

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - CCET  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ELETRICIDADE - PPGEE

**LUÍS MIGUEL MAGALHÃES TORRES**

**METODOLOGIA NEBULOSA PARA IDENTIFICAÇÃO RECURSIVA NO ESPAÇO  
DE ESTADOS BASEADO EM AGRUPAMENTO EVOLUTIVO DE DADOS**

São Luís - MA

2018

**LUÍS MIGUEL MAGALHÃES TORRES**

**METODOLOGIA NEBULOSA PARA IDENTIFICAÇÃO RECURSIVA NO ESPAÇO  
DE ESTADOS BASEADO EM AGRUPAMENTO EVOLUTIVO DE DADOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da Universidade Federal do Maranhão como requisito para obtenção do título de mestre em engenharia de eletricidade na área de concentração de Automação e Controle.

Orientador: Prof. Dr. Ginalber Luiz de Oliveira Serra

São Luís - MA

2018

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Torres, Luís Miguel Magalhães.

METODOLOGIA NEBULOSA PARA IDENTIFICAÇÃO RECURSIVA NO  
ESPAÇO DE ESTADOS BASEADO EM AGRUPAMENTO EVOLUTIVO DE  
DADOS / Luís Miguel Magalhães Torres. - 2018.

111 f.

Orientador(a): Ginalber Luiz de Oliveira Serra.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em  
Engenharia de Eletricidade/ccet, Universidade Federal do  
Maranhão, São Luís, 2018.

1. Espaço de Estados. 2. Identificação de Sistemas.  
3. Sistema Dinâmico Multivariável. 4. Sistema Nebuloso  
Evolutivo. I. Serra, Ginalber Luiz de Oliveira. II.  
Título.

**LUÍS MIGUEL MAGALHÃES TORRES**

**METODOLOGIA NEBULOSA PARA IDENTIFICAÇÃO RECURSIVA NO ESPAÇO  
DE ESTADOS BASEADO EM AGRUPAMENTO EVOLUTIVO DE DADOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da Universidade Federal do Maranhão como requisito para obtenção do título de mestre em engenharia de eletricidade na área de concentração de Automação e Controle.

Trabalho aprovado em São Luís - MA, 05 de Março de 2018.

---

**Prof. Dr. Ginalber Luiz de Oliveira Serra**  
Orientador

---

**Prof. Dr. Francisco das Chagas Souza**  
(UFMA)  
Primeiro Membro da Banca

---

**Prof. Dr. Orlando Donato Rocha Filho**  
(IFMA)  
Segundo Membro da Banca

*Aos meus pais, minha amada namorada Ana Karine,  
e a toda minha família que, com muito carinho e apoio,  
não mediram esforços para que eu alcançasse mais esse objetivo.*

## **AGRADECIMENTOS**

Ao professor Dr. Ginalber Luiz de Oliveira Serra pela sua impecável orientação, ensino, apoio e todo o suporte dado no desenvolvimento desse trabalho.

A Universidade Federal do Maranhão e ao CNPq pelo apoio estrutural e financeiro para o desenvolvimento da pesquisa.

A todos os membros do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da UFMA, incluindo professores e técnicos administrativos.

Ao Instituto Federal do Maranhão Campus Monte Castelo, pela estrutura de laboratório fornecida para o desenvolvimento da pesquisa.

Aos amigos Yuri Gabriel, Juscelino Medina, Marcos André, Jorge Lucas, Jéssica, Priscila, Arnaldo, Railson, Luiz Fernando e Felipe Gomes pelo apoio e amizade nessa jornada.

Ao ex-professor, e hoje bom amigo, Eliude Trovão pelas boas horas de conversa e conselhos sempre relevantes.

Agradeço a todos que, diretamente ou indiretamente, fizeram parte dessa jornada. O meu sincero, muito obrigado.

*"Se mais de nós dessem mais valor a comida,  
bebida e música do que a tesouros,  
o mundo seria mais alegre."  
(Thorin II Escudo de Carvalho)*

## RESUMO

Nessa dissertação, uma metodologia nebulosa evolutiva para a identificação de sistemas não-lineares é proposta. O modelo evolutivo obtido é capaz de alterar sua estrutura de maneira autônoma de acordo com o fluxo de dados. Além disso, a realização mínima dos submodelos do consequente das regras garante a simplicidade do modelo obtido. Com o intuito de comparar a metodologia proposta com outras técnicas existentes na literatura, foi realizada a identificação de dois *benchmarks* utilizado em outros trabalhos amplamente citados na literatura. Os resultados obtidos foram competitivos e vantajosos em relação as metodologias utilizadas na comparação. A técnica proposta foi aplicada na identificação na modelagem de um Helicóptero 2DoF. Esse sistema representa um desafio para metodologias de identificação devido ao seu alto nível de complexidade. Os resultados obtidos demonstraram a capacidade da metodologia proposta de representar sistemas reais de alta complexidade. Para demonstrar a aplicabilidade da metodologia nebulosa evolutiva para identificação recursiva no espaço de estados, foi proposta a estimação da trajetória de um foguete utilizado para treinamento aeroespaciais. Os resultados obtidos foram animadores e demonstraram a aplicabilidade da metodologia proposta em aplicações que necessitam de alto desempenho. Devido a natureza evolutiva da metodologia proposta, foi possível uma boa estimação da trajetória do foguete durante todo seu tempo de voo; tal conquista se deve a capacidade do modelo evolutivo se adaptar ao conjunto de dados de maneira *online*, assim garantindo bons resultados durante todas as etapas do voo.

**Palavras-chave:** Identificação de Sistemas, Sistema Dinâmico Multivariável, Sistema Nebuloso Evolutivo, Espaço de Estados



## ABSTRACT

In this dissertation, an evolving fuzzy methodology for the identification of nonlinear systems is proposed. The obtained evolving model is capable of automatically adjust its structure according to the data flow. In addition, the minimum realization of consequent part of the fuzzy rule ensures the simplicity of the obtained model. In order to compare the proposed methodology with other existing techniques in the literature, the identification of two benchmarks used in other works widely cited in the literature was carried out. The results obtained were competitive and advantageous in relation to the methodologies used in the comparison. The proposed technique was successfully applied in the modeling of a 2DoF Helicopter. This system represents a complex challenge for identification methodologies because of its high level of complexity. The results obtained demonstrated the ability of the proposed methodology to represent real systems of high complexity. To demonstrate the applicability of the evolving fuzzy methodology for recursive state space identification, it was proposed the estimation of the trajectory of a rocket used for training. The results obtained were encouraging and demonstrated the applicability of the proposed methodology in applications with a high level of complexity. Due to the evolving nature of the proposed methodology, a good estimation of the rocket's trajectory during its flight time was possible. This achievement is due to the ability of the evolving model to adapt to the data set in an online way, thus guaranteeing good results during all stages of flight.

**Key-words:** System Identification, Multivariable Dynamic Systems, Evolving Fuzzy System, State Space

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

|   |    |
|---|----|
| Figura 1 – Diferentes tipos de modelagem matemática. . . . .  | 17 |
| Figura 2 – Exemplo de agrupamento de um conjunto de dados bidimensional. . . . .  | 32 |
| Figura 3 – Ilustração do conceito de densidade de uma amostra. . . . .  | 38 |
| Figura 4 – Entrada $u_k^1$ do evaporador industrial utilizado no caso 1. . . . .  | 54 |
| Figura 5 – Entrada $u_k^2$ do evaporador industrial utilizado no caso 1. . . . .  | 54 |
| Figura 6 – Entrada $u_k^3$ do evaporador industrial utilizado no caso 1. . . . .  | 55 |
| Figura 7 – Saída $y_k^1$ do evaporador industrial utilizado no caso 1. . . . .  | 55 |
| Figura 8 – Saída $y_k^2$ do evaporador industrial utilizado no caso 1. . . . .  | 56 |
| Figura 9 – Saída $y_k^3$ do evaporador industrial utilizado no caso 1. . . . .  | 56 |
| Figura 10 – Espaço dos valores singulares da matriz de Hankel para todas as regras durante o processo de identificação do evaporador industrial. . . . .                    | 57 |
| Figura 11 – Variação do número de regras durante a identificação evolutiva do evaporador industrial. . . . .  | 57 |
| Figura 12 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^1$ para a regra 1 processo de identificação do evaporador industrial. . . . .     | 58 |
| Figura 13 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^2$ para a regra 2 processo de identificação do evaporador industrial. . . . .     | 58 |
| Figura 14 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^3$ para a regra 3 processo de identificação do evaporador industrial. . . . .     | 59 |
| Figura 15 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^4$ para a regra 4 processo de identificação do evaporador industrial. . . . .     | 59 |
| Figura 16 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^5$ para a regra 5 processo de identificação do evaporador industrial. . . . .     | 60 |
| Figura 17 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^6$ para a regra 6 processo de identificação do evaporador industrial. . . . .     | 60 |
| Figura 18 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^7$ para a regra 7 processo de identificação do evaporador industrial. . . . .     | 61 |
| Figura 19 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^8$ para a regra 8 processo de identificação do evaporador industrial. . . . .     | 61 |
| Figura 20 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^9$ para a regra 9 processo de identificação do evaporador industrial. . . . .     | 62 |
| Figura 21 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^{10}$ para a regra 10 processo de identificação do evaporador industrial. . . . . | 62 |
| Figura 22 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^{11}$ para a regra 11 processo de identificação do evaporador industrial. . . . . | 63 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 23 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^{12}$ para a regra 12 processo de identificação do evaporador industrial. . . . . | 63 |
| Figura 24 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^{13}$ para a regra 13 processo de identificação do evaporador industrial. . . . . | 64 |
| Figura 25 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^{14}$ para a regra 14 processo de identificação do evaporador industrial. . . . . | 64 |
| Figura 26 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^{15}$ para a regra 15 processo de identificação do evaporador industrial. . . . . | 65 |
| Figura 27 – Saída $y^1$ real e estimada para o evaporador industrial. . . . .   | 65 |
| Figura 28 – Saída $y^2$ real e estimada para o evaporador industrial. . . . .   | 66 |
| Figura 29 – Saída $y^3$ real e estimada para o evaporador industrial. . . . .   | 67 |
| Figura 30 – Entrada $u_k^1$ da fornalha para vidro utilizada no caso 2. . . . .   | 68 |
| Figura 31 – Entrada $u_k^2$ da fornalha para vidro utilizada no caso 2. . . . .   | 69 |
| Figura 32 – Entrada $u_k^3$ da fornalha para vidro utilizada no caso 2. . . . .   | 70 |
| Figura 33 – Saída $y_k^1$ da fornalha para vidro utilizada no caso 2. . . . .   | 71 |
| Figura 34 – Saída $y_k^2$ da fornalha para vidro utilizada no caso 2. . . . .   | 71 |
| Figura 35 – Saída $y_k^3$ da fornalha para vidro utilizada no caso 2. . . . .   | 72 |
| Figura 36 – Saída $y_k^4$ da fornalha para vidro utilizada no caso 2. . . . .   | 72 |
| Figura 37 – Saída $y_k^5$ da fornalha para vidro utilizada no caso 2. . . . .   | 73 |
| Figura 38 – Saída $y_k^6$ da fornalha para vidro utilizada no caso 2. . . . .   | 73 |
| Figura 39 – Espaço dos valores singulares da matriz de Hankel para todas as regras durante o processo de identificação da fornalha para vidro. . . . .                      | 74 |
| Figura 40 – Variação do número de regras durante a identificação evolutiva da fornalha para vidro. . . . .  | 74 |
| Figura 41 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^1$ para a regra 1 processo de identificação da fornalha para vidro. . . . .       | 75 |
| Figura 42 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^2$ para a regra 2 processo de identificação da fornalha para vidro. . . . .       | 75 |
| Figura 43 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^3$ para a regra 3 processo de identificação da fornalha para vidro. . . . .       | 76 |
| Figura 44 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^4$ para a regra 4 processo de identificação da fornalha para vidro. . . . .       | 76 |
| Figura 45 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^5$ para a regra 5 processo de identificação do evaporador industrial. . . . .     | 77 |
| Figura 46 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^6$ para a regra 6 processo de identificação da fornalha para vidro. . . . .       | 77 |
| Figura 47 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^7$ para a regra 7 processo de identificação da fornalha para vidro. . . . .       | 78 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 48 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^8$ para a regra 8 processo de identificação da fornalha para vidro. . . . .     | 78 |
| Figura 49 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^9$ para a regra 9 processo de identificação da fornalha para vidro. . . . .     | 79 |
| Figura 50 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}^{10}$ para a regra 10 processo de identificação da fornalha para vidro. . . . . | 79 |
| Figura 51 – Saída $y^1$ real e estimada para a fornalha para vidro. . . . .   | 80 |
| Figura 52 – Saída $y^2$ real e estimada para a fornalha para vidro. . . . .   | 80 |
| Figura 53 – Saída $y^3$ real e estimada para a fornalha para vidro. . . . .   | 81 |
| Figura 54 – Saída $y^4$ real e estimada para a fornalha para vidro. . . . .   | 81 |
| Figura 55 – Saída $y^5$ real e estimada para a fornalha para vidro. . . . .   | 82 |
| Figura 56 – Saída $y^6$ real e estimada para a fornalha para vidro. . . . .   | 82 |
| Figura 57 – Imagem do Hélicóptero 2DOF e seu diagrama de corpo livre. . . . .   | 83 |
| Figura 58 – Dados de entrada utilizados para identificação do Helicóptero 2DOF. . . . .   | 84 |
| Figura 59 – Dados de saída utilizados para identificação do Helicóptero 2DOF . . . . .  | 84 |
| Figura 60 – Espaço dos valores singulares da matriz de Hankel para todas as regras durante o processo de identificação do Helicóptero 2DOF. . . . .                       | 85 |
| Figura 61 – Variação do número de regras durante a identificação do helicóptero 2DOF. . . . .   | 85 |
| Figura 62 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^1$ para a regra 1 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF. . . . .        | 86 |
| Figura 63 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^2$ para a regra 2 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF. . . . .        | 87 |
| Figura 64 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^3$ para a regra 3 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF. . . . .        | 87 |
| Figura 65 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^4$ para a regra 4 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF. . . . .        | 88 |
| Figura 66 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^5$ para a regra 5 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF. . . . .        | 88 |
| Figura 67 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^6$ para a regra 6 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF. . . . .        | 89 |
| Figura 68 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^7$ para a regra 7 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF. . . . .        | 89 |
| Figura 69 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^8$ para a regra 8 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF. . . . .        | 90 |
| Figura 70 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^9$ para a regra 9 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF. . . . .        | 90 |
| Figura 71 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^{10}$ para a regra 10 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF. . . . .    | 91 |

|  |     |
|--|-----|
| Figura 72 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^{11}$ para a regra 3 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF. . . . .  | 91  |
| Figura 73 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^{12}$ para a regra 12 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF. . . . . | 92  |
| Figura 74 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^{13}$ para a regra 13 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF. . . . . | 92  |
| Figura 75 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^{14}$ para a regra 14 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF. . . . . | 93  |
| Figura 76 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^{15}$ para a regra 15 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF. . . . . | 93  |
| Figura 77 – Estimação obtida como o modelo proposto para o Ângulo de Elevação. . . . .   | 94  |
| Figura 78 – Estimação obtida como o modelo proposto o Ângulo de Azimute. . . . .   | 94  |
| Figura 79 – Foguete de treinamento intermediário utilizado para a estimação da trajetória.   | 95  |
| Figura 80 – Variação do número de regras durante a estimação da trajetória do foguete FTI.   | 96  |
| Figura 81 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^1$ para a regra 1 durante o processo de identificação do foguete. . . . .              | 97  |
| Figura 82 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^2$ para a regra 2 durante o processo de identificação do foguete. . . . .              | 97  |
| Figura 83 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^3$ para a regra 3 durante o processo de identificação do foguete. . . . .              | 98  |
| Figura 84 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^4$ para a regra 4 durante o processo de identificação do foguete. . . . .              | 98  |
| Figura 85 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^5$ para a regra 5 durante o processo de identificação do foguete. . . . .              | 99  |
| Figura 86 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^6$ para a regra 6 durante o processo de identificação do foguete. . . . .              | 99  |
| Figura 87 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^7$ para a regra 7 durante o processo de identificação do foguete. . . . .              | 100 |
| Figura 88 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^8$ para a regra 8 durante o processo de identificação do foguete. . . . .              | 100 |
| Figura 89 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^9$ para a regra 9 durante o processo de identificação do foguete. . . . .              | 101 |
| Figura 90 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^{10}$ para a regra 10 durante o processo de identificação do foguete. . . . .          | 101 |
| Figura 91 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal $\mathbf{A}^{11}$ para a regra 11 durante o processo de identificação do foguete. . . . .          | 102 |
| Figura 92 – Ângulo de elevação real e estimado para o foguete. . . . .   | 102 |
| Figura 93 – Ângulo de azimute real e estimado para o foguete. . . . .  | 103 |
| Figura 94 – Distância real e estimada para o foguete. . . . .  | 103 |

## LISTA DE TABELAS

|   |    |
|---|----|
| Tabela 1 – Comparação dos resultados obtidos com a metodologia proposta com os resultados obtidos em (JAFARI; SALIMIFARD; DEHGHANI, 2014) para o Evaporador Industrial. . . . . | 66 |
| Tabela 2 – Comparação dos resultados obtidos com a metodologia proposta com os resultados obtidos em (JAFARI; SALIMIFARD; DEHGHANI, 2014) para a Fornalha para Vidro. . . . .   | 70 |

## SUMÁRIO

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>1</b>   | <b>CONSIDERAÇÕES INICIAIS</b> . . . . .   | <b>16</b> |
| <b>1.1</b> | <b>Introdução</b> . . . . .   | <b>16</b> |
| <b>1.2</b> | <b>Revisão Bibliográfica</b> . . . . .  | <b>17</b> |
| <b>1.3</b> | <b>Objetivos da Pesquisa</b> . . . . .  | <b>19</b> |
| 1.3.1      | Objetivo Geral . . . . .  | 19        |
| 1.3.2      | Objetivos Específicos . . . . .   | 19        |
| <b>1.4</b> | <b>Metodologia Proposta e Principais Contribuições</b> . . . . .                                | <b>20</b> |
| <b>1.5</b> | <b>Produção Bibliográfica</b> . . . . .   | <b>20</b> |
| 1.5.1      | Congressos . . . . .  | 20        |
| 1.5.2      | Capítulos de Livro . . . . .  | 21        |
| 1.5.3      | Periódicos . . . . .  | 21        |
| <b>1.6</b> | <b>Organização da Dissertação</b> . . . . .   | <b>21</b> |
| <b>2</b>   | <b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> . . . . .  | <b>22</b> |
| <b>2.1</b> | <b>Teoria de Realização de Sistemas</b> . . . . .   | <b>22</b> |
| 2.1.1      | Controlabilidade e Observabilidade . . . . .  | 22        |
| 2.1.1.1    | <i>Controlabilidade no Domínio do Tempo Discreto</i> . . . . .                                  | 23        |
| 2.1.1.2    | <i>Observabilidade no Domínio do Tempo Discreto</i> . . . . .                                   | 24        |
| 2.1.1.3    | <i>Conceitos Básicos de Realização</i> . . . . .  | 24        |
| 2.1.2      | Algoritmo de Realização de Auto-Sistema (ERA) . . . . .   | 27        |
| <b>2.2</b> | <b>Modelagem Nebulosa</b> . . . . .   | <b>30</b> |
| 2.2.1      | Modelos Nebulosos Takagi-Sugeno . . . . .   | 30        |
| 2.2.2      | Agrupamento Nebuloso . . . . .  | 31        |
| 2.2.2.1    | <i>Tipos de Partição</i> . . . . .  | 32        |
| 2.2.2.2    | <i>Algoritmos de Agrupamento Nebuloso em Batelada</i> . . . . .                                 | 33        |
| 2.2.2.3    | <i>Algoritmos de Agrupamento Nebuloso Evolutivo</i> . . . . .                                   | 36        |
| 2.2.3      | Modelo Takagi-Sugeno Evolutivo . . . . .  | 37        |
| <b>3</b>   | <b>METODOLOGIA NEBULOSA EVOLUTIVA PARA IDENTIFICAÇÃO<br/>NO ESPAÇO DE ESTADOS</b> . . . . .     | <b>40</b> |
| <b>3.1</b> | <b>Estimação dos Parâmetros do Antecedente: Abordagem Evolutiva</b> . . .                       | <b>40</b> |
| <b>3.2</b> | <b>Estimação dos Parâmetros do Consequente: Abordagem Recursiva</b> . . .                       | <b>43</b> |
| 3.2.1      | Algoritmo de Realização de Auto-Sistema Nebuloso (F-ERA) . . . . .                              | 43        |
| 3.2.2      | Estimação Recursiva dos Parâmetros de Markov Nebulosos . . . . .                                | 48        |
| <b>3.3</b> | <b>Modelagem Nebulosa Takagi-Sugeno Evolutiva no Espaço de Estados:<br/>Algoritmo</b> . . . . . | <b>52</b> |

|            |  |            |
|------------|--|------------|
| <b>4</b>   | <b>RESULTADOS EXPERIMENTAIS . . . . .</b>  | <b>53</b>  |
| <b>4.1</b> | <b>Caso 1: Identificação de um Evaporador Industrial . . . . .</b>                                     | <b>53</b>  |
| <b>4.2</b> | <b>Caso 2: Identificação de uma Fornalha para Vidro . . . . .</b>                                      | <b>68</b>  |
| <b>4.3</b> | <b>Caso 3: Identificação do helicóptero 2DOF . . . . .</b>   | <b>83</b>  |
| <b>4.4</b> | <b>Caso 4: Estimação <i>Online</i> da Trajetória de Foguete de Treinamento Intermediário . . . . .</b> | <b>95</b>  |
| <b>5</b>   | <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>  | <b>104</b> |
| <b>5.1</b> | <b>Conclusões . . . . .</b>  | <b>104</b> |
| <b>5.2</b> | <b>Trabalhos Futuros . . . . .</b>   | <b>105</b> |
|            | <b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>   | <b>106</b> |



# 1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

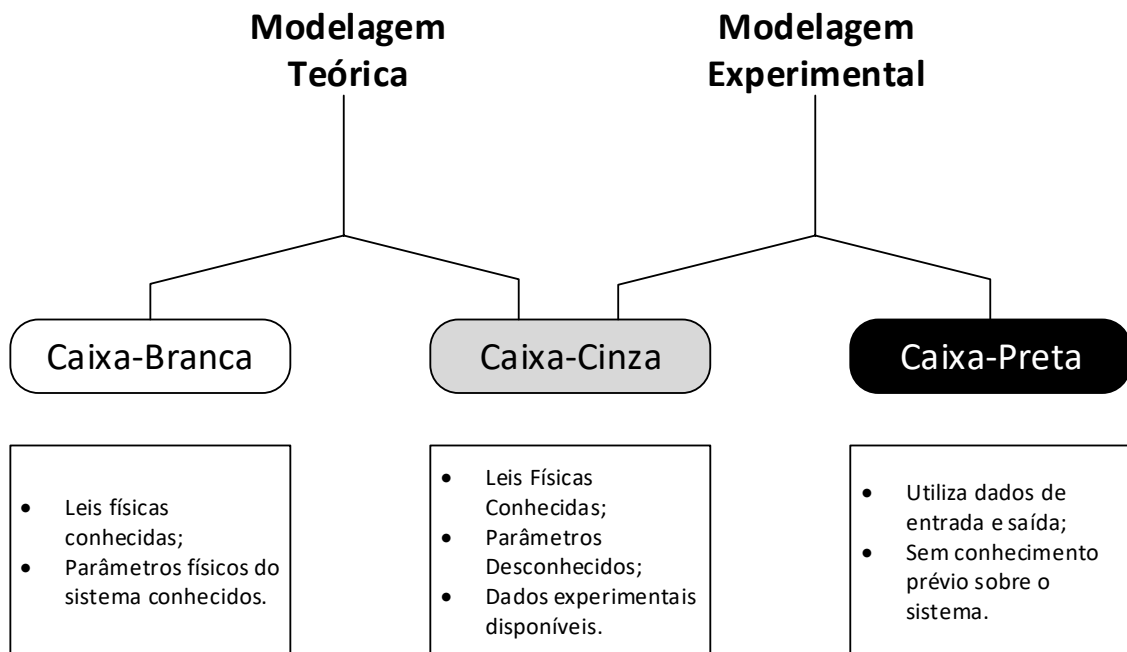
## 1.1 Introdução

Nos mais diversos campos das ciências naturais e das engenharias faz-se necessário o desenvolvimento de modelos matemáticos de sistemas dinâmicos para a realização de predições e análise de desempenho (COELHO; COELHO, 2004) (AGUIRRE, 2015). Sendo assim, a implementação de novas metodologias para a obtenção de modelos matemáticos capazes de representar de maneira satisfatória os mais diversos sistemas dinâmicos existentes, vem se tornando uma tarefa de extrema importância para o desenvolvimento científico e tecnológico.

O modelo do sistema pode ser obtido através das equações que regem o comportamento do fenômeno em estudo, como por exemplo: leis de Newton, leis de Kirchoff, lei da conservação de massas, entre tantas outras. Este tipo de modelagem é denominado de modelagem caixa-branca ou modelagem pela física (TANGIRALA, 2014). Às vezes não é possível obter o modelo a partir das leis físicas por conta de parâmetros desconhecidos do processo, ou da complexidade elevada de alguns processos (AGUIRRE, 2015). Nestes casos é necessária a utilização de metodologias que utilizam dados experimentais do processo para a obtenção do modelo. Tais metodologias compõem o campo de estudo denominado de Identificação de Sistemas, também conhecido como modelagem caixa-preta (HSIA, 1977) (LJUNG, 1998). Qualquer técnica que não esteja em nenhum desses extremos pode ser denominada de identificação caixa-cinza. Esta área de conhecimento busca combinar as vantagens dos procedimentos de identificação caixa-preta e caixa-branca. Nesse caso, tanto dados de entrada e saída obtidos no sistema, quanto informação auxiliar são usados na modelagem (ISERMANN; MARCO, 2011). Na Fig. 1 é ilustrado a diferenciação entre os principais tipos de modelagem matemática.

Devido ao grande avanço tecnológico das últimas décadas, os sistemas dinâmicos presentes nos mais diversos tipos de indústrias tem se tornado cada vez mais complexos. Assim, torna-se um desafio para os pesquisadores da área o desenvolvimento de técnicas de identificação de sistemas dinâmicos que permitam a obtenção de modelos que sejam capazes de representar as mais diversas características presentes no processo, entre elas podemos destacar: não linearidade, variação temporal dos parâmetros do processo, incertezas, entre tantas outras (BILLINGS, 1980) (LJUNG; GUNNARSSON, 1990) (SJÖBERG et al., 1995).

Figura 1 – Diferentes tipos de modelagem matemática.



Fonte: Autor

## 1.2 Revisão Bibliográfica

Identificação de sistemas possui raízes em teorias da matemática desenvolvidas nos séculos XVII e XIX, como por exemplo: Teorema de Bayes (BAYES, 1763), o método dos Mínimos Quadrados (MQ) (GAUSS, 1809), Transformada de Fourier (FOURIER, 1822), entre tantos outros. Das técnicas citadas, pode-se dar destaque ao método de MQ de Gauss, desenvolvido em sua proposta da estimação de órbitas planetárias a partir de dados astronômicos, como a primeira grande aplicação de identificação de sistemas. O método de MQ é também o precursor de várias metodologias modernas para a estimação de parâmetros, como por exemplo o filtro de Kalman (KALMAN et al., 1960) (SORENSEN, 1970).

Por mais que a área de identificação de sistemas tenha tido bastante evolução durante a primeira metade do século XX (TANGIRALA, 2014), uma definição formal para o problema só foi dada por Zadeh (1962). O mesmo a define como "a determinação com base na entrada e na saída, de um modelo dentro de uma classe especificada de modelo, para o qual o sistema dinâmico testado é equivalente." Nesta época duas classes de metodologias distintas surgiram. Uma voltada para a análise de séries temporais, como o trabalho de Åström e Torsten (1965) que propôs a estimação de parâmetros de modelos ARMAX no contexto da Máxima Verossimilhança; e o proposto em (ANH et al., 1970) que propõe um modelo fracionário para a predição da concentração de ozônio em uma determinada região da cidade de Sidney na Austrália. A outra classe destinada a obtenção de representações no espaço de estados, advém do trabalho de

Kalman e Ho (1965) que estabeleceu uma metodologia para a determinação de modelos no espaço de estados a partir dos coeficientes da resposta ao impulso do sistema, que serviu como base para o método dos Subespaços (VERHAEGEN; DEWILDE, 1992) (OVERSCHEE; MOOR, 1994a) (JAMALUDIN et al., 2013) e o Algoritmo de Realização de Auto-Sistema (JUANG; PAPPAS, 1985) (JUANG; COOPER; WRIGHT, 1987).

A partir dos trabalhos desenvolvidos nos anos 60, a área de identificação de sistemas se desenvolveu e se consolidou como um ramo de pesquisa de extrema importância para o desenvolvimento tecnológico (ÅSTRÖM; EYKHOFF, 1971) (BILLINGS, 1980). Entre os desafios mais abordados pelos pesquisadores estão a identificação de sistemas com características dinâmicas que variam temporalmente (LJUNG; GUNNARSSON, 1990) (YOUNG, 2012) e a identificação de sistemas com características não lineares (SJÖBERG et al., 1995) (NINNESS, 2009).

Para lidar com não linearidades em diversos sistemas dinâmicos presentes no mundo real, uma ampla variedade de estruturas de modelos tem sido alvo de estudos pela comunidade científica. Modelos de Hammerstein e Wiener são modelos a blocos interconectados cuja estrutura consiste em duas partes: um modelo dinâmico linear e uma linearidade estática (NARENDRA; GALLMAN, 1966) (CASTRO-GARCIA et al., 2010) (MZYK; WACHEL, 2017) (LUO; SONG, 2018). Outra abordagem clássica para a identificação de sistemas não lineares é a série de Volterra (BENEDETTO; BIGLIERI; DAFFARA, 1979) (PRAWIN; RAO, 2017) (MAACHOU et al., 2014). Este tipo de modelo é uma extensão da integral de convolução de sistemas lineares por multidimensionais integrais de convolução. Com o advento das técnicas de inteligência computacional, abordagens como redes neurais artificiais (CHEN; BILLINGS; GRANT, 1990) (ZHAO et al., 2014) (RAJ; SIVANANDAN, 2017) e modelos nebulosos Takagi-Sugeno (CHEUNG; DING; SHEN, 2014) (PRECUP et al., 2014) (CERVANTES et al., 2016) ganharam destaques nas aplicações para a solução de problemas de identificação de sistemas dinâmicos não lineares.

