^2\lambda^4\phi^3|p|^2dxdt +$$
$$\widetilde{C}\int_Q (s^2\lambda^4\phi^3|p|^2 + s^2\lambda^4\phi^3|p|^2)dxdt + C\int_Q s^2\lambda^4\phi^3|p|^2dxdt + \widetilde{C}\int_Q \phi^3|p|^2dxdt +$$
$$\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2dxdt = \left(\frac{3\widetilde{C}}{m_0} + 3\widetilde{C}\right)\int_Q s^2\lambda^4\phi^3|p|^2dxdt + \widetilde{C}\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2dxdt\int_Q s^3\lambda^3\phi^3|p|^2dxdt +$$
$$\widetilde{C}\int_Q \phi^3|p|^2dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2dxdt\ \cdot$$

Assim, podemos reescrever (4.56) como segue :

$$\frac{1}{2}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2dxdt+\int_Q s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4|p|^2dxdt\leq\left(\frac{3\widetilde{C}}{m_0}+3\widetilde{C}\right)\int_Q s^2\lambda^4\phi^3|p|^2dxdt+$$
$$\widetilde{C}\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2dxdt+\int_Q s^3\lambda^3\phi^3|p|^2dxdt+\widetilde{C}\int_Q\phi^3|p|^2dxdt+\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2dxdt\ \cdot \tag{4.57}$$

Fazendo $\overline{K}=m\acute{a}x\{\ \frac{3\widetilde{C}}{m_0}+3\widetilde{C},\widetilde{C},1\ \}$, obtemos :

$$\frac{1}{2}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2dxdt+\int_Q s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4|p|^2dxdt\leq\overline{K}\bigg(\int_Q s^2\lambda^4\phi^3|p|^2dxdt+$$
$$\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2dxdt+\int_Q s^3\lambda^3\phi^3|p|^2dxdt+\int_Q\phi^3|p|^2dxdt+\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2dxdt\bigg)\ \cdot \tag{4.58}$$

Temos que $|\nabla\psi|>0$ em $\partial\Omega$. Então segue que $|\nabla\psi|>0$ no conjunto compacto $\partial\Omega\cup(\Omega-\omega_0)$. Portanto, existe $\gamma>0$ tal que $0<\gamma<|\nabla\psi|$ para todo $x\in\partial\Omega\cup(\Omega-\omega_0)$. Assim, de (4.58) obtemos :

$$\begin{aligned}&\int_{Q-Q_{\omega_0}}\left(\gamma^4s^3\lambda^4\phi^3p^2+\gamma^2s\lambda^2\phi|\nabla p|^2\right)dxdt\leq\int_{Q-Q_{\omega_0}}\left(s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4p^2+s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2\right)dxdt\\&\leq 2\int_{Q-Q_{\omega_0}}s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4p^2dxdt+\int_{Q-Q_{\omega_0}}s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2dxdt\\&=2\bigg(\int_{Q-Q_{\omega_0}}s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4p^2dxdt+\frac{1}{2}\int_{Q-Q_{\omega_0}}s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla p|^2dxdt\bigg)\\&\leq\widehat{C}_4\bigg(\int_Q s^2\lambda^4\phi^3|p|^2dxdt+\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2dxdt+\int_Q s^3\lambda^3\phi^3|p|^2dxdt+\int_Q\phi^3|p|^2dxdt\\&+\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2dxdt\bigg),\end{aligned} \tag{4.59}$$

onde fizemos $\widehat{C}_4=2\overline{K}$. Então,

$$\int_{Q-Q_{\omega_0}}\left(s^3\lambda^4\phi^3p^2+s\lambda^2\phi|\nabla p|^2\right)dxdt\leq\widehat{C}_4\bigg(\int_Q s^2\lambda^4\phi^3|p|^2dxdt$$
$$+\int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2dxdt+\int_Q s^3\lambda^3\phi^3|p|^2dxdt+\int_Q\phi^3|p|^2dxdt+\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2dxdt\bigg)\ \cdot \tag{4.60}$$

Para $s \geq \lambda$ e $\lambda \geq 1$ tal que $s^2\lambda^4 \leq s^3\lambda^3$ temos que $s^2\lambda^4\phi^3p^2 \leq s^3\lambda^3\phi^3p^2$ e $\phi^3p^2 \leq s^3\lambda^3p^2\phi^3$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{Q-Q_{\omega_0}} \left(s^3\lambda^4\phi^3p^2 + s\lambda^2\phi|\nabla p|^2\right) dxdt \quad &\leq \quad \widehat{C}_4\bigg(\int_Q s^2\lambda^4\phi^3|p|^2dxdt + \int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2dxdt \\
+\int_Q s^3\lambda^3\phi^3|p|^2dxdt + \int_Q \phi^3|p|^2dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2dxdt\bigg) \quad &\leq \quad \widehat{C}_4\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2dxdt \\
+3\int_Q s^3\lambda^3\phi^3|p|^2dxdt + \int_Q s\lambda\phi|\nabla p|^2dxdt\bigg) \quad &\leq \quad (3\widehat{C}_4+1) \ \bigg(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2dxdt \\
+\int_{Q_{\omega_0}} \left(s^3\lambda^3\phi^3|p|^2 + s\lambda\phi|\nabla p|^2\right) dxdt\bigg) + (3\widehat{C}_4+1)\int_{Q-Q_{\omega_0}} &\left(s^3\lambda^3\phi^3|p|^2 + s\lambda\phi|\nabla p|^2\right) dxdt\bigg) \\
\leq (3\widehat{C}_4+1)\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} \left(s^3\lambda^3\phi^3|p|^2 + s\lambda\phi|\nabla p|^2\right) dxdt\bigg) \\
+\frac{1}{2}\int_{Q-Q_{\omega_0}} \left(s^3\lambda^4\phi^3|p|^2 + s\lambda^2\phi|\nabla p|^2\right) dxdt \ \cdot
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Fazendo $\overline{C}_3 = 3\widehat{C}_4 + 1$, então para $\lambda > \lambda_0$ e $s \geq s_0(\lambda)$ suficientemente grande, temos :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{Q-Q_{\omega_0}} \left(s^3\lambda^4\phi^3p^2 + s\lambda^2\phi|\nabla p|^2\right) dxdt \quad &\leq \quad \overline{C}_3\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2dxdt \\
&+ \quad \overline{C}_3\int_{Q_{\omega_0}} \left(s^3\lambda^3\phi^3|p|^2 + s\lambda\phi|\nabla p|^2\right) dxdt.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{Q-Q_{\omega_0}} (s^3\lambda^4\phi^3p^2 + s\lambda^2\phi|\nabla p|^2)dxdt \quad &= \quad \frac{1}{2}\int_Q \left(s^3\lambda^4\phi^3p^2 + s\lambda^2\phi|\nabla p|^2\right) dxdt \\
&- \quad \frac{1}{2}\int_{Q_{\omega_0}} \left(s^3\lambda^4\phi^3p^2 + s\lambda^2\phi|\nabla p|^2\right) dxdt \ \cdot
\end{aligned}$$

Então segue de (4.62) que :

$$\begin{aligned}
&\int_Q \left(s^3\lambda^4\phi^3p^2 + s\lambda^2\phi|\nabla p|^2\right) dxdt \leq \int_{Q_{\omega_0}} (s^3\lambda^4\phi^3p^2 + s\lambda^2\phi|\nabla p|^2)dxdt + \\
&2\overline{C}_3\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} \left(s^3\lambda^3\phi^3|p|^2 + s\lambda\phi|\nabla p|^2\right) \bigg)dxdt \leq \int_{Q_{\omega_0}} (s^3\lambda^4\phi^3p^2 + \\
&s\lambda^2\phi|\nabla p|^2)dxdt + 2\overline{C}_3\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} (s^3\lambda^4\phi^3|p|^2 + s\lambda^2\phi|\nabla p|^2)\bigg)dxdt \\
&\leq (2\overline{C}_3+1)\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} (s^3\lambda^4\phi^3|p|^2 + s\lambda^2\phi|\nabla p|^2)\bigg)dxdt \\
&= \overline{C}_4\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} (s^3\lambda^4\phi^3|p|^2 + s\lambda^2\phi|\nabla p|^2)\bigg)dxdt,
\end{aligned} \tag{4.63}$$

onde $\overline{C}_4 = 2\overline{C}_3 + 1$. Portanto, temos :

$$\int_Q (s^3\lambda^4\phi^3 p^2 \quad + \quad s\lambda^2\phi|\nabla p|^2) dxdt \leq$$
$$\overline{C}_4\Big(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} \Big(s^3\lambda^4\phi^3|p|^2 + s\lambda^2\phi|\nabla p|^2\Big)\Big) dxdt \ \cdot \tag{4.64}$$

Etapa 3: Retorno as variáveis originais

Como $p = e^{s\alpha}w$, então $\nabla p = s\nabla\alpha e^{s\alpha}w + e^{s\alpha}\nabla w$. Além disso, $|\nabla\alpha|^2 \leq \lambda^2\phi^2|\nabla\psi| \cdot$ Daí,

$$\begin{aligned} |\nabla p|^2 &= |s\nabla\alpha e^{s\alpha}w + e^{s\alpha}\nabla w|^2 \leq 2s^2|\nabla\alpha|^2 e^{2s\alpha}|w|^2 + 2e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 \\ &\leq 2e^{2s\alpha}s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2|w|^2 + 2e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 \leq 2\widehat{C}_1 e^{2s\alpha}s^2\lambda^2\phi^2|w|^2 + 2e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 \\ &\leq C_3 e^{2s\alpha}(s^2\lambda^2\phi^2|w|^2 + |\nabla w|^2), \end{aligned} \tag{4.65}$$

onde $C_3 = máx\{\ 2\widehat{C}_1,\ 2\ \}$. Por outro lado, $\nabla p = s\nabla\alpha p + e^{s\alpha}\nabla w$. Logo,

$$|\nabla p|^2 \quad = \quad |s\nabla\alpha p + e^{s\alpha}\nabla w|^2 = s^2|\nabla\alpha|^2 p^2 + e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 + 2se^{s\alpha}(\nabla\alpha\cdot\nabla w)p \ \cdot \tag{4.66}$$

Substituindo (4.66) no primeiro membro e (4.65) no segundo membro de (4.64), obtemos :

$$\begin{aligned} &\int_Q \Big(s^3\lambda^4\phi^3 e^{2s\alpha}|w|^2 + s\lambda^2\phi\Big(s^2|\nabla\alpha|^2p^2 + e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 + 2se^{s\alpha}(\nabla\alpha\cdot\nabla w)p\Big)\Big) dxdt \leq \\ &\overline{C}_4\Big(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} \Big(s^3\lambda^4\phi^3 e^{2s\alpha}|w|^2 + C_3 s\lambda^2\phi e^{2s\alpha}\Big(s^2\lambda^2\phi^2|w|^2 + |\nabla w|^2\Big)\Big)\Big) dxdt. \\ &= \overline{C}_4\Big(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt + (C_3+1)\int_{Q_{\omega_0}} s^3\lambda^4\phi^3 e^{2s\alpha}|w|^2 dxdt + C_3\int_{Q_{\omega_0}} s\lambda^2\phi e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 dxdt\Big) \\ &\leq C_4\Big(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} s^3\lambda^4\phi^3 e^{2s\alpha}|w|^2 dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} s\lambda^2\phi e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 dxdt\Big), \end{aligned} \tag{4.67}$$

com $C_4 = máx\ \{\ \overline{C}_4(C_3+1), \overline{C}_4 C_3\ \}$.

Reescrevendo (4.67) de uma forma conveniente, obtemos :

$$\begin{aligned} &\int_Q s^3\lambda^4\phi^3 e^{2s\alpha}|w|^2 dxdt + \int_Q s^3\lambda^2\phi|\nabla\alpha|^2p^2 dxdt + \int_Q s\lambda^2\phi e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 dxdt + \\ &2\int_Q s^2\lambda^2\phi e^{s\alpha}(\nabla\alpha\cdot\nabla w)p\ dxdt \leq C_4\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt + C_4\int_{Q_{\omega_0}} s^3\lambda^4\phi^3 e^{2s\alpha}|w|^2 dxdt + \\ &C_4\int_{Q_{\omega_0}} s\lambda^2\phi e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 dxdt \ \cdot \end{aligned} \tag{4.68}$$

De (4.68), denotando

$$N_3 \;=\; C_4 \int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt + C_4 \int_{Q_{\omega_0}} s^3\lambda^4\phi^3 e^{2s\alpha}|w|^2 dxdt + C_4 \int_{Q_{\omega_0}} s\lambda^2\phi e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 dxdt \;\cdot$$

Então podemos ver diretamente que :

$$\int_Q s^3\lambda^2\phi|\nabla\alpha|^2 p^2 dxdt \leq N_3 \;\cdot \tag{4.69}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
&\left|2\int_Q s^2\lambda^2\phi e^{s\alpha}(\nabla\alpha\cdot\nabla w)p\; dxdt\right| \leq 2\int_Q s^2\lambda^2\phi e^{s\alpha}|\nabla\alpha||\nabla w||p|\; dxdt \\
&\int_Q \left(2\left(s\lambda\sqrt{2}\phi|\nabla\alpha||p|\right)\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}|\nabla w|e^{s\alpha}\right)\right) dxdt \leq \\
&2\int_Q s^3\lambda^2\phi|\nabla\alpha|^2|p|^2\; dxdt + \frac{1}{2}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla w|^2 e^{2s\alpha}\; dxdt \leq \\
&2N_3 + \frac{1}{2}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla w|^2 e^{2s\alpha}\; dxdt \;\cdot
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Portanto, de (4.68), (4.69) e (4.70), obtemos

$$\int_Q \left(s^3\lambda^4\phi^3 e^{2s\alpha}|w|^2 + s\lambda^2\phi e^{2s\alpha}|\nabla w|^2\right) dxdt \leq N_3 + N_3 + 2N_3 + \frac{1}{2}\int_Q s\lambda^2\phi|\nabla w|^2 e^{2s\alpha}\; dxdt \;\cdot \tag{4.71}$$

Desta forma,

$$\int_Q \left(s^3\lambda^4\phi^3 e^{2s\alpha}|w|^2 + \frac{1}{2}s\lambda^2\phi e^{2s\alpha}|\nabla w|^2\right) dxdt \leq 4N_3 \;\cdot \tag{4.72}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
&\int_Q \left(s^3\lambda^4\phi^3 e^{2s\alpha}|w|^2 + s\lambda^2\phi e^{2s\alpha}|\nabla w|^2\right) dxdt \leq \int_Q \left(2s^3\lambda^4\phi^3 e^{2s\alpha}|w|^2 + s\lambda^2\phi e^{2s\alpha}|\nabla w|^2\right) dxdt \\
&= 2\left(\int_Q \left(s^3\lambda^4\phi^3 e^{2s\alpha}|w|^2 + \frac{1}{2}s\lambda^2\phi e^{2s\alpha}|\nabla w|^2\right) dxdt\right) \leq 8N_3 = 8C_4\left(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt + \right. \\
&\left.\int_{Q_{\omega_0}} s^3\lambda^4\phi^3 e^{2s\alpha}|w|^2 dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} s\lambda^2\phi e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 dxdt\right) \;\cdot
\end{aligned}$$

Fazendo $\overline{C}_5 = 8C_4$, obtemos :

$$\begin{aligned}
&\int_Q \left(s^3\lambda^4\phi^3 e^{2s\alpha}|w|^2 + s\lambda^2\phi e^{2s\alpha}|\nabla w|^2\right) dxdt \leq \\
&\overline{C}_5\left(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} \left(s^3\lambda^4\phi^3 e^{2s\alpha}|w|^2 + s\lambda^2\phi e^{2s\alpha}|\nabla w|^2\right) dxdt\right) \;\cdot
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Etapa 4: Estimativa de Carleman (Conclusão da prova do Teorema 4.0.12)

Rescrevamos $(3.3)_1$ da seguinte forma: $w_t + \Delta w = f_1 + a(t)w$.