Desde a proposta inicial do modelo nebuloso Takagi-Sugeno até os dias atuais, este tipo de modelo tem sido bastante utilizado na modelagem de sistemas altamente complexos (TAKAGI; SUGENO, 1985; CHANG; WU; LIN, 2016; TSAI; CHEN, 2017; TAN; DIAN; ZHAO, 2018). Em (SALGADO et al., 2017), é proposto um algoritmo de agrupamento nebuloso híbrido para a obtenção de modelos nebuloso Takagi-Sugeno. O principal objetivo desta abordagem é trabalhar com séries temporais com características variantes no tempo. Em (ROTONDO et al., 2015), é apresentado um estudo das analogias e conexões entre modelos lineares variantes no tempo (LPV) e modelos nebulosos Takagi-Sugeno; e são propostas duas metodologias para a geração automática de tais modelos. Em (FILHO; SERRA, 2017), é apresentada uma metodologia recursiva para identificação *neuro-fuzzy* evolutiva aplicada a sistemas não lineares com dinâmica não estacionária na presença de ruído; e a metodologia proposta é aplicada na identificação de um helicóptero 2DOF com erros nas variáveis.

A idéia de se desenvolver sistemas autônomos, capazes de alterar sua estrutura de

maneira independente, teve origem com alguns trabalhos aplicados ao projeto de redes neurais artificiais (FRITZKE, 1994) (WILLIAMSON, 1996) (KWOK; YEUNG, 1997) (KOHONEN, 1998). A extensão desses conceitos para sistemas nebulosos evolutivos se deu no início do século XXI (ANGELOV; BUSWELL, 2001) (KASABOV; SONG, 2002) (LUGHOFER; KLEMENT, 2003). Sistemas nebulosos evolutivos foram desenvolvidos para suprir uma demanda de modelos flexíveis, adaptativos e interpretáveis, com aplicações em áreas como: controle de sistemas não lineares (ANGELOV, 2004), classificação e reconhecimento de padrões (ANGELOV; ZHOU, 2008a), e modelagem (LEMOIS; CAMINHAS; GOMIDE, 2011).

Entre as diversas aplicações dos modelos nebulosos evolutivos, podem ser destacados os trabalhos que desenvolvem metodologias evolutivas para a modelagem de sistemas dinâmicos complexos (LIN; CHANG; LIN, 2013) (BIREK; PETROVIC; BOYLAN, 2014) (SA'AD et al., 2018). Em (LUGHOFER; PRATAMA; SKRJANC, 2017), é proposta uma metodologia incremental de separação de regras para a compensação automática de desvios na identificação de sistemas nebulosos evolutivos, com aplicação na identificação de uma bancada de teste de motor e de laminadores. Em (RUBIO; BOUCHACHIA, 2017), é apresentada uma combinação do algoritmo evolutivo sequencial e o algoritmo do gradiente descendente para a modelagem de dados no contexto de *Big Data*. Em (JÚNIOR; SERRA, 2017), é proposta uma nova metodologia para a modelagem baseada em modelos *neuro-fuzzy* Takagi-Sugeno para a previsão de séries temporais com características sazonais.

### 1.3 Objetivos da Pesquisa

#### 1.3.1 Objetivo Geral

O conteúdo apresentado nesta dissertação está relacionado à proposta de um novo algoritmo para a identificação evolutiva de sistemas dinâmicos não lineares multivariáveis baseada em modelos nebulosos Takagi-Sugeno no Espaço de Estados.

#### 1.3.2 Objetivos Específicos

Os seguintes objetivos específicos são considerados nessa dissertação:

- Analisar o comportamento dinâmico de sistemas multivariáveis via dados experimentais;
- Estudar metodologias de agrupamento nebuloso evolutivo aplicadas a problemas de identificação de sistemas;
- Desenvolver um novo algoritmo evolutivo para a obtenção de modelos nebulosos Takagi-Sugeno no espaço de estados via dados experimentais;

- Validar a metodologia proposta com aplicações a sistemas dinâmicos de áreas em potencial (Helicóptero com dois graus de liberdade, etc) e comparações com outras estratégias de identificação do estado da arte citadas na literatura.

#### 1.4 Metodologia Proposta e Principais Contribuições

O modelo nebuloso evolutivo Takagi-Sugeno é capaz de alterar sua estrutura conforme o fluxo de dados, aumentando ou diminuindo o número de regras para se ajustar ao comportamento dos dados, além de terem os parâmetros do consequente adaptados de maneira recursiva utilizando a identificação dos parâmetros de Markov do sistema e o Algoritmo de Realização de Auto-Sistema Nebuloso.

Os consequentes das regras são modelos no espaço de estados. Isso garante a flexibilidade da aplicação do modelo obtido para sistemas com uma entrada e uma saída (SISO, no inglês *Single-Input and Single-Output*) e com múltiplas entrada e múltiplas saídas (MIMO, no inglês *Multiple-Input and Multiple-Output*). Além disso, o Algoritmo de Realização de Auto-Sistema Nebuloso garante que o modelo obtido seja de realização mínima, ou seja, com a menor ordem possível. Isso garante a simplicidade e a interpretabilidade do modelo nebuloso obtido.

Sendo assim, as principais contribuições desta dissertação são listados a seguir:

- A obtenção de modelos nebulosos multivariáveis de realização mínima (TORRES; SERRA, 2016);
- Um modelo nebuloso capaz de adaptar sua estrutura de maneira *online* conforme o fluxo de dados (TORRES; SERRA, 2017);
- Uma nova metodologia para a identificação nebulosa evolutiva no espaço de estados baseado no cálculo dos parâmetros de Markov a partir de dados experimentais (TORRES; SERRA, 2018).

#### 1.5 Produção Bibliográfica

##### 1.5.1 Congressos

- Algoritmo Baseado em Realização de Auto-Sistema para Identificação *Fuzzy* Recursiva Multivariável no Espaço de Estados - **XXI Congresso Brasileiro de Automática** (CBA 2016), 2016.
- Metodologia Baseada em Realização de Auto-Sistema para Identificação *Fuzzy* Evolutiva de Sistemas Dinâmicos Multivariáveis Não-Lineares - **XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente** (SBAI 2017), 2017.

- A Novel Approach for Online Multivariable Evolving Fuzzy Modeling from Experimental Data - **2018 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE 2018)**.

### 1.5.2 Capítulos de Livro

- Evolving Method Applied to Multivariable Fuzzy Modeling from Experimental Data - **Fuzzy Modeling and Control: Methods, Applications and Research**, Nova Science Publishers, 2018.

## 1.6 Organização da Dissertação

O capítulo 1 apresenta as considerações iniciais sobre a pesquisa, as motivações, relevância, objetivos, contribuições e os trabalhos produzidos.

O capítulo 2 apresenta os conceitos básicos sobre a teoria de realização de sistemas, como sua definição e suas etapas. Em seguida são apresentados os conceitos básicos sobre a utilização de modelos nebulosos para a identificação de sistemas não lineares. Também é apresentado o funcionamento básico dos sistemas nebuloso evolutivos.

O capítulo 3 apresenta a metodologia evolutiva para a identificação de sistemas não lineares multivariáveis proposta neste trabalho. Cada etapa do processo de identificação do sistema é apresentada de maneira individual e por fim o algoritmo proposto é apresentado.

No capítulo 4 são apresentados os resultados obtidos com a metodologia. São realizados três experimentos cujos resultados são comparados com outros trabalhos presentes na literatura acadêmica.

O capítulo 5 apresenta as considerações finais sobre o trabalho e perspectivas de trabalhos futuros.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Teoria de Realização de Sistemas

Nesta seção, a fundamentação matemática baseada na teoria de realização de sistemas é apresentada. Os métodos no domínio do tempo para identificação dos parâmetros de estruturas são baseados na matriz transferência, que leva aos parâmetros de Markov do sistema (i.e., resposta ao pulso do sistema). O conhecimento dos parâmetros de Markov faz possível a construção da matriz de Hankel como base para a realização de modelos no espaço de estados no domínio do tempo discreto.

Para construir um modelo, uma questão fundamental é se todos os estados de interesse do sistema podem ser controlados e/ou excitados. Para responder essa questão, primeiramente deve-se discutir as teorias de controlabilidade e observabilidade. O conceito básico de realização mínima que foi desenvolvido por Ho e Kalman (KALMAN; HO, 1965) será apresentado. A seguir, o algoritmo de realização de auto-sistema para a identificação de sistemas, utilizando a teoria da realização mínima, será apresentado. Como esta dissertação foca na obtenção de modelos no domínio do tempo discreto, serão trabalhados apenas esses tipos de modelo.

#### 2.1.1 Controlabilidade e Observabilidade

Nas áreas de controle e identificação de sistemas, um questionamento feito tanto no âmbito prático quanto no teórico é se todos os estados do sistema podem ser controlados ou observados. Esta investigação é mais facilmente realizada utilizando técnicas no espaço de estados.

Um sistema invariante no domínio do tempo discreto pode ser representado por

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k] \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{C}\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}\mathbf{u}[k] \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^{r \times 1}$  e  $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^{m \times 1}$  são os estados, a entrada, e a saída, respectivamente. As matrizes constantes  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$  com dimensões apropriadas representam as operações internas do sistema linear, e são utilizadas para determinar a resposta do sistema para qualquer entrada.

A solução para a equação no tempo discreto (2.1), no instante de tempo  $t_f = kT$  onde  $T$  é o período de amostragem, é dada por

$$\mathbf{x}[k] = \mathbf{A}^k \mathbf{x}[0] + \sum_{j=1}^k \mathbf{A}^{j-1} \mathbf{B} \mathbf{u}[k-j] \quad (2.3)$$

ou na forma matricial

$$\mathbf{x}[k] = \mathbf{A}^k \mathbf{x}[0] + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \dots \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}[k-1] \\ \mathbf{u}[k-2] \\ \mathbf{u}[k-3] \\ \vdots \\ \mathbf{u}[0] \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{x}[0] = \mathbf{x}[t_o]$  são os estados iniciais em  $t = t_o$ .

### 2.1.1.1 Controlabilidade no Domínio do Tempo Discreto

Os estados  $\mathbf{x}[k]$  de um sistema são ditos serem controláveis se seus estados podem ser alcançados a partir de qualquer estado inicial do sistema em um intervalo de tempo finito por alguma ação de controle. Se todos os estados são controláveis, o sistema é chamado de completamente controlável ou simplesmente de controlável.

Para determinar a controlabilidade em um determinado instante de tempo, é condição necessária e suficiente se o estado nulo, em vez de todas as condições iniciais, podem ser levadas para todos os estados finais. Para justificar essa afirmação, a equação (2.4) é reescrita da seguinte forma

$$\hat{\mathbf{x}}[k] = \mathbf{x}[k] - \mathbf{A}^k \mathbf{x}[0] \quad (2.5)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \dots \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}[k-1] \\ \mathbf{u}[k-2] \\ \mathbf{u}[k-3] \\ \vdots \\ \mathbf{u}[0] \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

que é equivalente a iniciar no estado zero e ir para o estado final  $\hat{\mathbf{x}}[k] = \mathbf{x}[k] - \mathbf{A}^k \mathbf{x}[0]$ . Assim sendo, se for possível mostrar que o sistema pode ir do estado nulo para qualquer estado final  $\hat{\mathbf{x}}[k]$ , então ele pode ir de qualquer  $\mathbf{x}[0]$  para qualquer  $\mathbf{x}[k]$ . Examinando a equação (2.6), nota-se que a matriz  $\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \dots \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$  deve desempenhar papel fundamental na determinação da controlabilidade do sistema. De fato, da teoria de sistemas lineares, apenas os vetores  $\hat{\mathbf{x}}[k]$  que estão no espaço de colunas  $S_c$  gerado pela matriz  $\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \dots \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$  podem ser alcançados. Em outras palavras, sempre existe uma série de controle  $\mathbf{u}[0], \mathbf{u}[1], \mathbf{u}[2], \dots, \mathbf{u}[k]$  para transferir o estado zero para o estado final  $\hat{\mathbf{x}}[k]$  que pertence ao espaço de colunas  $S_c$ .

**Teorema 1** *O sistema linear, de dimensão finita, discreto no tempo, invariante no tempo  $\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k]$  de ordem  $n$  é controlável se, e somente se, a matriz de controlabilidade  $\mathbf{Q}_p$*



$n \times kr$  possui posto  $n$ , onde

$$\mathbf{Q}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

**PROVA:** ver (CHEN, 1998).

### 2.1.1.2 Observabilidade no Domínio do Tempo Discreto

Os estados em uma determinada amostra  $\mathbf{x}[k]$  de um sistema no instante de tempo  $k$  são observáveis se o conhecimento da entrada  $\mathbf{u}[p]$  e da saída  $\mathbf{y}[p]$  em um intervalo de tempo finito  $0 < p \leq k$  determinarem completamente o estado  $\mathbf{x}[k]$ . Se todos os estados são observáveis, o sistema é chamado de completamente observável ou simplesmente observável.

Para determinar a observabilidade de um sistema, é condição necessária e suficiente ver se o estado inicial da resposta do sistema a entrada zero pode ser determinado a partir da saída  $\mathbf{y}[p]$  ( $p = 0, 1, 2, \dots, k-1$ ), porque o conhecimento do estado inicial  $\mathbf{x}[0]$  e da entrada  $\mathbf{u}[p]$  ( $p = 0, 1, 2, \dots, k-1$ ) permite o cálculo do estado  $\mathbf{x}[k-1]$  a partir da equação (2.4).

**Teorema 2** *O sistema linear, de dimensão finita, discreto no tempo, invariante no tempo  $\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k]$  de ordem  $n$  com a equação de medida  $\mathbf{y}[k] = \mathbf{C}\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}\mathbf{u}[k]$  é observável se, e somente se, a matriz de observabilidade  $\mathbf{P}_p$   $mk \times n$  possui posto  $n$ , onde*

$$\mathbf{P}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{k-1} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

**PROVA:** ver (CHEN, 1998).

### 2.1.1.3 Conceitos Básicos de Realização

A partir das equações (2.1) e (2.2) que representam as características dinâmicas do sistema, e fazendo  $u_i[0] = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) e  $u_i[k] = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), obtém-se a matriz de resposta ao pulso  $\mathbf{M}$  com dimensão  $m \times r$ , dada por:

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{D}, \mathbf{M}_1 = \mathbf{CB}, \mathbf{M}_2 = \mathbf{CAB}, \dots, \mathbf{M}_j = \mathbf{CA}^{j-1}\mathbf{B} \quad (2.9)$$

onde as matrizes constantes na sequência são os parâmetros de Markov do sistema. Os parâmetros de Markov são utilizados como base para a identificação do modelo discreto no tempo, dado pelas equações (2.1) e (2.2), representado pelas quatro matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ . Como  $\mathbf{D} = \mathbf{M}_0$ , apenas as três matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  precisam ser determinadas.

A realização é o cálculo da tripla  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}]$  a partir dos parâmetros de Markov dados pela equação (2.9), para os quais o modelo no domínio do tempo discreto é satisfeito. Todo sistema possui um número infinito de realizações que podem prever a resposta de um sistema para em entrada arbitrária. Realização mínima significa um modelo com a menor dimensão no espaço de estados entre todas as realizações possíveis que tem a mesma relação entrada-saída. Todas as possíveis realizações mínimas possuem os mesmos autovalores, que são os parâmetros modais do sistema.

Considera-se que a matriz de estados  $\mathbf{A}$  de ordem  $n$  possui um conjunto completo de autovetores linearmente independentes  $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$  com autovalores correspondentes  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  que não são necessariamente distintos. Definindo-se  $\Lambda$  como a matriz diagonal contendo os autovalores e  $\Psi$  como a matriz de autovetores, ou seja,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

e

$$\Psi = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

a realização  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}]$  pode ser transformada na realização  $[\lambda, \Psi^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{C}\Psi]$ . A matriz diagonal  $\Lambda$  contém as informações dos coeficientes de amortecimento e da frequência natural amortecida do sistema. A matriz  $\Psi^{-1}\mathbf{B}$  define as amplitudes modais iniciais e a matriz  $\mathbf{C}\Psi$  o formato dos modos nos pontos sensores. Logo, todos os parâmetros modais do sistema podem ser obtidos através da tripla  $[\lambda, \Psi^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{C}\Psi]$ . Os coeficientes de amortecimento e as frequências naturais amortecidas são simplesmente as partes reais e imaginárias dos autovalores  $\Lambda_c$ , após a transformação do sistema no domínio do tempo discreto para o domínio do tempo contínuo, utilizando a relação  $\Lambda_c = \frac{\ln(\Lambda)}{T}$ .

É importante notar que a transformação no domínio do tempo discreto para o domínio do tempo contínuo, não é única. A parte imaginária do logaritmo natural de um número complexo pode ser ajustada adicionando qualquer múltiplo de  $2\pi$ , o qual permite que  $\Lambda_c$  tenha diversos valores. Isso corresponde ao fato de que quaisquer duas frequências que se diferem por um múltiplo de  $\frac{2\pi}{\Delta T}$  são indiferenciáveis quando observados no instante de amostragem. Portanto, na prática, se for desejada a interpretação das frequências naturais de um sistema físico, o período de amostragem  $T$  precisa ser suficientemente curto ou um filtro precisa ser adicionado para prevenir que as frequências além da frequência de Nyquist sejam perdidas na realização.

A realização do sistema se inicia com a construção da matriz de Hankel generalizada, composta pelos parâmetros de Markov do sistema (2.9), como segue

$$\mathbf{H}_{j-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_j & \mathbf{M}_{j+1} & \cdots & \mathbf{M}_{j+\beta-1} \\ \mathbf{M}_{j+1} & \mathbf{M}_{j+2} & \cdots & \mathbf{M}_{j+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_{j+\alpha-1} & \mathbf{M}_{j+\alpha} & \cdots & \mathbf{M}_{j+\alpha+\beta-2} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são números inteiros tal que  $\alpha q \leq \beta r$ , sendo  $r$  e  $q$  os números de entrada e saída do sistema dinâmico, respectivamente. Quando  $j = 1$ , tem-se

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \cdots & \mathbf{M}_\beta \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \cdots & \mathbf{M}_{1+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_\alpha & \mathbf{M}_{1+\alpha} & \cdots & \mathbf{M}_{\alpha+\beta-1} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

onde  $\mathbf{M}_0 = \mathbf{D}$  não está incluído em  $\mathbf{H}_0$ . Se  $\alpha \geq n$  e  $\beta \geq n$ , a matriz  $\mathbf{H}_{j-1}$  possui posto  $n$ . Para confirmar esta proposição, substituindo-se os parâmetros de Markov da equação (2.9) na equação (2.12) e decompondo  $\mathbf{H}_{j-1}$  em três matrizes, resulta em

$$\mathbf{H}_{j-1} = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}^{j-1} \mathbf{Q}_\beta \quad (2.14)$$

$$\mathbf{P}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{\alpha-1} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

e

$$\mathbf{Q}_\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{\beta-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

A matriz em bloco  $\mathbf{P}_\alpha$  é a matriz de observabilidade, e a matriz em bloco  $\mathbf{Q}_\beta$  é a matriz de controlabilidade. Se a ordem do sistema é  $n$ , então a menor dimensão da matriz de estados  $\mathbf{A}$  é  $n \times n$ . Se o sistema é controlável e observável, as matrizes em bloco  $\mathbf{P}_\alpha$  e  $\mathbf{Q}_\beta$  possuem posto  $n$ . Logo, a matriz de Hankel possui posto  $n$ . Baseado nessas propriedades da matriz de Hankel composta pelos parâmetros de Markov, a seguir será apresentado um algoritmo para a realização mínima de um modelo no espaço de estados.

### 2.1.2 Algoritmo de Realização de Auto-Sistema (ERA)

O desenvolvimento inicial das metodologias de realização no espaço de estados é atribuído a Ho e Kalman (KALMAN; HO, 1965) que introduziu conceitos importantes para a teoria de realização mínima. A metodologia de Ho-Kalman utiliza a matriz de Hankel generalizada (2.12), para construir uma representação no espaço de estados de um sistema dinâmico linear a partir de dados sem ruídos. A metodologia foi modificada e substancialmente estendida para desenvolver o algoritmo de realização de auto-sistema (ERA, no inglês *Eigensystem Realization Algorithm*) para identificar parâmetros modais de estruturas espaciais a partir de dados ruidosos.

Em contraste com os métodos clássicos de realização de sistemas que usam a matriz de Hankel generalizada dada na equação (2.12), o algoritmo ERA inicia formando uma matriz que é obtida eliminando algumas linhas e colunas da matriz generalizada de Hankel, mas mantendo o primeiro bloco intacto, ou seja,  $\mathbf{M}_1$ . Além disso, a ordem padrão dos elementos da matriz de Hankel generalizada não precisam ser mantidos.

Sabendo-se que  $r$  e  $q$  correspondem aos números de entrada e saída do sistema dinâmico, respectivamente, sejam as matrizes de entrada e saída definidas por

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_r \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

e

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \dots \\ \mathbf{c}_m \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

onde o vetor coluna  $\mathbf{b}_i$  representa a influencia do vetor de controle para a  $i$ -ésima entrada e o vetor linha  $\mathbf{c}_i$  representa a influencia do vetor de medidas para a  $j$ -ésima saída. Definindo-se submatrizes formadas pelas colunas de  $\mathbf{B}$  como  $\mathbf{B}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, \eta$ ), e submatrizes formadas pelas linhas de  $\mathbf{C}$  por  $\mathbf{C}_j$  ( $i = 0, 1, \dots, \zeta$ ). A matriz em blocos do algoritmo ERA pode ser expressa por

$$\mathbf{H}_{j-1} = [\mathbf{M}_{s_i+j+t_j}]; \mathbf{M}_{s_i+j+t_j} = \mathbf{C}_j \mathbf{A}^{s_i+j+t_j} \mathbf{B}_i \quad (2.19)$$

onde  $s_o = t_o = 0$ , com  $s_i$  e  $t_j$  inteiros arbitrários, onde  $i = j = 0$  e  $\mathbf{M}_k = \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B}$ . Esta matriz representa a matriz de Hankel generalizada onde algumas linhas e colunas foram deletadas mas o primeiro bloco foi mantido inalterado.

A partir da equação (2.19), pode-se mostrar que

$$\mathbf{H}_j = P_\alpha \mathbf{A}^{j-1} Q_\beta \quad (2.20)$$

onde

$$\mathbf{P}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{s_1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{s_\alpha} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{Q}_\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}^{t_1} \mathbf{B}_1 & \dots & \mathbf{A}^{t_\beta} \mathbf{B}_\beta \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

onde  $s_i$  e  $t_j$  são inteiros arbitrários. Nota-se que  $\mathbf{P}_\alpha$  e  $\mathbf{Q}_\beta$  são matrizes de observabilidade e controlabilidade generalizadas, que são parcialmente as matrizes dadas nas equações (2.7) e (2.8). Todavia, elas possuem as mesmas propriedades de controlabilidade das matrizes apresentadas anteriormente.

Seja uma matriz  $\mathbf{H}^\dagger$  que satisfaz a relação

$$\mathbf{Q}_\beta \mathbf{H}^\dagger \mathbf{P}_\alpha = \mathbf{I}_n \quad (2.23)$$

onde  $\mathbf{I}_n$  é uma matriz identidade de ordem  $n$ . A matriz  $\mathbf{H}^\dagger$  possui papel primordial no algoritmo ERA, pois

$$\mathbf{H}_0 \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H}_0 = \mathbf{Q}_\beta \mathbf{P}_\alpha \mathbf{H}^\dagger \mathbf{Q}_\beta \mathbf{P}_\alpha = \mathbf{Q}_\beta \mathbf{P}_\alpha = \mathbf{H}_0 \quad (2.24)$$

onde a matriz  $\mathbf{H}^\dagger$  é a pseudo-inversa da matriz  $\mathbf{H}_0$ .

O ERA inicia com a fatoração da matriz dada pela equação (2.19), para  $k = 1$ , utilizando decomposição em valor singular (SVD), como segue:

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{R} \mathbf{\Sigma} \mathbf{S}^T \quad (2.25)$$

onde as matrizes  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{S}$  são ortonormais e  $\mathbf{\Sigma}$  é uma matriz retangular

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

com

$$\Sigma_n = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

e  $\sigma_i$  monotonicamente crescente.

Seja  $\mathbf{R}_n$  e  $\mathbf{S}_n$  matrizes formadas pelas  $n$  primeiras colunas de  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{S}$ , respectivamente. Consequentemente, a matriz  $\mathbf{H}_0$ , e sua pseudo-inversa, torna-se:

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{R}_n \Sigma_n \mathbf{S}_n^T \quad (2.28)$$

onde

$$\mathbf{R}_n \mathbf{R}_n^T = \mathbf{I}_n = \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n \quad (2.29)$$

e

$$\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{S}_n \Sigma_n^{-1} \mathbf{R}_n^T \quad (2.30)$$

Utilizando as equações (2.19), (2.20), (2.23), (2.28) e (2.30), as realizações de ordem mínima podem ser obtida, como segue:

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{E}_q^T \mathbf{H}_{k-1} \mathbf{E}_r \quad (2.31)$$

$$= \mathbf{E}_q^T \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{Q}_\beta \mathbf{E}_r \quad (2.32)$$

$$= \mathbf{E}_q^T \mathbf{P}_\alpha \left[ \mathbf{Q}_\beta \mathbf{H}^\dagger \mathbf{P}_\alpha \right] \mathbf{A}^{k-1} \left[ \mathbf{Q}_\beta \mathbf{H}^\dagger \mathbf{P}_\alpha \right] \mathbf{Q}_\beta \mathbf{E}_r \quad (2.33)$$

$$= \mathbf{E}_q^T \mathbf{H}_0 \left[ \mathbf{S}_n \Sigma_n \mathbf{R}_n^T \right] \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{Q}_\beta \left[ \mathbf{S}_n \Sigma_n \mathbf{R}_n^T \right] \mathbf{H}_0 \mathbf{E}_r \quad (2.34)$$

$$= \mathbf{E}_q^T \mathbf{H}_0 \mathbf{S}_n \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} \left[ \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}_1 \mathbf{S}_n \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} \right]^{k-1} \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} \mathbf{S}_n^T \mathbf{H}_0 \mathbf{E}_r \quad (2.35)$$

$$= \mathbf{E}_q^T \mathbf{R}_n \Sigma_n^{\frac{1}{2}} \left[ \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}_1 \mathbf{S}_n \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} \right]^{k-1} \Sigma_n^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}_n^T \mathbf{E}_r \quad (2.36)$$

onde  $\mathbf{E}_q^T = \left[ \mathbf{I}_q \quad \mathbf{O}_q \quad \dots \quad \mathbf{O}_q \right]$ ,  $\mathbf{E}_r^T = \left[ \mathbf{I}_r \quad \mathbf{O}_r \quad \dots \quad \mathbf{O}_r \right]$ ,  $\mathbf{O}_i$  é uma matriz nula de ordem  $i$ ,  $\mathbf{I}_i$  é uma matriz identidade de ordem  $i$ ,  $q$  é o número de saídas,  $r$  é o número de entradas.

Os parâmetros da realização mínima do sistema no espaço de estados são obtidos do seguinte modo:

$$\mathbf{A} = \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}_1 \mathbf{S}_n \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{B} = \text{as } r \text{ primeiras colunas de } \Sigma_n^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}_n^T \quad (2.38)$$

$$\mathbf{C} = \text{as } q \text{ primeiras linhas de } \mathbf{R}_n \Sigma_n^{\frac{1}{2}} \quad (2.39)$$

## 2.2 Modelagem Nebulosa

A teoria de sistemas nebulosos pode ser aplicada de diversas formas em modelagem de sistema dinâmicos. Sistemas nebulosos se adequam bem a tal problema devido a sua capacidade de tratar imprecisões, não linearidades, e altos graus de incerteza.

Em geral, sistemas nebulosos utilizam regras do tipo **SE-ENTÃO** do tipo:

$$\text{SE proposição do antecedente ENTÃO proposição do consequente} \quad (2.40)$$

Dependendo da estrutura da proposição do consequente, pode-se classificar os sistemas nebulosos em dois tipos:

- *Modelo Nebuloso Linguístico (Mamdani)*: neste tipo de modelo tanto o antecedente quanto o consequente são proposições nebulosas.
- *Modelo Nebuloso Takagi-Sugeno (TS)*: neste tipo de modelo a proposição do consequente é uma função *crisp*, ao invés de uma proposição nebulosa.

A seguir serão apresentados os conceitos básicos sobre modelos nebulosos TS, além das técnicas utilizadas para a obtenção de tais modelos a partir de dados experimentais.

### 2.2.1 Modelos Nebulosos Takagi-Sugeno

O modelo nebuloso utilizado para aproximar uma ampla classe de sistemas não lineares é o modelo nebuloso Takagi-Sugeno (TS) (TAKAGI; SUGENO, 1985) (FANTUZZI; ROVATTI, 1996). O modelo nebuloso TS é caracterizado por uma base de regras **SE-ENTÃO**, onde, de forma geral, a *i*-ésima regra possui o seguinte formato:

$$R^i : \text{SE } z^1 \text{ é } F_1^i \text{ e } \dots \text{ e } z^p \text{ é } F_p^i \text{ ENTÃO } y^i = f^i(\cdot) \quad (2.41)$$

onde  $i = 1, 2, \dots, L$  é o número da regra,  $\mathbf{z} = [z^1 \ z^2 \ \dots \ z^p]$  são as variáveis do antecedente,  $F_j^i$  é o  $i$ -ésimo conjunto nebuloso do  $j$ -ésimo parâmetro do antecedente, com  $j = 1, 2, \dots, p$ , sendo que  $z^j$  possui um grau de pertinência  $\mu_j^i \in [0, 1]$  no conjunto nebuloso  $F_j^i$ ,  $y^i$  é o vetor de saída do  $i$ -ésimo modelo linear local que é determinado por uma função  $f^i(\cdot)$ .

O grau de ativação da  $i$ -ésima regra, é calculado como segue:

$$h^i(\mathbf{z}) = \mu_1^i \star \mu_2^i \star \dots \star \mu_p^i \quad (2.42)$$

onde  $\star$  representa uma norma-t.

O grau de ativação normalizado da  $i$ -ésima regra, é dado por:

$$\gamma^i(\mathbf{z}) = \frac{h^i(\mathbf{z})}{\sum_{j=1}^L h^j(\mathbf{z})} \quad (2.43)$$

A saída do modelo nebuloso TS, dada por

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^L \gamma^i(\mathbf{z}) f^i(\cdot) \quad (2.44)$$

é uma combinação linear da saída de cada modelo local  $i$  com seu grau de ativação normalizado  $\gamma^i$ , onde  $\sum_{i=1}^L \gamma^i(\mathbf{z}) = 1$ .

### 2.2.2 Agrupamento Nebuloso

O objetivo do agrupamento de um determinado conjunto de dados é a classificação do mesmo de acordo com similaridades entre si, e a organização dos dados em grupos. As técnicas de agrupamento pertencem ao grupo de métodos de aprendizado não supervisionado, pois elas não utilizam identificadores de classes definidos a priori. No contexto de identificação de sistemas dinâmicos, o principal objetivo das metodologias de agrupamento nebuloso é o particionamento do conjunto de dados e a identificação dos parâmetros da proposição do antecedente (BABUŠKA, 2012).

As metodologias de agrupamento podem ser aplicadas para dados numéricos, categóricos, ou uma mistura de ambos. Para o problema de identificação de sistemas dinâmicos, o agrupamento a partir de dados numéricos é considerado. Os dados utilizados são normalmente observações do comportamento do sistema dinâmico. Cada observação consiste em  $p$  variáveis medidas, agrupadas em um vetor  $\mathbf{z}_k = [z_k^1 \ z_k^2 \ \dots \ z_k^p]^T$ . Um conjunto de  $N$  observações

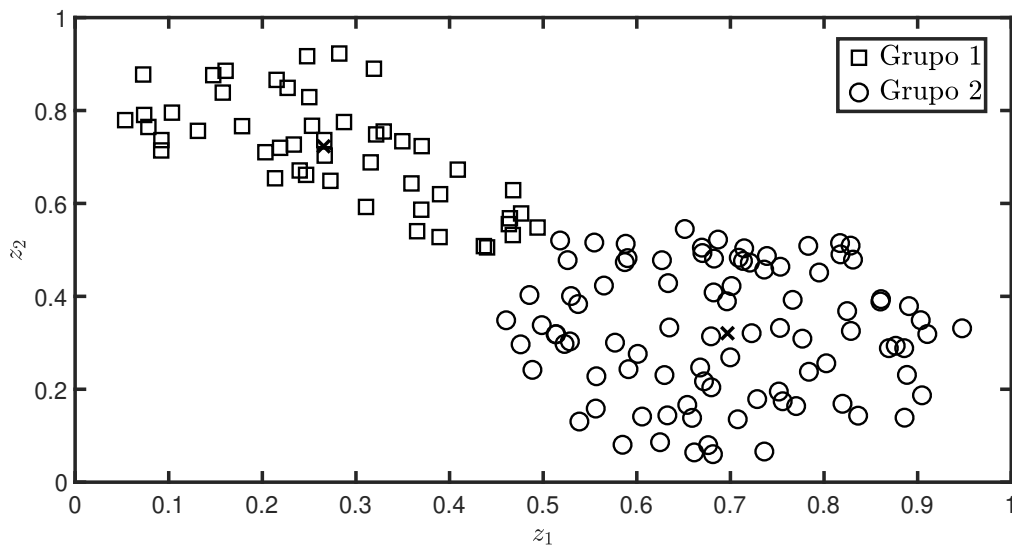


é definido como  $\mathbf{Z} = \{\mathbf{z}_k | k = 1, 2, \dots, N\}$ , e é representado pela seguinte matriz (BABUŠKA, 2012):

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1N} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{p1} & z_{p2} & \cdots & z_{pN} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Na Fig. 2 é ilustrada a partição de um conjunto de dados  $\mathbf{Z}$  com  $p = 2$  e  $n = 140$  em dois grupos.

Figura 2 – Exemplo de agrupamento de um conjunto de dados bidimensional.



Fonte: MATLAB (2017)

### 2.2.2.1 Tipos de Partição

O conceito de partição nebulosa é de primeira importância para a identificação de sistemas utilizando modelos nebulosos TS. Uma partição nebulosa pode ser entendida como uma generalização de uma partição rígida que é definida em termos da teoria clássica de conjuntos (BABUŠKA, 2012).

A partir da teoria de conjuntos, uma partição rígida de um conjunto de dados  $\mathbf{Z}$  pode ser definida como uma família de subconjuntos  $\{A_i | 1 \leq i \leq c\} \subset P(\mathbf{Z})$  que satisfaz as seguintes propriedades:

$$\cup_{i=1}^c A_i = \mathbf{Z} \quad (2.46)$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad 1 \leq i \neq j \leq c \quad (2.47)$$

$$\emptyset \subset A_i \subset \mathbf{Z}, \quad 1 \leq i \leq c \quad (2.48)$$

Onde a equação (2.46) significa que os subconjuntos  $A_i$  contém todo o conjunto de dados  $\mathbf{Z}$ . A equação (2.47) define que os subconjuntos são distintos, e segundo equação (2.48) nenhum deles é vazio ou contém todo o conjunto de dados  $\mathbf{Z}$ . Ainda, uma partição rígida pode ser definida em termo de função de pertinência do seguinte modo (BABUŠKA, 2012):

$$\mu_{ik} \in \{0,1\}, \quad 1 \leq i \leq c, \quad 1 \leq k \leq N \quad (2.49)$$

$$\sum_{i=1}^c \mu_{ik} = 1, \quad 1 \leq k \leq N \quad (2.50)$$

$$0 < \sum_{i=1}^c \mu_{ik} < N, \quad 1 \leq i \leq c \quad (2.51)$$

onde  $\mu_{ik}$  é o grau de pertinência de  $\mathbf{z}_k$  para a  $i$ -ésima regra. A equação (2.49) define que em uma partição rígida um elemento apenas pode possuir valor de pertinência de 0 ou 1, ou seja, pertence ou não pertence a um determinado conjunto. Enquanto a equação (2.50) indica que um elemento não pode pertencer simultaneamente a mais de um conjunto.

A partição nebulosa é uma generalização direta da partição rígida permitindo que  $\mu_{ik}$  possua valores reais no intervalo de  $[0,1]$ . De maneira análoga a definição mostrada anteriormente, uma partição nebulosa é dada por (BABUŠKA, 2012):

$$\mu_{ik} \in [0,1], \quad 1 \leq i \leq c, \quad 1 \leq k \leq N \quad (2.52)$$

$$\sum_{i=1}^c \mu_{ik} = 1, \quad 1 \leq k \leq N \quad (2.53)$$

$$0 < \sum_{i=1}^c \mu_{ik} < N, \quad 1 \leq i \leq c \quad (2.54)$$

Logo, a definição de partição nebulosa difere da definição de partição rígida pelo fato de poder assumir um grau de pertinência  $\mu_{ik}$  com valor real no intervalo entre 0 e 1.

### 2.2.2.2 Algoritmos de Agrupamento Nebuloso em Batelada

Os algoritmos de agrupamento nebulosos em batelada se caracterizam por processar todo o conjunto de dados de uma só vez. Nesta classe de algoritmos, o número de grupos é pré-definido a priori.

A maioria dos algoritmos analíticos de agrupamento nebuloso se baseiam na otimização do funcional, dado por (BEZDEK, 1981):

$$J(\mathbf{Z}; U, V, A) = \sum_{i=1}^L \sum_{k=1}^N (\mu_{ik})^m D_{ikA}^2 \quad (2.55)$$

onde  $U$  é a matriz de partição nebulosa do conjunto de dados  $Z$ ,  $V \in \mathfrak{R}^{n \times c}$  é o vetor de protótipos (centros) a ser determinado, e

$$D_{ikA}^2 = \|z_k - v_i\|_A = (z_k - v_i)^T A (z_k - v_i) \quad (2.56)$$

é uma norma quadrática de distância do produto-interno, com  $m \in (1, \infty]$  sendo um parâmetro que determina o grau de *fuzzificação* dos grupos obtidos. A medida do grau de dissimilaridade do funcional *c-means* (2.55) é igual ao quadrado da distância entre o ponto  $z_k$  e o protótipo do grupo  $v_i$ .

A minimização da equação (2.55) é um problema de otimização não linear que pode ser resolvido utilizando uma variedade de métodos. O método mais popular para a solução deste problema é uma simples iteração de Picard através das condições de otimalidade de primeira ordem para os pontos estacionários de (2.55) (BABUŠKA, 2012). Este método de solução resulta no algoritmo 1.

O formato dos grupos é determinado pela matriz de indução de norma  $\mathbf{A}$ . Uma escolha comum é  $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ , que induz a norma euclidiana:

$$D_{ik}^2 = (z_k - v_i)^T (z_k - v_i) \quad (2.58)$$

A matriz de indução de norma  $\mathbf{A}$  também pode ser escolhida como uma matriz diagonal  $n \times n$  que leva em conta diferentes variâncias nas direções dos eixos coordenados de  $\mathbf{Z}$ :

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\sigma_1}\right)^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{\sigma_2}\right)^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \left(\frac{1}{\sigma_n}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Esta matriz induz uma norma diagonal no  $\mathfrak{R}^n$ . Finalmente,  $\mathbf{A}$  pode ser definida com a inversa da matriz de covariância amostral de  $\mathbf{Z}$ :  $\mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1}$ , com

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (z_k - \bar{z})^T (z_k - \bar{z}) \quad (2.60)$$

Aqui  $\bar{z}$  indica a média dos dados. Neste caso,  $\mathbf{A}$  induz a norma Mahalanobis no  $\mathfrak{R}^n$ .

Os três algoritmo de agrupamento nebuloso em batelada mais comumente utilizados são (BABUŠKA, 2012):

- **Algoritmo de Agrupamento Nebuloso Fuzzy C-Means (FCM)** (BEZDEK; EHRLICH; FULL, 1984): O algoritmo FCM utiliza uma matriz indução de norma  $\mathbf{A}$  para todos os

**Algoritmo 1** Algoritmo de agrupamento nebuloso em Batelada.

Dado um conjunto de dados  $\mathbf{Z}$ , escolha um número de regras  $1 < L < N$ , um fator de ponderação  $m$ , uma tolerância  $\varepsilon > 0$  e a matriz de indução de norma  $\mathbf{A}$ . Inicialize a matriz de partição  $\mathbf{U}$  aleatoriamente.

**faça**

Calcula os protótipos dos grupos:

$$v_i^{(l)} = \frac{\sum_{k=1}^N \left( \mu_{ik}^{(l-1)} \right)^m z_k}{\sum_{k=1}^N \left( \mu_{ik}^{(l-1)} \right)^m}$$

para  $1 \leq i \leq L$ .

Calcula as distâncias:

$$D_{ikA}^2 = (z_k - v_i)^T A (z_k - v_i)$$

para  $1 \geq i \leq L$  e  $1 \leq k \leq N$ .

Atualiza a matriz de partição nebulosa:

**se** Se  $D_{ikA}$  para todo  $1 \geq i \leq L$  e  $1 \leq k \leq N$  **então**

$$\mu_{ik}^{(l)} = \frac{1}{\sum_{j=1}^L \left( \frac{D_{ikA_i}}{D_{jkA_i}} \right)^{\frac{2}{m-1}}}$$

**senão**

$\mu_{ik}^{(l)} = 0$  se  $D_{ikA} > 0$ , e  $\mu_{ik}^{(l)} \in [0, 1]$  com

$$\sum_{i=1}^L \mu_{ik}^{(l)} = 1 \quad (2.57)$$

**fim se**

**enquanto**  $\|\mathbf{U}^l - \mathbf{U}^{l-1}\| < \varepsilon$

grupos, portanto, todos os grupos possuem o mesmo formato. Neste algoritmo comumente utiliza-se as normas euclidiana, diagonal ou Mahalanobis.

- **Algoritmo de Agrupamento Nebuloso Gustafson-Kessel (GK)** (GUSTAFSON; KESSEL, 1979): o algoritmo GK utiliza uma medida de distância adaptativa, visando detectar agrupamentos com diferentes formatos, onde cada agrupamento possui sua própria matriz de indução de norma  $\mathbf{A}_i$ , dada por

$$\mathbf{A}_i = \det(\mathbf{A}_{\Sigma_i})^{\frac{1}{p}} \mathbf{A}_{\Sigma_i}^{-1} \quad (2.61)$$

onde  $\mathbf{A}_{\Sigma_i}$  é a matriz de covariância nebulosa, expressa por

$$\mathbf{A}_{\Sigma_i} = \frac{\sum_{k=1}^N (\mu_{ik})^m (z_k - v_i^l)^T (z_k - v_i^l)}{\sum_{k=1}^N (\mu_{ik})^m} \quad (2.62)$$

A matriz de covariância nebulosa fornece informações sobre a forma e a orientação do grupo. A razão entre os eixos hiper-elipsoides do grupo é dada pela razão das raízes quadradas dos autovalores da matriz de covariância nebulosa. As direções dos eixos hiper-elipsoides são dados pelos autovetores da matriz de covariância nebulosa.

- **Algoritmo de Agrupamento Nebuloso de Máxima Verossimilhança** (TRAUWAERT; KAUFMAN; ROUSSEEUW, 1991): o algoritmo de agrupamento nebuloso de máxima verossimilhança utiliza uma norma de distância exponencial, dada por:

$$D_{ik\Sigma_i}^2 = \frac{\det(\Sigma_i)^{\frac{1}{2}}}{P_i} e^{(z_k - v_i)^T \Sigma_i (z_k - v_i)} \quad (2.63)$$

onde  $\Sigma_i$  é a matriz de covariância nebulosa, expressa por

$$\Sigma_i = \frac{\sum_{k=1}^N (\mu_{ik})^{w_g} (z_k - v_i^l)^T (z_k - v_i^l)}{\sum_{k=1}^N (\mu_{ik}^{w_g})^{w_g}} \quad (2.64)$$

sendo  $w_g \in [1, \infty)$  o peso das pertinências e

$$P_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mu_{ik} \quad (2.65)$$

a probabilidade a priori de selecionar o  $i$ -ésimo grupo.

Por utilizar uma métrica exponencial, o algoritmo não está sujeito a condições restritivas impostas pelo volume dos grupos, portanto, é capaz de detectar diferentes formas geométricas, densidades e volume de dados (BABUŠKA, 2012).

### 2.2.2.3 Algoritmos de Agrupamento Nebuloso Evolutivo

Algoritmos de agrupamento evolutivo são baseados em modelos orientados por dados, que são capazes de serem automaticamente adaptados, estendidos e evoluídos dinamicamente de acordo com as novas amostras. Assim sendo, modelos baseados em agrupamento evolutivo são capazes de suportar qualquer característica do conjunto de dados, sem fazer distinção se os dados são estacionários ou não-estacionário (ANGELOV, 2013).

A necessidade de modelos evolutivos nos sistemas atuais se torna clara quando consideramos que geralmente os modelos, que são originalmente gerados em batelada a partir de um conjunto de dados coletados a priori, não são capazes de abranger todas as possíveis condições de operação, estados do sistema ou alguma ocorrência adversa.

De modo geral, as aplicações de agrupamentos nebulosos evolutivos aplicados a modelagem de dados são (LUGHOFER, 2011):

- Atualização e/ou extensão de modelos já existentes a partir de novas amostras, de modo a obter melhor performance em termos de predição, ação de controle, e uma boa cobertura do espaço de dados para evitar extrapolações quando operando com novas amostras;

- Construir modelos a partir de um grande conjunto de dados, onde o processamento em batelada é impossibilitado devido as limitações de memória;
- Incorporação do conhecimento do especialista durante a operação *online* para sistema semi-automáticos;
- Esquecimento de componentes aprendidas anteriormente, de modo a permitir uma adaptação gradual e suave dos parâmetros em tempo de reagir as mudanças no conjunto de dados.

### 2.2.3 Modelo Takagi-Sugeno Evolutivo

Um modelo evolutivo é capaz de atualizar sua estrutura de acordo com o fluxo de dados. Diferentemente dos algoritmos adaptativos, os algoritmos evolutivos possuem capacidade de alterar não apenas seus parâmetros, mas também sua estrutura.

Uma das primeiras metodologias para modelagem evolutiva foi proposta por (ANGELOV; FILEV, 2004), a partir de uma versão incremental do algoritmo de agrupamento subtrativo (CHIU, 1994). Este algoritmo utiliza o conceito de densidade, também denominado de potencial, de uma determinada amostra para determinar sua representatividade. A densidade da  $k$ -ésima amostra  $D(\mathbf{z}_k)$  é calculada utilizando a função de Cauchy:

$$D(\mathbf{z}_k) = \frac{1}{1 + \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k |\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_i|^2} \quad (2.66)$$

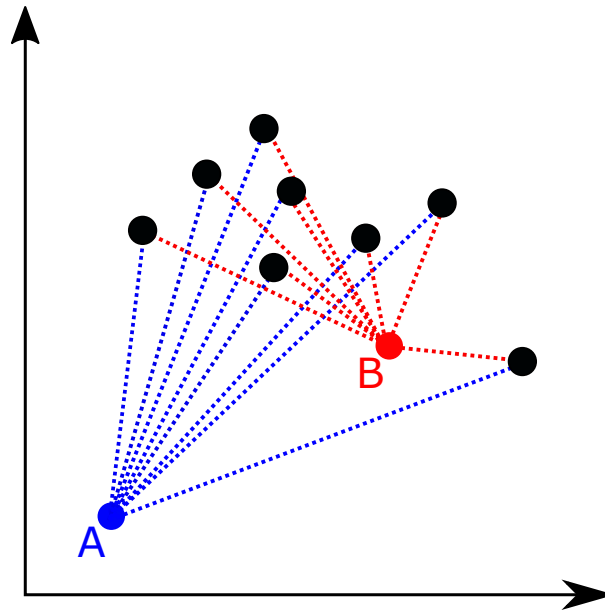
A função densidade (2.66) mensura a concentração de dados ao redor de um determinado ponto, como exemplificado na Fig. 3, onde a densidade do ponto B é superior ao da amostra A devido a sua proximidade das outras amostras. Ou seja, quanto maior a quantidade de amostras em uma determinada região, maior será a densidade das amostras presentes nesta região.

No contexto de modelagem evolutiva, a densidade  $D(\mathbf{z}_k)$  indica a capacidade de generalização e representatividade de uma amostra. Se uma amostra possui uma alta densidade, isto indica que tal amostra é uma boa candidata para ser o ponto focal de uma regra (ANGELOV, 2013).

Para utilizar o conceito de densidade em um contexto evolutivo, é necessário uma fórmula para o cálculo recursivo da mesma. Assim, é proposto em (ANGELOV; ZHOU, 2008b) o cálculo recursivo de  $D(\mathbf{z}_k)$ , da seguinte forma:

$$D_k(\mathbf{z}_k) = \frac{k-1}{(k-1) \left( \sum_{i=1}^{p+q} (z_k^i)^2 + 1 \right) + b_k - \Lambda_k} \quad (2.67)$$

Figura 3 – Ilustração do conceito de densidade de uma amostra.



Autor: Adaptado de Lemos (2011)

onde  $\Lambda_k = 2 \sum_{i=1}^{p+q} z_k^j c_k^j$ ,  $D_1(\mathbf{z}_1) = 1$ ,  $b_k = b_{k-1} + \sum_{j=1}^{p+q} (z_k^j)^2$ ,  $b_1 = 0$ ,  $c_k^j = c_k^j + z_k^j$ ,  $c_1^j = 0$ .

A densidade dos centros já existentes é atualizada recursivamente, pela seguinte fórmula:

$$D_k(\mathbf{z}^{i*}) = \frac{t - 1}{t - 1 + (t - 2) \left( \frac{1}{D_{k-1}(\mathbf{z}^{i*})} - 1 \right) + \Psi_k} \quad (2.68)$$

onde  $\Psi_k = \sum_{j=1}^{p+q} (z_{k,j} - z_{(k-1),j})^2$ .

A partir das equações recursivas para o cálculo da densidade das amostras, o algoritmo *evolving Takagi-Sugeno* (eTS) (ANGELOV; FILEV, 2004), é formulado a partir das seguintes premissas:

- Caso a densidade de uma nova amostra seja maior que a densidade de todos os pontos focais já existentes, a nova amostra é escolhida para ser o centro de um grupo;
- Caso a amostra esteja próxima o suficiente de algum ponto focal existente, a nova amostra substituirá esse ponto focal. Caso contrário essa amostra será o ponto focal de um novo grupo;
- Caso a densidade da nova amostra não seja maior que a densidade dos pontos focais já existentes, os parâmetros do consequente da regra mais próxima são atualizados.

Um algoritmo *evolving Takagi-Sugeno* (eTS) é sintetizado no Algoritmo 2.

---

**Algoritmo 2** Algoritmo Evolutivo Takagi-Sugeno (eTS)

---

Calculo da Densidade da nova amostra  $D_k(\mathbf{z}_k)$  (2.67);

**para**  $i \leftarrow 1$  **até**  $L$  **faça**

    Calcula a densidade do ponto focal  $D_k(\mathbf{z}^{i*})$  (2.68);

**fim para**

**se**  $D_k(\mathbf{z}_k) > D_k(\mathbf{z}^{i*} \forall i$  **então**

**se**  $\mathbf{z}_k$  esta perto o suficiente algum ponto focal  $i$  **então**

$\mathbf{z}_k^{i*} \leftarrow \mathbf{z}_k$ ;

**senão**

$\mathbf{z}_k$  se torna o ponto focal da regra  $L + 1$ ;

**fim se**

**senão**

    Atualiza os parâmetros do consequente;

**fim se**

---



### 3 METODOLOGIA NEBULOSA EVOLUTIVA PARA IDENTIFICAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS

Nesta dissertação, o modelo nebuloso *Takagi-Sugeno* (TS) apresenta a  $i$ -ésima regra, dada por:

$$R^i : \text{SE } (\mathbf{z}_k \sim \mathbf{z}^{i*}) \text{ ENTÃO } \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}|^i = \mathbf{A}^i \mathbf{x}_k|^i + \mathbf{B}^i \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k|^i = \mathbf{C}^i \mathbf{x}_k|^i + \mathbf{D}^i \mathbf{u}_k \end{cases}$$

onde  $i = 1, 2, \dots, L$  é o número de regras,  $\mathbf{z}_k = [z_k^1 \ z_k^2 \ \dots \ z_k^p]$  são as variáveis do antecedente,  $\mathbf{z}^{i*} = [z_1^{i*} \ z_2^{i*} \ \dots \ z_p^{i*}]$  é o ponto focal da  $i$ -ésima regra,  $\mathbf{A}^i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B}^i \in \mathfrak{R}^{n \times r}$ ,  $\mathbf{C}^i \in \mathfrak{R}^{q \times n}$  e  $\mathbf{D}^i \in \mathfrak{R}^{q \times r}$  são os parâmetros do modelo linear local para cada regra,  $\mathbf{x}_k|^i = [x_k^1 \ x_k^2 \ \dots \ x_k^n] \in \mathfrak{R}^n$  é o vetor de estados do  $i$ -ésimo modelo linear local,  $\mathbf{y}_k|^i = [y_k^1 \ y_k^2 \ \dots \ y_k^q] \in \mathfrak{R}^q$  é o vetor de saída do  $i$ -ésimo modelo linear local e  $\mathbf{u}_k = [u_k^1 \ u_k^2 \ \dots \ u_k^r] \in \mathfrak{R}^r$  é o vetor de entrada.

O grau de pertinência de uma dada amostra para a  $i$ -ésima regra é dado por uma gaussiana centrada no ponto focal da regra, dada por:

$$\mu_j^i(z_k^j) = e^{-\frac{(z_k^j - z_j^{i*})^2}{2(\sigma_j^i)^2}} \quad (3.1)$$

onde  $\sigma_j^i$  é a variância da  $j$ -ésima variável de entrada para a  $i$ -ésima regra.

O grau de ativação normalizado da  $i$ -ésima regra, é formulado como:

$$\gamma^i(\mathbf{z}_k) = \frac{\prod_{j=1}^p \mu_j^i(z_k^j)}{\sum_{i=1}^R \prod_{j=1}^p \mu_j^i(z_k^j)} \quad (3.2)$$

A saída do modelo nebuloso TS, é dada por:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \sum_{i=1}^R \gamma^i(\mathbf{z}_k) \mathbf{x}_{k+1}|^i \\ \tilde{\mathbf{y}}_k = \sum_{i=1}^R \gamma^i(\mathbf{z}_k) \mathbf{y}_k|^i \end{cases} \quad (3.3)$$

#### 3.1 Estimação dos Parâmetros do Antecedente: Abordagem Evolutiva

O algoritmo usado para estimar as regras nebulosas emprega o conceito de estimação recursiva de densidade (RDE no inglês *recursive density estimation*) (ANGELOV; ZHOU,

2008b). A densidade de uma amostra  $\mathbf{z}_k$ , é dada por:

$$D(\mathbf{z}_k) = \frac{1}{1 + \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k |\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_i|^2} \quad (3.4)$$

Recursivamente, a equação (3.4) pode ser formulada, como:

$$D_k(\mathbf{z}_k) = \frac{k-1}{(k-1) \left( \sum_{i=1}^{p+q} (z_k^i)^2 + 1 \right) + b_k - \Lambda_k} \quad (3.5)$$

onde  $\Lambda_k = 2 \sum_{i=1}^{p+q} z_k^i c_k^i$ ,  $D_1(\mathbf{z}_1) = 1$ ,  $b_k = b_{k-1} + \sum_{j=1}^{p+q} (z_k^j)^2$ ,  $b_1 = 0$ ,  $c_k^j = c_k^j + z_k^j$ ,  $c_1^j = 0$ .

A densidade  $D(\mathbf{z}_k)$  indica a capacidade de generalização e representação de uma amostra. A condição usada para selecionar uma amostra como um novo ponto focal, chamada **Condição A**, é dada por (ANGELOV, 2013):

$$D_k(\mathbf{z}_k) > \max_{i=1}^L D_k \mathbf{z}^{i*} \text{ or } D_k(\mathbf{z}_k) < \min_{i=1}^L D_k \mathbf{z}^{i*} \quad (3.6)$$

Quando  $\mathbf{z}_k$  é selecionada para ser um novo ponto focal, sua densidade precisa ser atualizada a cada nova amostra. Esta tarefa é realizada, recursivamente, como mostrado a seguir:

$$D_k(\mathbf{z}^{i*}) = \frac{t-1}{t-1 + (t-2) \left( \frac{1}{D_{k-1}(\mathbf{z}^{i*})} - 1 \right) + \Psi_k} \quad (3.7)$$

onde  $\Psi_k = \sum_{j=1}^{p+q} (z_{k,j} - z_{(k-1),j})^2$ .

Para evitar redundancia das regras e controlar o grau de sobreposição, a **condição B** é usada (ANGELOV; KORDON, 2010):

$$\begin{aligned} \mathbf{SE} \mu_i^j(z_{k,j}) > \epsilon, i = [1, L-1], j = [1, p] \\ \mathbf{ENTÃO} L = L - 1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

De acordo com a equação (3.8) quando uma nova regra é criada todas as regras pré-existente com grau de pertinencia acima de um certo limiar  $\epsilon$  são substituídas pela nova regra, evitando que regras redundantes coexistam.

De modo a garantir que apenas regras com alguma contribuição sejam mantidas, minimizando o efeito de perturbações, uma condição para eliminar as regras com baixa qualidade, é utilizada, como segue (ANGELOV; KORDON, 2010):

$$\mathbf{SE} U_k^i < \eta \quad \mathbf{ENTÃO} L = L - 1 \quad (3.9)$$

com  $\eta \in [0.01, 0.3]$ , e

$$U_k^i = \frac{\sum_{j=1}^k \gamma_j^i}{k - I^{i*}} \quad (3.10)$$

onde  $i = [1, L]$  e  $I^{i*}$  é o instante que a  $i$ -ésima regra foi criada. A utilidade da regra  $U_k^i$  mensura o valor médio do grau de ativação de uma dada regra, para o instante no qual a regra foi criada até o instante atual (MACIEL; BALLINI; GOMIDE, 2017). Logo, uma regra com baixa utilidade não está contribuindo com a saída do modelo nebuloso; por esse motivo, a eliminação de tal regra não impactaria a qualidade do modelo obtido.

A variância  $\sigma_j^i$ , também conhecida como zone de influência da regra, é atualizada, recursivamente, como segue (ANGELOV, 2013):

$$\sigma_{k,j}^i = \sqrt{\zeta \left( \sigma_{(k-1),j}^i \right)^2 + (1 - \zeta) \frac{1}{S_k^i} (z_k^j - z_j^{i*})^2} \quad (3.11)$$

onde  $\zeta$  é uma contante de aprendizado e  $S_k^i$  é o número de amostras associadas com a  $i$ -ésima regra no  $k$ -ésimo instante de tempo.

O algoritmo 1, resume a abordagem de algoritmo evolutivo utilizada nesta dissertação.

---

### Algoritmo 3 Algoritmo de Agrupamento Nebuloso Evolutivo

---

Inicialização;

$k = 1$

Adquirir a Amostra  $\mathbf{z}_k$

$L = 1$ ;  $\mathbf{z}^{i*} = \mathbf{z}_k$ ;  $D_k(\mathbf{z}_k) = 1$ ;  $I^{i*} = k$ ;

**faça**

$k = k+1$ ;

Adquirir a amostra  $\mathbf{z}_k$

Calcular a densidade  $D_k(\mathbf{z}_k)$  (3.5)

Atualiza a densidade dos pontos focais (3.7)

**se** Condição A (3.6) **então**

$L = L + 1$ ;  $\mathbf{z}^{i*} = \mathbf{z}_k$ ;  $D_k(\mathbf{z}^{i*}) = D_k(\mathbf{z}_k)$ ;  $I^{i*} = k$ ;

**se** Condição B (3.8) **então**

Remover as regras que satisfazem essa condição;

**fim se**

**fim se**

Atualizar a utilidade  $U_k^i$  (3.10)

se Condition C (3.9) então

Remover as regras que satisfazem essa condição;

fim se

Atualizar a variância  $\sigma_j^i$  (3.11)

enquanto  $\mathbf{z}_{k+1} = \emptyset$

### 3.2 Estimação dos Parâmetros do Consequente: Abordagem Recursiva

O algoritmo evolutivo apresentado na seção anterior é capaz de alterar a estrutura, o número e os parâmetros das regras nebulosas, de acordo com o fluxo de dados. Nesta seção, é proposta uma nova metodologia para a estimação recursiva dos parâmetros do consequente do modelo Nebuloso, chamada de Algoritmo de Realização de Auto-Sistema Nebuloso (F-ERA no inglês Fuzzy Eigensystem Realization Algorithm), que utiliza os parâmetros de Markov para a estimação do modelo local linear no espaço de estados para a  $i$ -ésima regra.

#### 3.2.1 Algoritmo de Realização de Auto-Sistema Nebuloso (F-ERA)

O Algoritmo de Realização de Auto-Sistema Nebuloso (F-ERA) proposto nesta dissertação, utiliza os parâmetros de Markov nebulosos do sistema, para encontrar as matrizes no espaços de estados  $\mathbf{A}^i$ ,  $\mathbf{B}^i$  and  $\mathbf{C}^i$  para a  $i$ -ésima regra nebulosa. O algoritmo é baseado na matriz de Hankel generalizada com a os parâmetros de Markov nebulosos do sistema (JUANG, 1994)

$$\mathbf{H}_{j-1}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_j^i & \mathbf{M}_{j+1}^i & \cdots & \mathbf{M}_{j+\beta-1}^i \\ \mathbf{M}_{j+1}^i & \mathbf{M}_{j+2}^i & \cdots & \mathbf{M}_{j+\beta}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_{j+\alpha-1}^i & \mathbf{M}_{j+\alpha}^i & \cdots & \mathbf{M}_{j+\alpha+\beta-2}^i \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são números inteiros tal que  $\alpha q \leq \beta r$ , sendo  $r$  e  $q$  os números de entrada e saída do sistema, respectivamente.