Tomando o quadrado de ambos os lados da expressão acima e em seguida multiplicando por $(s\phi)^{-1}e^{2s\alpha}$, temos :

$$(s\phi)^{-1}e^{2s\alpha}\left(|w_t|^2 + |\Delta w|^2\right) = (s\phi)^{-1}e^{2s\alpha}|f_1|^2 + (s\phi)^{-1}e^{2s\alpha}|a(t)|^2|w|^2 + 2(s\phi)^{-1}e^{2s\alpha}f_1 a(t)w - 2(s\phi)^{-1}e^{2s\alpha}w_t\Delta w \cdot \tag{4.74}$$

Integrando (4.74) em Q, obtemos :

$$\int_Q (s\phi)^{-1}e^{2s\alpha}\left(|w_t|^2 + |\Delta w|^2\right) dxdt = \int_Q (s\phi)^{-1}e^{2s\alpha}|f_1|^2 \; dxdt + \int_Q (s\phi)^{-1}e^{2s\alpha}|a(t)|^2|w|^2 \; dxdt + 2\int_Q (s\phi)^{-1}e^{2s\alpha}f_1 a(t)w \; dxdt - 2\int_Q (s\phi)^{-1}e^{2s\alpha}w_t\Delta w \; dxdt \;\cdot \tag{4.75}$$

Procedemos agora com a análise de cada termo de (4.75), mas antes note que

$$(s\phi)^{-1} \leq C_5 \qquad e \qquad (s\phi)^{-1} \leq C_6(s\phi)^3. \tag{4.76}$$

A partir disto temos :

$$\left|\int_Q (s\phi)^{-1}e^{2s\alpha}|f_1|^2 \; dxdt\right| \leq C_5\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 \; dxdt \;\cdot \tag{4.77}$$

$$\left|\int_Q (s\phi)^{-1}e^{2s\alpha}|a(t)|^2|w|^2 \; dxdt\right| \leq C_6 M\int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2 \; dxdt \;\cdot \tag{4.78}$$

$$\left|2\int_Q (s\phi)^{-1}e^{2s\alpha}f_1 a(t)w \; dxdt\right| = \left|\int_Q (s\phi)^{-1}e^{2s\alpha}(2f_1 a(t)w)dxdt\right| \leq \int_Q (s\phi)^{-1}e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt + \int_Q (s\phi)^{-1}e^{2s\alpha}|a(t)|^2|w|^2 dxdt \leq C_5\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt + C_6 M\int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2 dxdt \;\cdot \tag{4.79}$$

Agora, note que :

$$\begin{cases} (e^{2s\alpha})_{x_i} = 2s\alpha_{x_i}e^{2s\alpha} \Rightarrow \nabla e^{2s\alpha} = 2s\nabla\alpha e^{2s\alpha}; \\ (\phi^{-1})_{x_i} = -\phi^{-2}\phi_{xi} = -\phi^{-2}\lambda\psi_{x_i}\phi \Rightarrow \nabla\phi^{-1} = -\phi^{-2}\lambda\phi\nabla\psi = -\phi^{-2}\nabla\phi \;\cdot \end{cases}$$

Por outro lado, como $\alpha(0) = \alpha(T) = -\infty$, então $e^{2s\alpha(0)} = e^{2s\alpha(T)} = 0$. Assim, pela fórmula de Green, temos :

$$
\begin{aligned}
&2\int_Q (s\phi)^{-1}e^{2s\alpha}w_t\Delta w\ dxdt = -2\int_Q \nabla\left((s\phi)^{-1}e^{2s\alpha}w_t\right)\cdot\nabla w\ dxdt\\
&-2\int_Q \nabla e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}w_t\nabla w\ dxdt - 2\int_Q \nabla\phi^{-1}e^{2s\alpha}s^{-1}w_t\nabla w\ dxdt\\
&-2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\nabla w_t\cdot\nabla w\ dxdt = -2\int_Q 2s\nabla\alpha e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}w_t\nabla w\ dxdt\\
&-2\int_Q (-\phi^{-2}\nabla\phi)e^{2s\alpha}s^{-1}w_t\nabla w\ dxdt - 2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla w|^2 dxdt\\
&= -4\int_Q s\lambda\phi\nabla\psi e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}w_t\nabla w\ dxdt + 2\int_Q e^{2s\alpha}s^{-1}\phi^{-2}\lambda\phi\nabla\psi w_t\nabla w\ dxdt\\
&-\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\frac{d}{dt}|\nabla w|^2 dxdt = -4\int_Q \lambda e^{2s\alpha}w_t\nabla\psi\cdot\nabla w\ dxdt\\
&+2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\lambda w_t\nabla\psi\cdot\nabla w\ dxdt - \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\frac{d}{dt}|\nabla w|^2 dxdt\ \cdot
\end{aligned}
\tag{4.80}
$$

O cálculo da última integral por partes nos dá :

$$
\begin{aligned}
\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\frac{d}{dt}|\nabla w|^2 dxdt &= \int_\Omega\int_0^T e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\frac{d}{dt}|\nabla w|^2 dxdt\\
&= -\int_Q\left(2\alpha_t e^{2s\alpha}\phi^{-1} - e^{2s\alpha}s^{-1}\phi^{-2}\phi_t\right)|\nabla w|^2\ dxdt\ \cdot
\end{aligned}
$$

Logo, (4.80) torna-se :

$$
\begin{aligned}
&2\int_Q (s\phi)^{-1}e^{2s\alpha}w_t\Delta w\ dxdt = -4\int_Q \lambda e^{2s\alpha}w_t\nabla\psi\cdot\nabla w\ dxdt +\\
&2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\lambda w_t\nabla\psi\cdot\nabla w\ dxdt + \int_Q\left(2\alpha_t e^{2s\alpha}\phi^{-1} - e^{2s\alpha}s^{-1}\phi^{-2}\phi_t\right)|\nabla w|^2\ dxdt\ \cdot
\end{aligned}
\tag{4.81}
$$

Assim,

$$\left|2\int_Q (s\phi)^{-1}e^{2s\alpha}w_t\Delta w\ dxdt\right| \leq 4\int_Q \lambda e^{2s\alpha}|w_t||\nabla\psi||\nabla w|\ dxdt +$$
$$2\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\lambda|w_t||\nabla\psi||\nabla w|\ dxdt + 2\int_Q |\alpha_t|e^{2s\alpha}\phi^{-1}|\nabla w|^2\ dxdt +$$
$$\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\phi^{-1}|\phi_t|\ |\nabla w|^2\ dxdt \leq 4\int_Q \lambda e^{2s\alpha}|w_t||\nabla\psi||\nabla w|\ dxdt +$$
$$2C_5\int_Q e^{2s\alpha}\lambda|w_t||\nabla\psi||\nabla w|\ dxdt \quad + \quad 2\overline{C}\int_Q e^{2s\alpha}\phi|\nabla w|^2\ dxdt \quad +$$
$$C_5\overline{C}\int_Q e^{2s\alpha}\phi|\nabla w|^2\ dxdt \leq (4+2C_5)\int_Q \lambda e^{2s\alpha}|w_t||\nabla\psi||\nabla w|\ dxdt +$$
$$(2\overline{C}+C_5\overline{C})\int_Q e^{2s\alpha}s\phi|\nabla w|^2\ dxdt\ \cdot \tag{4.82}$$

Tomando $\overline{K}_1 = máx\ \{\ 4+2C_5,\ 2\overline{C}+C_5\overline{C}\ \}$, tem-se :

$$\left|2\int_Q (s\phi)^{-1}e^{2s\alpha}w_t\Delta w\ dxdt\right| \leq \overline{K}_1\bigg(\int_Q \lambda e^{2s\alpha}|w_t||\nabla\psi||\nabla w|\ dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}s\phi|\nabla w|^2\ dxdt\bigg) =$$
$$\int_Q e^{2s\alpha}\left(\overline{K}_1\sqrt{2s\phi}\lambda|\nabla\psi||\nabla w|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2s\phi}}|w_t|\right)\ dxdt + \overline{K}_1\int_Q e^{2s\alpha}s\phi|\nabla w|^2\ dxdt \leq$$
$$2\overline{K}_1^2\int_Q e^{2s\alpha}s\phi\lambda^2|\nabla\psi|^2|\nabla w|^2\ dxdt + \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|w_t|^2dxdt + \overline{K}_1\int_Q e^{2s\alpha}s\phi|\nabla w|^2\ dxdt \leq$$
$$2\overline{K}_1^2\widehat{C}_1\int_Q e^{2s\alpha}s\phi\lambda^2|\nabla w|^2\ dxdt + \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|w_t|^2dxdt + \overline{K}_1\int_Q e^{2s\alpha}\lambda^2 s\phi|\nabla w|^2\ dxdt =$$
$$\overline{C}_5\int_Q e^{2s\alpha}s\phi\lambda^2|\nabla w|^2\ dxdt + \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|w_t|^2dxdt, \tag{4.83}$$

onde $\overline{C}_6 = 2\overline{K}_1(\overline{K}_1\widehat{C}_1+1)\ \cdot$

Substituindo (4.77), (4.78), (4.79), (4.83) em (4.75), obtemos :

$$\int_Q (s\phi)^{-1}e^{2s\alpha}\left(|w_t|^2+|\Delta w|^2\right)dxdt \leq 2C_5\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\ dxdt + 2C_6M\int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\ dxdt +$$
$$\overline{C}_6\int_Q e^{2s\alpha}s\phi\lambda^2|\nabla w|^2\ dxdt + \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|w_t|^2dxdt \leq \overline{K}_2\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\ dxdt +$$
$$\int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2\ dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}s\phi\lambda^2|\nabla w|^2\ dxdt\bigg) + \frac{1}{2}\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}|w_t|^2dxdt, \tag{4.84}$$

onde $\overline{K}_2 = máx\ \{\ 2C_5,\ 2C_6M,\ \overline{C}_6\ \}$. Portanto, segue de (4.73) que :

$$\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\left(\frac{1}{2}|w_t|^2+|\Delta w|^2\right)dxdt \le \overline{K}_2\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\ dxdt + \overline{K}_2\Bigg(\int_Q e^{2s\alpha}s^3\phi^3|w|^2dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}s\phi\lambda^2|\nabla w|^2\ dxdt\Bigg) \le \overline{K}_2(1+\overline{C}_5)\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\ dxdt + \overline{K}_2\overline{C}_5\int_{Q_{\omega_0}} s^3\lambda^4\phi^3e^{2s\alpha}|w|^2dxdt + \overline{K}_2\overline{C}_5\int_Q s\lambda^2\phi e^{2s\alpha}|\nabla w|^2dxdt\ \cdot \tag{4.85}$$

Tomando $\overline{K}_3 = máx\ \{\ \overline{K}_2(1+\overline{C}_5),\ \overline{K}_2\overline{C}_5\ \}$, obtemos :

$$\int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\left(\frac{1}{2}|w_t|^2+|\Delta w|^2\right)dxdt \le \overline{K}_3\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2\ dxdt\ + \overline{K}_3\int_{Q_{\omega_0}}\left(s^3\lambda^4\phi^3e^{2s\alpha}|w|^2+s\lambda^2\phi e^{2s\alpha}|\nabla w|^2\right)dxdt\ \cdot \tag{4.86}$$

Considere a função $\chi \in C_0^\infty(\Omega),\quad \chi:\Omega\to\mathbb{R}$ tal que

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & se\ \ x\in\overline{\omega}_0 \\ 0, & se\ \ x\in\Omega-\omega\ \cdot \end{cases}$$

Ao multiplicarmos a equação $(3.3)_1$ por $e^{2s\alpha}\chi s\phi w$ e integrá-la em Q , obtemos:

$$\int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi\ w\ w_t\ dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi\ w\Delta w\ dxdt - -\int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi\ a(t)w^2\ dxdt = \int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi\ wf_1\ dxdt\ \cdot \tag{4.87}$$

Análise dos termos de (4.87)

Temos integrando por partes que :

$$\begin{aligned}\int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi\ w\ w_t\ dxdt &= \frac{1}{2}\int_{Q\omega_0}\left(e^{2s\alpha}\chi s\phi\right)\frac{d}{dt}|w|^2dxdt \\ &= -\frac{1}{2}\int_{Q\omega}\chi s\left(2s\alpha_te^{2s\alpha}\phi+e^{2s\alpha}\phi_t\right)|w|^2dxdt\ \cdot\end{aligned} \tag{4.88}$$

Daí,

$$\left|\int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi\ w\ w_t\ dxdt\right| \le \frac{1}{2}\int_{Q\omega}|\chi|s\left(2s|\alpha_t|e^{2s\alpha}\phi+e^{2s\alpha}|\phi_t|\right)|w|^2dxdt \le \frac{1}{2}\int_{Q\omega}s\left(2sC\phi^3e^{2s\alpha}+\overline{C}\phi^2e^{2s\alpha}\right)|w|^2dxdt = \overline{C}\int_{Q\omega}s^2\phi^3e^{2s\alpha}|w|^2dxdt + \frac{\overline{C}}{2}\int_{Q\omega}s\phi^2e^{2s\alpha}|w|^2dxdt \le \overline{C}\int_{Q\omega}s^3\phi^3e^{2s\alpha}|w|^2dxdt + \frac{\overline{C}}{2}\int_{Q\omega}s^3\phi^3e^{2s\alpha}|w|^2dxdt = \frac{3\overline{C}}{2}\int_{Q\omega}s^3\phi^3e^{2s\alpha}|w|^2dxdt\ \cdot \tag{4.89}$$

Sabendo que $w = 0$ em Σ, pela fórmula de Green temos :

$$\int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi \; w\Delta w \; dxdt = -\int_Q \nabla \left(e^{2s\alpha}\chi s\phi \; w\right) \nabla w \; dxdt =$$
$$-\int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi \; |\nabla w|^2 dxdt - \int_Q sw\nabla \left(e^{2s\alpha}\chi\phi\right) \nabla w \; dxdt \; \cdot$$

Isto é,

$$\int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi \; |\nabla w|^2 dxdt = -\int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi \; w\Delta w \; dxdt - \int_Q sw\nabla \left(e^{2s\alpha}\chi\phi\right) \nabla w \; dxdt \; \cdot \tag{4.90}$$

Por outro lado,

$$\int_Q sw\nabla \left(e^{2s\alpha}\chi\phi\right) \nabla w \; dxdt = \int_{Q_\omega} sw\Big(\nabla e^{2s\alpha}\chi\phi + e^{2s\alpha}\phi\nabla\chi + e^{2s\alpha}\chi\nabla\phi\Big)\nabla w \; dxdt =$$
$$\int_{Q_\omega} sw\Big(2s\nabla\alpha e^{2s\alpha}\chi\phi + e^{2s\alpha}\phi\nabla\chi + e^{2s\alpha}\chi\lambda\phi\nabla\psi\Big)\nabla w \; dxdt = \int_{Q_\omega} sw\Big(2s\lambda\phi\nabla\psi e^{2s\alpha}\chi\phi +$$
$$e^{2s\alpha}\phi\nabla\chi + e^{2s\alpha}\chi\lambda\phi\nabla\psi\Big)\nabla w \; dxdt = 2\int_{Q_\omega} s^2\phi^2\lambda\chi e^{2s\alpha} w\nabla\psi \cdot \nabla w \;\; dxdt +$$
$$\int_{Q_\omega} s\phi e^{2s\alpha} w\nabla\chi \cdot \nabla \; w \; dxdt + \int_{Q_\omega} s\phi\lambda\chi e^{2s\alpha} w\nabla\psi \cdot \nabla\psi \; dxdt \; \cdot \tag{4.91}$$

Então,

$$\left|\int_Q sw\nabla \left(e^{2s\alpha}\chi\phi\right) \nabla w \; dxdt\right| \leq 2\int_{Q_\omega} s^2\phi^2\lambda e^{2s\alpha}|w| \; |\nabla\psi| \; |\nabla w| \;\; dxdt +$$
$$\int_{Q_\omega} s\phi e^{2s\alpha}|w| \; |\nabla\chi| \; |\nabla \; w| \; dxdt + \int_{Q_\omega} s\phi\lambda e^{2s\alpha}|w| \; |\nabla\psi| \; |\nabla\psi| \; dxdt \; \cdot \tag{4.92}$$