Dado o modelo linear local para a  $i$ -ésima regra

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^i = \mathbf{A}^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{B}^i \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k^i = \mathbf{C}^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{D}^i \mathbf{u}_k \end{cases} \quad (3.13)$$

os parâmetros de Markov nebulosos do sistema, são definidos a seguir:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0^i &= \mathbf{D}^i \\ \mathbf{M}_j^i &= \mathbf{C}^i (\mathbf{A}^i)^{j-1} \mathbf{B}^i \end{aligned} \quad (3.14)$$

Substituindo (3.14) em (3.12), temos:

$$\mathbf{H}_{j-1}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^{j-1}\mathbf{B}^i & \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^j\mathbf{B}^i & \dots & \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^{j+\beta-1}\mathbf{B}^i \\ \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^j\mathbf{B}^i & \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^{j+1}\mathbf{B}^i & \dots & \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^{j+\beta}\mathbf{B}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^{j+\alpha-1}\mathbf{B}^i & \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^{j+\alpha}\mathbf{B}^i & \dots & \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^{j+\alpha+\beta-1}\mathbf{B}^i \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{H}_{j-1}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^i \\ \mathbf{C}^i\mathbf{A}^i \\ \vdots \\ \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^{\alpha-1} \end{bmatrix} (\mathbf{A}^i)^{j-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}^i\mathbf{B} & \dots & (\mathbf{A}^i)^{\beta-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{H}_{j-1}^i = \mathbf{P}_\alpha^i (\mathbf{A}^i)^{j-1} \mathbf{Q}_\beta^i \quad (3.17)$$

onde  $\mathbf{P}_\alpha^i$  é a matriz de controlabilidade e  $\mathbf{Q}_\beta^i$  é a matriz de observabilidade do modelo linear local.

Fazendo  $j = 1$  (3.15), temos

$$\mathbf{H}_0^i = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^i\mathbf{B}^i & \mathbf{C}^i\mathbf{A}^i\mathbf{B}^i & \dots & \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^{\beta-1}\mathbf{B}^i \\ \mathbf{C}^i\mathbf{A}^i\mathbf{B}^i & \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^2\mathbf{B}^i & \dots & \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^\beta\mathbf{B}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^{\alpha-1}\mathbf{B}^i & \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^\alpha\mathbf{B}^i & \dots & \mathbf{C}^i(\mathbf{A}^i)^{\alpha+\beta-1}\mathbf{B}^i \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{H}_0^i = \mathbf{P}_\alpha^i \mathbf{Q}_\beta^i \quad (3.19)$$

O posto máximo de  $\mathbf{H}_0^i$ , ou o número de valores singulares não nulos, é igual ao posto das matrizes  $\mathbf{P}_\alpha^i$  e  $\mathbf{Q}_\beta^i$ . Uma vez que o sistema é considerado controlável e observável, pode-se afirmar que a ordem do modelo linear local identificado é igual ao posto da matriz  $\mathbf{H}_0^i$ , ou em outras palavras, o número de valores singulares não nulos de  $\mathbf{H}_0^i$ .

A decomposição em valores singulares (SVD) da matriz de Hankel com  $j = 1$ , para a  $i$ -ésima regra, é dada por

$$\mathbf{H}_0^i = \mathbf{R}^i \Sigma^i (\mathbf{S}^i)^T \quad (3.20)$$

onde  $\mathbf{R}^i$  e  $\mathbf{S}^i$  são matrizes ortogonais, e  $\Sigma^i$  é uma matriz retangular, dada por:

$$\Sigma^i = \begin{bmatrix} \Sigma_n^i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

com

$$\Sigma_n^i = \begin{bmatrix} \sigma_1^i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^i \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

onde  $\sigma_1^i > \sigma_2^i > \cdots > \sigma_n^i > 0$  são os  $n$  valores singulares mais significativos de  $\mathbf{H}_0^i$ , sendo  $\sigma_n^i \gg \sigma_{n+1}^i$ . Então, considerando  $\mathbf{R}_n^i$  e  $\mathbf{S}_n^i$  matrizes formadas pelas  $n$  primeiras colunas de  $\mathbf{R}^i$  e  $\mathbf{S}^i$ , respectivamente, a matriz  $\mathbf{H}_0^i$  pode ser aproximada por

$$\mathbf{H}_0^i = \mathbf{R}_n^i \Sigma_n^i (\mathbf{S}_n^i)^T \quad (3.23)$$

com

$$(\mathbf{R}_n^i)^T \mathbf{R}_n^i = \mathbf{I} = (\mathbf{S}_n^i)^T \mathbf{S}_n^i \quad (3.24)$$

e sua pseudo-inversa dada por

$$(\mathbf{H}_0^i)^\dagger = \mathbf{S}_n^i (\Sigma_n^i)^{-1} (\mathbf{R}_n^i)^T \quad (3.25)$$

onde  $\dagger$  representa uma pseudo-inversa.

Realizando uma comparação entre as equações (3.23) e (3.19), pode-se definir  $\mathbf{P}_\alpha^i$  e  $\mathbf{Q}_\beta^i$  como sendo

$$\mathbf{P}_\alpha^i = \mathbf{R}_n^i (\Sigma_n^i)^{\frac{1}{2}} \quad (3.26)$$

e

$$\mathbf{Q}_\beta^i = (\Sigma_n^i)^{\frac{1}{2}} (\mathbf{S}_n^i)^T \quad (3.27)$$

Substituindo as equações (3.26) e (3.27) em (3.17) com  $j = 2$ , obtemos

$$\mathbf{H}_1^i = \mathbf{R}_n^i (\Sigma_n^i)^{\frac{1}{2}} \mathbf{A}^i (\Sigma_n^i)^{\frac{1}{2}} (\mathbf{S}_n^i)^T \quad (3.28)$$

A equação (3.28) pode ser resolvida para obtermos  $\mathbf{A}^i$ , como segue

$$\mathbf{A}^i = (\boldsymbol{\Sigma}_n^i)^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{R}_n^i)^T \mathbf{H}_1^i \mathbf{S}_n^i (\boldsymbol{\Sigma}_n^i)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.29)$$

A partir da equação (3.17), define-se  $\mathbf{T}_{bo}^i$  como sendo o primeiro bloco de dimensão  $\mathfrak{R}^{n \times n}$  de  $\mathbf{P}_\alpha^i$ . Logo, existe a seguinte matriz de transformação  $\mathbf{T}_n^i$  que satisfaz

$$\mathbf{T}_n^i = \mathbf{T}_{bo}^i (\mathbf{P}_\alpha^i)^\dagger \quad (3.30)$$

Seja

$$\mathbf{A}_0^i = \mathbf{T}_{bo}^i \mathbf{A}^i (\mathbf{T}_{bo}^i)^{-1} \quad (3.31)$$

Substituindo a equação (3.29) em (3.31), e realizando o seguinte desenvolvimento matemático, obtemos

$$\mathbf{A}_0^i = \mathbf{T}_{bo}^i \mathbf{A}^i (\mathbf{T}_{bo}^i)^{-1} \quad (3.32)$$

$$= \mathbf{T}_{bo}^i \left[ (\boldsymbol{\Sigma}_n^i)^{\frac{1}{2}} (\mathbf{R}_n^i)^T \mathbf{H}_1^i \mathbf{S}_n^i (\boldsymbol{\Sigma}_n^i)^{\frac{1}{2}} \right] (\mathbf{T}_{bo}^i)^{-1} \quad (3.33)$$

$$= (\mathbf{T}_n^i \mathbf{P}_\alpha^i) \left[ (\boldsymbol{\Sigma}_n^i)^{\frac{1}{2}} (\mathbf{R}_n^i)^T \mathbf{H}_1^i \mathbf{S}_n^i (\boldsymbol{\Sigma}_n^i)^{\frac{1}{2}} \right] \left( [\mathbf{P}_\alpha^i]^\dagger [\mathbf{T}_n^i]^\dagger \right) \quad (3.34)$$

$$= \left( \mathbf{T}_n^i \mathbf{R}_n^i (\boldsymbol{\Sigma}_n^i)^{\frac{1}{2}} \right) \left[ (\boldsymbol{\Sigma}_n^i)^{\frac{1}{2}} (\mathbf{R}_n^i)^T \mathbf{H}_1^i \mathbf{S}_n^i (\boldsymbol{\Sigma}_n^i)^{\frac{1}{2}} \right] \left[ (\boldsymbol{\Sigma}_n^i)^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{R}_n^i)^T (\mathbf{T}_n^i)^\dagger \right] \quad (3.35)$$

$$= \mathbf{T}_n^i \mathbf{H}_1^i \mathbf{H}_0^\dagger (\mathbf{T}_n^i)^\dagger \quad (3.36)$$

Como  $\mathbf{T}_{bo}$  foi definida como o primeiro bloco de dimensão  $\mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{T}_n$  pode ser definida como

$$\mathbf{T}_n^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n & \cdots & \mathbf{0}_n \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

onde  $\mathbf{T}_n$  possui dimensão  $\mathfrak{R}^{(q\alpha) \times n}$ . Assim, chegamos ao seguinte resultado

$$\mathbf{A}_0^i = \mathbf{T}_n^T \mathbf{H}_1^i [\mathbf{T}_n^T \mathbf{H}_0]^\dagger \quad (3.38)$$

A partir das equações (3.15), (3.17), (3.23), (3.25), uma realização mínima para o  $i$ -ésimo modelo linear local pode ser obtida como

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_j^i &= \mathbf{C}^i (\mathbf{A}^i)^{j-1} \mathbf{B}^i \\ &= \mathbf{T}_q^T \mathbf{H}_{j-1}^i \mathbf{T}_{(r+q)}^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{T}_q^T \mathbf{P}_\alpha^i (\mathbf{A}^i)^{j-1} \mathbf{Q}_\beta^i \mathbf{T}_{(r+q)}^T \\
 &= \mathbf{T}_q^T \mathbf{P}_\alpha^i \left[ \mathbf{Q}_\beta^i (\mathbf{H}_0^i)^\dagger \mathbf{P}_\alpha^i \right] (\mathbf{A}^i)^{j-1} \left[ \mathbf{Q}_\beta^i (\mathbf{H}_0^i)^\dagger \mathbf{P}_\alpha^i \right] \mathbf{Q}_\beta^i \mathbf{T}_{(r+q)}^T \\
 &= \mathbf{T}_q^T \mathbf{H}_0^i \left[ \mathbf{S}_n^i (\Sigma_n^i)^{-1} (\mathbf{R}_n^i)^T \right] \left[ \mathbf{P}_\alpha^i (\mathbf{A}^i)^{j-1} \mathbf{Q}_\beta^i \right] \left[ \mathbf{S}_n^i (\Sigma_n^i)^{-1} (\mathbf{R}_n^i)^T \right] \mathbf{H}_0^i \mathbf{T}_{(r+q)}^T \\
 &= \mathbf{T}_q^T \mathbf{H}_0^i \mathbf{S}_n^i (\Sigma_n^i)^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{T}_{bo}^\dagger \mathbf{T}_{bo} \right) \left[ (\Sigma_n^i)^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{R}_n^i)^T \mathbf{P}_\alpha^i (\mathbf{A}^i)^{j-1} \mathbf{Q}_\beta^i \mathbf{S}_n^i (\Sigma_n^i)^{-\frac{1}{2}} \right] \\
 &\quad \left[ \left( \mathbf{T}_{bo}^\dagger \mathbf{T}_{bo} \right) (\Sigma_n^i)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R}_n^i \mathbf{H}_0^i \mathbf{T}_{(r+q)}^T \right] \\
 &= \mathbf{T}_q^T \mathbf{R}_n^i (\Sigma_n^i)^{\frac{1}{2}} \left( \mathbf{T}_{bo}^\dagger \mathbf{T}_{bo} \right) \left[ (\Sigma_n^i)^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{R}_n^i)^T \mathbf{H}_1^i \mathbf{S}_n^i (\Sigma_n^i)^{-\frac{1}{2}} \right]^{j-1} \left( \mathbf{T}_{bo}^\dagger \mathbf{T}_{bo} \right) (\Sigma_n^i)^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}_n^i \mathbf{T}_{(r+q)}^T \\
 &= \left[ \mathbf{T}_q^T \mathbf{R}_n^i (\Sigma_n^i)^{\frac{1}{2}} \mathbf{T}_{bo}^\dagger \right] \left[ \mathbf{T}_{bo} (\Sigma_n^i)^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{R}_n^i)^T \mathbf{H}_1^i \mathbf{S}_n^i (\Sigma_n^i)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{T}_{bo}^\dagger \right]^{j-1} \left[ \mathbf{T}_{bo} (\Sigma_n^i)^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}_n^i \mathbf{T}_{(r+q)}^T \right] \\
 &= \left[ \mathbf{T}_q^T \mathbf{R}_n^i (\Sigma_n^i)^{\frac{1}{2}} (\Sigma_n^i)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R}_n^i \mathbf{T}_n^\dagger \right] \left[ \mathbf{T}_n \mathbf{R}_n^i (\Sigma_n^i)^{\frac{1}{2}} (\Sigma_n^i)^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{R}_n^i)^T \mathbf{H}_1^i \mathbf{S}_n^i (\Sigma_n^i)^{-\frac{1}{2}} (\Sigma_n^i)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R}_n^i \mathbf{T}_n^\dagger \right]^{j-1} \\
 &\quad \left[ \mathbf{T}_n \mathbf{R}_n^i (\Sigma_n^i)^{\frac{1}{2}} (\Sigma_n^i)^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}_n^i \mathbf{T}_{(r+q)}^T \right] \\
 &= \left[ \mathbf{T}_q^T \mathbf{T}_n^\dagger \right] \left[ \mathbf{T}_n \mathbf{H}_1^i (\mathbf{H}_0^i)^\dagger \mathbf{T}_n^\dagger \right] \left[ \mathbf{T}_n^T \mathbf{H}_0^i \mathbf{T}_{(r+q)} \right] \\
 &= \left[ \mathbf{T}_q^T \mathbf{T}_n \right] \left[ \mathbf{T}_n^T \mathbf{H}_1^i \left[ \mathbf{T}_n^T \mathbf{H}_0^i \right]^\dagger \right] \left[ \mathbf{T}_n^T \mathbf{H}_0^i \mathbf{T}_{(r+q)} \right] \tag{3.39}
 \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{T}_q^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q & \mathbf{0}_q & \cdots & \mathbf{0}_q \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

possui dimensão  $\mathfrak{R}^{x \times x}$ , e

$$\mathbf{T}_{(r+q)}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(r+q)} & \mathbf{0}_{(r+q)} & \cdots & \mathbf{0}_{(r+q)} \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

possui dimensão  $\mathfrak{R}^{x \times x}$ .

A partir dos resultados obtidos na equações (3.31) e (3.39), os parâmetros dos modelos lineares locais observáveis e controláveis são obtidos através das seguintes equações

$$\hat{\mathbf{A}}^i = \mathbf{T}_{bo}^i \mathbf{A}^i (\mathbf{T}_{bo}^i)^{-1} \tag{3.42}$$

$$\hat{\mathbf{B}}^i = \mathbf{T}_n^T \mathbf{H}_0^i \mathbf{T}_{(r+q)} \tag{3.43}$$

$$\hat{\mathbf{C}}^i = \mathbf{T}_q^T \mathbf{T}_n \tag{3.44}$$

No algoritmo 4 é ilustrado o pseudo código para o F-ERA.



**Algoritmo 4** Algoritmo de Realização de Auto-Sistema Nebuloso

- 
- 1: Inicialização dos Parâmetros:  $\alpha, \beta, L$ ;
  - 2: **para**  $i \leftarrow 1$  **até**  $L$  **faça**
  - 3:     Receber parâmetros de Markov nebuloso do sistema da regra  $i$ ;
  - 4:     Montar Matriz de Hankel  $\mathbf{H}_0^i$  e  $\mathbf{H}_1^i$  (3.15);
  - 5:     Calcular SVD de  $\mathbf{H}_0^i$ ;
  - 6:      $n$  = números de valores singulares significativos de  $\mathbf{H}_0^i$ ;
  - 7:     Calcular matrizes  $\hat{\mathbf{A}}^i, \hat{\mathbf{B}}^i$  e  $\hat{\mathbf{C}}^i$  (3.42)-(3.44);
  - 8: **fim para**
- 

## 3.2.2 Estimação Recursiva dos Parâmetros de Markov Nebulosos

Para calcular os parâmetros dos modelos locais é necessário o conhecimento dos parâmetros de Markov nebulosos do sistema para a  $i$ -ésima regra. É possível encontrar os parâmetros de Markov a partir um conjunto de dados de entrada e saída, mesmo para sistemas dinâmicos instáveis ou fracamente amortecidos, adicionando uma realimentação através de um observador para garantir estabilidade (JUANG, 1994). Adicionando e subtraindo  $\mathbf{G}^i \mathbf{y}_k |^i$  no lado direito do termo dos estados na equação (3.13), temos

$$\mathbf{x}_{k+1}^i = \mathbf{A}^i \mathbf{x}_k |^i + \mathbf{B}^i \mathbf{u}_k + \mathbf{G}^i \mathbf{y}_k |^i - \mathbf{G}^i \mathbf{y}_k |^i \quad (3.45)$$

$$= [\mathbf{A}^i + \mathbf{G}^i \mathbf{C}^i] \mathbf{x}_k |^i + [\mathbf{B}^i + \mathbf{G}^i \mathbf{D}^i] \mathbf{u}_k - \mathbf{G}^i \mathbf{y}_k |^i \quad (3.46)$$

$$= \bar{\mathbf{A}}^i \mathbf{x}_k |^i + \bar{\mathbf{B}}^i \mathbf{v}_k |^i \quad (3.47)$$

com

$$\bar{\mathbf{A}}^i = \mathbf{A}^i + \mathbf{G}^i \mathbf{C}^i \quad (3.48)$$

$$\bar{\mathbf{B}}^i = \mathbf{B}^i + \mathbf{G}^i \mathbf{D}^i \quad (3.49)$$

$$\mathbf{v}_k |^i = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k |^i \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

onde  $\mathbf{G}^i \in \mathfrak{R}^{n \times q}$  é o ganho do observador do modelo linear local da  $i$ -ésima regra.

Resolvendo a equação (3.47) para  $j = 0, 1, \dots, k$  e  $\mathbf{x}_0 |^i = 0$ , obtém-se:

$$\mathbf{x}_k |^i = \sum_{j=1}^k (\bar{\mathbf{A}}^i)^{j-1} \bar{\mathbf{B}}^i \mathbf{v}_{k-j} |^i \quad (3.51)$$

Substituindo-se (3.51) no termo da saída de (3.13), tem-se:

$$\mathbf{y}_k |^i = \sum_{j=1}^k \mathbf{C}^i (\bar{\mathbf{A}}^i)^{j-1} \bar{\mathbf{B}}^i \mathbf{v}_{k-j} |^i + \mathbf{D}^i \mathbf{u}_k \quad (3.52)$$

Devido a presença do observador de estados, é válido considerar  $(\bar{\mathbf{A}}^i)^t \approx 0$ . Portanto, a equação (3.52) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{y}_k|^i = \sum_{j=1}^t \bar{\mathbf{M}}_j^i \mathbf{v}_{k-1}|^i + \mathbf{D}^i \mathbf{u}_k \quad (3.53)$$

onde  $\bar{\mathbf{M}}_j^i = \mathbf{C}^i (\bar{\mathbf{A}}^i)^{j-1} \bar{\mathbf{B}}^i$  é o  $j$ -ésimo parâmetro de Markov do observador do  $i$ -ésimo modelo local.

A equação (3.53) possui a seguinte representação matricial:

$$\mathbf{y}_k|^i = \boldsymbol{\theta}_k^i \boldsymbol{\phi}_k^i \quad (3.54)$$

onde  $\boldsymbol{\theta}_k^i = [\mathbf{D}_k^i \quad \bar{\mathbf{M}}_{k_1}^i \quad \dots \quad \bar{\mathbf{M}}_{k_p}^i]$ , o sub-índice  $k$  indica que  $\boldsymbol{\theta}_k^i$  é estimada utilizando os dados obtidos até o  $k$ -ésimo instante de tempo, e  $\boldsymbol{\phi}_k^i = [\mathbf{u}_k^T \quad (\mathbf{v}_{k-1}|^i)^T \quad \dots \quad (\mathbf{v}_{k-p}|^i)^T]^T$ .

Considerando a equação (3.54) para  $k > p$ , que possui em batelada, a seguinte representação matricial:

$$\mathbf{Y}_k|^i = \boldsymbol{\theta}_k^i \boldsymbol{\Phi}_k^i \quad (3.55)$$

onde  $\mathbf{Y}_k|^i = [\mathbf{y}_{p+1}|^i \quad \mathbf{y}_{p+2}|^i \quad \dots \quad \mathbf{y}_k|^i]$ ,  $\boldsymbol{\Phi}_k^i = [\boldsymbol{\phi}_{p+1}^i \quad \boldsymbol{\phi}_{p+2}^i \quad \dots \quad \boldsymbol{\phi}_k^i]$ .

A partir da equação (3.3), a saída do modelo nebuloso TS, é dada por:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_k = \sum_{i=1}^L \boldsymbol{\theta}_k^i \boldsymbol{\Phi}_k^i \boldsymbol{\Gamma}_k^i \quad (3.56)$$

onde

$$\boldsymbol{\Gamma}_k^i = \begin{bmatrix} \gamma^i(\mathbf{z}_{p+1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma^i(\mathbf{z}_{p+2}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma^i(\mathbf{z}_k) \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

é a matriz de ponderação nebulosa, com o grau de ativação normalizado como em (3.2).

De modo a garantir a interpretabilidade dos modelos nebulosos obtidos, a abordagem local é utilizada para a solução do problema de mínimos quadrados, como segue:

$$\boldsymbol{\theta}_k^i = \tilde{\mathbf{Y}}_k \boldsymbol{\Gamma}_k^i (\boldsymbol{\Phi}_k^i)^T \left[ \boldsymbol{\Phi}_k^i \boldsymbol{\Gamma}_k^i (\boldsymbol{\Phi}_k^i)^T \right]^{-1} \quad (3.58)$$

onde  $\tilde{\mathbf{Y}}_k = [\mathbf{y}_{p+1} \quad \mathbf{y}_{p+2} \quad \dots \quad \mathbf{y}_k]$  é o vetor de saída.

Adicionando-se os termos  $\mathbf{u}_{k+1}$  e  $\mathbf{y}_{k+1}$  em (3.58), obtemos:

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1}^i = \tilde{\mathbf{Y}}_{k+1} \Gamma_{k+1}^i (\boldsymbol{\Phi}_{k+1}^i)^T \left[ \boldsymbol{\Phi}_{k+1}^i \Gamma_{k+1}^i (\boldsymbol{\Phi}_{k+1}^i)^T \right]^{-1} \quad (3.59)$$

onde  $\tilde{\mathbf{Y}}_{k+1} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_k & \mathbf{y}_{k+1} \end{bmatrix}$  e  $\boldsymbol{\Phi}_{k+1}^i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_k^i & \phi_{k+1}^i \end{bmatrix}$ .

Estimando-se  $\boldsymbol{\theta}_k^i$  de acordo com (3.59) requer a inversão de uma matriz de dimensão elevada, que pode induzir a erros números e uma complexidade computacional elevada (WU et al., 2015). De modo a evitar esse problema, a solução para a equação (3.59) pode ser desenvolvida recursivamente. A matriz de covariância, é dada por:

$$\mathbf{P}_{k+1}^i = \left[ \boldsymbol{\Phi}_{k+1}^i \Gamma_{k+1}^i (\boldsymbol{\Phi}_{k+1}^i)^T \right]^{-1} \quad (3.60)$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^i = \left[ \boldsymbol{\Phi}_k^i \Gamma_k^i (\boldsymbol{\Phi}_k^i)^T + \phi_{k+1}^i \gamma^i(z_{k+1}) (\phi_{k+1}^i)^T \right]^{-1} \quad (3.61)$$

Utilizando-se o lema da matriz inversa, a equação (3.61) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{P}_{k+1}^i = \mathbf{P}_k^i \left[ \mathbf{I} - \frac{\phi_{k+1}^i (\phi_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_k^i}{(\gamma^i(z_{k+1}))^{-1} + (\phi_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_k^i \phi_{k+1}^i} \right] \quad (3.62)$$

Substituindo-se (3.62) em (3.59), tem-se:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_{k+1}^i &= \tilde{\mathbf{Y}}_{k+1} \Gamma_{k+1}^i (\boldsymbol{\Phi}_{k+1}^i)^T \left[ \boldsymbol{\Phi}_{k+1}^i \Gamma_{k+1}^i (\boldsymbol{\Phi}_{k+1}^i)^T \right]^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_k & \mathbf{y}_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{k+1}^i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^i(z_{k+1}) \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_k^i & \phi_{k+1}^i \end{bmatrix} \right)^T \mathbf{P}_{k+1}^i \\ &= \tilde{\mathbf{Y}}_k (\boldsymbol{\Phi}_k^i)^T \mathbf{P}_k^i \left[ \mathbf{I} - \frac{\phi_{k+1}^i (\phi_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_k^i}{(\gamma^i(z_{k+1}))^{-1} + (\phi_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_k^i \phi_{k+1}^i} \right] + \\ &\quad + \gamma^i(z_{k+1}) \mathbf{y}_{k+1} (\phi_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_k^i \left[ \mathbf{I} - \frac{\phi_{k+1}^i (\phi_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_k^i}{(\gamma^i(z_{k+1}))^{-1} + (\phi_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_k^i \phi_{k+1}^i} \right] \\ &= \boldsymbol{\theta}_k^i + [\mathbf{y}_{k+1} - \boldsymbol{\theta}_k^i \phi_{k+1}^i] \frac{(\phi_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_k^i}{(\gamma^i(z_{k+1}))^{-1} + (\phi_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_k^i \phi_{k+1}^i} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Portanto, a partir das equações (3.62) e (3.63), os parâmetros de Markov do observador pode ser obtido recursivamente como segue, como segue:

$$\mathbf{G}_k^i = \frac{(\phi_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_k^i}{(\gamma^i(\mathbf{z}_{k+1}))^{-1} + (\phi_{k+1}^i)^T \mathbf{P}_k^i \phi_{k+1}^i} \quad (3.64)$$

$$\theta_{k+1}^i = \theta_k^i + [\mathbf{y}_{k+1} - \theta_k^i \phi_{k+1}^i] \mathbf{G}_k^i \quad (3.65)$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^i = \mathbf{P}_k^i [\mathbf{I} - \phi_{k+1}^i \mathbf{G}_k^i] \quad (3.66)$$

Para construir a matriz de Hankel (3.23) é necessário a obtenção dos parâmetros de Markov nebulosos do sistema a partir dos parâmetros de Markov do observador encontrados. Os parâmetros de Markov do observador  $\bar{\mathbf{M}}_j^i$ , são definidos como:

$$\bar{\mathbf{M}}_j^i = \mathbf{C}^i (\bar{\mathbf{A}}^i)^{j-1} \bar{\mathbf{B}}^i \quad (3.67)$$

$$= \left[ \mathbf{C}^i (\mathbf{A}^i + \mathbf{G}^i \mathbf{C}^i)^{k-1} (\mathbf{B}^i + \mathbf{G}^i \mathbf{D}^i), -\mathbf{C}^i (\mathbf{A}^i + \mathbf{G}^i \mathbf{C}^i)^{k-1} \mathbf{G}^i \right] \quad (3.68)$$

$$\triangleq [\bar{\mathbf{M}}_j^{i1}, -\bar{\mathbf{M}}_j^{i2}] \quad (3.69)$$

Deste modo, os parâmetros de Markov nebulosos do sistema podem ser obtidos resolvendo as seguintes equações, para a  $i$ -ésima regra nebulosa, como segue:

$$\mathbf{M}_0^i = \mathbf{D}^i \quad (3.70)$$

$$\mathbf{M}_j^i = \bar{\mathbf{M}}_j^{i1} - \sum_{k=1}^j \bar{\mathbf{M}}_k^{i2} \mathbf{M}_{j-k}^i, \text{ for } j = 1, 2, \dots, p \quad (3.71)$$

$$\mathbf{M}_j^i = - \sum_{k=1}^p \bar{\mathbf{M}}_k^{i2} \mathbf{M}_{j-k}^i, \text{ for } j > p \quad (3.72)$$

---

**Algoritmo 5** Estimação Recursiva dos Parâmetros de Markov Nebulosos do Sistema
 

---

- 1: Inicialização;
  - 2: Coletar  $N_b$  amostras;
  - 3: Obter estimativa inicial em batelada para todas as regras (3.58);
  - 4: **para**  $k \leftarrow N_b + 1$  **até**  $N$  **faça**
  - 5:     Adquirir amostra  $\mathbf{z}_k$ ;
  - 6:     **para**  $i \leftarrow 1$  **até**  $L$  **faça**
  - 7:         Montar matriz de regressores  $\phi_{k+1}^i$ ;
  - 8:         Atualizar Matriz de Ganho  $\mathbf{G}_k^i$  (3.64);
  - 9:         Atualizar Parâmetros de Markov Nebulosos do Observador  $\theta_{k+1}^i$  (3.65);
  - 10:         Atualizar Matriz de Covariância  $\mathbf{P}_{k+1}^i$  (3.66);
  - 11:         Obter Parâmetros de Markov Nebulosos do Sistema (3.71) e (3.72);
  - 12:     **fim para**
  - 13: **fim para**
-

### 3.3 Modelagem Nebulosa Takagi-Sugeno Evolutiva no Espaço de Estados: Algoritmo

Foi apresentado anteriormente o algoritmo evolutivo para a estimação dos parâmetros do antecedente, e o algoritmo recursivo para a realização mínima dos modelos lineares locais no espaço de estados. A conexão do aprendizado do antecedente com a estimação recursiva dos parâmetros do consequente é mostrada nessa seção.

O algoritmo proposto possui os seguintes passos.

- **Passo 1:** Inicialização do Algoritmo;
- **Passo 2:** Aquisição da próxima amostra;
- **Passo 3:** Calculo da densidade da nova amostra e atualização da densidade dos pontos focais existentes;
- **Passo 4:** Verificação de possíveis mudanças na estrutura e/ou parâmetros do antecedente;
- **Passo 5:** Atualização recursiva dos parâmetros do consequente;

No **Passo 1** uma quantidade  $N_b$  de amostras é utilizada para a inicialização do algoritmo. Inicialmente, o algoritmo 3 é utilizado para estimação dos parâmetros do antecedente do modelo nebuloso. A seguir, é realizada a estimação em batelada dos parâmetros do consequente (3.58).

O **Passo 2** é o início da fase evolutiva do algoritmo.

No **Passo 3** é realizado o calculo da densidade da nova amostra (3.4) e a atualização da densidade dos pontos focais já existentes (3.7).

No passo **Passo 4** são verificadas as condições para modificações na base de regras. Se uma nova regra for criada pela **condição A** (3.6), os parâmetros do consequentes da nova regra  $L + 1$ , são dados por:

$$\theta_k^{L+1} = \sum_{i=1}^L \gamma(z_k)^i \theta_k^i \quad (3.73)$$

E por conseguinte, as realizações dos modelos lineares locais são obtidas utilizando o algoritmo 4.

No **Passo 5** os parâmetros de Markov nebulosos do observador são atualizados recursivamente por (3.64)-(3.71), e as matrizes dos modelos lineares locais são obtidas utilizando o algoritmo 4.

## 4 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Neste capítulo, são apresentados os resultados experimentais com o intuito de avaliar o desempenho da metodologia nebulosa evolutiva para identificação no espaço de estados proposta nessa dissertação.

O desempenho da metodologia proposta é demonstrado a partir de quatro casos. Os primeiros dois casos são *benchmarks* propostos em (JAFARI; SALIMIFARD; DEHGHANI, 2014). A seguir, é proposta a identificação de um Helicóptero com dois graus de liberdade. Por fim, uma aplicação em previsão da trajetória de um foguete, é apresentada.

A fim de avaliar e comparar os resultados obtidos com o modelo nebuloso TS proposto para os dois primeiros casos, é aplicado o critério do erro médio quadrático (MSE, no inglês *Mean Squared Error*):

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k)^2 \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{y}_k$  é a saída real da planta no instante  $k$ ,  $\hat{\mathbf{y}}_k$  é a saída da planta estimada pelo modelo no instante  $k$  e  $N$  é o tamanho do conjunto de dados. E o *Best Fit Critereon* (FIT):

$$FIT(\%) = \left( 1 - \frac{\|\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}\|}{\|\mathbf{Y} - \bar{y}\|} \right) \times 100 \quad (4.2)$$

onde  $\mathbf{Y}$  é o vetor contendo a saída real da planta,  $\hat{\mathbf{Y}}$  é o vetor contendo a saída estimada da planta,  $\bar{y}$  é o valor médio do vetor  $Y$  e  $\|\cdot\|$  operador de norma euclidiana.

Para avaliar os resultados obtidos com o modelo nebuloso TS proposto para a identificação do helicóptero com dois graus de liberdade e para a estimação da trajetória do foguete é usado a métrica *Variance Accounted For* (VAF):

$$VAF(\%) = 100 \times \left[ 1 - \frac{\text{var}(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}})}{\text{var}(\mathbf{Y})} \right] \quad (4.3)$$

onde  $\mathbf{Y}$  é o vetor contendo a saída real da planta,  $\hat{\mathbf{Y}}$  é o vetor contendo a saída estimada da planta, e  $\text{var}$  é o operador de variância de um determinado sinal.

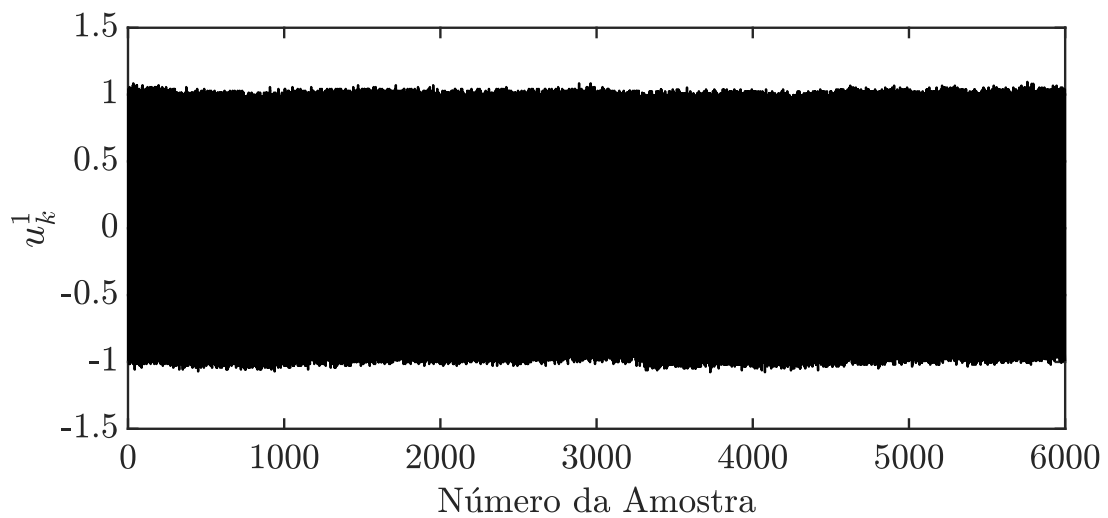
### 4.1 Caso 1: Identificação de um Evaporador Industrial

Nesta seção, é proposta a identificação de um Evaporador industrial (ZHU et al., 1994) (LUO; SONG, 2014) (MOOR et al., 1997), com três entradas e três saídas. Este sistema é um evaporador de quatro estágios para reduzir o nível de água de um determinado

produto. As três entradas do sistema são o fluxo de alimentação do primeiro estágio evaporador, o fluxo de vapor do primeiro estágio evaporador, e o fluxo de água fria. As três saídas do processo são o conteúdo de matéria seca, o fluxo de produto na saída, e a temperatura do produto na saída.

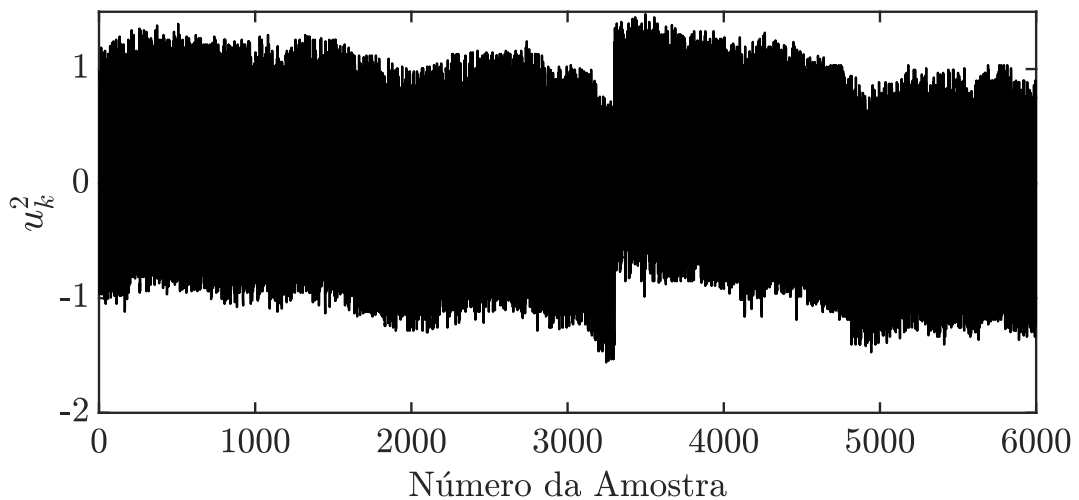
Os dados de entrada e saída disponíveis são de 6000 amostras. As primeiras 3000 amostras são utilizadas para a identificação do modelo nebuloso evolutivo, e as outras 3000 amostras são usadas para a validação do modelo obtido. Os dados utilizados são mostrados nas Figs. 4-9.

Figura 4 – Entrada  $u_k^1$  do evaporador industrial utilizado no caso 1.

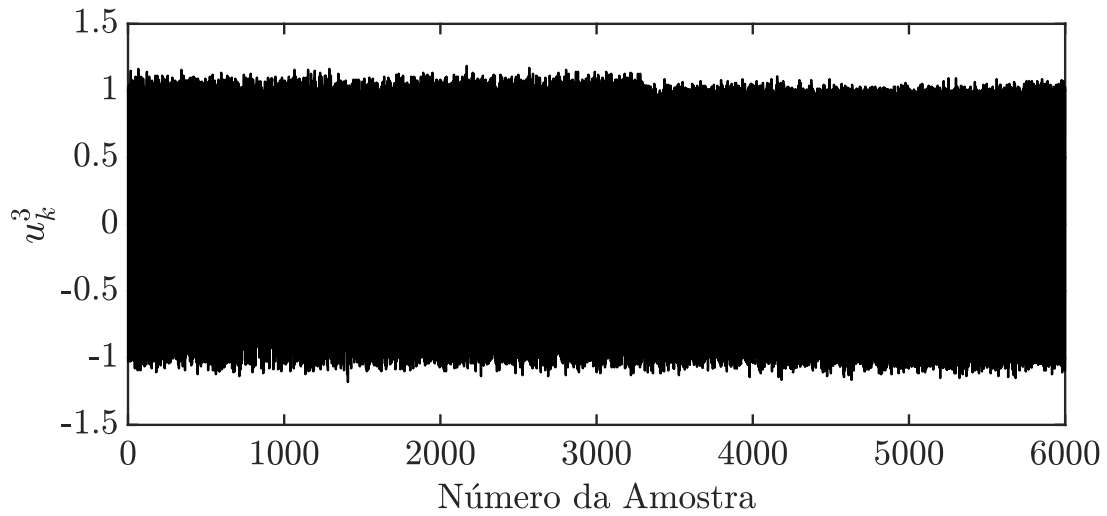


Fonte: Autor

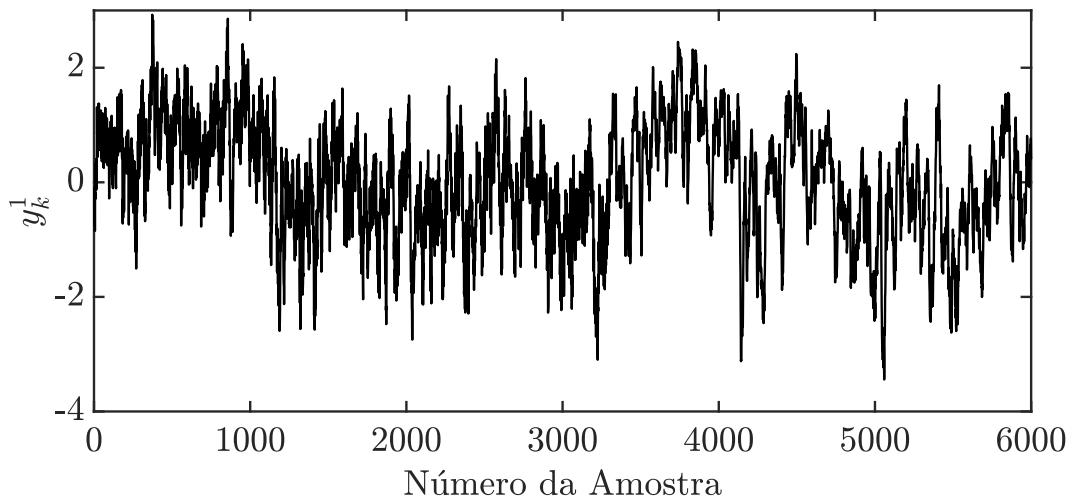
Figura 5 – Entrada  $u_k^2$  do evaporador industrial utilizado no caso 1.



Fonte: Autor

Figura 6 – Entrada  $u_k^3$  do evaporador industrial utilizado no caso 1.

Fonte: Autor

Figura 7 – Saída  $y_k^1$  do evaporador industrial utilizado no caso 1.

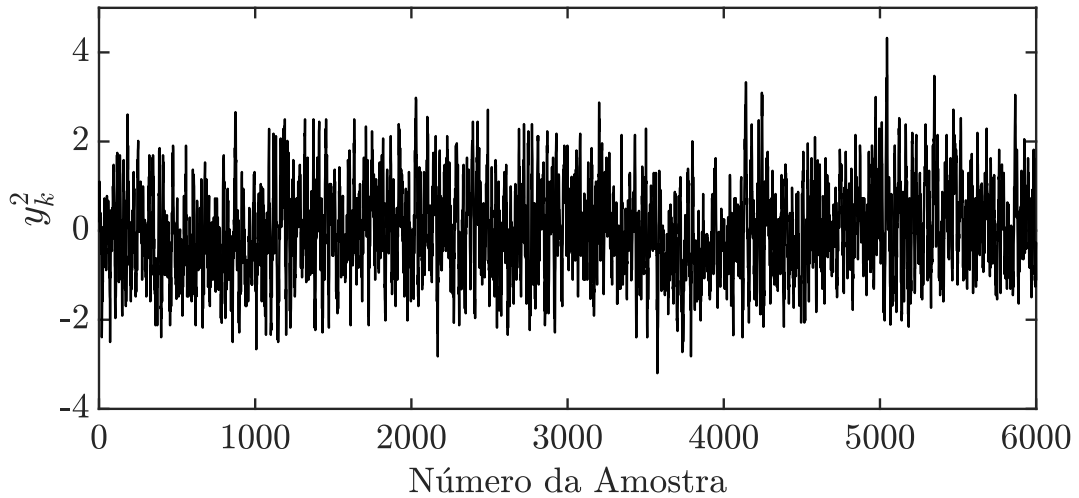
Fonte: Autor

A regra generalizada para o modelo nebuloso é dada por

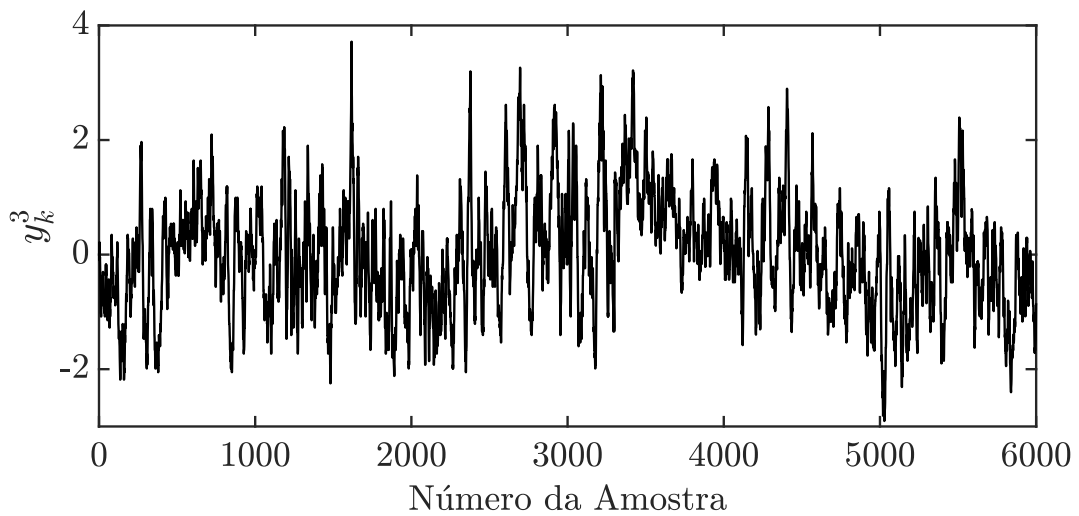
$$\begin{aligned}
 R^i : \text{SE } \mathbf{z}_k = [\mathbf{u}_{k-1} \ \mathbf{y}_{k-1}] \sim \mathbf{z}^{i*} = [\mathbf{u}_{k-1}^{(i*)} \ \mathbf{y}_{k-1}^{(i*)}] \\
 \text{ENTAO } \begin{cases} \mathbf{x}_k |_{k+1}^i = \mathbf{A}^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{B}^i \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k |^i = \mathbf{C}^i \mathbf{x}_k |^i + \mathbf{D}^i \mathbf{u}_k \end{cases} \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

Para a implementação da metodologia proposta foram considerados os seguintes parâmetros:  $p = 20$  (número de parâmetros de Markov independentes),  $\alpha = 100$  (número de linhas da matriz de Hankel),  $\beta = 200$  (número de colunas da matriz de Hankel),  $\varepsilon = 0.5$  (limiar de sobre-



Figura 8 – Saída  $y_k^2$  do evaporador industrial utilizado no caso 1.

Fonte: Autor

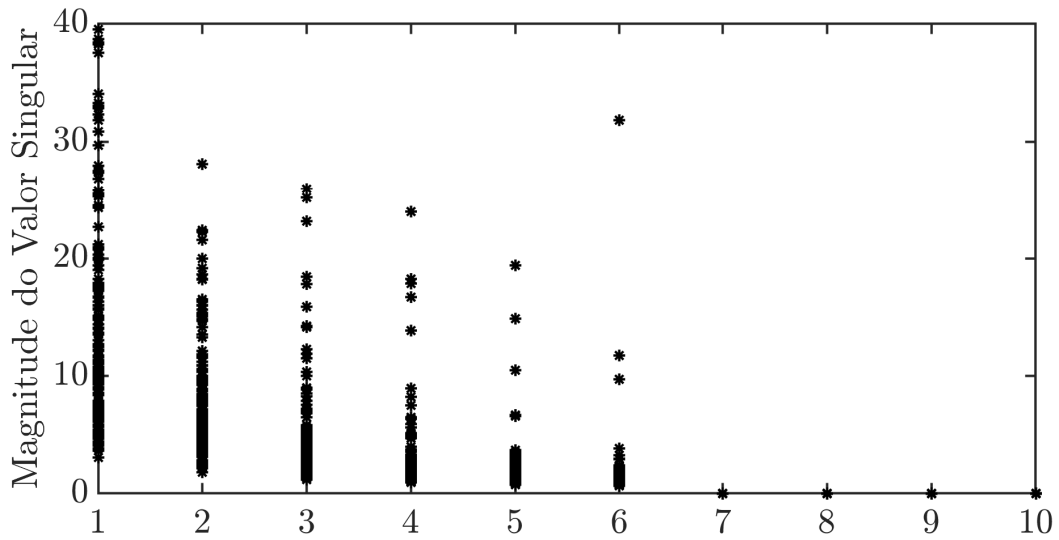
Figura 9 – Saída  $y_k^3$  do evaporador industrial utilizado no caso 1.

Fonte: Autor

posição),  $\eta = 0.3$  (limiar da utilidade), onde um conjunto de 1000 é utilizado para a estimação inicial do modelo. Analisando os valores singulares da matriz de Hankel mostrado na Fig. 10, pode-se perceber que existem seis valores singulares significantes para todas as regras durante a identificação evolutiva, logo a ordem escolhida para o modelo nebuloso obtido é  $n = 6$ .

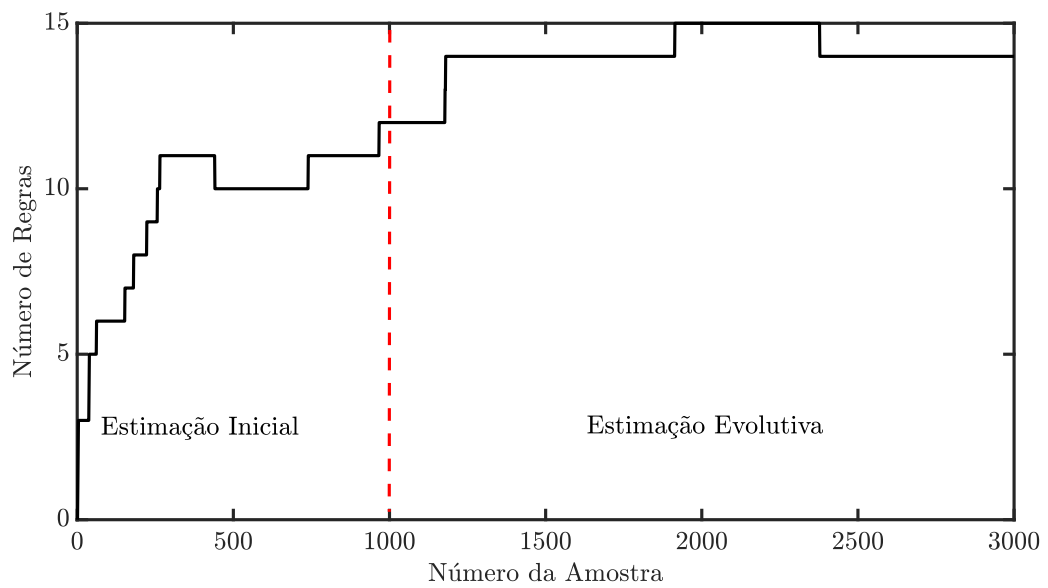
O número de regras no modelo nebuloso evolutivo, é mostrada na Fig. 11. Depois das 1000 amostras iniciais o modelo possui 12 regras; durante o processo evolutivo, o número de regras é de 13 na amostra 1178; o número de regras é 14 na amostra 1180; o número de regras é de 15 na amostra 1913; na amostra 2378 uma regra é excluída então o número final de regras é 14.

Figura 10 – Espaço dos valores singulares da matriz de Hankel para todas as regras durante o processo de identificação do evaporador industrial.



Fonte: Autor

Figura 11 – Variação do número de regras durante a identificação evolutiva do evaporador industrial.

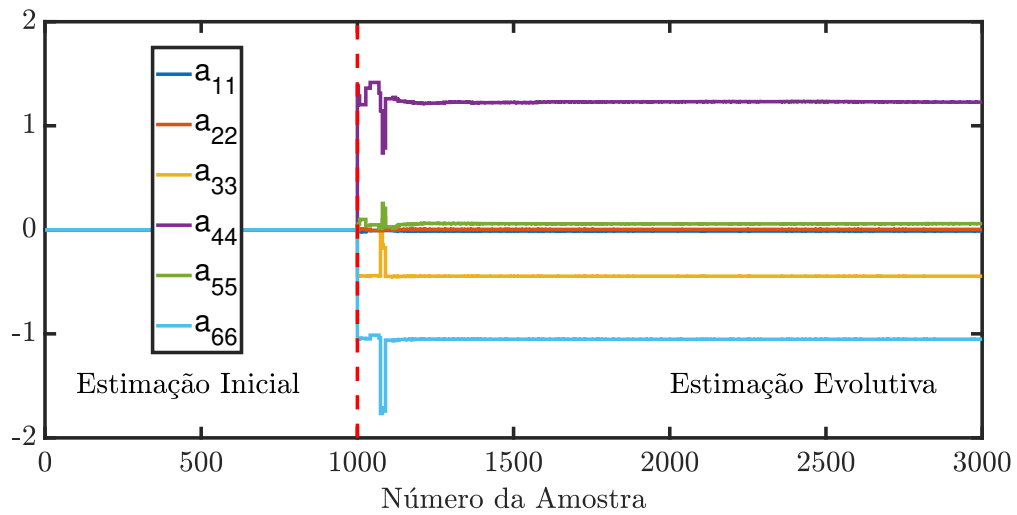


Fonte: Autor

A evolução dos parâmetros do consequente para cada regra, ilustrados pela atualização recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $\mathbf{A}^i$ , é mostrado nas Figs. 12-26.

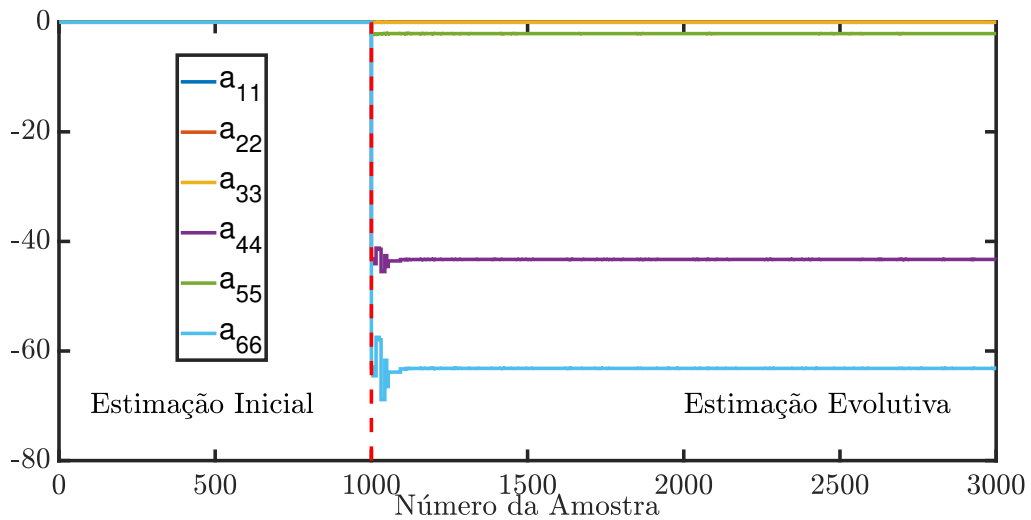
As comparações entre a resposta temporal do modelo nebuloso obtido e do processo real para as saídas  $y_1$ - $y_3$  são mostradas nas Figs. 27-29, respectivamente. Para ilustra a eficiência da metodologia proposta, na tabela 1 é feita uma comparação com a metodologia proposta em (JAFARI; SALIMIFARD; DEGHANI, 2014) amplamente citado na literatura. Os resultados

Figura 12 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $A^1$  para a regra 1 processo de identificação do evaporador industrial.



Fonte: Autor

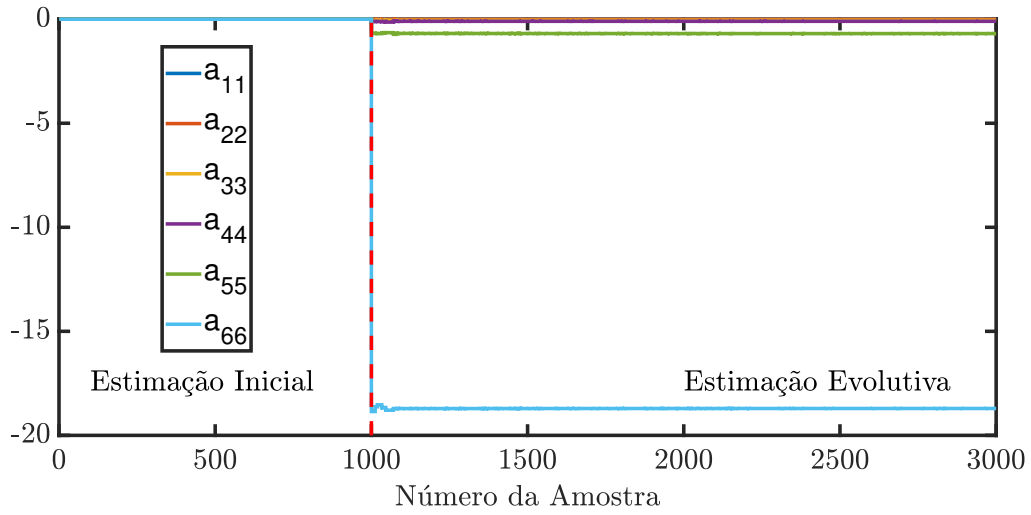
Figura 13 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $A^2$  para a regra 2 processo de identificação do evaporador industrial.



Fonte: Autor

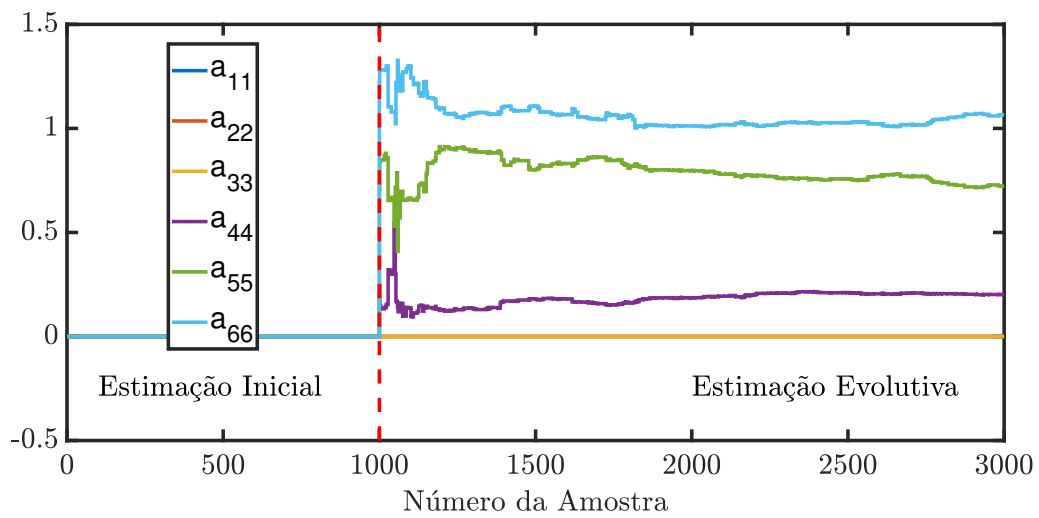
mostram que o modelo obtido com a metodologia proposta possui melhores valores de MSE e FIT para as saídas  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$ . A metodologia proposta também apresenta melhor performance considerando os valores médios para o MSE e FIT.

Figura 14 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $A^3$  para a regra 3 processo de identificação do evaporador industrial.



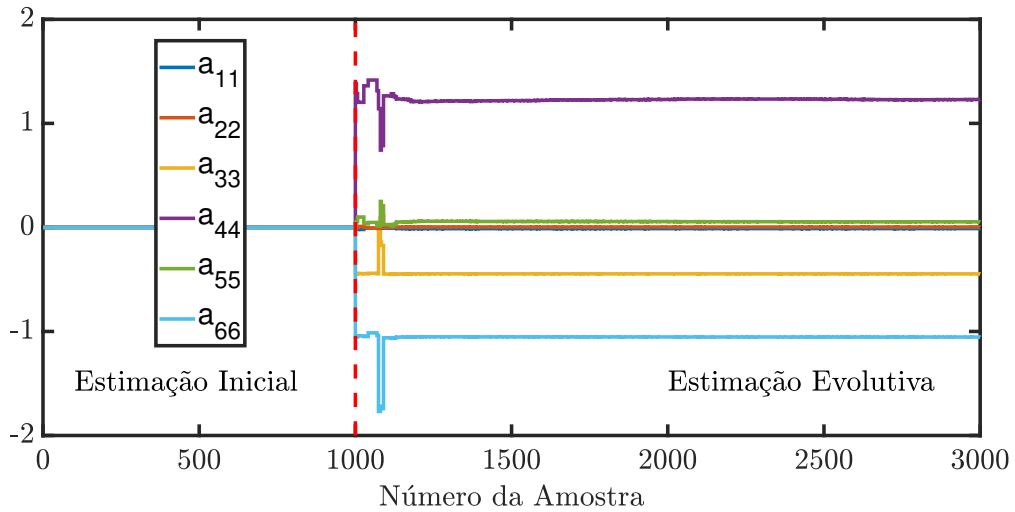
Fonte: Autor

Figura 15 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $A^4$  para a regra 4 processo de identificação do evaporador industrial.



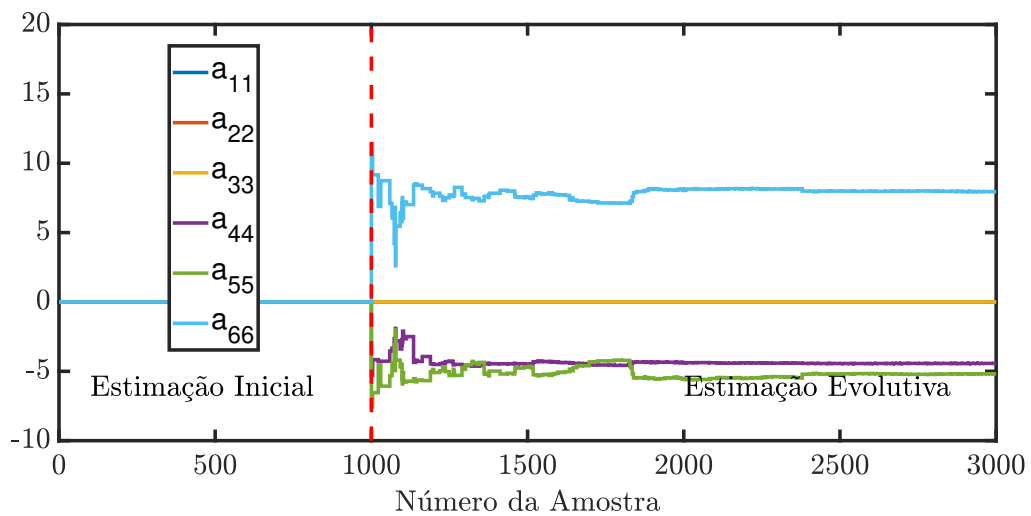
Fonte: Autor

Figura 16 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $A^5$  para a regra 5 processo de identificação do evaporador industrial.