Como existe $\widehat{C}_2 > 0$ tal que $|\nabla\psi| \leq \widehat{C}_2$ e $|\nabla\chi| \leq \widehat{C}_4$, temos :

$$\left|\int_Q sw\nabla \left(e^{2s\alpha}\chi\phi\right) \nabla w \; dxdt\right| \leq 2\widehat{C}_2\int_{Q_\omega} s^2\phi^2\lambda e^{2s\alpha}|w| \; |\nabla w| \;\; dxdt +$$
$$\widehat{C}_2\int_{Q_\omega} s\phi e^{2s\alpha}|w||\nabla \; w| \; dxdt + \widehat{C}_2\int_{Q_\omega} s\phi\lambda e^{2s\alpha}|w||\nabla\psi| \; dxdt \leq$$
$$2\widehat{C}_2\int_{Q_\omega} s^2\phi^2\lambda e^{2s\alpha}|w| \; |\nabla w| \;\; dxdt + \widehat{C}_2\int_{Q_\omega} s^2\phi^2 e^{2s\alpha}|w||\nabla \; w| \; dxdt +$$
$$\widehat{C}_2\int_{Q_\omega} s^2\phi^2\lambda e^{2s\alpha}|w||\nabla\psi| \; dxdt = 4\widehat{C}_2\int_{Q_\omega} s^2\phi^2\lambda e^{2s\alpha}|w||\nabla\psi| \; dxdt =$$
$$4\widehat{C}_2\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}(\Big((s\phi)^{\frac{3}{2}}\lambda\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}|w|\Big)\left(\sqrt{s\phi\epsilon}|\nabla\psi|\right) \; dxdt \leq$$
$$\frac{4\widehat{C}_2}{\epsilon}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}(s\phi)^3\lambda^2|w|^2 \; dxdt + 4\widehat{C}_2\epsilon\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s\phi|\nabla\psi|^2 \; dxdt \; \cdot \tag{4.93}$$

Temos também :

$$\left|\int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi w f_1 \; dxdt\right| \leq \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s\phi|w||f_1|dxdt = \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\left(\lambda s\phi|w|\right)\left(\frac{|f_1|}{\lambda}\right) dxdt \leq$$
$$\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\lambda^2 s^2\phi^2|w|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\frac{1}{\lambda^2}|f_1|^2 \; dxdt \; \cdot \tag{4.94}$$

De (4.87) e (4.90), vem que :

$$\int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi \; |\nabla w|^2 \; dxdt = \int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi \; w \; w_t \; dxdt - \int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi \; a(t) \; w^2 \; dxdt$$
$$- \int_Q e^{2s\alpha}\chi \; s\phi w \; f_1 \; dxdt - \int_Q sw\nabla(e^{2s\alpha}\chi\phi)\nabla w dxdt \; \cdot \tag{4.95}$$

Substituindo (4.89), (4.93), (4.94) em (4.95), temos :

$$\int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi \; |\nabla w|^2 \; dxdt \leq \frac{3\overline{C}}{2}\int_{Q_\omega} s^3\phi^3 e^{2s\alpha}|w|^2 dxdt + M\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s\phi w^2 \; dxdt +$$
$$\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\lambda^2 s^2\phi^2|w|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\frac{1}{\lambda^2}|f_1|^2 \; dxdt + \frac{4\widehat{C}_2}{\epsilon}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}(s\phi)^3\lambda^2|w|^2 \; dxdt +$$
$$4\widehat{C}_2\epsilon\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s\phi|\nabla\psi|^2 dxdt \leq \frac{3\overline{C}}{2}\int_{Q_\omega} s^3\phi^3\lambda^2 e^{2s\alpha}|w|^2 dxdt + M\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\phi^3\lambda^2 w^2 \; dxdt +$$
$$\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\lambda^2 s^3\phi^3|w|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\frac{1}{\lambda^2}|f_1|^2 \; dxdt + \frac{4\widehat{C}_2}{\epsilon}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}(s\phi)^3\lambda^2|w|^2 \; dxdt +$$
$$4\widehat{C}_2\epsilon\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s\phi|\nabla\psi|^2 dxdt = \left(\frac{3\overline{C}}{2} + M + \frac{4\widehat{C}_2}{\epsilon} + 1\right)\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\lambda^2 s^3\phi^3|w|^2 dxdt +$$
$$\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\frac{1}{\lambda^2}|f_1|^2 \; dxdt + 4\widehat{C}_2\epsilon\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s\phi|\nabla\psi|^2 dxdt \; \cdot \tag{4.96}$$

Fazendo $\widehat{C}_5 = \frac{3\overline{C}}{2} + M + \frac{4\widehat{C}_2}{\epsilon} + 1$, resulta que :

$$\int_Q e^{2s\alpha}\chi s\phi \; |\nabla w|^2 \; dxdt \leq \widehat{5}_5\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\lambda^2 s^3\phi^3|w|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\frac{1}{\lambda^2}|f_1|^2 \; dxdt +$$
$$4\widehat{C}_2\epsilon\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s\phi|\nabla\psi|^2 dxdt \; \cdot \tag{4.97}$$

Multiplicando ambos os lados de (4.97) por λ^2 e fazendo $\widehat{C}_6 = 4\widehat{C}_4$ obtemos :

$$\int_Q e^{2s\alpha}s\phi\lambda^2\chi \; |\nabla w|^2 \; dxdt \leq \widehat{C}_5\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\phi^3\lambda^4|w|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}|f_1|^2 \; dxdt +$$
$$\widehat{C}_6 \; \epsilon\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s\phi\lambda^2|\nabla\psi|^2 dxdt \; \cdot \tag{4.98}$$

Note que :

$$\int_{\omega_0} e^{2s\alpha}s\phi\lambda^2|\nabla w|^2 dxdt \leq \int_Q e^{2s\alpha}s\phi\lambda^2\chi|\nabla w|^2 dxdt \; \cdot$$

Assim, segue de (4.98) que :

$$\int_{\omega_0} e^{2s\alpha} s\phi\lambda^2 |\nabla w|^2 dxdt \leq \widehat{C}_5 \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s^3\phi^3\lambda^4 |w|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} |f_1|^2 \; dxdt + \widehat{C}_6 \; \epsilon \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s\phi\lambda^2 |\nabla\psi|^2 dxdt \cdot \tag{4.99}$$

Agora, adicionando (4.73) com (4.86), obtemos :

$$\int_Q \left(s^3\lambda^4\phi^3 e^{2s\alpha}|w|^2 + s\lambda^2\phi e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 \right) dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1} \left(\frac{1}{2}|w_t|^2 + |\Delta w|^2 \right) dxdt \leq \overline{N}\left(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} \left(s^3\lambda^4\phi^3 e^{2s\alpha}|w|^2 + s\lambda^2\phi e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 \right) dxdt \right), \tag{4.100}$$

onde $\overline{N} = \overline{C}_5 + \overline{K}_3$. Logo, segue de (4.99) e (4.100) que :

$$\int_Q \left(s^3\lambda^4\phi^3 e^{2s\alpha}|w|^2 + s\lambda^2\phi e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 \right) dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1} \left(\frac{1}{2}|w_t|^2 + |\Delta w|^2 \right) dxdt \leq \overline{N}\left(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} s^3\lambda^4\phi^3 e^{2s\alpha}|w|^2 dxdt \right) + \overline{N}\left(\widehat{C}_5 \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s^3\phi^3\lambda^4|w|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}|f_1|^2 \; dxdt + \widehat{C}_6 \; \epsilon \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s\phi\lambda^2|\nabla\psi|^2 dxdt \right) = \; 2\overline{N} \int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt + \overline{N}(1+\widehat{C}_5) \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s^3\phi^3\lambda^4|w|^2 dxdt + \overline{N}\widehat{C}_6 \; \epsilon \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s\phi\lambda^2|\nabla\psi|^2 dxdt \; \cdot \tag{4.101}$$

Considerando $\epsilon = \frac{1}{2\overline{N}\widehat{C}_6}$ e $K = m\acute{a}x \; \{ \; 2\overline{N}, \; \overline{N}(1+\widehat{C}_5) \; \}$, obtemos :

$$\int_Q \left(s^3\lambda^4\phi^3 e^{2s\alpha}|w|^2 + s\lambda^2\phi e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 \right) dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1} \left(\frac{1}{2}|w_t|^2 + |\Delta w|^2 \right) dxdt \leq K\left(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s^3\phi^3\lambda^4|w|^2 dxdt \right) + \frac{1}{2} \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s\phi\lambda^2|\nabla\psi|^2 dxdt \; \cdot \tag{4.102}$$

Logo,

$$\int_Q \left(s^3\lambda^4\phi^3 e^{2s\alpha}|w|^2 + \frac{1}{2} s\lambda^2\phi e^{2s\alpha}|\nabla w|^2 \right) dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1} \left(\frac{1}{2}|w_t|^2 + |\Delta w|^2 \right) dxdt \leq K\left(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s^3\phi^3\lambda^4|w|^2 dxdt \right) \; \cdot \tag{4.103}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
&\int_Q \left(e^{2s\alpha} s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2 \right) dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\left(|w_t|^2 + |\Delta w|^2\right) dxdt \leq \\
&\int_Q \left(2e^{2s\alpha} s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2 \right) dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\left(|w_t|^2 + 2|\Delta w|^2\right) dxdt = \\
&2\left[\int_Q \left(e^{2s\alpha} s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + \frac{1}{2}e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|\nabla w|^2 \right) dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}(s\phi)^{-1}\left(\frac{1}{2}|w_t|^2 + |\Delta w|^2\right) dxdt \right] \leq \\
&2K\left(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\phi^3\lambda^4|w|^2 dxdt \right) \cdot
\end{aligned} \tag{4.104}$$

Fazendo $C = 2K$, temos :

$$\begin{aligned}
&\int_Q \left((s\phi)^{-1}\left(|w_t|^2 + |\Delta w|^2\right) + s^3\lambda^4\phi^3|w|^2 + s\lambda^2\phi|\nabla w|^2 \right) e^{2s\alpha} dxdt \leq \\
&C\left(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s^3\phi^3\lambda^4|w|^2 dxdt \right),
\end{aligned} \tag{4.105}$$

$\square$

onde $w = w(x,t)$ é a solução fraca do sistema adjunto (3.3).

5 DESIGUALDADE DE OBSERVABILIDADE

Neste capítulo, vamos provar a desigualdade de observabilidade para soluções fracas do sistema adjunto (3.3). Esta desigualdade é uma consequência da desigualdade Carleman provada no capítulo anterior.

Na teoria de controle, a observabilidade é uma medida de quão bem os estados internos de um sistema podem ser inferidos a partir do conhecimento de suas saídas externas. O conceito de observabilidade foi introduzido em 1960 pelo engenheiro húngaro-americano Rudolf E. Kalman para sistemas dinâmicos lineares.

Formalmente, um sistema é dito observável se, para qualquer possível sequência de vetores de estado e de controle, o estado atual pode ser determinado em tempo finito usando apenas as saídas (esta definição é voltada à representação no espaço de estados). Isto significa que a partir de saídas do sistema é possível determinar o comportamento de todo o sistema.

Para mostrar que o sistema (3.3) é observável utilizaremos como ferramenta principal a desigualdade de Carleman demonstrada no capítulo anterior. Assim, temos por objetivo provar o seguinte teorema :

Teorema 5.0.13. Sejam α e ϕ como no Teorema 4.0.12. Então, para $\lambda > \lambda_0 > 0$ e $s > s(\lambda) > 1$, temos que

$$\int_\Omega |\ w(x,\ 0)\ |^2\ dx\ \leq\ C\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3|w|^2 dxdt\bigg), \tag{5.1}$$

onde C é uma constante positiva que depende apenas de Ω e $T\cdot$

Essa desigualdade é chamada de *Desigualdade de Observabilidade* para o sistema adjunto (3.3).

Demonstração. Multiplicando ambos os lados de $(3.3)_1$ por w e integrando em Ω, obtemos:

$$\int_\Omega w\ w_t\ dx + \int_\Omega w\ \Delta w\ dx = \int_\Omega a(t)w^2\ dx + \int_\Omega w\ f_1\ dx. \tag{5.2}$$

Note que $\int_\Omega w\ w_t\ dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega w^2 dxdt$. Por outro lado, como $w = 0$ em Σ então pela fórmula de Green, temos :

$$\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla w dx = \int_\Omega |\nabla w|^2\ dx = -\int_\Omega w\ \Delta w\ dx \cdot$$

Logo, (5.2) torna-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega w^2 dxdt - \int_\Omega |\nabla w|^2 dx = \int_\Omega a(t) w^2\ dx + \int_\Omega w\ f_1\ dx. \tag{5.3}$$

Multiplicando ambos os lados de (5.3) por $e^{2(M+1)t}$, temos :

$$e^{2(M+1)t}\Big(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega w^2 dxdt - \int_\Omega |\nabla w|^2 dx\Big) = e^{2(M+1)t}\Big(\int_\Omega a(t) w^2\ dx + \int_\Omega w\ f_1\ dx\Big). \tag{5.4}$$

Agora, observando que $|a(t)|_{L^\infty(\Omega)} < M$ quase sempre em $[0,\ T]$, então segue de (5.4) que :

$$\begin{aligned}
&-\frac{d}{dt}\Big(e^{2(M+1)t}\int_\Omega w^2\ dxdt\Big) = -2(M+1)e^{2(M+1)t}\int_\Omega w^2\ dx - e^{2(M+1)t}\frac{d}{dt}\int_\Omega w^2\ dxdt = \\
&\Big(-(M+1)\int_\Omega w^2\ dx - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega w^2\ dxdt\Big)2e^{2(M+1)t} \leq 2e^{2(M+1)t}\int_\Omega |\nabla w|^2\ dxdt + \\
&\Big(-(M+1)\int_\Omega w^2\ dx - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega w^2\ dxdt\Big)2e^{2(M+1)t} = -2(M+1)e^{2(M+1)t}\int_\Omega w^2\ dx - \\
&-\Big(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega w^2\ dx - \int_\Omega |\nabla w|^2\ dxdt\Big)2e^{2(M+1)t} = -2(M+1)e^{2(M+1)t}\int_\Omega w^2\ dx - \\
&-\Big(\int_\Omega a(t) w^2\ dx + \int_\Omega w\ f_1\ dx\Big)2e^{2(M+1)t} = -2(M+1)e^{2(M+1)t}\int_\Omega w^2\ dx + \\
&\Big(\int_\Omega (-a(t)) w^2\ dx + \int_\Omega 2w\ \frac{(-f_1)}{2}\ dx\Big)2e^{2(M+1)t} \leq -2(M+1)e^{2(M+1)t}\int_\Omega w^2\ dx + \\
&\Big(M\int_\Omega w^2\ dx + \int_\Omega w^2 dx + \ \frac{1}{4}\int_\Omega f_1^2\ dx\Big)2e^{2(M+1)t} = -2(M+1)e^{2(M+1)t}\int_\Omega w^2\ dx + \\
&2(M+1)e^{2(M+1)t}\int_\Omega w^2\ dx + \frac{e^{2(M+1)t}}{2}\int_\Omega f_1^2\ dx = \frac{e^{2(M+1)t}}{2}\int_\Omega f_1^2\ dx \cdot
\end{aligned}$$

Logo,

$$-\frac{d}{dt}\Big(e^{2(M+1)t}\int_\Omega w^2\ dxdt\Big) \leq \frac{e^{2(M+1)t}}{2}\int_\Omega f_1^2\ dx \cdot \tag{5.5}$$

Integrando (5.5) de 0 a t, temos :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\int_0^t (-2(M+1))e^{2(M+1)y} w^2 dy\ dx - \int_\Omega\int_0^t e^{2(M+1)y}\frac{d}{dy}w^2\ dy\ dx \leq \\
&\int_0^t \Big[\frac{e^{2(M+1)y}}{2}\int_\Omega f_1(x,y)^2\ dx\ \Big]dy \cdot
\end{aligned} \tag{5.6}$$

O cálculo da primeira integral por partes nos dá :

$$\int_\Omega \int_0^t (-2(M+1)e^{2(M+1)t} w^2 dy\ dx - \int_\Omega \int_0^t e^{2(M+1)t} \frac{d}{dy} w^2\ dy\ dx = \int_\Omega \left(-w^2 e^{2(M+1)y}\right)\Big|_0^t dx +$$
$$\int_\Omega \int_0^t e^{2(M+1)t} \frac{d}{dy} w^2\ dy\ dx - \int_\Omega \int_0^t e^{2(M+1)t} \frac{d}{dy} w^2\ dy\ dx = \int_\Omega \left(-w^2 e^{2(M+1)y}\right)\Big|_0^t dx =$$
$$\int_\Omega w(x,0)^2\ dx - e^{2(M+1)t} \int_\Omega w(x,t)^2\ dx = |w(x,0)|^2_{L^2(\Omega)} - e^{2(M+1)t} |w(x,t)|^2_{L^2(\Omega)}\ \cdot$$

Logo,

$$|\ w(x,0)\ |^2_{L^2(\Omega)}\ \leq\ e^{2(M+1)t}|w(x,t)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \left[\frac{e^{2(M+1)y}}{2} \int_\Omega f_1(x,y)^2\ dx\ \right] dy\ \cdot \tag{5.7}$$

Defina $\theta : (0,\ T) \to \mathbb{R}$ tal que $\theta(t) = \sup\{\ e^{-2s\alpha(x,\ t)}; x \in \Omega\ \}\cdot$

Note que

$$\theta(t) \leq\ e^{\frac{2se^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}}. \tag{5.8}$$

De fato, como $e^{2\lambda||\psi||} - e^{\lambda\psi} \leq e^{2\lambda||\psi||}$, então

$$-\alpha = -\left(\frac{e^{\lambda\psi} - e^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}\right) = \frac{e^{2\lambda||\psi||} - e^{\lambda\psi}}{\beta(t)} \leq \frac{e^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}\cdot$$

De onde segue :

$$-2s\alpha \leq 2s\ \frac{e^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}\ \ \Rightarrow \theta(t)\ \leq\ e^{2s\ \frac{e^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}}.$$

Por definição de supremo temos que $e^{-2s\alpha} \leq \theta(t)$. Daí,

(i) $$1 \leq e^{2s\alpha}\theta(t)\ \cdot$$

Pelo Lema 4.0.4 temos que $\psi > 0$ em Ω e $\phi(x,t) = \frac{e^{\lambda\psi}}{\beta(t)},\ \beta(t) = t(T-t), 0 < t < T$, para $x \in \Omega$. Então,

$$\frac{1}{\phi} = \frac{\beta(t)}{e^{\lambda\psi}}\ \leq\ \beta(t) = t(T-t)\ \leq T^2\ =\ \sqrt[3]{C_0}\cdot$$

Logo, $\frac{1}{\phi^3} \leq C_0,$ para $0 \leq t \leq T,\ x \in \overline{\Omega}$ $\cdot$ Isto é,

(ii) $$1 \leq C_0\phi^3(x,t), \qquad 0 \leq t \leq T,\ x \in \overline{\Omega}\ \cdot$$

Além disso,

(iii) $t \leq T \Rightarrow 2(M+1)t \leq 2(M+1)T \Rightarrow e^{2(M+1)t} \leq e^{2(M+1)T} = C_1$, para $0 \leq t \leq T$.