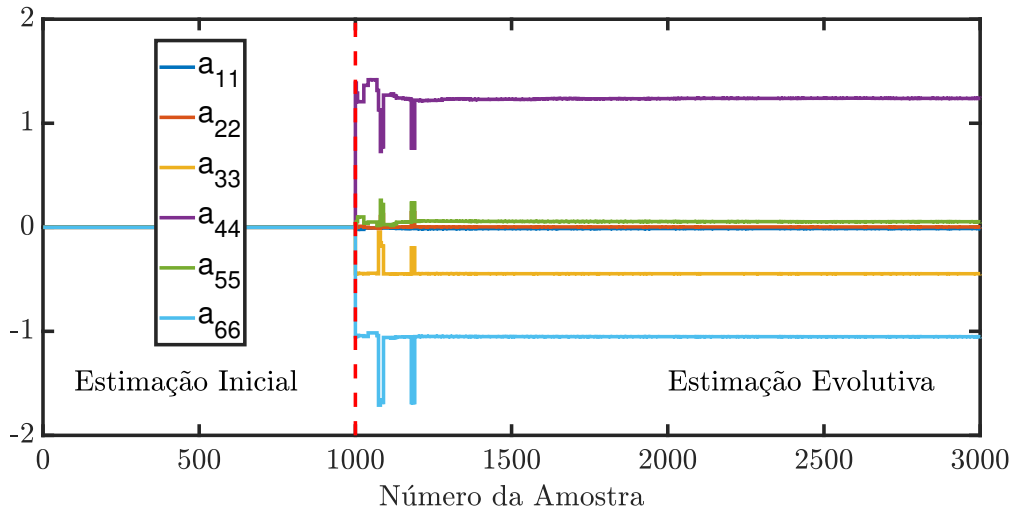
Fonte: Autor

Figura 17 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $A^6$  para a regra 6 processo de identificação do evaporador industrial.



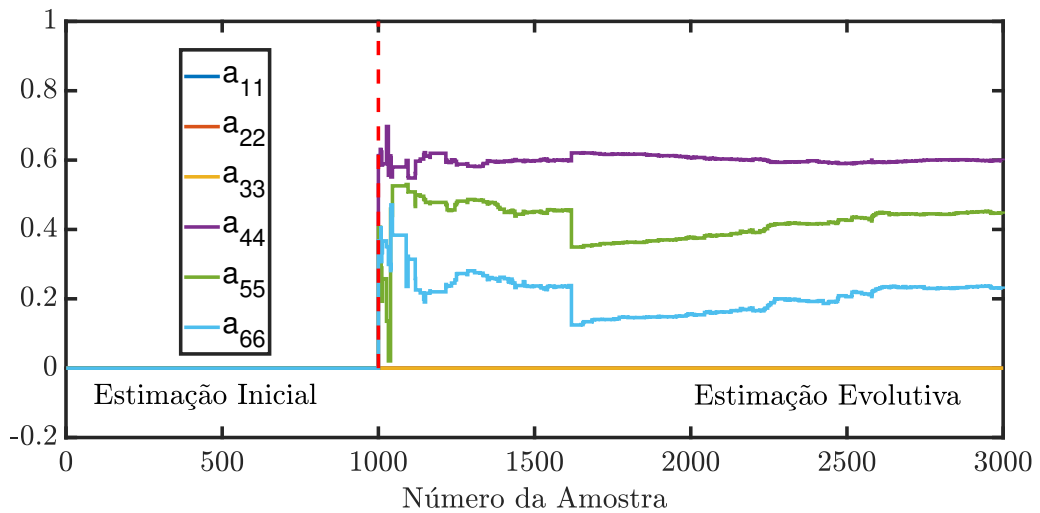
Fonte: Autor

Figura 18 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $A^7$  para a regra 7 processo de identificação do evaporador industrial.



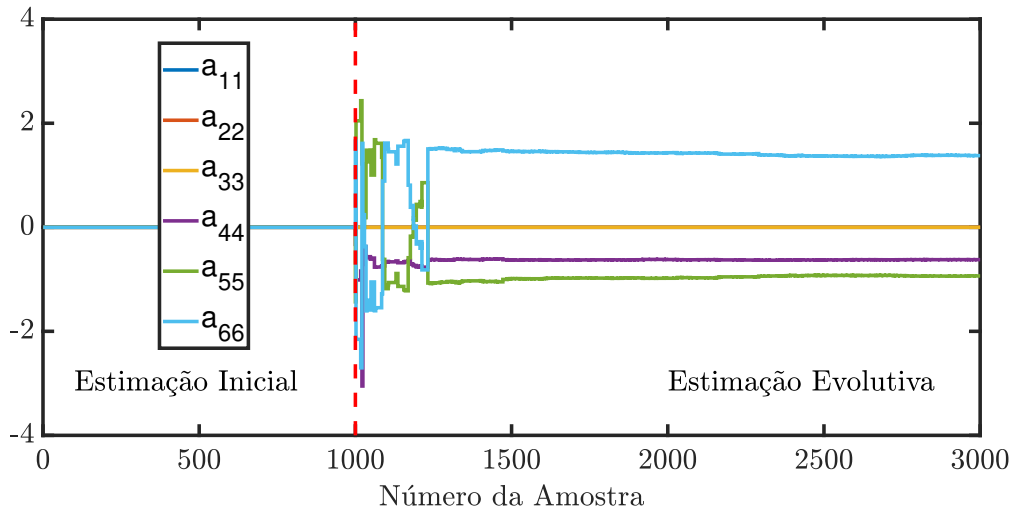
Fonte: Autor

Figura 19 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $A^8$  para a regra 8 processo de identificação do evaporador industrial.



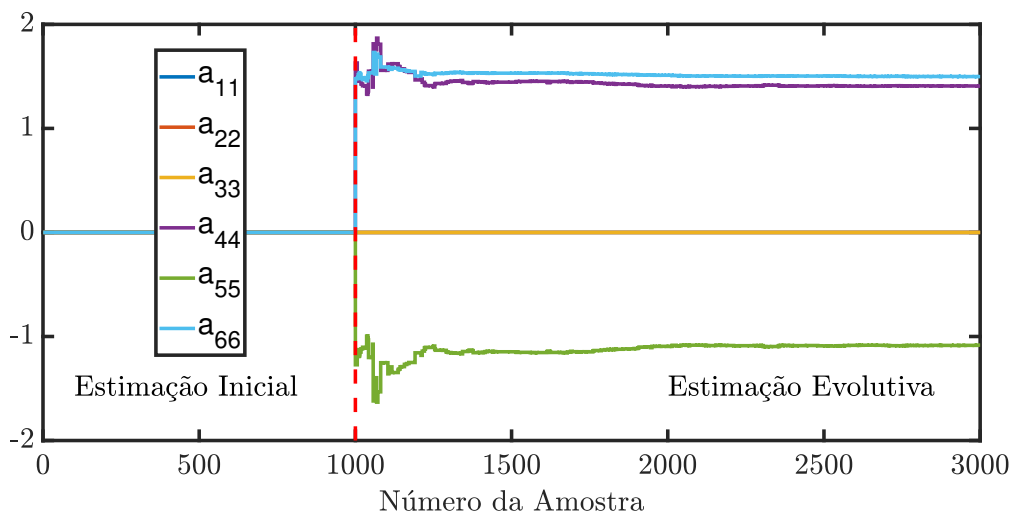
Fonte: Autor

Figura 20 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $A^9$  para a regra 9 processo de identificação do evaporador industrial.



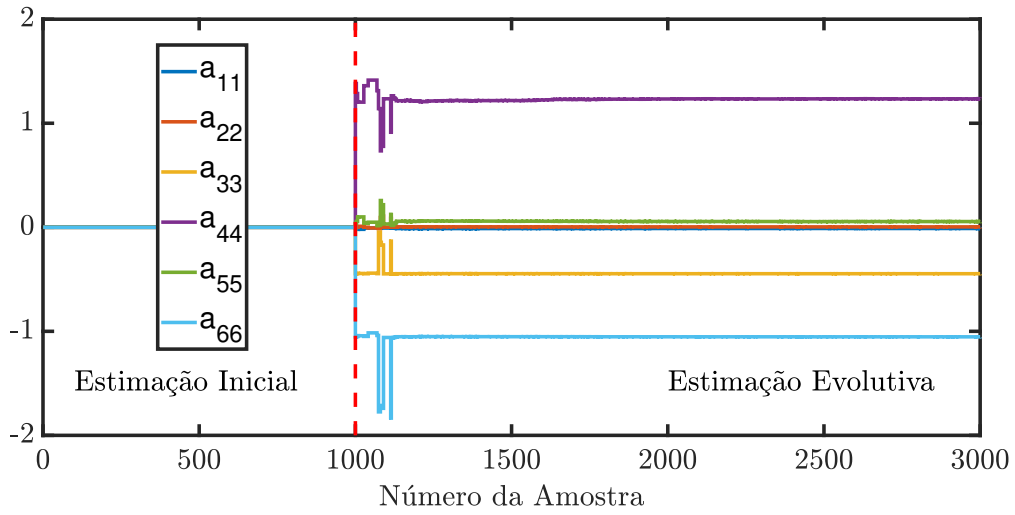
Fonte: Autor

Figura 21 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $A^{10}$  para a regra 10 processo de identificação do evaporador industrial.



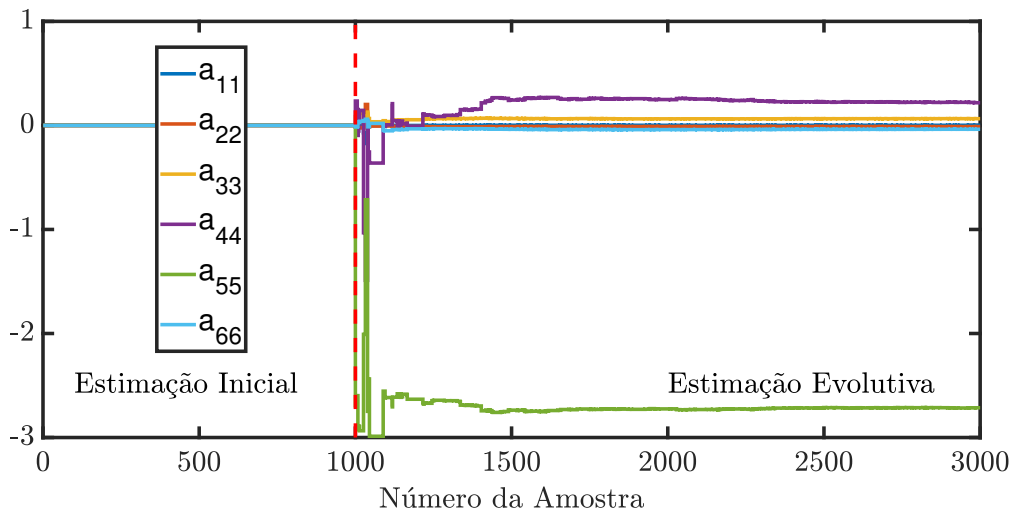
Fonte: Autor

Figura 22 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $A^{11}$  para a regra 11 processo de identificação do evaporador industrial.



Fonte: Autor

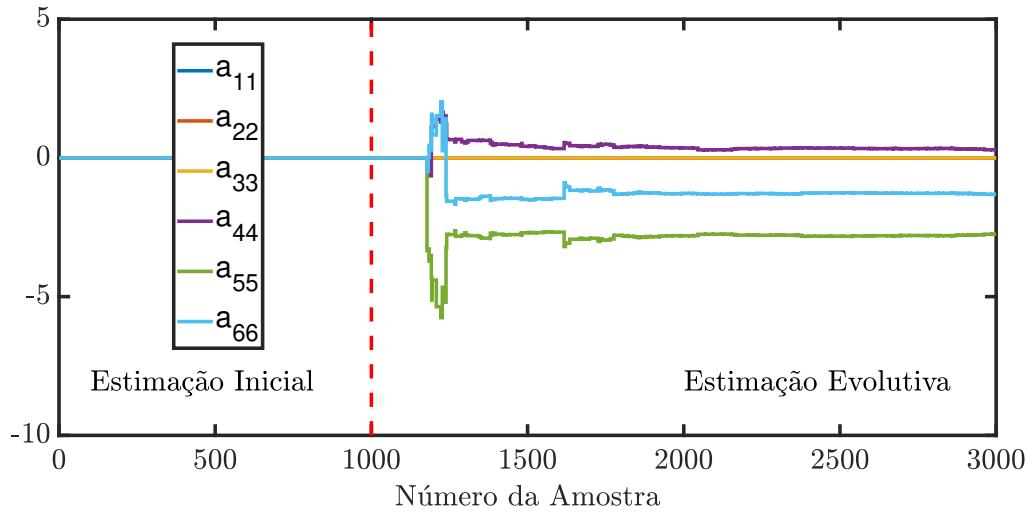
Figura 23 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $A^{12}$  para a regra 12 processo de identificação do evaporador industrial.



Fonte: Autor

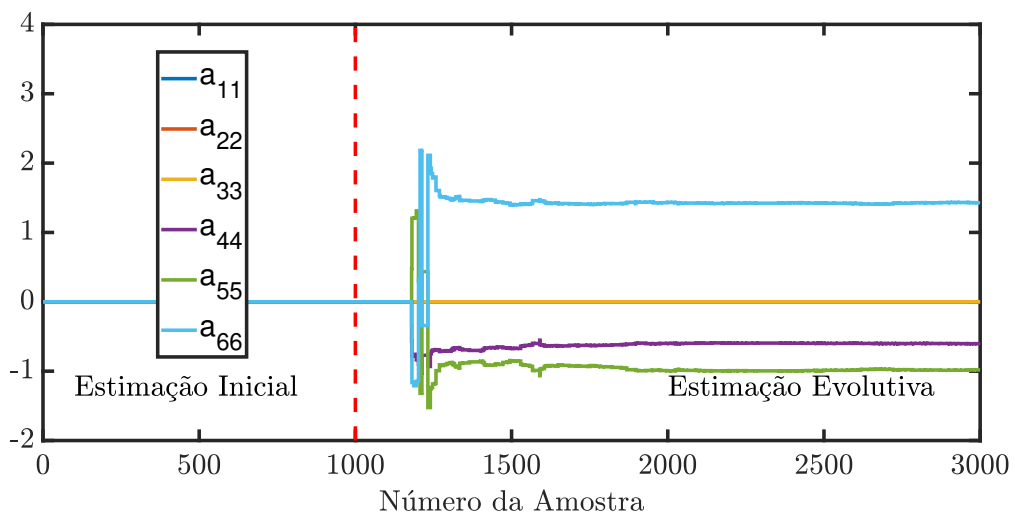


Figura 24 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $\mathbf{A}^{13}$  para a regra 13 processo de identificação do evaporador industrial.



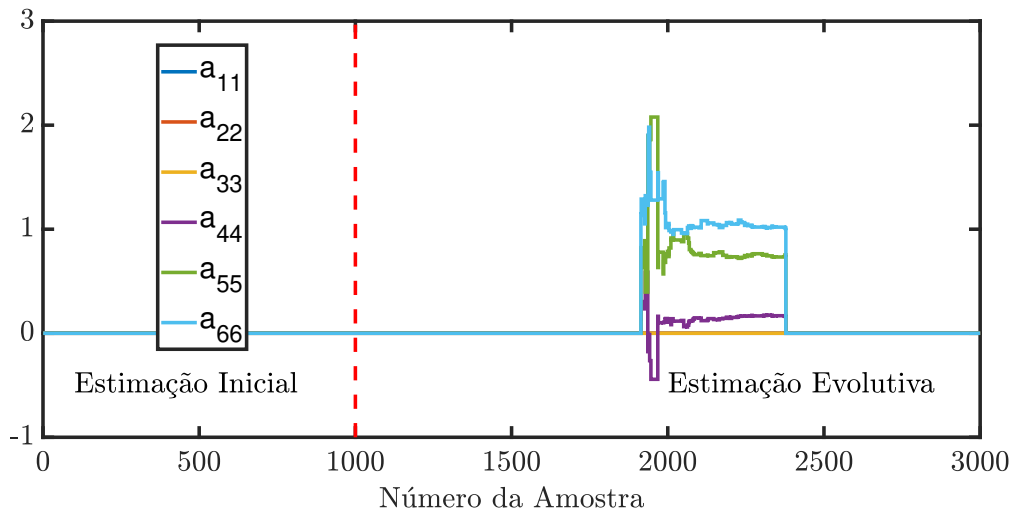
Fonte: Autor

Figura 25 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $\mathbf{A}^{14}$  para a regra 14 processo de identificação do evaporador industrial.



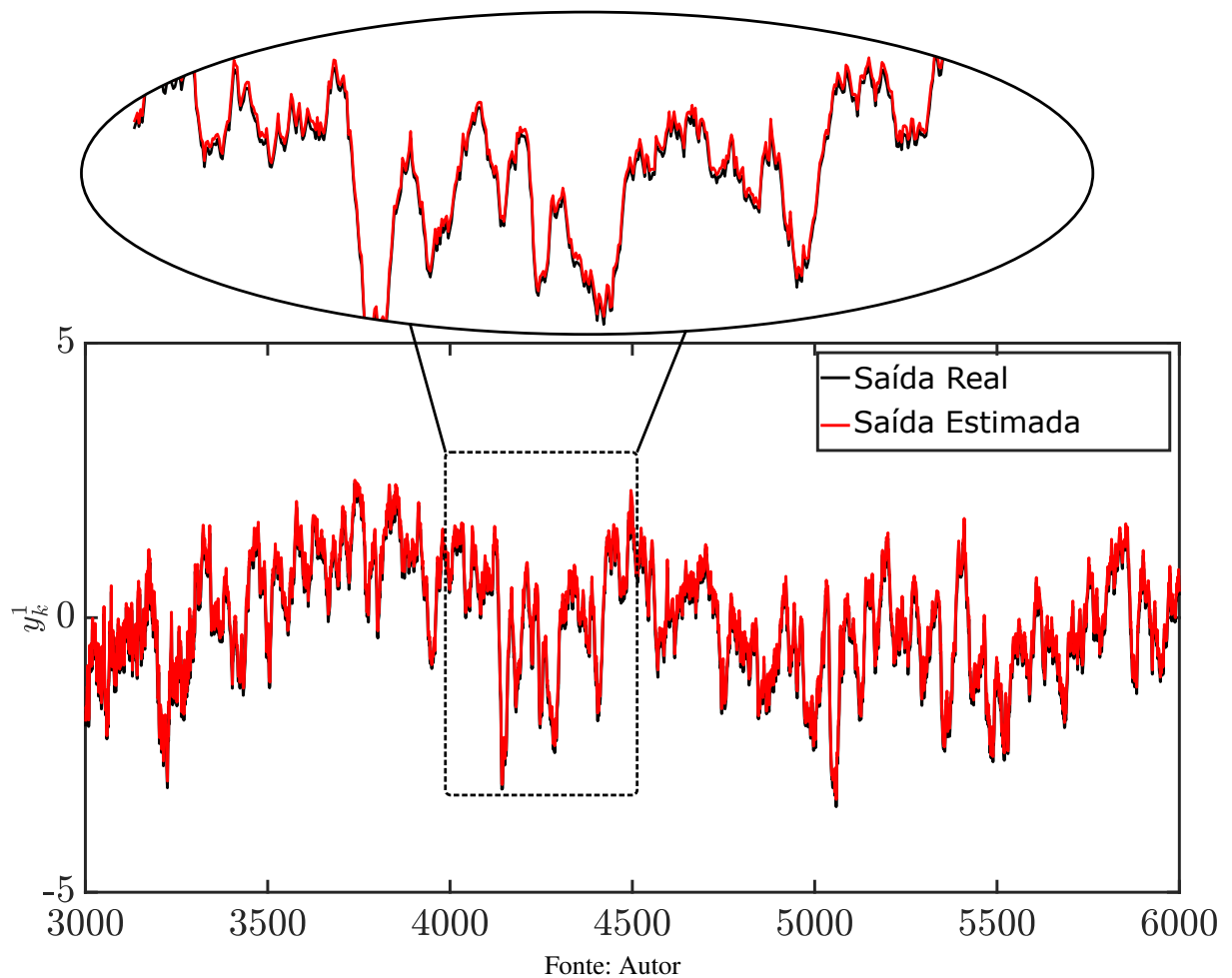
Fonte: Autor

Figura 26 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $A^{15}$  para a regra 15 processo de identificação do evaporador industrial.



Fonte: Autor

Figura 27 – Saída  $y^1$  real e estimada para o evaporador industrial.



Fonte: Autor

Figura 28 – Saída  $y^2$  real e estimada para o evaporador industrial.

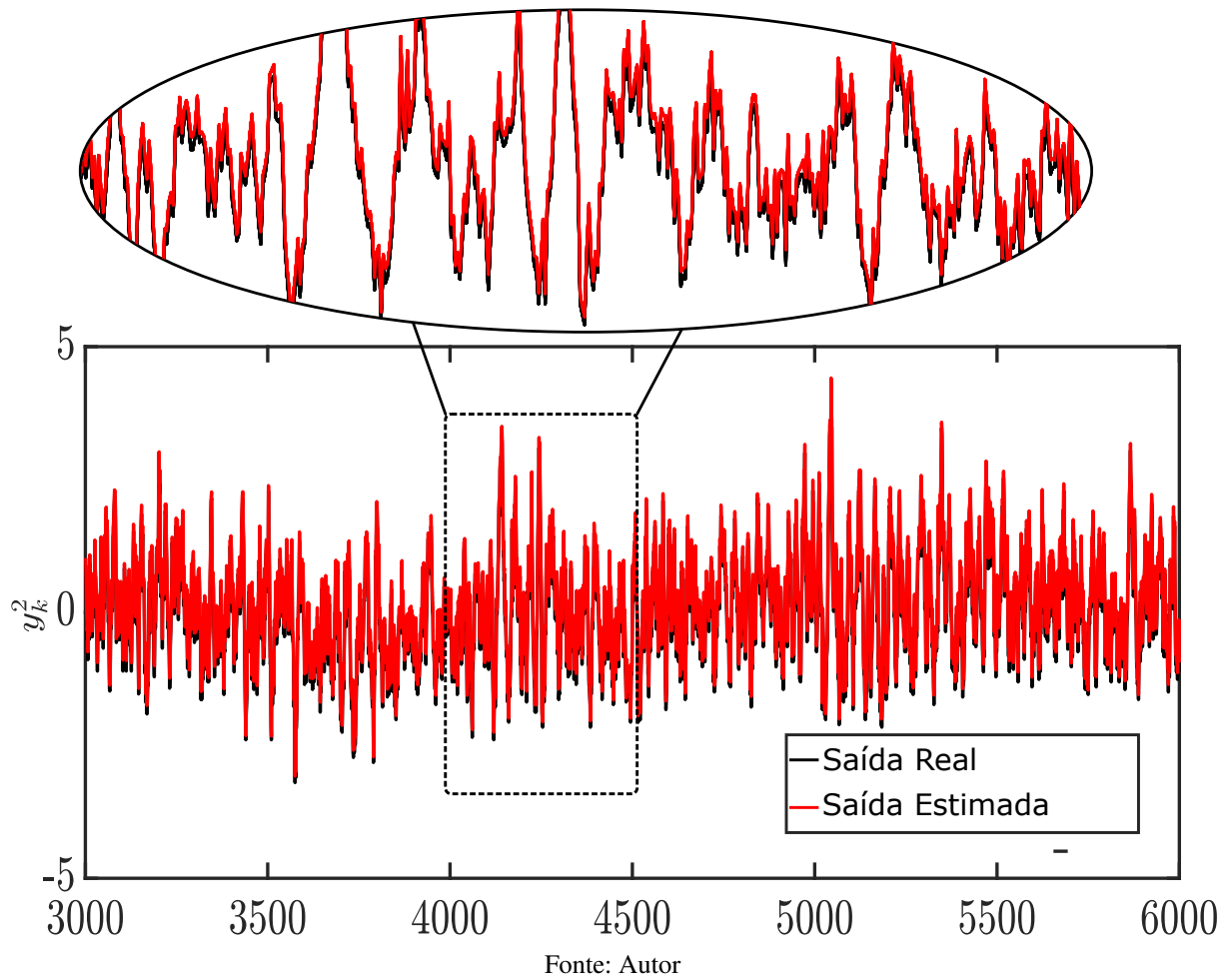
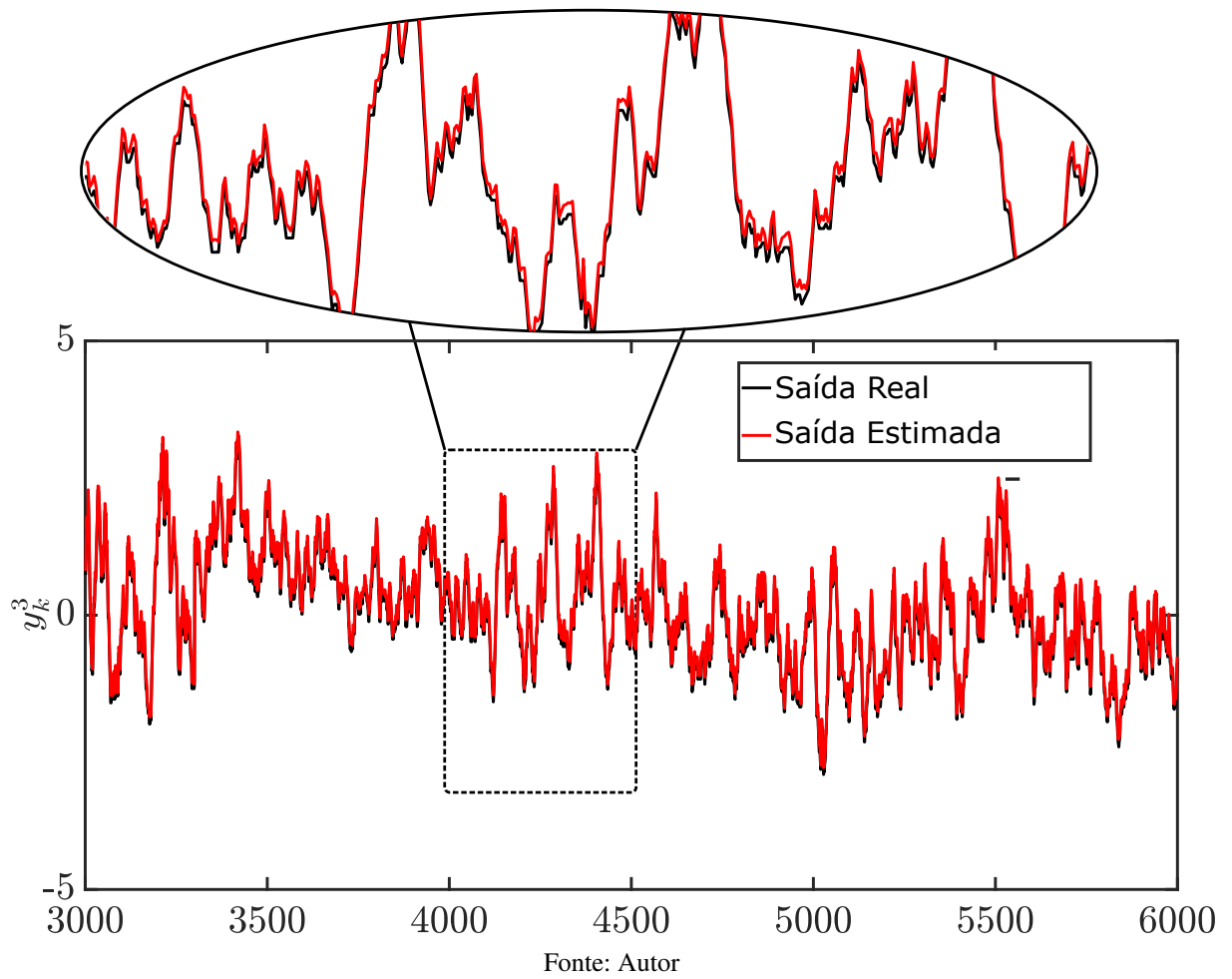


Tabela 1 – Comparação dos resultados obtidos com a metodologia proposta com os resultados obtidos em (JAFARI; SALIMIFARD; DEGHANI, 2014) para o Evaporador Industrial.

| Métricas | Valor | Metodologia    |             |          |           |
|----------|-------|----------------|-------------|----------|-----------|
|          |       | Proposto       | Hammerstein | Wiener I | Wiener II |
| MSE      | $y_1$ | <b>0.0108</b>  | 0.0234      | 0.0781   | 0.0233    |
|          | $y_2$ | <b>0.0212</b>  | 0.1001      | 0.2153   | 0.1261    |
|          | $y_3$ | <b>0.0109</b>  | 0.0204      | 0.0461   | 0.0172    |
|          | Média | <b>0.0143</b>  | 0.04796     | 0.1132   | 0.0555    |
| FIT (%)  | $y_1$ | <b>90.0872</b> | 85.4225     | 73.3457  | 85.4391   |
|          | $y_2$ | <b>85.1431</b> | 67.7202     | 52.6547  | 63.7737   |
|          | $y_3$ | <b>89.5791</b> | 85.7438     | 78.5727  | 86.9015   |
|          | Média | <b>88.2698</b> | 79.6288     | 68.1910  | 78.7047   |

Figura 29 – Saída  $y^3$  real e estimada para o evaporador industrial.