Se $1 \leq s^3$, então por (i) e (iii) obtemos de (5.7) que :

$$\begin{aligned} |w(x,0)|^2_{L^2(\Omega)} &\leq C_1 \int_\Omega |w(x,t)|^2 \, dx + C_1 \int_0^t \left[\frac{1}{2} \int_\Omega |f_1(x,y)|^2 \, dx \right] dy \\ &\leq C_1 \theta(t) \int_\Omega e^{2s\alpha} |w(x,t)|^2 \, dx + C_1 \theta(t) \int_0^t \left[\int_\Omega e^{2s\alpha} |f_1(x,y)|^2 \, dx \right] dy \ \cdot \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{\theta(t)} |w(x,0)|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \int_\Omega e^{2s\alpha} |w(x,t)|^2 \, dx + C_1 \int_0^t \left[\int_\Omega e^{2s\alpha} |f_1(x,y)|^2 \, dx \right] dy \cdot \tag{5.9}$$

De (5.8) obtemos :

$$0 < k_T < e^{\frac{-2se^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}} \leq \frac{1}{\theta(t)}, \qquad 0 < t < T \cdot$$

Assim, podemos reescrever (5.9) como segue :

$$|w(x,0)|^2_{L^2(\Omega)} e^{\frac{-2se^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}} \leq C_1 \int_\Omega e^{2s\alpha} |w(x,t)|^2 \, dx + C_1 \int_0^t \left[\int_\Omega e^{2s\alpha} |f_1(x,y)|^2 \, dx \right] dy \cdot \tag{5.10}$$

Agora, fixando $t_1 < t_2$ em $(0,T)$ e integrando (5.10) em (t_1,t_2) em relação a t, temos:

$$\begin{aligned} |w(x,0)|^2_{L^2(\Omega)} \int_{t_1}^{t_2} e^{\frac{-2se^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}} dt &\leq C_1 \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_\Omega e^{2s\alpha} |w(x,t)|^2 \, dx \right) dt \quad + \\ & \quad C_1 \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^t \left(\int_\Omega e^{2s\alpha} |f_1(x,y)|^2 \, dx \right) dy \right] dt \cdot \end{aligned} \tag{5.11}$$

Afirmação 5.0.3.

$$\int_\Omega \int_0^T \int_0^t e^{2s\alpha} |f_1(x,y)|^2 dx dy dt \leq C \int_0^T \int_\Omega |f_1(x,y)|^2 dx dy.$$

De fato, seja $\lambda_0 \geq 1$ tal que $e^{2\lambda_0||\psi||} \geq 2$. Assim, para $\lambda \geq \lambda_0$, temos :

$$2s\alpha(y,t) = 2s \left(\frac{e^{e^{2\lambda||\psi||} - \lambda\psi(y)}}{\beta(t)} \right) \leq -2s \frac{e^{\lambda||\psi||}}{\beta(t)}.$$

Logo, $e^{2s\alpha(y,t)} \leq e^{-2s\frac{e^{\lambda||\psi||}}{\beta(t)}}$, $\quad 0 < t < T$. Portanto, pondo $\varphi = e^{\lambda||\psi||}$, temos :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^t \left(\int_\Omega e^{2s\alpha(x,t)} |f_1(x,y)|^2 dx \right) dy \right] dt &\leq \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^t \left(\int_\Omega e^{-2s\frac{\varphi}{\beta(t)}} |f_1(x,y)|^2 dx \right) dy \right] dt \\ &= \int_0^T \left[\int_0^t \left(\int_\Omega e^{-2s\frac{\varphi}{\beta(t)}} |f_1(x,y)|^2 dx \right) dy \right] dt \\ &= \int_\Omega \left[\int_0^T \left(\int_0^t e^{-2s\frac{\varphi}{\beta(t)}} |f_1(x,y)|^2 dy \right) dt \right] dx. \end{aligned}$$

Agora vamos provar a seguinte desigualdade :

$$\int_\Omega \left[\int_0^T \left(\int_0^t e^{-2s\frac{\varphi}{\beta(t)}} |f_1(x,y)|^2 dy \right) dt \right] dx \leq C \int_0^T \int_\Omega |f_1(x,y)|^2 dx dy.$$

Análise da integral

$$I = \int_0^T \left(\int_0^t e^{-2s\frac{\varphi}{\beta(t)}} |f_1(x,y)|^2 dy \right) dt.$$

Na integral I, temos $0 < y < t$ e $0 < t < T$.

Vamos considerar uma mudança de variáveis em I, definida pela aplicação linear $\sigma(t,y) = (y,t)$, uma involução de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Isto é dado por $(at+b, ct+dy) = (y,t)$, com $a = d = 0$ e $b = c = 1$. A matriz de σ é $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ com $|det\ \sigma| = 1$. Então mantém a área das figuras e só altera a posição.

Consideremos o domínio K de $\mathbb{R}^2$ definido por :

$$K = \{(t,y); 0 < t < T, \quad y < t\}$$

e $\widehat{K} = \sigma(K)$ é definido por :

$$\widehat{K} = \{(y,t); 0 < y < T, \quad y > t\}.$$

Temos :

$$I = \int_0^T \left(\int_0^t e^{-2s\frac{\varphi}{\beta(t)}} |f_1(x,y)|^2 dy \right) dt = \int_0^T \left(\int_y^T e^{-2s\frac{\varphi}{\beta(y)}} |f_1(x,y)|^2 dt \right) dy.$$

Como $e^{-2s\frac{\varphi}{\beta(t)}}$ é regular, então

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\int_0^t e^{-2s\frac{\varphi}{\beta(t)}} |f_1(x,y)|^2 dy \right) dt &\leq \int_0^T \left(\int_0^T e^{-2s\frac{\varphi}{\beta(t)}} |f_1(x,y)|^2 dt \right) dy \\ &= \left(\int_0^T |f_1(x,y)|^2 dt \right) \left(\int_0^T e^{-2s\frac{\varphi}{\beta(t)}} dy \right) \\ &= C \int_0^T |f_1(x,y)|^2 dt, \end{aligned}$$

com $C > 0$ dependendo de Ω e T. Integrando em Ω, temos :

$$\int_\Omega \left(\int_0^T \left(\int_0^t e^{-2s\frac{\varphi}{\beta(t)}} |f_1(x,y)|^2 dy \right) dt \right) dx \;\leq\; C \int_0^T \int_\Omega |f_1(x,y)|^2 dx dy.$$

Portanto fica provado a afirmação.

Uma vez que $\inf\limits_{t\in[0,\ T]} e^{\frac{2se^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}} \geq C_T$ de (5.11) e da afirmação acima, obtemos :

$$|w(x,0)|^2_{L^2\Omega} \leq C_1 \int_0^T \int_\Omega e^{2s\alpha} |w(x,t)|^2 dx dt + C_1 \int_0^T \int_\Omega |f_1(x,t)|^2 dx dt. \qquad (5.12)$$

De (ii), temos :

$$
\begin{aligned}
|w(x,0)|^2_{L^2\Omega} &\leq C_1C_0\int_0^T\int_\Omega \phi^3 e^{2s\alpha}|w(x,t)|^2dxdt + C_1\int_0^T\int_\Omega |f_1(x,t)|^2dxdt \\
&\leq C_1C_0\int_0^T\int_\Omega s^3\phi^3 e^{2s\alpha}|w(x,t)|^2dxdt + C_1\int_0^T\int_\Omega |f_1(x,t)|^2dxdt.
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

Pela desigualdade de Carleman, temos :

$$
\int_Q s^3\phi^3|w(x,t)|^2e^{2s\alpha}dxdt \leq C_2\int_Q e^{2s\alpha}|f_1(x,t)|^2dxdt + C_2\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3|w|^2dxdt.
$$

Então, temos :

$$
\begin{aligned}
|w(x,0)|^2_{L^2\Omega} &\leq C_1C_0C_2\int_Q e^{2s\alpha}|f_1(x,y)dxdt + C_2\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3|w(x,t)^2dxdt \\
&+ C_1\int_Q |f_1(x,t)|^2dxdt = (C_1 + C_1C_0C_2)\int_Q |f_1(x,t)|^2dxdt \\
&+ C_2\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3|w(x,t)^2dxdt.
\end{aligned}
$$

Fazendo $C = máx\{\ C_1C_0C_2 + C_2, C_1\ \}$, obtemos :

$$
\int_\Omega |\ w(x,0)\ |^2 \ \leq\ C\bigg(\int_Q e^{2s\alpha}|f_1(x,t)|^2dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3|w(x,t)^2dxdt\bigg).
$$

$\square$

6 CONTROLABILIDADE

Dizemos que um sistema possui a propriedade de controlabilidade nula se, a partir de um estado inicial arbitrário, a solução do sistema sempre pode ser conduzida exatamente para zero. Assim, problema da controlabilidade nula da equação de calor é saber se, de qualquer estado inicial de um sólido, por aquecimento ou resfriamento de uma parte prescrita deste sólido, é possível trazê-lo para uma temperatura zero em tempo finito.

A controlabilidade nula da equação do calor é um assunto bem compreendido. Em particular, a equação de calor em um domínio suave, limitado Ω de $\mathbb{R}^n$ com um termo fonte localizado em um subconjunto aberto ω de Ω é nulo controlável em tempo arbitrário $T>0$ e com um suporte de controle arbitrário ω. Este resultado é devido, para o caso $n = 1$, a Fattorini e Russell [13] e, para $n \geq 2$, a Fursikov e Imanuvilov [18] . Já a Controlabilidade nula para não-linearidades Lipschitzianas envolvendo termos gradientes foi estudada recentemente em [4] e [40] . A literatura contém muitos outros desenvolvimentos.

A controlabilidade exata para a equação do calor foi estabelecida por Lebeau e Robbiano [26] e posteriormente, usando os resultados obtidos por esses autores, Fursikov e Imanuvilov estabeleceram a controlabilidade exata para a equação de Navier-Stokes e para a equação de Boussinesq em [17] .

A controlabilidade aproximada para a equação semilinear do calor envolvendo termos e gradientes fora estudada em [8] e [15]. Já para um domínio não cilíndrico ela fora estudada em [9].

Neste capítulo, provaremos a controlabilidade nula e aproximada para equação não linear do calor . Inicialmente, provaremos a controlabilidade nula para a equação de estado linear, em seguida, para a equação de estado não linear e, por último, demostraremos a controlabilidade aproximada.

Para alcançar o nosso objetivo de provar que nosso sistema é nulo controlável, utilizaremos como ferramentas básicas a desigualdade de Carleman, a desigualdade de observabilidade e o argumento do ponto fixo de Kakutani.

6.1 Controlabilidade nula: Equação de estado linear

Consideremos a equação do estado linear:

$$\begin{cases} p_t(x,t) - \Delta p(x,t) + a(x,t)p(x,t) = \chi_\omega u(x,t), \quad em \;\; Q \;; \\ p(x,t) = 0, \quad em \;\; \Sigma \;; \\ p(x,0) = p_0(x), \quad em \;\; \Omega \;. \end{cases} \tag{6.1}$$

Observe que $a(t)$ é limitada em Q e $|a|_{L^\infty(Q)} < M$, como mencionamos anteriormente.

Quando temos $\chi_\omega u \in L^2(Q)$, $p_0 \in L^2(\Omega)$, a solução fraca p de (6.1) tem a seguinte regularidade, veja Brezis [3],

$$p \in H^1\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \cdot$$

Isto é,

$$\begin{aligned} p \in W^1\left(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)\right) &= \left\{p \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right),\; p_t \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)\right\} \\ &\subset C^0\left([0,T];L^2(\Omega)\right). \end{aligned}$$

Portanto, $p \in C^0\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$.

A controlabilidade nula para (6.1) consiste em obter um controle $u \in L^2(Q)$, tal que $p(x,T) = 0$ quase sempre em Ω.

Para mostrar que o sistema (6.1) é nulo controlável, devemos provar o teorema a seguir.

Teorema 6.1.1. Para $p_0 \in L^2(\Omega)$, existe um controle $u \in L^2(Q)$ tal que a solução fraca $p = p(x,t)$ da equação estado (6.1) satisfaz $p(x,T) = 0$ em Ω.

Demonstração. A prova do Teorema 6.1.1 é feita através de um método variacional e aplicando a desigualdade de observabilidade, conforme o capítulo anterior. O controle u é escolhido em $L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3})$ satisfazendo :

$$\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u^2 \; dxdt \le C \int_\Omega p_0^2 dx. \tag{6.2}$$

Seja o sistema linear adjunto de (6.1)

$$\begin{cases} w_t(x,t) - \Delta w(x,t) + a(x,t)w(x,t) = 0, \quad em \;\; Q \;; \\ w(x,t) = 0, \quad em \;\; \Sigma \;; \\ w(x,T) = w_T, \quad em \;\; \Omega \;; \end{cases} \tag{6.3}$$

onde $|a(x,t)|_{L^\infty(Q)<M}$.

Para $s \geq s_0$ e $\lambda \geq \lambda_0$ suficientemente grande, existe $C_0 = C_0(\lambda) > 0$ tal que $e^{-2s\alpha}\phi^{-3} \geq C_0$.

De fato, supondo $\lambda \geq \lambda_0$ suficientemente grande temos que $2 \leq e^{\lambda||\psi||}$. Além disso, como $e^{\lambda\psi} \leq e^{\lambda||\psi||}$, então :

$$e^{\lambda\psi} + e^{\lambda||\psi||} \leq e^{\lambda||\psi||} + e^{\lambda||\psi||} = 2e^{\lambda||\psi||} \leq e^{\lambda||\psi||} \cdot e^{\lambda||\psi||} = e^{2\lambda||\psi||}.$$

Daí,

$$e^{\lambda||\psi||} \leq e^{2\lambda||\psi||} - e^{\lambda\psi} = -\alpha(x,t)\beta(t) \Rightarrow -\alpha(x,t) \geq \frac{e^{\lambda||\psi||}}{\beta(t)} \Rightarrow -2s\alpha(x,t) \geq 2s\frac{e^{\lambda||\psi||}}{\beta(t)} \geq \frac{2s}{\beta(t)} \geq \frac{1}{\beta(t)}.$$

Assim,

$$e^{-2s\alpha} \geq e^{\frac{1}{\beta(t)}}. \tag{6.4}$$

Por outro lado, $\phi = \frac{e^{\lambda\psi}}{\beta(t)} \leq \frac{e^{\lambda||\psi||}}{\beta(t)}$, isto implica que $\phi^{-3} \geq \frac{\beta(t)^3}{e^{3\lambda||\psi||}}$. Mas $e^{-2s\alpha} \geq 1$, assim temos que $e^{-2s\alpha}\phi^{-3} \geq \frac{e^{\frac{1}{\beta(t)}}}{e^{3\lambda||\psi||}}\beta(t)^3$.