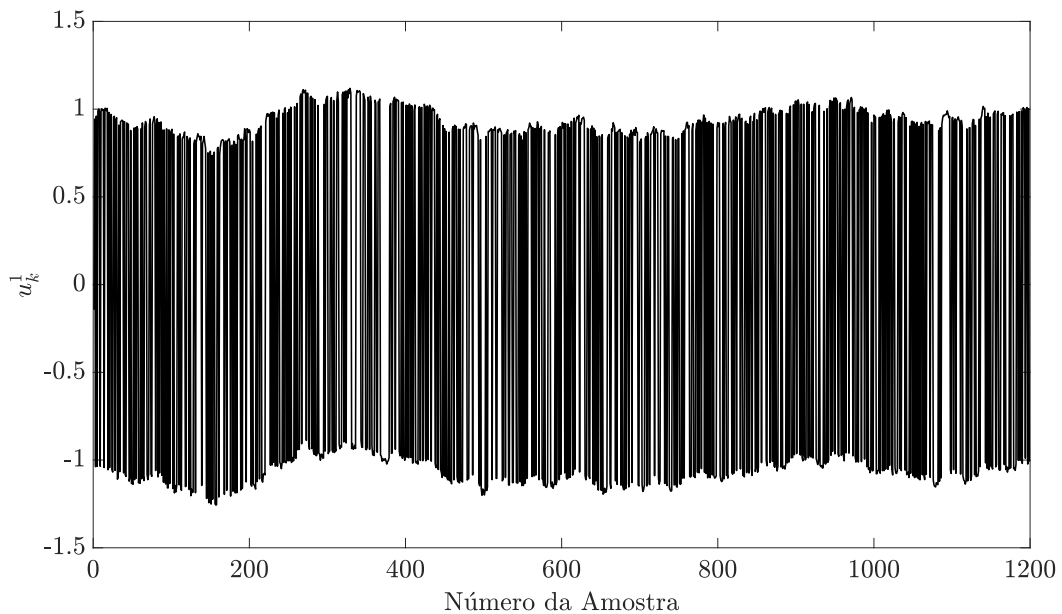


## 4.2 Caso 2: Identificação de uma Fornalha para Vidro

Nesta seção é proposta a identificação de uma fornalha para a produção de vidro (OVERSCHEE; MOOR, 1994b) (MOOR et al., 1997), com três entradas e seis saídas. As três entradas do processo são as duas entradas de calor e a entrada de arrefecimento. As saídas são as temperaturas medidas pelos seis sensores na seção transversal da fornalha.

O conjunto de entrada e saída disponível para este processo consiste em 1200 amostras já normalizadas. As primeiras 800 amostras são usadas para a identificação do modelo nebuloso evolutivo, e as outras 400 amostras são utilizadas para a validação do modelo obtido. O dados utilizados são mostrados nas Figs. 30-38.

Figura 30 – Entrada  $u_k^1$  da fornalha para vidro utilizada no caso 2.



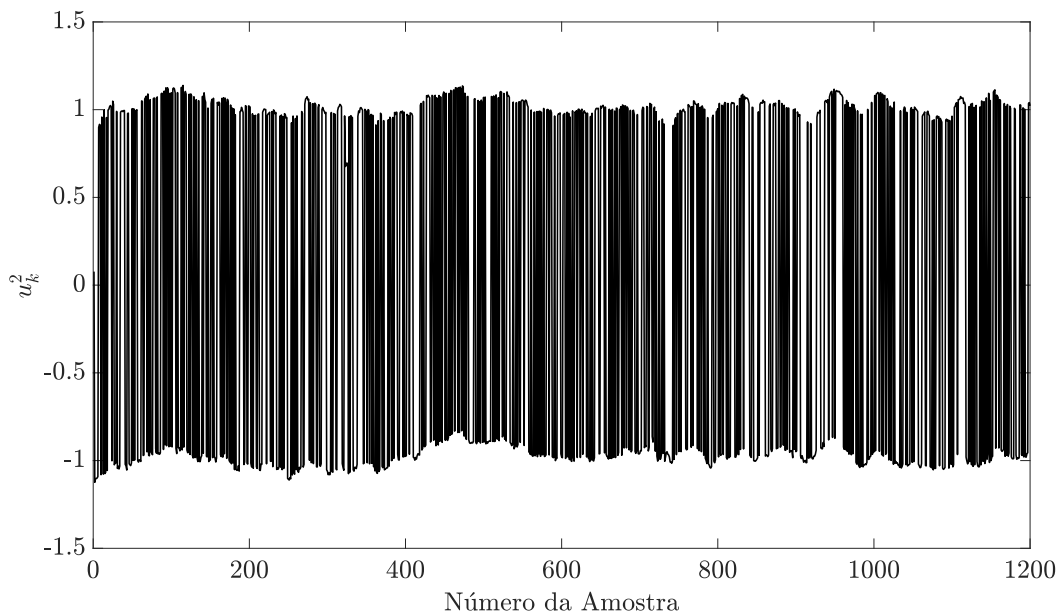
Fonte: Autor

A regra generalizada para o modelo nebuloso é dada por

$$R^i : \text{SE } \mathbf{z}_k = [\mathbf{u}_{k-1} \ \mathbf{u}_{k-2} \ \mathbf{y}_{k-1} \ \mathbf{y}_{k-2}] \sim \mathbf{z}^{i*} = [\mathbf{u}_{k-1}^{(i*)} \ \mathbf{u}_{k-2}^{(i*)} \ \mathbf{y}_{k-1}^{(i*)} \ \mathbf{y}_{k-2}^{(i*)}]$$

$$\text{ENTÃO } \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^i = \mathbf{A}^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{B}^i \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k^i = \mathbf{C}^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{D}^i \mathbf{u}_k \end{cases} \quad (4.5)$$

Para a implementação da metodologia nebulosa proposta foram considerados os seguintes parâmetros:  $p = 20$  (número de parâmetros de Markov independentes),  $\alpha = 100$  (número de linhas da matriz de Hankel),  $\beta = 200$  (número de colunas da matriz de Hankel),  $\varepsilon = 0.5$  (limiar de sobreposição),  $\eta = 0.3$  (limiar da utilidade), onde um conjunto de 350 é utilizado para a estimação inicial do modelo. Analisando os valores singulares da matriz de Hankel mostrado na 39, pode-se perceber que existem onze valores singulares significantes para todas as regras

Figura 31 – Entrada  $u_k^2$  da fornalha para vidro utilizada no caso 2.

Fonte: Autor

durante a identificação evolutiva, logo a ordem escolhida para o modelo nebuloso obtido é  $n = 11$ .

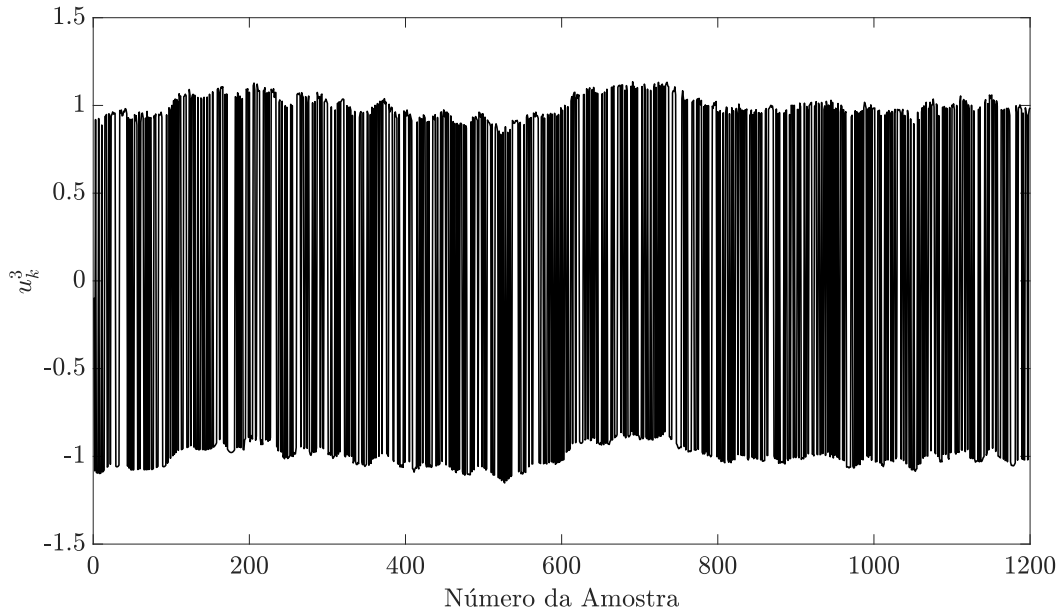
O número de regras do modelo nebuloso evolutivo, é mostrado na Fig. 40. Depois das 350 amostras iniciais o modelo nebuloso possui 7 regras; durante o processo evolutivo, o número de regras é de 8 na amostra 544; o número de regras é 9 na amostra 657; na amostra 736 uma regra é excluída então o número final de regras é 8.

A evolução dos parâmetros do consequente para cada regra, ilustrados pela atualização recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $\mathbf{A}^i$ , é mostrado nas Figs. 41-50.

As comparações da resposta temporal entre o modelo nebuloso obtido e o processo real para as saídas  $y_1$ - $y_6$  são mostradas nas Figs. 51-56, respectivamente.

Para ilustrar a eficiência da metodologia proposta, na tabela 2 é feita uma comparação com a metodologia proposta em (JAFARI; SALIMIFARD; DEGHANI, 2014). Os resultados mostram que o modelo obtido com a metodologia proposta possui melhores valores de MSE e FIT para as saídas  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_4$  e  $y_6$ , e valores compatíveis para as saídas  $y_3$  e  $y_5$ . A metodologia proposta também apresenta melhor performance considerando os valores médios para o MSE e FIT.

Figura 32 – Entrada  $u_k^3$  da fornalha para vidro utilizada no caso 2.

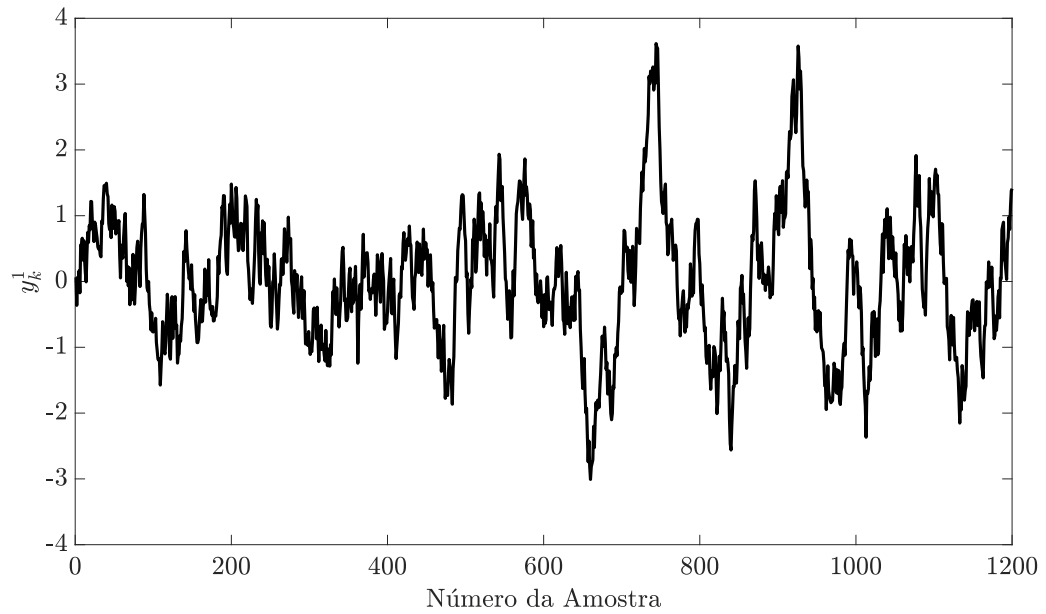


Fonte: Autor

Tabela 2 – Comparação dos resultados obtidos com a metodologia proposta com os resultados obtidos em (JAFARI; SALIMIFARD; DEGHANI, 2014) para a Fornalha para Vidro.

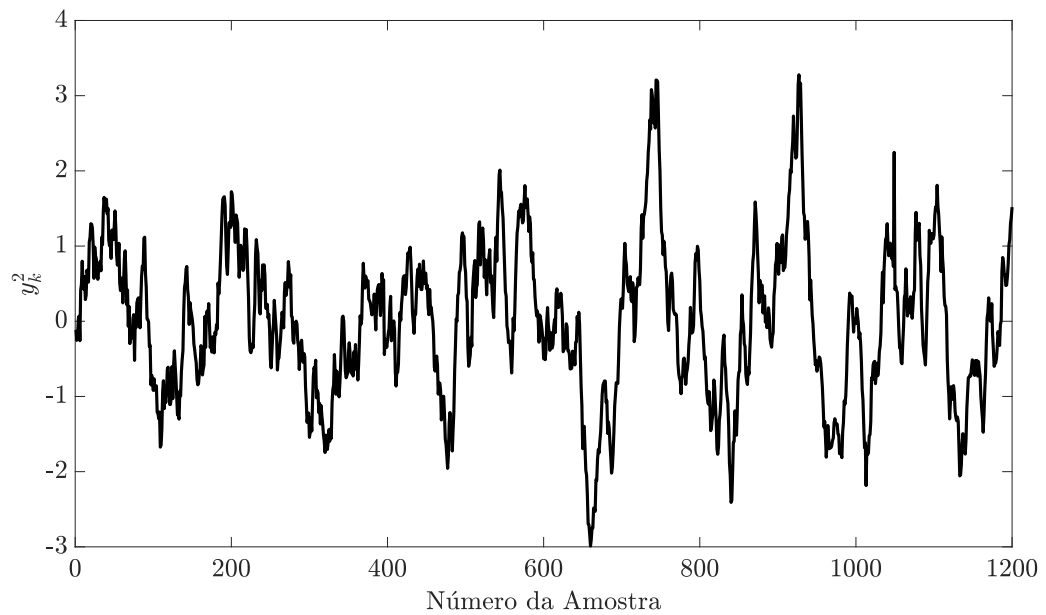
| Métrica | Valor | Metodologia    |                |               |           |
|---------|-------|----------------|----------------|---------------|-----------|
|         |       | Proposta       | Hammerstein    | Wiener I      | Wiener II |
| MSE     | y1    | <b>0.0135</b>  | 0.0327         | 0.0280        | 0.0373    |
|         | y2    | <b>0.0204</b>  | 0.0311         | 0.0210        | 0.0246    |
|         | y3    | 0.0303         | 0.0313         | <b>0.0212</b> | 0.0245    |
|         | y4    | <b>0.0147</b>  | 0.1419         | 0.1684        | 0.1899    |
|         | y5    | 0.0351         | 0.0407         | <b>0.0326</b> | 0.0365    |
|         | y6    | <b>0.0152</b>  | 0.0473         | 0.0364        | 0.0352    |
|         | Média | <b>0.0214</b>  | 0.0542         | 0.0513        | 0.0580    |
| FIT (%) | y1    | <b>85.6598</b> | 74.7545        | 76.1005       | 67.3832   |
|         | y2    | <b>81.5115</b> | 80.3904        | 78.8191       | 73.3235   |
|         | y3    | 77.2783        | <b>80.1415</b> | 75.5570       | 73.0043   |
|         | y4    | <b>83.7629</b> | 33.3666        | 34.7442       | 14.3157   |
|         | y5    | 74.5709        | <b>84.2126</b> | 83.3281       | 70.8378   |
|         | y6    | <b>84.3339</b> | 81.5102        | 80.4249       | 70.4023   |
|         | Média | <b>81.1862</b> | 72.3960        | 71.4956       | 61.5445   |

Figura 33 – Saída  $y_k^1$  da fornalha para vidro utilizada no caso 2.



Fonte: Autor

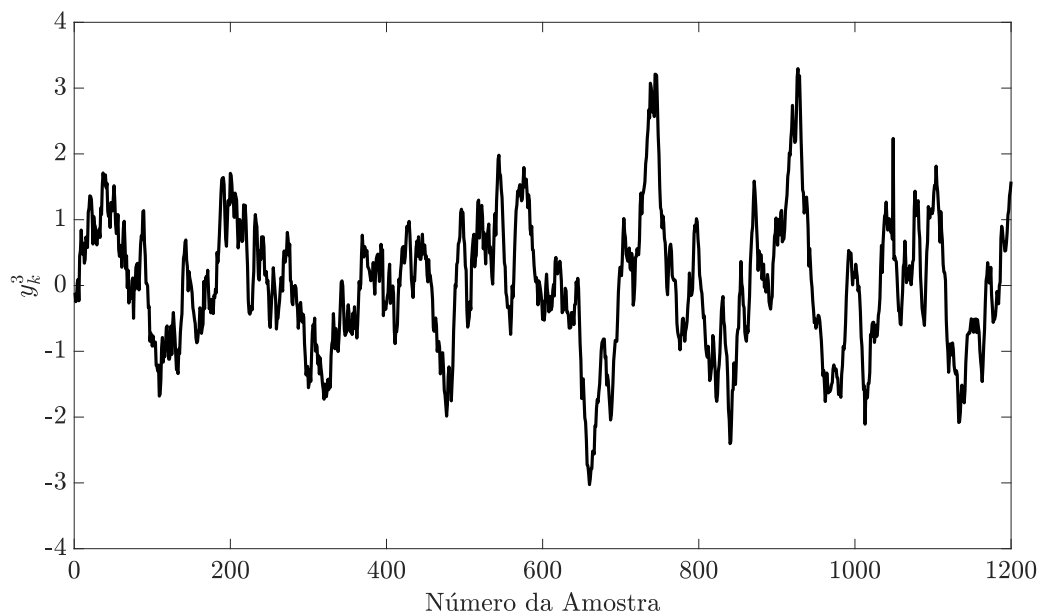
Figura 34 – Saída  $y_k^2$  da fornalha para vidro utilizada no caso 2.



Fonte: Autor

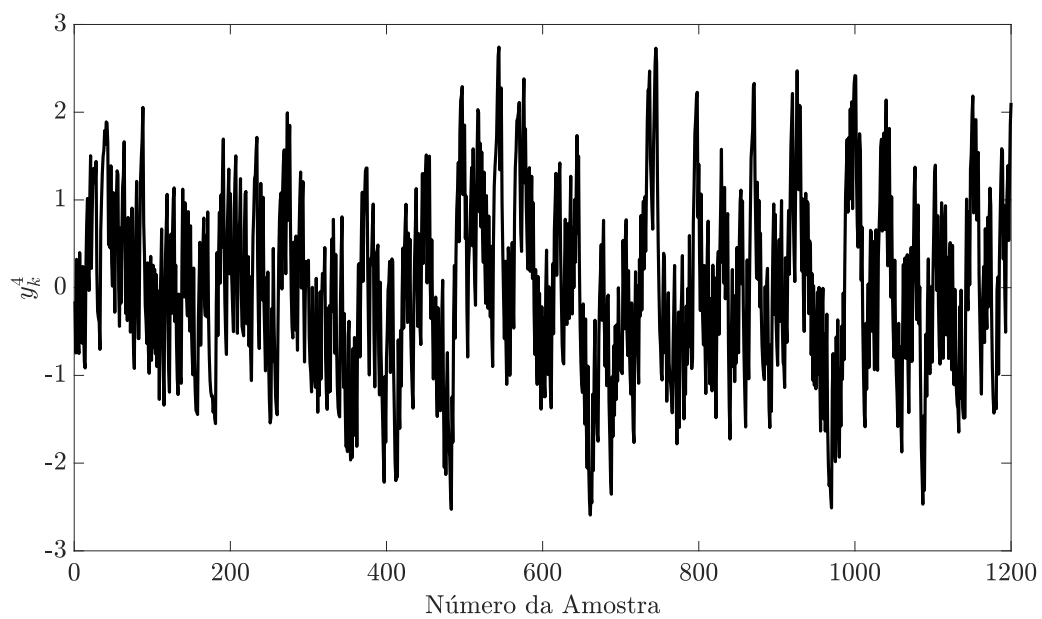


Figura 35 – Saída  $y_k^3$  da fornalha para vidro utilizada no caso 2.

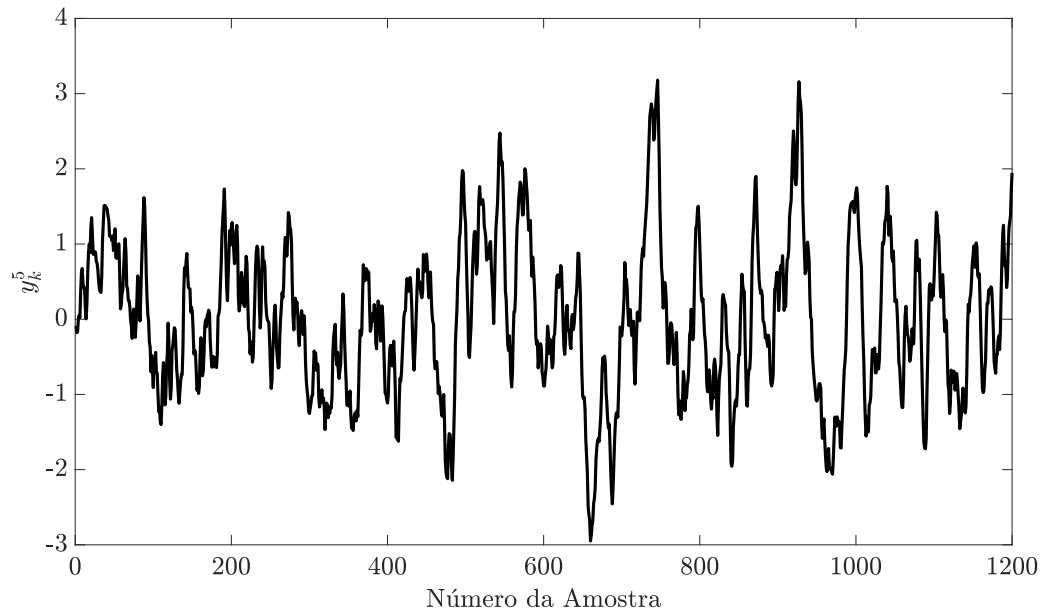


Fonte: Autor

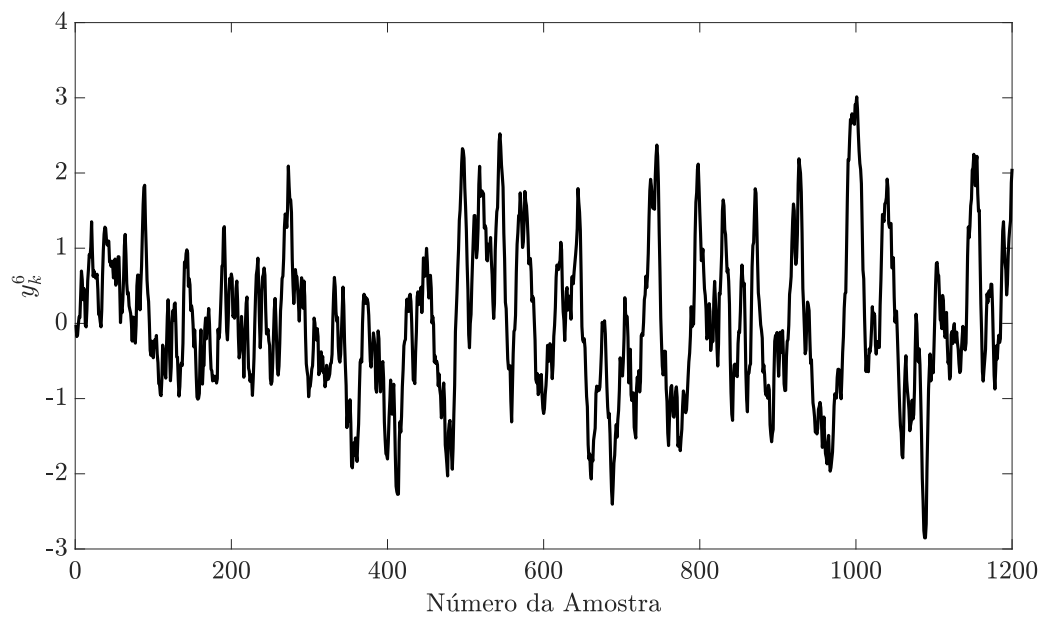
Figura 36 – Saída  $y_k^4$  da fornalha para vidro utilizada no caso 2.



Fonte: Autor

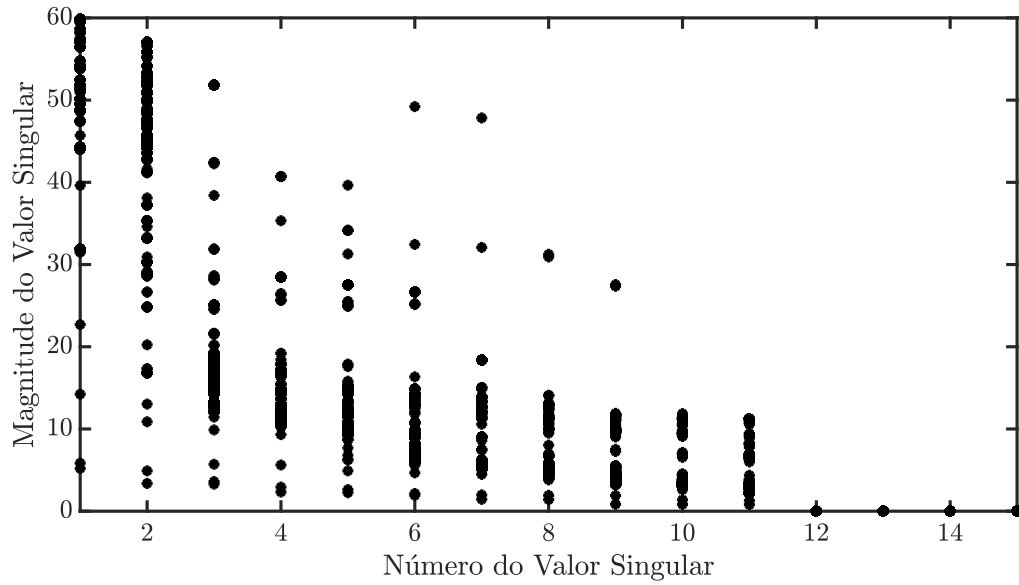
Figura 37 – Saída  $y_k^5$  da fornalha para vidro utilizada no caso 2.

Fonte: Autor

Figura 38 – Saída  $y_k^6$  da fornalha para vidro utilizada no caso 2.

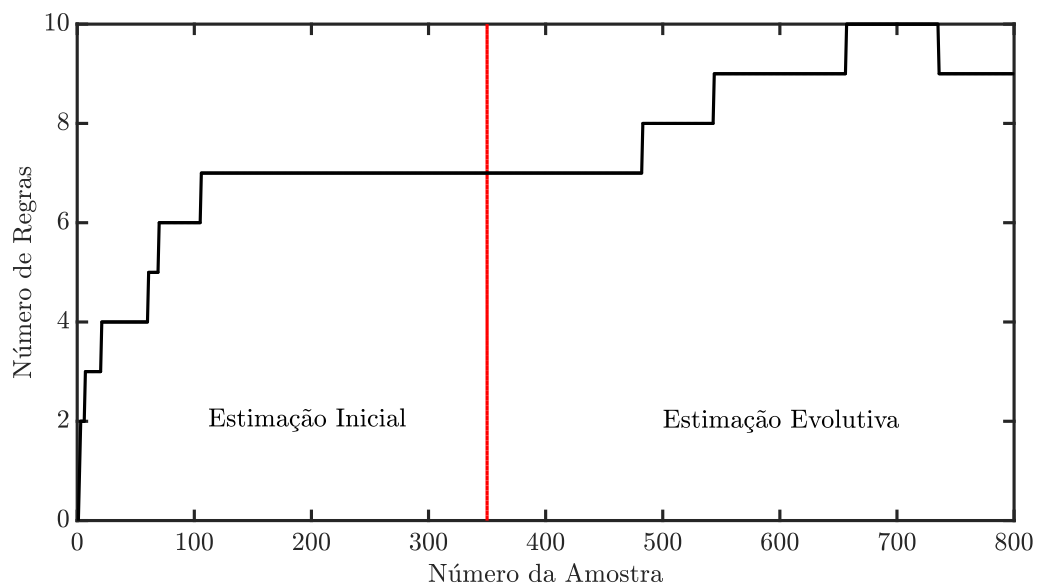
Fonte: Autor

Figura 39 – Espaço dos valores singulares da matriz de Hankel para todas as regras durante o processo de identificação da fornalha para vidro.



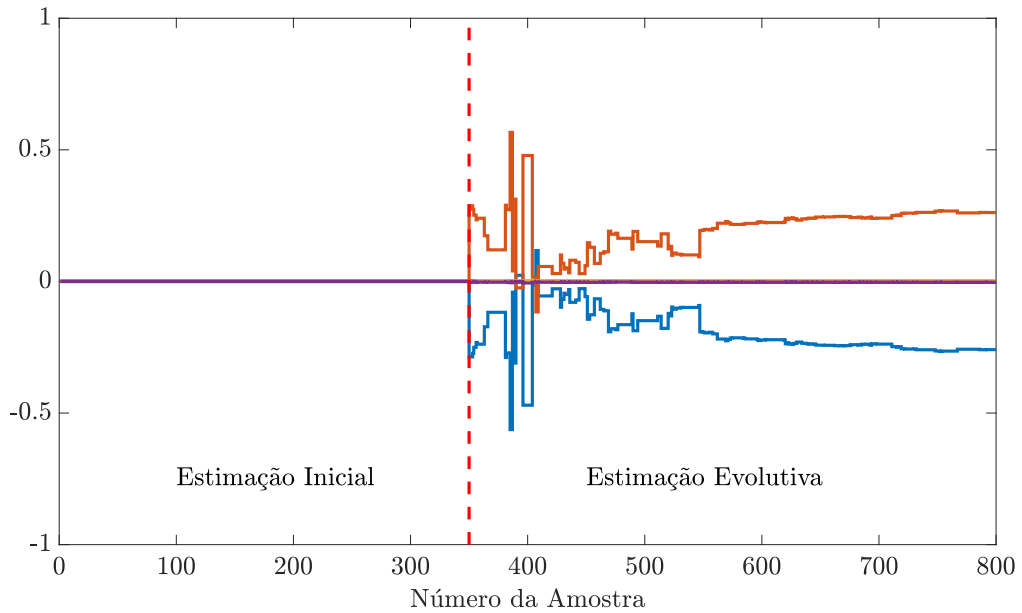
Fonte: Autor

Figura 40 – Variação do número de regras durante a identificação evolutiva da fornalha para vidro.



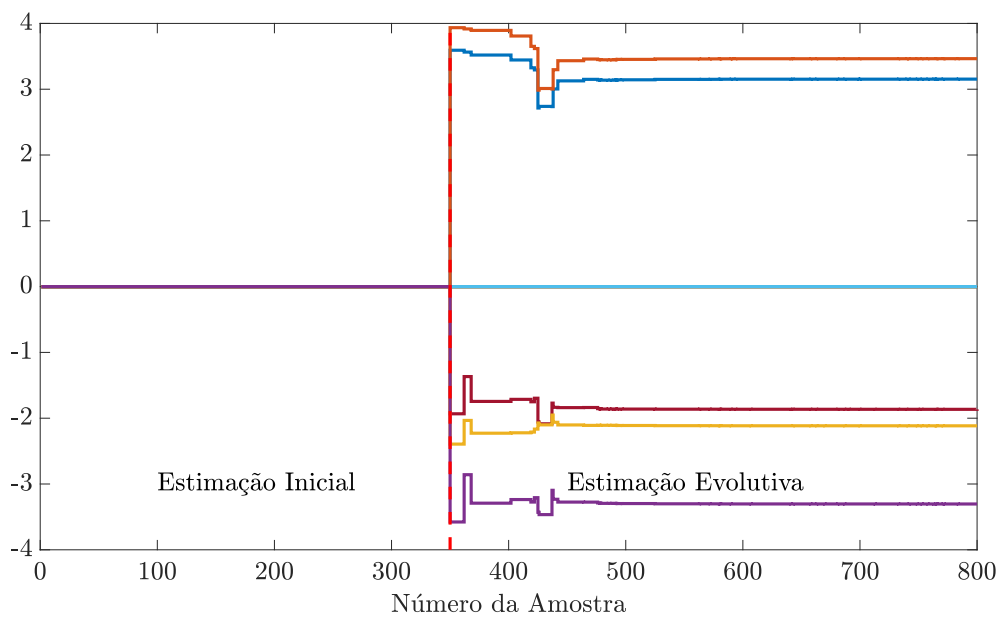
Fonte: Autor

Figura 41 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $A^1$  para a regra 1 processo de identificação da fornalha para vidro.