Agora, sabendo que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = +\infty$, temos que $\lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{1}{\beta(t)} = +\infty$, o que implica $\lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{\beta(t)}}}{\frac{1}{\beta(t)^3}} = +\infty$. Portanto, existe T_1 tal que :

$$e^{\frac{1}{\beta(t)}}\beta(t)^3 \geq 1, \quad \text{para todo } 0 < t < T_1.$$

Analogamente, $\lim\limits_{t\to T^-} \dfrac{1}{\beta(t)} = +\infty$, implica $\lim\limits_{t\to T^-} \dfrac{e^{\frac{1}{\beta(t)}}}{\frac{1}{\beta(t)^3}} = +\infty$. Portanto, existe T_2 tal que :

$$e^{\frac{1}{\beta(t)}}\beta(t)^3 \geq 1, \quad \text{para todo } T_2 < t < T.$$

Por outro lado, sendo $[T_1, T_2]$ compacto e $e^{\frac{1}{\beta(t)}}\beta(t)^3 > 0$, concluímos que existe $C > 0$ tal que $e^{\frac{1}{\beta(t)}}\beta(t)^3 \geq C$, para todo $T_1 < t < T_2$. Daí, temos : $e^{-2s\alpha}\phi^{-3} \geq e^{\frac{1}{\beta(t)}}\beta(t)^3\frac{1}{e^{3\lambda||\psi||}} \geq C \cdot \frac{1}{e^{3\lambda||\psi||}}$. Assim, fazendo $C_0 = \max\{C, \frac{1}{e^{3\lambda||\psi||}}\}$, temos $e^{-2s\alpha}\phi^{-3} \geq C_0$.

Para cada s, λ definimos o espaço $L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3})$ como segue:

$$L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3}) = \{u : Q \to \mathbb{R}; \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u^2 dxdt \leq C\int_\Omega p_0^2 dx\}.$$

Para cada $\epsilon > 0$, definimos o funcional

$$N_\epsilon(p,u) = \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u^2 \, dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega p(x,T)^2 \, dx, \tag{6.5}$$

para $u \in L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3})$ e p é a solução fraca de (6.1), com $p_0 \in L^2(\Omega)$.

Proposição 6.1.1. O funcional N_ϵ é semi-contínuo inferiormente, estritamente convexo, coercivo em $L^2(Q)$. Portanto, o problema variacional $\min N_\epsilon(p,u)$ tem única solução $u_\epsilon \in L^2(Q)$.

Demonstração. Sejam $u, v \in L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3})$ com $u \neq v$ e seja $t \in [0,1]$. Considere $\varphi = (1-t)u + tv$. Então,

$$\begin{aligned}
N_\epsilon(p,\varphi) &= \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\varphi^2 dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega p(x,T)^2 dx \\
&= |e^{-s\alpha}\phi^{\frac{-3}{2}}\varphi|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\epsilon}|p(x,T)|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= |e^{-s\alpha}\phi^{\frac{-3}{2}}(1-t)u + e^{-s\alpha}\phi^{\frac{-3}{2}}tv|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\epsilon}|p(x,T)|^2_{L^2(\Omega)} \\
&< (1-t)|e^{-s\alpha}\phi^{\frac{-3}{2}}u|^2_{L^2(Q)} + t|e^{-s\alpha}\phi^{\frac{-3}{2}}v|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\epsilon}|p(x,T)|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= (1-t)|e^{-s\alpha}\phi^{\frac{-3}{2}}u|^2_{L^2(Q)} + t|e^{-s\alpha}\phi^{\frac{-3}{2}}v|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\epsilon}|p(x,T) + tp(x,T) - tp(x,T)|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= (1-t)|e^{-s\alpha}\phi^{\frac{-3}{2}}u|^2_{L^2(Q)} + t|e^{-s\alpha}\phi^{\frac{-3}{2}}v|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\epsilon}|(1-t)p(x,T) + tp(x,T)|^2_{L^2(\Omega)} \\
&< (1-t)|e^{-s\alpha}\phi^{\frac{-3}{2}}u|^2_{L^2(Q)} + t|e^{-s\alpha}\phi^{\frac{-3}{2}}v|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\epsilon}(1-t)|p(x,T)|^2_{L^2(\Omega} + \frac{1}{\epsilon}t|p(x,T)|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= (1-t)\left(|e^{-s\alpha}\phi^{\frac{-3}{2}}u|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\epsilon}|p(x,T)|^2_{L^2(\Omega)}\right) + t\left(|e^{-s\alpha}\phi^{\frac{-3}{2}}v|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\epsilon}|p(x,T)|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\
&= (1-t)\left(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u^2\ dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega p(x,T)^2\ dx\right) + t\Bigg(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}v^2\ dxdt\ + \\
&\quad \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega p(x,T)^2\ dx\Bigg) = (1-t)N_\epsilon(p,u) + tN_\epsilon(p,v).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$N_\epsilon(p,(1-t)u+tv) < (1-t)N_\epsilon(p,u) + tN_\epsilon(p,v).$$

Logo, N_ϵ é estritamente convexo.

N_ϵ é coercivo. De fato,

$$\begin{aligned}
N_\epsilon(p,u) &= \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u^2\ dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega p(x,T)dx \\
&\geq C_0\int_Q u^2\ dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega p(x,T)dx \\
&\geq C_0|u|_{L^2(Q)}.
\end{aligned}$$

Sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências em $L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3})$ e $L^2(Q)$, respectivamente, tais que $u_n \to u$ em $L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3})$ e $p_n \to p$ em $L^2(Q)$. Então,

$$\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_n^2\ dxdt \to \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u^2\ dxdt$$

e

$$\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega p_n(x,T)^2\ dx \to \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega p(x,T)^2\ dx.$$

Assim,

$$N_\epsilon(p_n,u_n) \to N_\epsilon(p,u).$$

Portanto, N_ϵ é semi-contínuo inferiormente, coercivo e estritamente convexo, logo existe $u_\epsilon \in L^2(Q)$ que miniminiza $N_\epsilon(p,u)$. □

Suponhamos que $u_\epsilon \in L^2(Q)$ seja o minimizador de $N_\epsilon(p,u)$. Assim, por meio da equação estado (6.1) encontramos a solução fraca p_ϵ. O próximo passo consiste em provar a convergência

$$\lim_{\epsilon\to 0} u_\epsilon = u \qquad e \qquad \lim_{\epsilon\to 0} p_\epsilon = p\ .$$

Então, temos que provar que p é a solução fraca de (6.1) correspondente ao controle u e que $p(x,T)=0$ quase sempre em Ω .

Lema 6.1.1. *Seja $u_\epsilon \in L^2(Q)$ o minimizador de $N_\epsilon(p,u)$. Então temos*

$$u_\epsilon = e^{2s\alpha}\phi^3\chi_\omega w_\epsilon \quad quase \quad sempre \quad em \quad Q\ ,$$

com

$$w_\epsilon \in H^1\left(0,\ T\ ;\ H^{-1}(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,\ T\ ;\ H_0^1(\Omega)\right)\ ,$$

é a solução fraca do problema parabólico

$$\begin{cases} w_{\epsilon t} + \Delta w_\epsilon - a(t)w_\epsilon = 0 \quad em \quad Q\ ; \\ w_\epsilon = 0 \quad em \quad \Sigma\ ; \\ w_\epsilon(x,T) = -\frac{1}{\epsilon}p(x,T) \quad em \quad \Omega\ , \end{cases} \tag{6.6}$$

sendo $p(x,t)$ a solução fraca de (6.1), isto é,

$$\begin{cases} p_t + \Delta p - a(t)p = \chi_\omega u \quad em \quad Q\ ; \\ p = 0, \quad em \quad \Sigma\ ; \\ p(x,0) = p_0(x) \quad em \quad \Omega\ , \end{cases} \tag{6.7}$$

$p_0 \in L^2(\Omega), \quad u \in L^2(Q)$.

Demonstração. Vamos escrever a solução fraca de (6.7) como $p = \widehat{p} + \overline{p}$ com $\widehat{p}$ e $\overline{p}$ soluções fracas dos sistemas

$$\begin{cases} \widehat{p}_t - \Delta\widehat{p} + a(t)\widehat{p} = 0 \quad em \quad Q\ ; \\ \widehat{p} = 0, \quad em \quad \Sigma\ ; \\ \widehat{p}(x,0) = \widehat{p}(x) \quad em \quad \Omega\ , \end{cases} \tag{6.8}$$

$$\begin{cases} \overline{p}_t - \Delta\overline{p} + a(t)\overline{p} = \chi_\omega u \quad em \quad Q \ ; \\ \overline{p} = 0, \quad em \quad \Sigma \ ; \\ \overline{p}(x,0) = 0 \quad em \quad \Omega \ , \end{cases} \tag{6.9}$$

Em (6.9) temos uma dependência linear da solução $\overline{p}$ do controle u, que denotamos por :

$$Lu = \overline{p}_u(x,T). \tag{6.10}$$

A aplicação $L : L^2(Q) \to L^2(\Omega)$ dada acima está bem definida e é portanto linearmente limitada. De fato, sejam $u, v \in L^2(Q)$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, então temos :

$$\begin{aligned} L(\alpha_1 u + \alpha_2 v) &= \overline{p}_{\alpha_1 u + \alpha_2 v}(x,T) \\ &= \left(\alpha_1 \overline{p}_u + \alpha_2 \overline{p}_v\right)(x,T) \\ &= \alpha_1 \overline{p}_u(x,T) + \alpha_2 \overline{p}_v(x,T) \\ &= \alpha_1 Lu + \alpha_2 Lv \ . \end{aligned}$$

Portanto, L é linear. Como $p \in C^0([0,\ T]\ ;\ L^2(\Omega))$, então temos que L é limitada. Assim, reescrevemos $N_\epsilon(p,u) = J_\epsilon(u)$ com

$$J_\epsilon(u) = \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u^2 dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega \left(\widehat{p}(T) + Lu\right)^2 dx. \tag{6.11}$$

O valor estacionário $u_\epsilon \in L^2(Q)$, para o funcional $J_\epsilon(u)$, definido por (6.12), é aquele em que a derivada de Gateaux é nula em todas as direções $\widetilde{w} \in L^2(Q)$. Isso significa que :

$$J'_\epsilon(u_\epsilon)\cdot\widetilde{w} = 0 \qquad \text{para} \quad \text{todo} \quad \widetilde{w} \in L^2(Q) \ ,$$

isto é,

$$\left.\frac{d}{d\lambda}J_\epsilon(u_\epsilon + \lambda\widetilde{w})\right|_{\lambda=0} = 0 \qquad \text{para} \quad \text{todo} \quad \widetilde{w} \in L^2(Q) \ .$$

Façamos agora o cálculo com o peso $e^{-2s\alpha}\phi^{-3}$ no funcional J_ϵ observando que:

$$p(T) = \widehat{p}(T) + \overline{p}(T) = \widehat{p}(T) + Lu \ .$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
J_\epsilon(u_\epsilon+\lambda\widetilde{w}) &= \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\,(u_\epsilon+\lambda\widetilde{w})^2\,dxdt \;+\; \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega\Big(\widehat{p}(T) \;+\; L(u_\epsilon+\lambda\widetilde{w})\Big)^2\,dx\\
&= \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\,(u_\epsilon+\lambda\widetilde{w})^2\,dxdt \;+\; \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega\Big(p_\epsilon(T)-Lu_\epsilon+Lu_\epsilon+\lambda L\widetilde{w}\Big)^2 dx\\
&= \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\,(u_\epsilon+\lambda\widetilde{w})^2\,dxdt \;+\; \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega\Big(p_\epsilon(T)+\lambda L\widetilde{w}\Big)^2 dx\\
&= \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\epsilon^2\;dx\;dt+2\lambda\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\epsilon\;\widetilde{w}\;dxdt \;+\; \lambda^2\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\;\widetilde{w}^2\;dxdt\\
&+\; \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega(p_\epsilon(T))^2\,dx \;+\; \frac{2\lambda}{\epsilon}\int_\Omega p_\epsilon(T)\;L\widetilde{w}\;dx+\frac{\lambda^2}{\epsilon}\int_\Omega(L\widetilde{w})^2\,dx\\
&= \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\epsilon^2\;dx\;dt\;+\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega(p_\epsilon(T))^2\,dx\;+2\lambda\bigg(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\epsilon\;\widetilde{w}\;dxdt\;+\\
&\quad\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega p_\epsilon(T)\;L\widetilde{w}\;dx\bigg)+\lambda^2\bigg(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\;\widetilde{w}^2\;dxdt+\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega(L\widetilde{w})^2\;dx\bigg)\\
&= \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\epsilon^2\;dx\;dt\;+\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega(\widehat{p}(T)+Lu)^2\,dx\;+2\lambda\bigg(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\epsilon\;\widetilde{w}\;dxdt\\
&+\; \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega p_\epsilon(T)\;L\widetilde{w}\;dx\bigg)+\lambda^2\bigg(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\;\widetilde{w}^2\;dxdt+\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega(L\widetilde{w})^2\;dx\bigg)\\
&= J_\epsilon(u_\epsilon)+2\lambda\bigg(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\epsilon\;\widetilde{w}\;dxdt\;+\;\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega p_\epsilon(T\;)L\widetilde{w}\;dx\bigg)\quad+\\
&\quad\lambda^2\bigg(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\;\widetilde{w}^2\;dxdt+\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega(L\widetilde{w})^2\;dx\bigg)\cdot
\end{aligned}
$$

Assim, temos :

$$
\begin{aligned}
J_\epsilon(u_\epsilon+\lambda\widetilde{w}) &= J_\epsilon(u_\epsilon)+2\lambda\bigg(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\epsilon\;\widetilde{w}\;dxdt\;+\;\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega p_\epsilon(T\;)L\widetilde{w}\;dx\bigg)\quad+\\
&\quad\lambda^2\bigg(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\;\widetilde{w}^2\;dxdt+\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega(L\widetilde{w})^2\;dx\bigg)\cdot
\end{aligned}
$$

Dividindo ambos os membros da expressão acima por λ, obtemos :

$$
\begin{aligned}
\frac{J_\epsilon(u_\epsilon+\lambda\widetilde{w})-J_\epsilon(u_\epsilon)}{\lambda} &= 2\bigg(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\epsilon\;\widetilde{w}\;dxdt\;+\;\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega p_\epsilon(T\;)L\widetilde{w}\;dx\bigg)\quad+\\
&\quad\lambda\bigg(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}\;\widetilde{w}^2\;dxdt+\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega(L\widetilde{w})^2\;dx\bigg)\cdot
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

Pela definição da derivada de Gateaux, temos :

$$
\lim_{\lambda\to 0}\frac{J_\epsilon(u_\epsilon+\lambda\widetilde{w})-J_\epsilon(u_\epsilon)}{\lambda}=\frac{d}{d\lambda}J_\epsilon(u_\epsilon+\lambda\widetilde{w})\bigg|_{\lambda=0}.
$$

Assim, tomando o limite em (6.3) quando $\lambda\to 0$, obtemos :

$$
\frac{d}{d\lambda}J_\epsilon(u_\epsilon+\lambda\widetilde{w})\bigg|_{\lambda=0}=2\bigg(\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\epsilon\;\widetilde{w}\;dxdt\;+\;\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega p_\epsilon(T\;)L\widetilde{w}\;dx\bigg),\quad\forall\;\widetilde{w}\in L^2(Q).
$$

Como u_ϵ é um ponto estacionário de $J_\epsilon(u)$, devemos ter :

$$2\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\epsilon\,\widetilde{w}\,dxdt \;+\; \frac{2}{\epsilon}\int_\Omega p_\epsilon(T\,)z(T)\,dx = 0\;, \tag{6.13}$$

para todo $\widetilde{w}\in L^2(Q)$ e z solução fraca de

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + a(t)z = \chi_\omega \widetilde{w}, \quad em \;\; Q\;; \\ z = 0, \quad em \quad \Sigma\;; \\ z(0) = 0, \quad em \quad \Omega\;. \end{cases} \tag{6.14}$$

Note que $z = L\widetilde{w}$ e L é uma função linear limitada de $\widetilde{w}\in L^2(Q)$.

Observação 6.1.1. Como $\widetilde{w}\in L^2(Q)$ e $z(x,t) = L\widetilde{w}(x,t)$, então $z\in C^0\left([0,\;T\,]\;;\;L^2(\Omega)\right)$. Assim, faz sentido $z(x,T) = L\widetilde{w}(x,T)$.

Multiplicando (6.14) por w_ϵ e integrando em Q, temos :

$$\int_Q w_\epsilon\,z_t\,dxdt - \int_Q w_\epsilon\,\Delta z\,dxdt + \int_Q a(t)\,z\,w_\epsilon\,dxdt = \int_Q \chi_\omega\,\widetilde{w}\,w_\epsilon\,dxdt. \tag{6.15}$$

Como $z = 0$ em Σ, então pela fórmula de Green, temos :

(i) $\int_Q w_\epsilon\,\Delta z\,dxdt + \int_Q \nabla w_\epsilon \nabla z\,dxdt = \int_\Sigma w_\epsilon\,\frac{\partial z}{\partial \eta}\,d\Sigma = 0$;

(ii) $\int_Q z\,\Delta w_\epsilon\,dxdt + \int_Q \nabla z \nabla w_\epsilon\,dxdt = \int_\Sigma z\,\frac{\partial w_\epsilon}{\partial \eta}\,d\Sigma = 0$.

Assim, de (i) e (ii), obtemos :

$$\int_Q w_\epsilon\,\Delta z\,dxdt = \int_Q z\,\Delta w_\epsilon\,dxdt\;. \tag{6.16}$$

Por outro lado, integrando por partes a primeira intergral de (6.14), temos :

$$\begin{aligned} \int_Q w_\epsilon\,z_t\,dxdt &= \int_\Omega\left(\int_0^T w_\epsilon\,z_t\,dt\right)dx = \int_\Omega\left(z\,w_\epsilon\,\Big|_0^T - \int_0^T z\,w_{\epsilon t}\,dt\right)dx \\ &= \int_\Omega z(T)\,w_\epsilon(T)\,dx - \int_\Omega z(0)\,w_\epsilon(0)\,dx + \int_Q z\,w_{\epsilon t}\,dxdt\;. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Logo, substituindo (6.16) e (6.17) em (6.14), obtemos :

$$\int_Q \left[-w_{\epsilon t} - \Delta w_\epsilon + a(t)w_\epsilon\,\right]z\,dxdt + \int_\Omega z(T)\,w_\epsilon(T)dx - \int_\Omega z(0)\,w_\epsilon(0)\,dx = \int_Q \chi_\omega\,\widetilde{w}\,w_\epsilon\,dxdt\;. \tag{6.18}$$

Portanto, se w_ϵ é solução fraca do problema :

$$\begin{cases} w_{\epsilon t} + \Delta w_\epsilon - a(t)w_\epsilon = 0, \quad em \quad Q\;; \\ w_\epsilon = 0, \quad em \quad \Sigma\;; \\ w_\epsilon(x,T) = -\frac{1}{\epsilon}\,p_\epsilon(x,T), \quad em \quad \Omega\;. \end{cases} \tag{6.19}$$

Obtemos, de (6.14), (6.18) e (6.19) :

$$-\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega p_\epsilon(x,T)\ z(x,T)\ dx = \int_Q \chi_\omega\ \widetilde{w}\ w_\epsilon\ dxdt. \tag{6.20}$$

De (6.13) temos que :

$$-\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega p_\epsilon(T\ )z(T)\ dx = \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\epsilon\ \widetilde{w}\ dxdt\ .$$

Logo, (6.20) torna-se :

$$\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\epsilon\ \widetilde{w}\ dxdt = \int_Q \chi_\omega\ \widetilde{w}\ w_\epsilon\ dxdt.$$

Isto é,

$$\int_Q \Big(e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\epsilon - \chi_\omega\ w_\epsilon\Big)\widetilde{w}\ dxdt = 0,$$

$\forall \widetilde{w} \in L^2(Q)$. Isto implica que :

$$u_\epsilon = e^{2s\alpha}\phi^3\chi_\omega w_\epsilon, \quad \text{quase sempre em} \quad Q\ ,$$

com w_ϵ solução fraca de (6.19), isto é, (6.6). Isto prova o Lema 6.1.1. □

Agora, retornaremos à prova do Teorema 6.1.1. De fato, o primeiro passo, ainda técnico, é obter como aplicação do Lema 6.1.1 estimativas para u_ϵ e p_ϵ afim de garantir a convergência de ambos e com isso atingir o nosso objetivo que é $p(x,T) = 0$. Para isso, multiplicamos ambos os lados de (6.19) por $p_\epsilon(x,t)$ e integramos em Q. No segundo passo, multiplicamos os dois lados do sistema (6.21) abaixo por w_ϵ e integramos em Q.

$$\begin{cases} p_{\epsilon t} - \Delta p_\epsilon + a(t)p_\epsilon = \chi_\omega w_\epsilon e^{2s\alpha}\phi^3, \quad em \quad Q\ ; \\ p_\epsilon = 0, \quad em \quad \Sigma\ ; \\ p_\epsilon(x,0) = p_0(x), \quad em \quad \Omega\ . \end{cases} \tag{6.21}$$

De fato, multiplicando ambos os lados de (6.19) por $p_\epsilon(x,t)$ e integrando em Q, temos :

$$\int_Q p_\epsilon\ w_{\epsilon t}\ dxdt + \int_Q p_\epsilon\ \Delta w_\epsilon\ dxdt - \int a(t)\ w_\epsilon\ p_\epsilon\ dxdt = 0.$$

Mas temos que :

(i) $$\int_Q p_\epsilon\ \Delta w_\epsilon\ dxdt = \int_Q w_\epsilon\ \Delta p_\epsilon\ dxdt\ ;$$

(ii) $$\int_Q p_\epsilon\ w_{\epsilon\ t}\ dxdt = \int_\Omega \left(p_\epsilon\ w_\epsilon\ \Big|_0^T\right) dx\ - \int_Q p_{\epsilon t}\ w_\epsilon\ dxdt.$$

Assim,

$$\int_{\Omega} p_\epsilon(T)\, w_\epsilon(T)\, dx - \int_{\Omega} p_\epsilon(0)\, w_\epsilon(0)\, dx - \int_Q p_{\epsilon t}\, w_\epsilon\, dxdt + \int_Q w_\epsilon\, \Delta p_\epsilon\, dxdt - \int a(t)\, w_\epsilon\, p_\epsilon\, dxdt = 0. \tag{6.22}$$

Multiplicando ambos os lados de $(6.21)_1$ por $w_\epsilon(x,t)$ e integrando em Q, temos :

$$\int_Q p_{\epsilon t}\ w_\epsilon\ dxdt - \int_Q w_\epsilon\ \Delta p_\epsilon\ dxdt + \int a(t)\ w_\epsilon\ p_\epsilon\ dxdt = \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\epsilon^2\ dxdt. \tag{6.23}$$

Adicionando (6.22) e (6.23), obtemos :

$$\begin{aligned}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\epsilon^2\ dxdt &= \int_\Omega p_\epsilon(T)\ w_\epsilon(T)\ dx - \int_\Omega p_\epsilon(0)\ w_\epsilon(0)\ dx \\ &= -\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (p_\epsilon(T))^2\ dx - \int_\Omega p_0(x)\ w_\epsilon(x,0)\ dx.\end{aligned}$$

Isto é ,

$$\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\epsilon^2\ dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (p_\epsilon(T))^2\ dx = -\int_\Omega p_0(x)\ w_\epsilon(x,0)\ dx. \tag{6.24}$$

A desigualdade de Hölder nos diz que :

$$\left|\int_\Omega p_0(x)\ w_\epsilon(x,0)\ dx\right|_{\mathbb{R}} \le |p_0|_{L^2(\Omega)}|\ |w_\epsilon(x,0)|_{L^2(\Omega)}. \tag{6.25}$$

Pela desigualdade de observabilidade para $w_\epsilon(x,0)$, conforme o Teorema 5.0.13, obtemos :

$$\begin{aligned}\int_\Omega |w_\epsilon(x,0)|^2\ dx &\le C\Big(\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 |w_\epsilon(x,t)|^2\ dxdt\Big) \\ &\le C\Big(\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 |w_\epsilon(x,t)|^2\ dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega |p(x,T)|^2 dx\Big).\end{aligned} \tag{6.26}$$

Substituindo (6.26) em (6.25), segue que :

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega p_0(x)\ w_\epsilon(x,0)\ dx\right|_{\mathbb{R}} &\le |p_0|_{L^2(\Omega)} C^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 |w_\epsilon(x,t)|^2\ dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega |p(x,T)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \frac{C}{2}|p_0|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\Big(\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 |w_\epsilon(x,t)|^2\ dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega |p(x,T)|^2 dx\Big).\end{aligned} \tag{6.27}$$

De (6.24) e (6.27), temos :

$$\begin{aligned}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\epsilon^2\ dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (p_\epsilon(T))^2\ dx &\le \frac{C}{2}|p_0|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\Big(\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 |w_\epsilon(x,t)|^2\ dxdt \\ &+ \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega |p(x,T)|^2 dx\Big).\end{aligned} \tag{6.28}$$

Logo,

$$\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\epsilon^2 \ dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (p_\epsilon(T))^2 \ dx \quad \leq \quad C|p_0|^2_{L^2(\Omega)} = constante. \tag{6.29}$$

Portanto, de (6.29), temos :

$$\int_\Omega (p_\epsilon(T))^2 \ dx \quad \leq \quad C\epsilon |p_0|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{6.30}$$

De (6.30), temos :

$$p_\epsilon(x,T) \to 0 \ \text{ forte em } \ L^2(\Omega) \text{ quando } \epsilon \to 0.$$

De (6.29), temos :

$$\int_Q \chi_\omega e^{2s\alpha}\phi^3 w_\epsilon^2 \ dxdt = \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\epsilon^2 \ dxdt < constante. \tag{6.31}$$

Pelo Lema 6.1.1 temos que $u_\epsilon = e^{2s\alpha}\phi^3\chi_\omega w_\epsilon$ quase sempre em Q. Então,

$$u_\epsilon^2 = (e^{2s\alpha}\phi^3\chi_\omega)(e^{2s\alpha}\phi^3\chi_\omega w_\epsilon^2) \ \text{ quase sempre em } \ Q.$$

Como $e^{-2s\alpha}\phi^{-3} \geq C_0$ em Q, então $e^{2s\alpha}\phi^3 \leq \frac{1}{C_0}$ em Q. Logo,

$$u_\epsilon^2 \leq \frac{1}{C_0}(e^{2s\alpha}\phi^3\chi_\omega w_\epsilon^2) \ \text{ quase sempre em } \ Q.$$

Portanto, temos :

$$\int_Q u_\epsilon^2 \ dxdt \leq \frac{1}{C_0}\int_Q e^{2s\alpha}\phi^3\chi_\omega w_\epsilon^2 dxdt < C.$$

Como $L^2(Q)$ é um espaço de Banach reflexivo, então a sequência (u_ϵ) converge fracamente para u em $L^2(Q)$, isto é

$$u_\epsilon \rightharpoonup u \ \text{ fracamente em } \ L^2(Q) \ .$$

De (6.21) temos que :

$$p_\epsilon \rightharpoonup p \ \text{ fracamente em } \ H^1\left(0, \ T \ ; \ H^{-1}(\Omega)\right) \cap L^2\left(0, \ T \ ; H_0^1(\Omega)\right),$$

então :

$$p_\epsilon \to p \ \text{ fortemente em } \ C^0\left([0, \ T] \ ; \ L^2(\Omega)\right). \tag{6.32}$$

De (6.30) temos que :

$$p_\epsilon(x,T) \to 0 \ \text{ fortemente em } \ L^2(\Omega),$$

de onde existe uma subsequência de $p_\epsilon(x,T)$ tal que :

$$p_\epsilon(x,T) \to 0 \ \text{ quase sempre em } \Omega. \tag{6.33}$$

De (6.32) temos que,

$$p_\epsilon(x,t) \to p(x,t) \ \text{ quase sempre em } \Omega, \ \text{para} \ 0 \le t \le T.$$

Então,

$$p_\epsilon(x,T) \to p(x,T) \ \text{ quase sempre em } \Omega.$$

De (6.33) temos pela unicidade do limite que $p(x,T) = 0$ quase sempre em Ω.

Note que no sistema (6.21) $u_\epsilon = w_\epsilon e^{2s\alpha}\phi^3$. Portanto, quando $\epsilon \to 0$ em (6.21) obtemos um controle $u \in L^2(Q)$ e uma função $p \in H^1(0, \ T \ ; \ H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(0, \ T \ ; H_0^1(\Omega))$ solução no sentido fraco de

$$\begin{cases} p_t - \Delta p + a(t)p = \chi_\omega u \quad em \quad Q \ , \\ p(x,t) = 0 \quad em \quad \Sigma \ ; \\ p(x,0) = p_0 \quad em \quad \Omega \ , \end{cases}$$

tal que

$$p(x,T) = 0 \ \text{ quase sempre em } \ \Omega \ .$$

Isto prova o Teorema 6.1.1. □

6.2 Controlabilidade nula: Equação de estado não linear

Nesta seção vamos investigar a controlabilidade nula para a equação de estado não linear :

$$\begin{cases} p_t - \Delta p + g(p) = \chi_\omega u \quad em \quad Q \ ; \\ p(x,t) = 0 \quad em \quad \Sigma \ ; \\ p(x,0) = p_0(x) \quad em \quad \Omega \ ; \end{cases} \tag{6.34}$$

com $u \in L^2(Q), \ p_0 \in L^2(\Omega)$; onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $C^1(\mathbb{R})$, globalmente Lipschitz e $g(0) = 0$. Isso significa que,

$$|g(p_1) - g(p_2)| \le M|p_1 - p_2| \quad \text{para todo} \quad p_1, p_2 \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad M \quad \text{constante.}$$

Para nos auxiliar na demostração da controlabilidade nula de (6.34), precisamos introduzir o seguinte espaço de Hilbert :

$$W^1\left(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)\right)=\{p\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),\ p_t\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\},$$

com produto interno

$$(u,v)=\int_0^T (u,v)_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}+\int_0^T (u_t,v_t)_{H^{-1}(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}$$

e norma induzida pelo produto interno acima

$$||p||^2_{W^1}=||p||^2_{L^2\left(0,\ T;\ H_0^1(\Omega)\right)}+||p_t||^2_{L^2(0,\ T;\ H^{-1}(\Omega))}\ .$$

Temos :

$$W^1\left(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)\right)\subset C^0\left([0,T];L^2(\Omega)\right)\subset L^2(Q),$$

Consideremos o subconjunto B de $L^2(Q)$ definido por :

$$B=\{p\in W^1\left(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)\right);\ ||p||_{W^1}<M_1\}.$$

Para linearizar o sistema (6.34), definimos a função auxiliar $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ como segue :

$$f(p)=\begin{cases}\frac{g(p)}{p} & se \quad |p|>0\ ;\\ g'(0) & se \quad p=0\ .\end{cases}$$

Assim, para $\overline{p}\in B,\ p_0\in L^2(\Omega),\ u\in L^2(Q)$, consideremos a seguinte equação de estado linear :

$$\begin{cases}p_t-\Delta p+f(\overline{p})p=\chi_\omega u & em \quad Q\ ;\\ p(x,t)=0 & em \quad \Sigma\ ;\\ p(x,0)=p_0(x) & em \quad \Omega\ .\end{cases}\tag{6.35}$$

Portanto, (6.35) é a linearização de (6.34).

Note que $a(x,t)=f(\overline{p}(x,t))$ com $\overline{p}\in B$ uma bola de W^1. Assim, temos :

$$\begin{aligned}|a(x,t)| &= |f(\overline{p}(x,t))|=|\frac{g(\overline{p})}{\overline{p}}|=\frac{|g(\overline{p})-0|}{|\overline{p}|}=\frac{|g(\overline{p})-g(0)|}{|\overline{p}|}\\ &\leq M\frac{|\overline{p}-0|}{|\overline{p}|}=M\frac{|\overline{p}|}{|\overline{p}|}=M.\end{aligned}\tag{6.36}$$

Portanto, pelo Teorema 6.1.1, para $\overline{p}\in W^1,\ T>0$ existe $u\in L^2(Q,\ e^{-2s\alpha}\phi^{-3})$ tal que a solução fraca de (6.35) satisfaz $p(x,T)=0$ em Ω, isto é, temos uma controlabilidade nula para (6.35).

A controlabilidade nula de (6.34) é dada pelo seguinte teorema :

Teorema 6.2.1. Suponha $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ globalmente Lipschitz e $g(0) = 0$, $p_0 \in L^2(\Omega)$ e $T > 0$. então existe $u \in L^2(Q,\ e^{-2s\alpha}\phi^{-3})$ e $p \in W^1\left(0, T; H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)\right)$, solução fraca de (6.34) tal que $p(x, T) = 0$ em Ω.

Demonstração. A prova do Teorema 6.2.1 é feita por meio do Teorema 2.5.10, o *Teorema do ponto fixo de Kakutani*, mas utilizando a versão infinito dimensional para uma aplicação de múltiplos valores, conforme [19]. No nosso caso temos $X = L^2(Q)$ e

$$B = \{p \in W^1\left(0, T; H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)\right);\ ||p||_{W^1} < M_1\} \subset C^0\left([0, T]; L^2(\Omega)\right) \subset L^2(Q),$$

onde M_1 é uma constante a ser definida de forma adequada.

Afirmação 6.2.1. B é convexo.

De fato, sejam $u, v \in B$ e $t \in [0, 1]$, então,

$$||(1-t)u + tv||_{W^1} \leq (1-t)||u||_{W^1} + t||v||_{W^1} \leq (1-t)M_1 + tM_1 = M_1\ .$$

Afirmação 6.2.2. B é um subconjunto compacto de $L^2(Q)$.

De fato, seja $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos $b_n \in B$. Então, por definição de B temos que $||b_n||_{W^1} < M_1$. Da definição da norma de W^1, temos :

$$\begin{cases} ||b_n||_{L^2\left(0,T\ ;\ H_0^1(\Omega)\right)} < M_1 & e \\ \left|\left|\frac{db_n}{dt}\right|\right|_{L^2(0,T\ ;\ H^{-1}(\Omega))} < M_1\ . & \end{cases}$$

Isto significa que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2\left(0, T\ ;\ H_0^1(\Omega)\right)$ e $\left(\frac{db_n}{dt}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2\left(0, T\ ;\ H^{-1}(\Omega)\right)$. Assim, pelo Teorema 2.5.7 (Teorema de Aubin-Lion) existe uma subseqência de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a qual denotamos por $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $b_n \to b$ fortemente em $L^2(Q)$. Portanto, B é compacto.

Definimos a aplicação Φ em B da seguinte forma:

$$\Phi : B \to 2^B$$

$$\overline{p} \mapsto \Phi(\overline{p})$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi(\overline{p}) \ &= \ \Big\{p \in W^1\left(0, T; H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)\right),\ p \text{ é solução fraca de (6.35) para} \\ u \ &\in L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3}) \text{ com} \int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u^2\,dx\,dt \leq C\int_\Omega p_0^2\,dx \text{ tal que } p(x,T) = 0 \text{ em } \Omega\Big\}. \end{aligned}$$

Afirmação 6.2.3. $\Phi(\overline{p})$ é não vazio para todo $\overline{p} \in B$.

De fato, para $\overline{p} \in B$, $a(x,t) = f(\overline{p}(x,t))$ é por definição limitada, pois g é Lipschitz e $g(0) = 0$. Portanto, para $u \in L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3})$, $p_0 \in L^2(\Omega)$ existe $p \in W^1(0,T; H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ solução fraca de (6.35), tal que $p(x,T) = 0$, conforme a seção 6.1. Portanto, para $\overline{p} \in B$, $\Phi(\overline{p})$ é não vazio em $L^2(Q)$.

Portanto, quando $u \in L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3})$, $p_0 \in L^2(\Omega)$, $\overline{p} \in B$, $\Phi(\overline{p})$ é um subconjunto de $L^2(Q)$, isto é, Φ é uma aplicação de múltiplos valores que está bem definida.

Afirmação 6.2.4. $\Phi(B) \subset B$.

De fato, para todo $\overline{p} \in B$ se $p \in \Phi(\overline{p})$, então por definição de $\Phi(\overline{p})$, p é solução fraca de (6.35). Assim, multiplicando ambos os lados de $(6.35)_1$ por p e integrando em Ω, temos :

$$\int_\Omega pp_t\ dx - \int_\Omega p\ \Delta p\ dx + \int_\Omega f(\overline{p})p^2 = \int_\Omega \chi_\omega u\ p\ dx\ .$$

Mas,

$$(i) \qquad \int_\Omega pp_t\ dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega p(x,t)^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|p(x,t)|^2_{L^2(\Omega)}\ ;$$

$$(ii) \qquad \int_\Omega p\ \Delta p\ dx = -\int_\Omega \nabla p \nabla p\ dx = -\int_\Omega |\nabla p|^2 dx = -|\nabla p|^2_{L^2(\Omega)} = -||p(x,t)||^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|p(x,t)|^2_{L^2(\Omega)} + ||p(x,t)||^2_{H_0^1(\Omega)} &= \int_\Omega (-f(\overline{p}))p^2\ dx + \int_\Omega \chi_\omega u\ p\ dx \\
&\leq M\int_\Omega p^2\ dx + \int_\Omega \chi_\omega u\ p\ dx \\
&\leq M\int_\Omega p^2\ dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (\chi_\omega u)^2\ dx + \frac{1}{2}\int_\Omega p(x,t)^2\ dx \\
&= M|p(x,t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}|\chi u|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}|p(x,t)|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= (M + \frac{1}{2})|p(x,t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}|\chi u|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq (M + \frac{1}{2})|p(x,t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}|\chi|^2_{L^2(\Omega)}\ |u|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq (M + \frac{1}{2})|p(x,t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}|u|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|p(t)|^2_{L^2(\Omega)} + ||p(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} \leq (M + \frac{1}{2})|p(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}|u|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Mas como $\frac{1}{2} = \min\{1, \frac{1}{2}\}$, então :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}|p(t)|^2_{L^2(\Omega)} + ||p(t)||^2_{H^1_0(\Omega)}\right) \leq (M + \frac{1}{2})|p(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}|u|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Isto é,

$$\frac{d}{dt}|p(t)|^2_{L^2(\Omega)} + ||p(t)||^2_{H^1_0(\Omega)} \leq (2M+1)|p(t)|^2_{L^2(\Omega)} + |u|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Integrando em $[0, t)$ e sabendo que $p(x, 0) = p_0$, temos :

$$|p(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T ||p(t)||^2_{H^1_0(\Omega)}dt \leq |p_0|^2_{L^2(\Omega)} + (2M+1)\int_0^t |p(s)|^2_{L^2(\Omega)}ds + |u|^2_{L^2(Q)}. \quad (6.37)$$

Para s e λ suficientemente grandes e fixos temos pela seção 6.1 que existe uma constante $C_0 > 0$ tal que $C_0 \leq e^{-2s\alpha}$. Logo, de (6.2) segue que $C_0|u|^2_{L^2(Q)} \leq C|p_0|^2_{L^2(\Omega)}$. Daí, $|u|^2_{L^2(Q)} \leq C_1|p_0|^2_{L^2(\Omega)}$, onde $C_1 = \frac{C}{C_0}$. Então, (6.37) torna-se :

$$|p(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T ||p(t)||^2_{H^1_0(\Omega)}dt \leq |p_0|^2_{L^2(\Omega)} + C_1|p_0|^2_{L^2(\Omega)} + (2M+1)\int_0^t |p(s)|^2_{L^2(\Omega)}ds. \quad (6.38)$$

Da desigualdade de Gronwall , segue que :

$$|p(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T ||p(t)||^2_{H^1_0(\Omega)}dt \leq \left(|p_0|^2_{L^2(\Omega)} + C_1|p_0|^2_{L^2(\Omega)}\right)e^{(2M+1)T} = C_2. \quad (6.39)$$

Temos também, para todo $v \in H^1_0(\Omega)$ com $||v||_{H^1_0(\Omega)} \leq 1$, que :

$$\begin{aligned} |\langle p_t, v\rangle| &= |\langle \Delta p - f(\overline{p})p + \chi_\omega u, v\rangle| = |\langle \Delta p, v\rangle + \langle f(\overline{p})p, v\rangle + \langle \chi_\omega u, v\rangle| \\ &\leq |\langle \Delta p, v\rangle| + |\langle f(\overline{p})p, v\rangle| + |\langle \chi_\omega u, v\rangle| \\ &\leq ||p(t)||_{H^1_0(\Omega)}||v||_{H^1_0(\Omega)} + M|p(t)|_{L^2(\Omega)}|v|_{L^2(\Omega)} + |u|_{L^2(Q)}|v(t)|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(||p(t)||_{H^1_0(\Omega)} + MC_3C_2^{\frac{1}{2}} + C_3C_1^{\frac{1}{2}}|p_0|_{L^2(\Omega)}\right)||v||_{H^1_0(\Omega)}, \end{aligned} \quad (6.40)$$

onde C_3 é a constante de imersão de $H^1_0(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$. Portanto, temos que :

$$||p_t(t)||_{H^{-1}(\Omega)} \leq ||p(t)||_{H^1_0(\Omega)} + C_4, \quad (6.41)$$

onde $C_4 = MC_3C_2^{\frac{1}{2}} + C_3C_1^{\frac{1}{2}}|p_0|_{L^2(\Omega)}$. Segue que :

$$||p_t(t)||^2_{L^2(0,\ T\ ;\ H^{-1}(\Omega))} \leq 2||p(t)||^2_{L^2(0,\ T\ ;\ H^1_0(\Omega))} + 2C_4^2T = 2C_2 + 2C_4^2T. \quad (6.42)$$

De (6.39) e (6.42), obtemos :

$$\int_0^T ||p(t)||^2_{H^1_0(\Omega)}dt + \int_0^T ||p_t(t)||^2_{H^{-1}(\Omega)} \leq M_1^2. \quad (6.43)$$

Portanto,

$$||p||_{W^1} \leq M_1, \ com \ M_1 = (2C_2 + 2C_4^2 T)^{\frac{1}{2}}.$$

Deste modo, se $\overline{p} \in B$, então $\Phi(\overline{p}) \subset B$. Portanto, $\Phi(B) \subset B$.

Afirmação 6.2.5. $\Phi(\overline{p})$ é fechado em $L^2(Q)$.

De fato, considere $\overline{p} \in B$ fixo e seja $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos $p_n \in \Phi(\overline{p})$ tal que $p_n \to p$ forte em $L^2(Q)$. Pela definição de $\Phi(\overline{p})$, temos que cada p_n satisfaz :

$$\begin{cases} p_{n_t} - \Delta p_n + f(\overline{p})p_n = \chi_\omega u_n \quad em \quad Q \ , \\ p_n = 0 \quad em \quad \Sigma \ , \\ p_n(0) = p_0 \quad em \quad \Omega \ , \end{cases} \tag{6.44}$$

com $\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_n^2 dxdt \leq C\int_\Omega p_0^2 dx$, que implica $|u_n|^2_{L^2(Q)} \leq C|p_0|^2_{L^2(Q)}$. Assim, temos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(Q)$ e sendo este espaço reflexivo, podemos extrair uma subsequência de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que também denotamos por $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que :

$$u_n \rightharpoonup u \quad fracamente \quad em \quad L^2(Q) \ . \tag{6.45}$$

Como $p_n \in \Phi(\overline{p}) \subset B$, seque que $p_n \in B$. Assim, pelos mesmos argumentos para obter (6.43) de (6.39) e (6.42) temos :

$$||p_n||^2_{L^2\left(0,\ T\ ;\ H_0^1(\Omega)\right)} + ||p_{nt}||^2_{L^2(0,\ T\ ;\ H^{-1}(\Omega))} \leq M_1^2. \tag{6.46}$$

De (6.46) temos que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2\left(0,\ T\ ;\ H_0^1(\Omega)\right)$ e $(p_{nt})_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2\left(0,\ T\ ;\ H^{-1}(\Omega)\right)$. Como esses espaços são reflexivos, podemos extrair subsequências, as quais denotamos por $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(p_{nt})_{n\in\mathbb{N}}$ tais que :

$$\begin{cases} p_n \rightharpoonup p \quad fracamente \quad em \quad L^2\left(0,\ T\ ;\ H_0^1(\Omega)\right) \ , \\ p_{nt} \rightharpoonup p_t \quad fracamente \quad em \quad L^2\left(0,\ T\ ;\ H^{-1}(\Omega)\right) \ , \\ p_n \to p \quad fortemente \quad em \quad L^2(Q) \ . \end{cases} \tag{6.47}$$

A última convergência segue do teorema da compacidade, conforme [**??**]. De (6.47) passamos os limites em (6.44), quando $n \to \infty$, obtemos :

$$\begin{cases} p_t - \Delta p + f(\overline{p})p = \chi_\omega u \quad em \quad Q \ , \\ p = 0 \quad em \quad \Sigma \ , \\ p(x,0) = p_0(x) \quad em \quad \Omega \ , \end{cases} \tag{6.48}$$

e

$$\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u^2(x,t)dxdt \leq \int_\Omega p_0^2(x)\ dx.$$

Assim, $p \in \Phi(\overline{p})$ e $\Phi(\overline{p})$ é fechado. Portanto, como B é um subconjunto compacto de $L^2(Q)$ e $\Phi(\overline{p}) \subset B$ é fechado, isto implica que $\Phi(\overline{p})$ é compacto em $L^2(Q)$.

Afirmação 6.2.6. Φ tem o gráfico fechado em $L^2(Q) \times L^2(Q)$.

De fato, sejam $\overline{p}_n,\ p_n$ tais que :

$$\overline{p}_n \to \overline{p}, \quad p_n \to p \quad fortemente \quad em \quad L^2(Q), \ e \quad p_n \in \Phi(\overline{p}_n). \tag{6.49}$$

Vamos mostrar que $p \in \Phi(\overline{p})$. De fato, de $p_n \in \Phi(\overline{p}_n)$, segue que p_n é solução fraca de :

$$\begin{cases} p_{nt} - \Delta p_n + f(\overline{p_n})p_n = \chi_\omega u_n \qquad em \quad Q \ , \\ p_n = 0 \qquad em \quad \Sigma \ , \\ p_n(x,0) = p_0(x) \qquad em \quad \Omega \ \ , \end{cases} \tag{6.50}$$

e

$$\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_n^2(x,t)dxdt \leq C\int_\Omega p_0(x)^2\ dx.$$

Pelos mesmos argumentos para obter (6.46) aplicado a (6.50), obtemos :

$$||p_n||^2_{L^2\left(0,\ T\ ;\ H_0^1(\Omega)\right)} + ||p_{n_t}||^2_{L^2(0,\ T\ ;\ H^{-1}(\Omega))} \leq M_1^2. \tag{6.51}$$

De (6.51) e da estimativa para u_n em $L^2(Q)$, uma vez que $e^{2s\alpha}\phi^{-3} \geq C_0$, obtemos subsequências $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(p_{n_t})_{n\in\mathbb{N}}$ tais que :

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \qquad fracamente \quad em \quad L^2(Q) \ , \\ p_n \rightharpoonup p \quad fracamente \quad em \quad L^2\left(0,\ T\ ;\ H_0^1(\Omega)\right) \ , \\ p_{nt} \rightharpoonup p_t \quad fracamente \quad em \quad L^2\left(0,\ T\ ;\ H^{-1}(\Omega)\right) \quad . \end{cases} \tag{6.52}$$

De (6.49) obtemos subsequências $(\overline{p}_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que :

$$\begin{cases} \overline{p}_n \to \overline{p} \qquad quase \quad sempre \quad em \quad Q, \\ p_n \to p \qquad quase \quad sempre \quad em \quad Q. \end{cases} \tag{6.53}$$

Pela continuidade de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ obtemos $f(\overline{p}_n) \to f(\overline{p})$ quase sempre em Q, então por (6.53) temos :

$$f(\overline{p}_n)p_n \to f(\overline{p})p \qquad quase \quad sempre \quad em \quad Q. \tag{6.54}$$

Temos também :

$$\int_Q |f(\overline{p}_n)p_n|^2 dxdt \leq M\int_Q |p_n|^2 dxdt \leq CM. \tag{6.55}$$

Assim, pelo Lema 2.5.2 (Lema de Lions) obtemos de (6.54) e (6.55), que

$$f(\overline{p}_n)p_n \rightharpoonup f(\overline{p})p \qquad fracamente \quad em \quad L^2(Q). \tag{6.56}$$

Portanto, passando o limite em (6.50) quando $n \to \infty$, obtemos:

$$\begin{cases} p_t - \Delta p + f(\overline{p})p = \chi_\omega u & em \quad Q \ , \\ p = 0 \quad em \quad \Sigma \ , \\ p(x,0) = p_0(x) \quad em \quad \Omega \ \ , \end{cases} \tag{6.57}$$

e

$$\int_Q e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u^2(x,t)dxdt \leq C \int_Q p_0(x)^2 \ dx$$

que prova que $p \in \Phi(\overline{p})$.

Portanto, aplicação de múltiplos valores $\Phi : B \to 2^B$ satisfaz as condições da versão infinito dimensional de Shizuo Kakutani [24], conforme Glicksberg [19], portanto, tem um ponto fixo, isto é, existe $\overline{p} \in \Phi(\overline{p})$. Isso prova a controlabilidade nula para a equação de estado não linear (6.34). Assim, completamos a prova do Teorema 6.2.1. $\square$

6.3 Controlabilidade aproximada

Consideremos o sistema de estado parabólico linear :

$$\begin{cases} p_t - \Delta p + a(t)p = \chi_\omega u & em \quad Q \ ; \\ p = 0 \quad em \quad \Sigma \ ; \\ p(x,0) = p_0 \quad em \quad \Omega \ . \end{cases} \tag{6.58}$$

De acordo com a definição 6.37, dizemos que (6.58) é aproximadamente controlável em $L^2(\Omega)$, no tempo $T > 0$, se para cada $\epsilon > 0$, dado $p_0 \in L^2(\Omega)$ e $p_T \in L^2(\Omega)$, existe um controle $u \in L^2(Q_\omega)$, $\;Q_\omega = \omega \times (0,T)$ tal que a correspondente solução $p(x,t)$ de (6.58) satisfaz:

$$\mid p(x,T) - p_T(x) \mid_{L^2(\Omega)} \ < \ \epsilon. \tag{6.59}$$

Este conceito de controlabilidade aproximada foi introduzido por J. L. Lions [33] empregando um teorema de continuação por Mizohata, ver também Cara-Guerreiro [14], Fabre-Puel-Zuazua [12], Zuazua [40].

Nesta seção, provamos o mesmo resultado como uma aplicação das desigualdades de Carleman.

Teorema 6.3.1. Fixe $T > 0$ e dado $\epsilon > 0$ e $p_0,\ p_T \in L^2(\Omega)$. Então, existe um controle $u \in L^2(Q_\omega)$ tal que a solução p da equação de estado (6.58) satisfaz

$$| \ p(x\ ,\ T) - p_T(x) \ |_{L^2(\Omega)} \ < \ \epsilon.$$

Demonstração. Como o sistema é linear, podemos supor $p_0 = 0$. De fato, com $p_0 \in L^2(\Omega)$ resolvemos o problema:

$$\begin{cases} \widehat{p}_t - \Delta\widehat{p} + a\widehat{p} = \chi_\omega u \qquad e \qquad Q\ ; \\ \widehat{p} = 0 \qquad e \qquad \Sigma\ ; \\ \widehat{p}(0) = p_0 \qquad e \qquad \Omega\ . \end{cases} \tag{6.60}$$

Assim, se $w = p - \widehat{p},\ w$ é solução de (6.58) com $w(0) = 0$. Portanto, consideramos (6.58) , mas com $p_0 = 0$. Para provar a controlabilidade aproximada, definimos o conjunto

$$R_L(T) = \{p(x,T)\ ;\ \text{ p } \text{ é } \text{ solução } \text{ de } (6.58)\ ,\ \text{ com } u \in L^2(Q_\omega)\}.$$

Este conjunto é chamado de conjunto de estados admissíveis e o índice L significa problema linear. Para provar a controlabilidade aproximada é suficiente mostrar que $R_L(T)$ é denso em $L^2(\Omega)$. Vamos provar o raciocínio por contradição.

Suponha que $R_L(T)$ não é denso em $L^2(\Omega)$. Assim, existe um vetor não nulo w_T no complemento ortogonal $R_L(T)^\perp$ em $L^2(\Omega)$. Com w_T consideramos o estado adjunto:

$$\begin{cases} w_t + \Delta w - a(t)w = 0 \qquad em \qquad Q\ ; \\ w = 0 \qquad em \qquad \Sigma\ ; \\ w(x,T) = w_T \qquad em \qquad \Omega\ . \end{cases} \tag{6.61}$$

Multiplicando (6.61) por p, solução de (6.58) com $u \in L^2(Q_\omega)$ e integrando em Q, obtemos :

$$\int_Q (w_t - \Delta w - a(t)w)\, p\ dxdt = 0.$$

Mas,

$$\int_Q w_t\ p\ dxdt \ = \ \int_\Omega wp\ \Big|_0^T dx - \int_Q p_t w\ dxdt = \int_\Omega w(T)p(T)dx - \int_\Omega w(0)p(0) - \int_Q p_t w\ dxdt.$$

$$\int_Q p\Delta w\ dxdt + \int_Q \nabla p \nabla w\ dxdt = \int_\Sigma w\frac{\partial p}{\partial \eta}\ d\Sigma = 0 \Rightarrow \int_Q p\Delta w\ dxdt = -\int_Q \nabla p \nabla w\ dxdt.$$

$$\int_Q w\Delta p\ dxdt + \int_Q \nabla p \nabla w\ dxdt = \int_\Sigma w\frac{\partial p}{\partial \eta}\ d\Sigma = 0 \Rightarrow \int_Q w\Delta p\ dxdt = -\int_Q \nabla p \nabla w\ dxdt.$$

Daí,

$$-\int_Q w\Delta p \ dxdt = -\int_Q p\Delta w \ dxdt.$$

Então,

$$\int_Q (p_t - \Delta p + a(t)p)\, w \ dxdt + \int_\Omega w(T)p(T)dx - \int_\Omega w(0)p(0)dx = 0.$$

Observe que p satisfaz $(6.58)_1$, $w(T) = w_T$ e $p(0) = p_0 = 0$. Assim, obtemos:

$$-\int_{Q_\omega} u(x,t)w(x,t) \ dxdt + \int_\Omega w_T(x)p(x,T) \ dx = 0.$$

Para analisar a segunda integral acima, observe que $w_T(x)$ pertence ao ortogonal $R_L(T)^\perp$ e $p(x,\ T)$ pertence a $R_L(T)$. Portanto, a segunda integral é zero. Daí,

$$\int_{Q_\omega} u(x,t)w(x,t) \ dxdt = 0 \quad para \quad todo \quad u \in L^2(Q_\omega),$$

que implica $w(x,t) = 0$ quase sempre em Q_ω.

Pela desigaldade de Carleman, com $f = 0$, obtemos :

$$\int_Q \left(s^3\phi^3 w(x,t)^2\right) e^{2s\alpha} \ dxdt \leq 0. \tag{6.62}$$

Temos que $s^3\phi^3 \geq C > 0$, $e^{2s\alpha} > 0$ em $\Omega \times (0,\ T)$. Então de (6.62), obtemos que $w = 0$ quase sempre em Q. Daí, temos $w_T(x) = w(x,T) = 0$, que é uma contradição. Portanto, $R_L(T)$ é denso em $L^2(\Omega)$. $\square$

7 CONCLUSÃO

O presente trabalho possibilitou um estudo da controlabilidade nula e aproximada de um sistema associado a equação do calor não linear em um domínio cilíndrico cuja não linearidade é globalmente Lipschitz. Vimos que quando usamos a palavra controle estamos querendo dizer que atuaremos sobre um sistema de forma a fazer com que seu estado final esteja de acordo com o que estabelecemos previamente como sendo desejado.

No decorrer de nosso estudo, fora visto que o sistema (3.1) é nulo controlável em um tempo $T > 0$. Isto é, mostramos que para $p_0 \in L^2(\Omega)$ existe um controle $u \in L^2(Q))$, tal que a solução fraca de (3.1) satisfaz $P(x,T) = 0$ quase sempre em Ω. Observamos que se o nosso sistema é de controlabilidade nula, então controle pode ser obtido pela minimização de um funcional $N_\epsilon(p,u)$ definido no espaço $L^2(Q, e^{-2s\alpha}\phi^{-3}$. Para nos auxiliar em tal demonstração foi de grande revalia o uso da estimativa de Carleman que resultou na demostração de uma desigualdade de observabilidade. Outro fator importante que nos possibilitou alcançar o nosso objetivo fora a abordagem dos argumentos do ponto fixo de Kakutani.

Vimos também que o nosso sistema é aproximadamente controlável e a demonstração de tal fato consistiu em provar que o conjunto de estados admissíveis $R_L(T)$ é denso em $L^2(\Omega)$.

REFERÊNCIAS

[1] ADAMS, R. *Sobolev spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[2] BOTELHO, G. ; PELLEGRINO D. ; TEIXEIRA, E. *Fundamentos de Análise Funcional.* Rio de Janeiro: SBM, 2012. 423p. (Coleção Textos Universitários; 13).

[3] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, New York, 2010.

[4] CABANILLAS, V.; DE MENEZES, S.; ZUAZUA, E. *Null controllability in unbounded domains for the semilinear heat equation with nonlinearities involving gradient terms.* J. Optim. Theory Applications 110 (2001), N^o. 2, 245–264.

[5] CARLEMAN, T. *Sur un problème d'unicité pur les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes.* Ark. Mat., Astr. Fys. 26 (1939), N^o. 17, 9. MR 0000334 (1,55f).

[6] CASTRO, N. N. de O. *Soluções Fracas para um Sistema Hiperbólico Envolvendo o Operador p-Laplaciano.* João Pessoa: Universidade Federal da Paraíba. Notas de um Curso de Verão, 2005.

[7] DAUTRAY, R; LIONS, J. L. *Mathematical Analysis Numerical Methods for Science and Tecnology. vol 5.* Paris: Springer, 1984.

[8] DE MENEZES, S. B. ; LIMACO, J. MEDEIROS, L. A. *Approximate controllability for the semilinear heat equation in* $\mathbb{R}^n$ *involving gradient terms.* Computational and Applied Mathematics Vol. 22, N. 1, pp. 123–148, 2003

[9] DE MENEZES, S. B. ; LIMACO, J. MEDEIROS, L. A. *Finite approximate controllability for semilienar heat equation in noncilindrical domains.* Anais da Academia Brasileira de Ciência, 2004, 76(3): 475-487.

[10] DE MENEZES, S. B.; LIMACO, J. MEDEIROS, L. A. *Remarks on null controllability for semilinear heat equation in moving domains.* Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2003, N^o. 16, 1-32; http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/

[11] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations.* 2.ed. New York: AMS, 1949.

[12] FABRE, C. ; PUEL, J . P. ; ZUAZUA, E. *Controlabilit approche de l'quation de la chaleur linear avec controles de norm L^∞ minimale*, C. R. Acad. Sci. Paris (316) (1993), pp. 679-68.

[13] FATTORINI, H. O. ; RUSSEL, D. L. *Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension.* Arch. Rational Mech. Anal.,43:272–292, 1971

[14] FERNÁNDEZ-CARA, E ; GUERREIRO, S. *Global Carleman Inequalities for parabolic systems and applications to controllability*, SIAM Control Optm., V. 45, N^o 4 (2006) pp. 1395-1446.

[15] FERNÁNDEZ-CARA, E ; ZUAZUA, E. *Approximate controllability of semilinear heat equations involving gradient terms*, J Optim Theory and application, Vol. 101. N^o 2, pp. 307-328. 1999.

[16] FOLLAND, G. *Real Analysis: modern techniques and their applications*-2nd ed. Jonh Wiley, 1999.

[17] FURSIVOV, A. V. *Exacte controllability of the Navier-Stokes and Boussinesq equation*, Russian Math. Surveys 54(3) (1999)565-618, 1999.

[18] FURSIVOV, A. V. ; IMANUVILOV, O. Y. *Controllability of evolution equation.* Lectures Notes Series 34, Research Institute of Mathematics, Seoul National University, Seoul, 1996.

[19] GLICKSBERG, I. L. *A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with applications to Nash equilibrium points.* Proc. of the AMS, serie 3, (9) (1952), pp. 170-174.

[20] IMANUVILOV, O. Y. ; YAMAMOTO, M. *Carleman Inequalities for Parabolic Equations in Sobolev Spaces of Negative Order and Exact Controllability for Semilinear Parabolic Equations*, Publ. RIMS, Univ. Kioto, 227-274, 2003.

[21] IMANUVILOV, O. Y. ; YAMAMOTO, M. *Carleman estimate for a parabolic equation in a Sobolev space of negative order and their applications*: in Control of Nonlinear Distributed Parameter Systems,Lecture Notes in Pure and App. Math. 218, Marcel Dekker, New York, 2001, pp. 113-137.

[22] IMANUVILOV, O. Y.; CHAE, D.; KIM, S. M. *Exact controllability for semilinear parabolic equations with Neumann boundary conditions*. Journal of Dynamical and Control Systems. Vol. 2, N°. 4, 1996, pp. 449-483

[23] KALMAN, R. E. *Optimization, Mathematical Theory of Control*, en Encyclopaedia Britannica, Fifteenth ed., (1974), 636-638.

[24] KAKUTANI, S. *A generalization of Brower fixed point theorem*, Duke Math. Journal, vol. 8 (1941), pp. 457-459.

[25] KESAVAN, S. *Topic in Functional Analysis and Application* . [S.l. : s.n.], 1988.

[26] LEBEAU, G. ; ROBBIANO, R. *Contrôle exact de l'équation de la chaleur*. Comm. Partial Differential Equations, 20(1-2):335–356, 1995.

[27] LIMA, Elon Lages. *Análise real* : funções de n variáveis. v.2. 6 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

[28] LÍMACO, J. ; MEDEIROS, L. A. ; ZUAZUA, E. *Existence , uniqueness and controllability for parabolic equations in non-cylindrical domains*, Mat. Contemp,vol.2, 2002, pp. 49-70.

[29] LÍMACO, J. ; CLARK, H. R. ; DE MENEZES, S. B. ; MEDEIROS, L. A. *Carleman Inequality and Null Controllability for Parabolic Equations*, Matemática contemporânea, vol.40, 2011, pp. 173-211.

[30] LIONS, J. L. *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites Non-Linéaires, Dunod, Paris,1969.*

[31] LIONS, J. L. *Contrôlabilité exacte pertubation et stabilisatin de systèmes distribués.* Tome 1. contrôlabilité exacte, RMA 8, Masson, Paris, 1998.

[32] LIONS, J. L. *Exact Controllability, Stabilization and Perturbations for Distributed Systems* : SIAM Review, 30 (1988), 1-68.

[33] LIONS, J. L. *Remarques sur la controllabilit approch*, Jornadas Hispano Francesas sobre Control de Systemes Distribuidos, Univ. Malaga - Spain (1991), pp. 77-81.

[34] MARKUS, L. *Controllability of Nonlinear Processes*. SIAM J. Control, 3 (1965) ; 78-90.

[35] MEDEIROS, L. A ; MIRANDA, M. *Espaços de Sobolev*: Iniciação aos Problemas Elíticos Não Homogêneos. IM - UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.

[36] MEDEIROS, L. A. ; MIRANDA, M. *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais.* Textos de Métodos Matemáticos, vol. 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1989

[37] MEDEIROS, L. A. ; MELLO, E.A. *A Integral de Lebesgue*. Textos de Métodos Matemáticos. 6ed. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2008.

[38] RUSSEL, D. L. *A Unifed Boundary Controllability Theory for Hyperbolic and Parabolic Partial Differential Equations.* Studies in Appl. Math., 52 (1973) ; 189-221

[39] RUSSEL, D. L. *Controllability and Stabilizability Theory for Linear Partial Differential Equations*. Recent Progress and Open Questions, SIAM Rev. 20 (1978) ; 639-739

[40] ZUAZUA, E . *Approximate controllability for semilinear heat equations with globally Lipschitz nonlinearities*, Control and Cybernetic, 28, 3 (1999), pp. 665-683.

[41] ZUAZUA, E . *Controllability of Partial Differential Equations*. 3rd cycle. Castro Urdiales (Espagne), 2006, pp.311.

[42] ZUAZUA, E . *Exact boundary controllability for the semilinear wave equation.* in Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications, Vol. 10, Pitman Res. Notes Math. Ser. 220, Longman, Harlow, UK, 1991, pp. 357–391