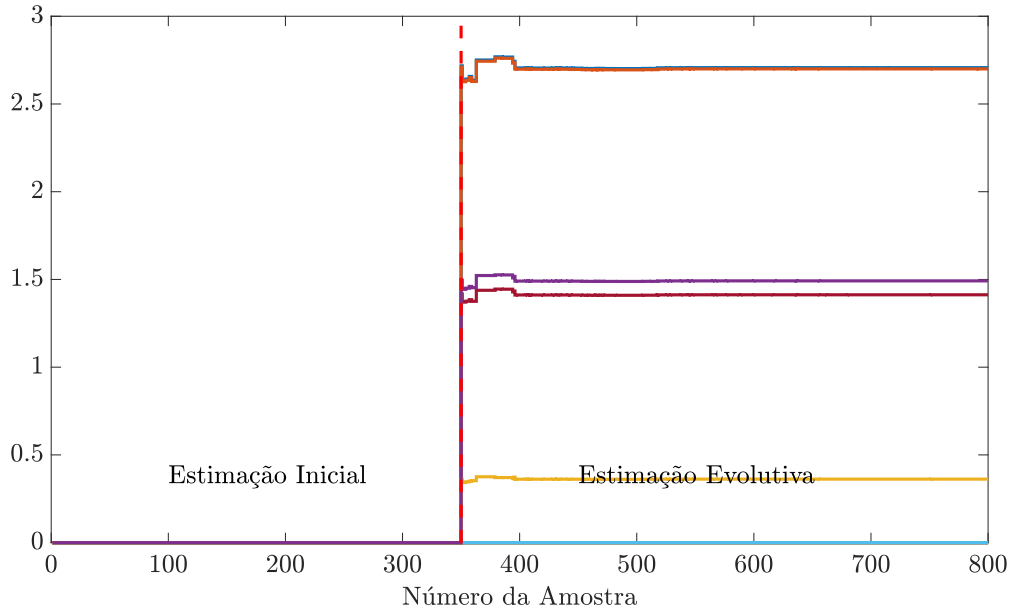
Fonte: Autor

Figura 42 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $A^2$  para a regra 2 processo de identificação da fornalha para vidro.



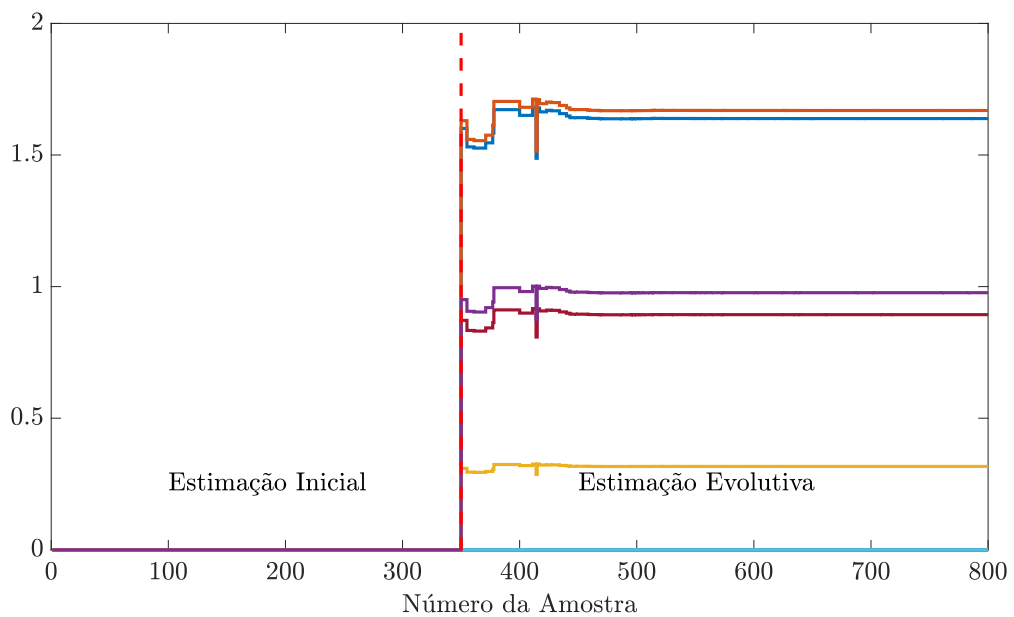
Fonte: Autor

Figura 43 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $A^3$  para a regra 3 processo de identificação da fornalha para vidro.



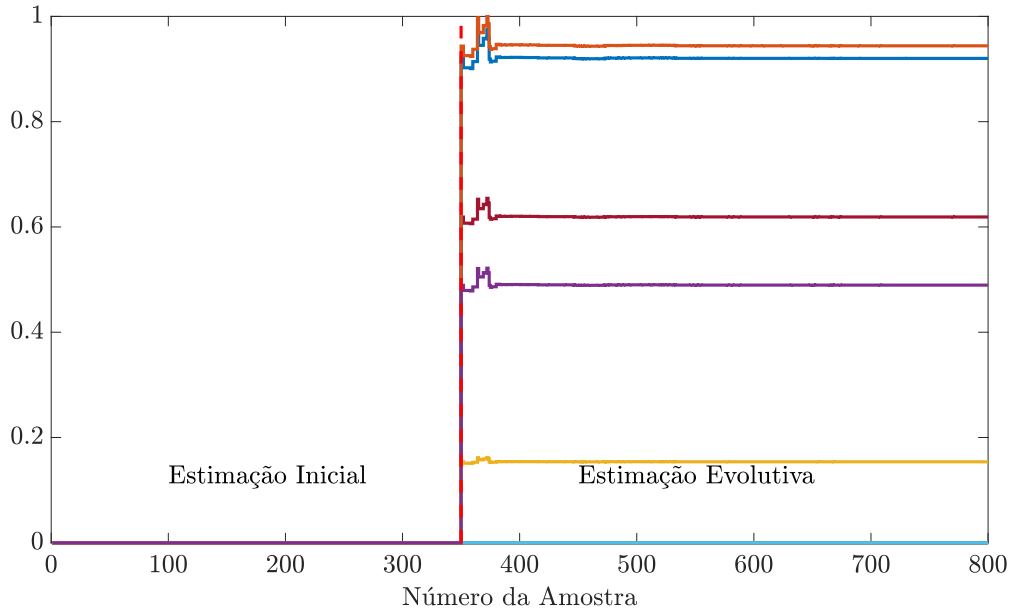
Fonte: Autor

Figura 44 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $A^4$  para a regra 4 processo de identificação da fornalha para vidro.



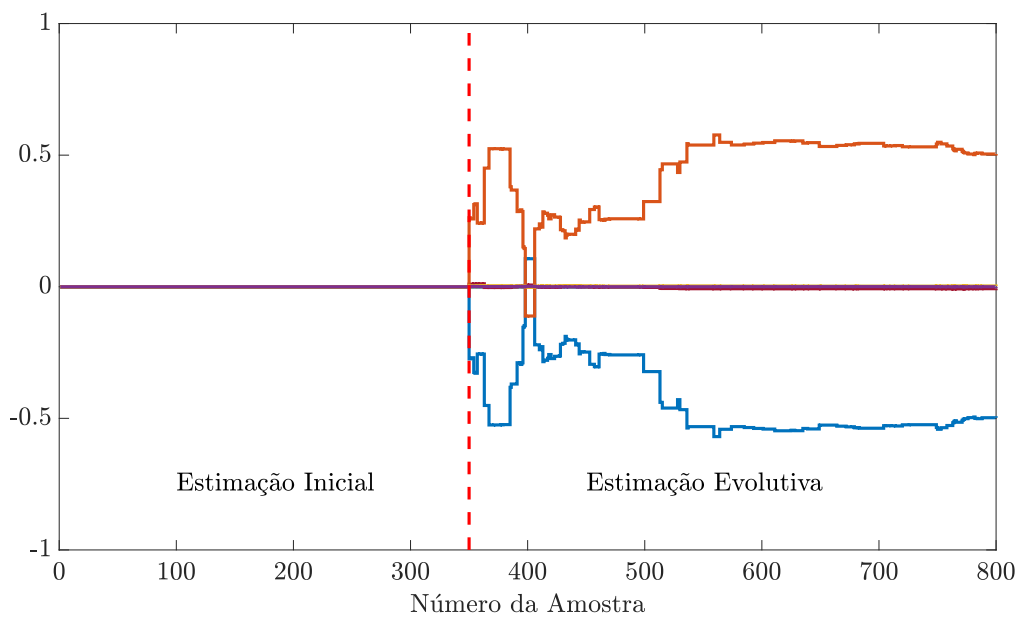
Fonte: Autor

Figura 45 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $A^5$  para a regra 5 processo de identificação do evaporador industrial.



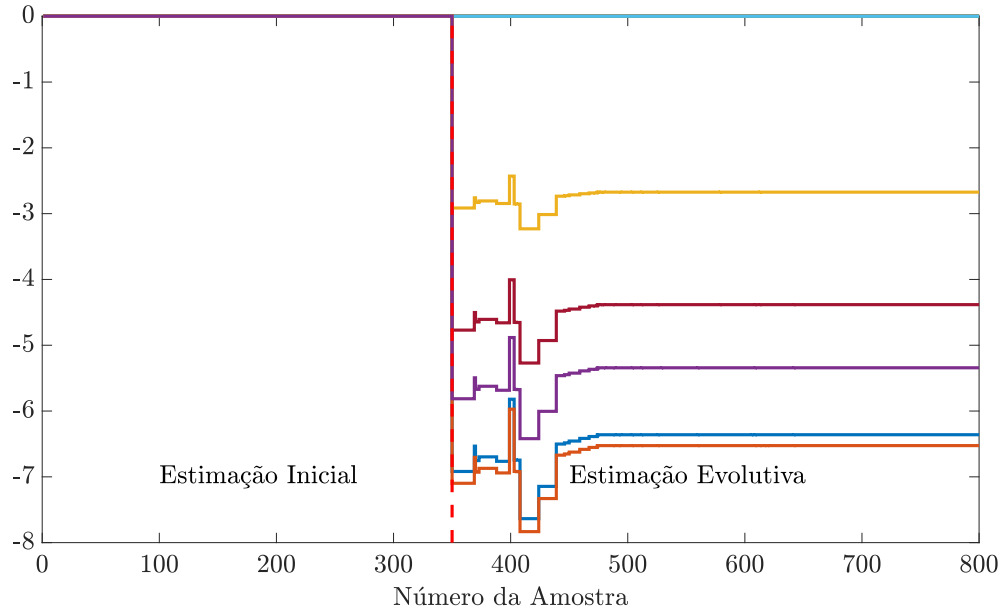
Fonte: Autor

Figura 46 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $A^6$  para a regra 6 processo de identificação da fornalha para vidro.



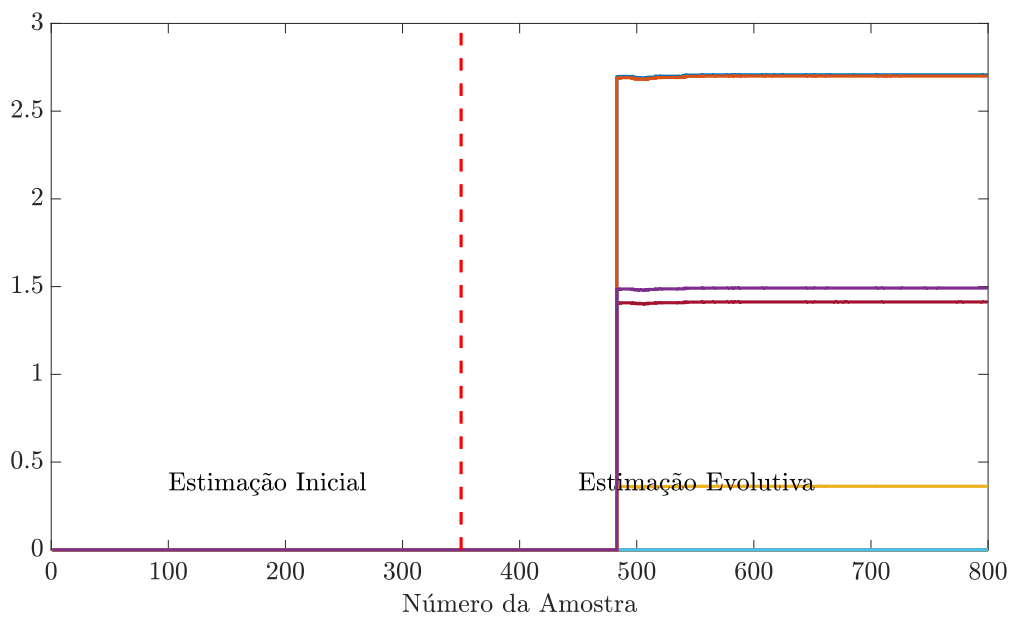
Fonte: Autor

Figura 47 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $A^7$  para a regra 7 processo de identificação da fornalha para vidro.



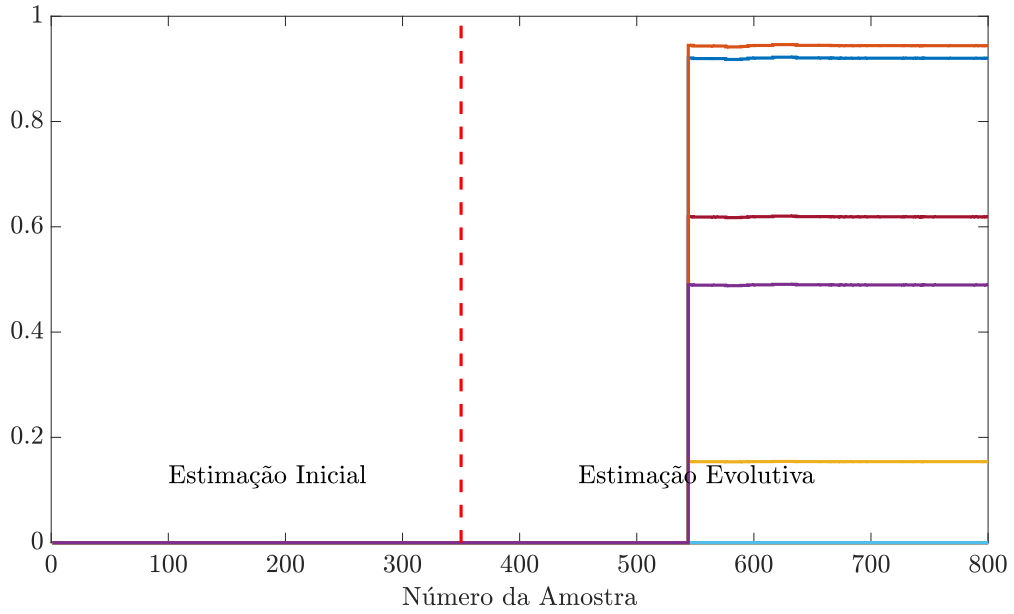
Fonte: Autor

Figura 48 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $A^8$  para a regra 8 processo de identificação da fornalha para vidro.



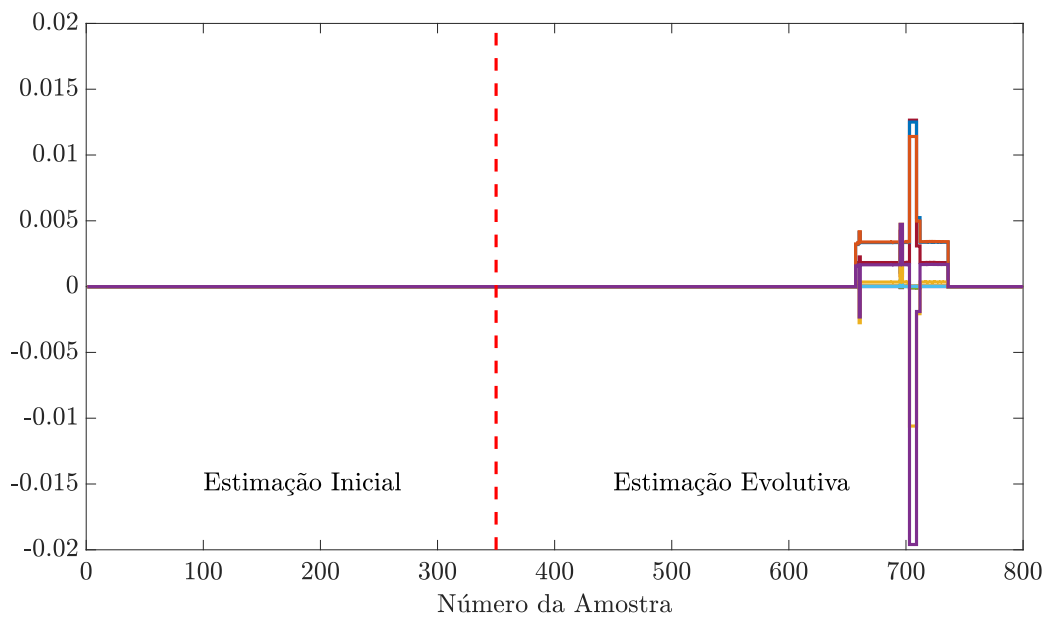
Fonte: Autor

Figura 49 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $A^9$  para a regra 9 processo de identificação da fornalha para vidro.



Fonte: Autor

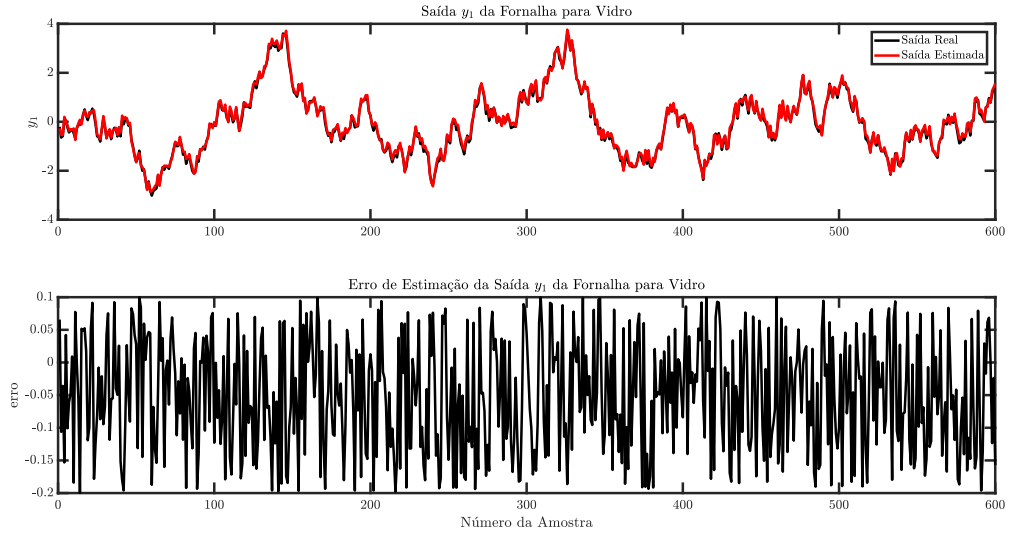
Figura 50 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $A^{10}$  para a regra 10 processo de identificação da fornalha para vidro.



Fonte: Autor

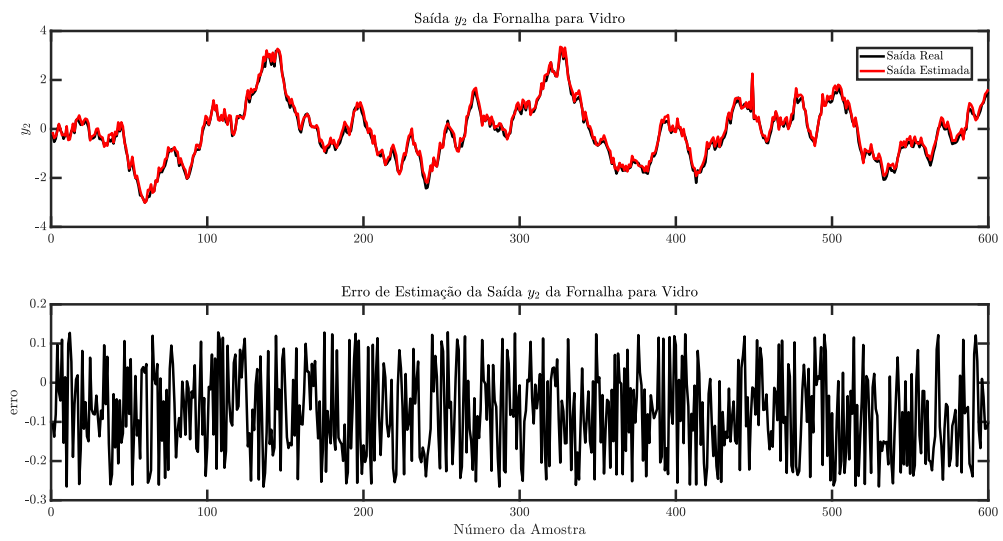


Figura 51 – Saída  $y^1$  real e estimada para a fornalha para vidro.



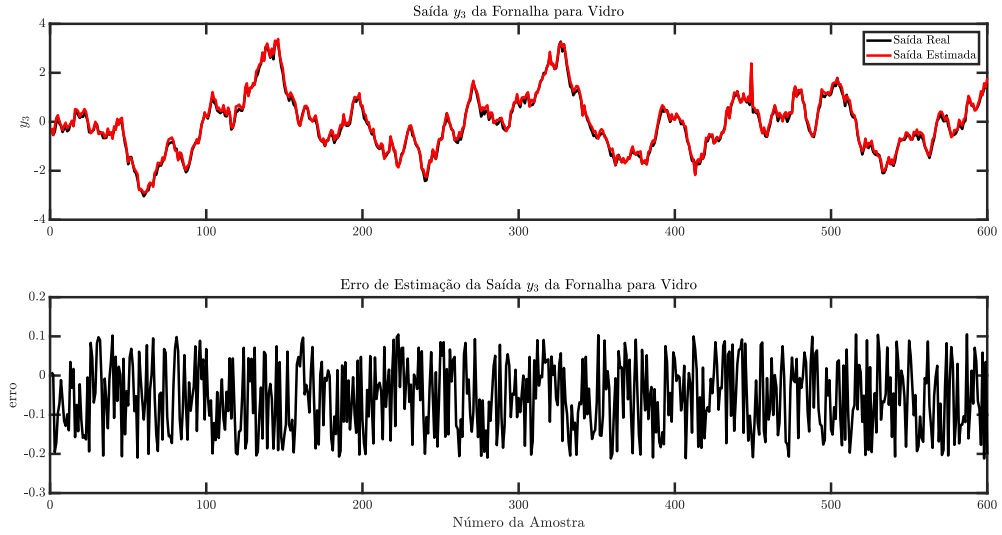
Fonte: Autor

Figura 52 – Saída  $y^2$  real e estimada para a fornalha para vidro.



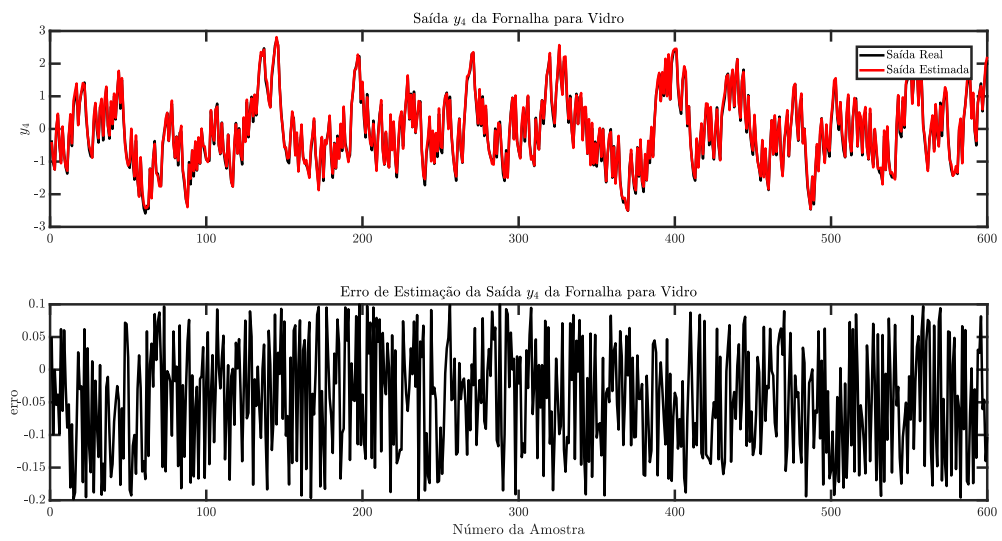
Fonte: Autor

Figura 53 – Saída  $y^3$  real e estimada para a fornalha para vidro.



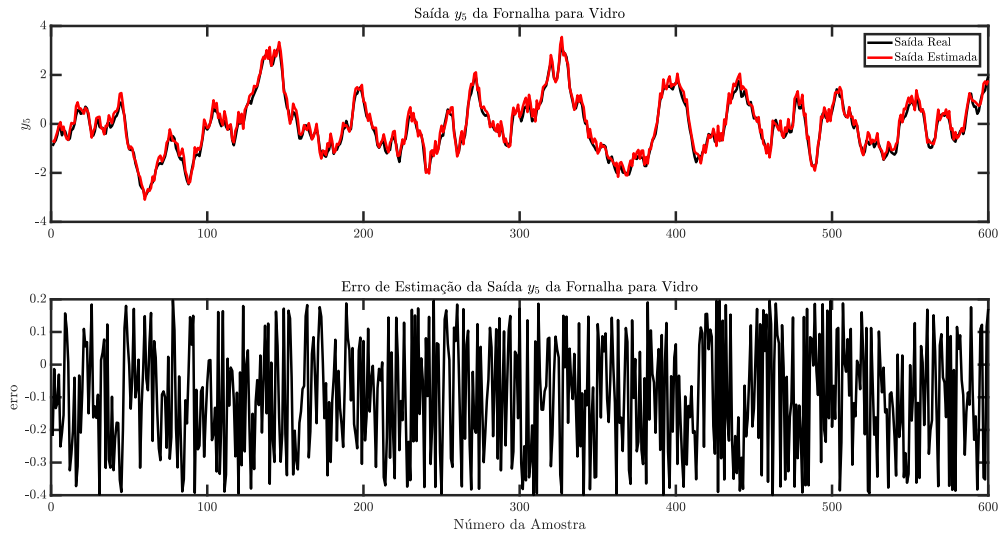
Fonte: Autor

Figura 54 – Saída  $y^4$  real e estimada para a fornalha para vidro.



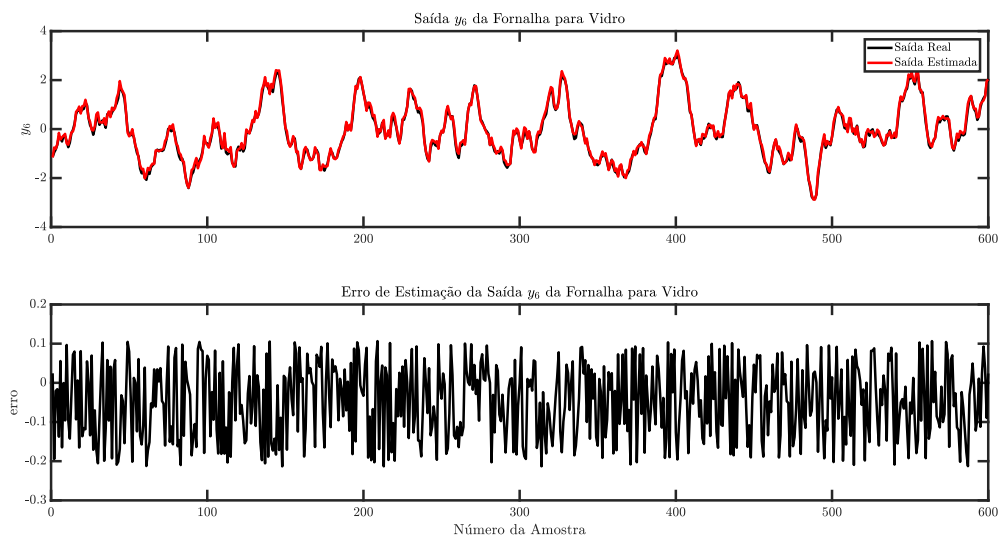
Fonte: Autor

Figura 55 – Saída  $y^5$  real e estimada para a fornalha para vidro.



Fonte: Autor

Figura 56 – Saída  $y^6$  real e estimada para a fornalha para vidro.



Fonte: Autor

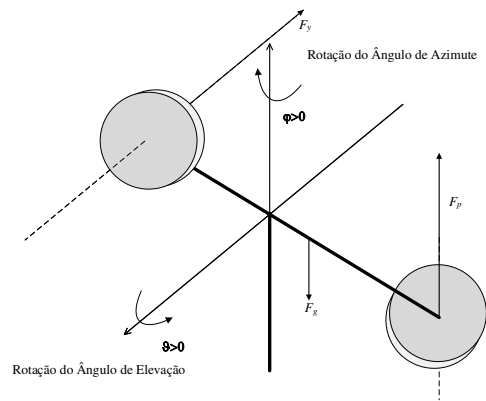
### 4.3 Caso 3: Identificação do helicóptero 2DOF

Com o intuito de avaliar o desempenho da metodologia proposta em um sistema real disponível em laboratório, é realizada a identificação de um Hélicoptero com dois graus de liberdade (2DOF), mostrado na Fig. 57a. O helicóptero 2DOF é um sistema multivariável complexo e altamente não linear, além de possuir alguns parâmetros inacessíveis (SUBRAMANIAN; ELUMALAI, 2016) (KUMAR; RAAJA; JEROME, 2016). O Hélicoptero 2DOF possui duas variáveis de entrada, que são a tensão aplicada no rotor principal  $u_\varphi$ , responsável pela força  $F_p$ , e a tensão aplicada no motor de cauda, responsável pela força  $F_y$ ; e duas variáveis de saída, que são o ângulo de azimute  $\varphi$  e o ângulo de elevação  $\vartheta$ .

Figura 57 – Imagem do Hélicoptero 2DOF e seu diagrama de corpo livre.



(a) Hélicoptero 2DOF.



(b) Diagrama de Corpo Livre do Hélicoptero 2DOF.

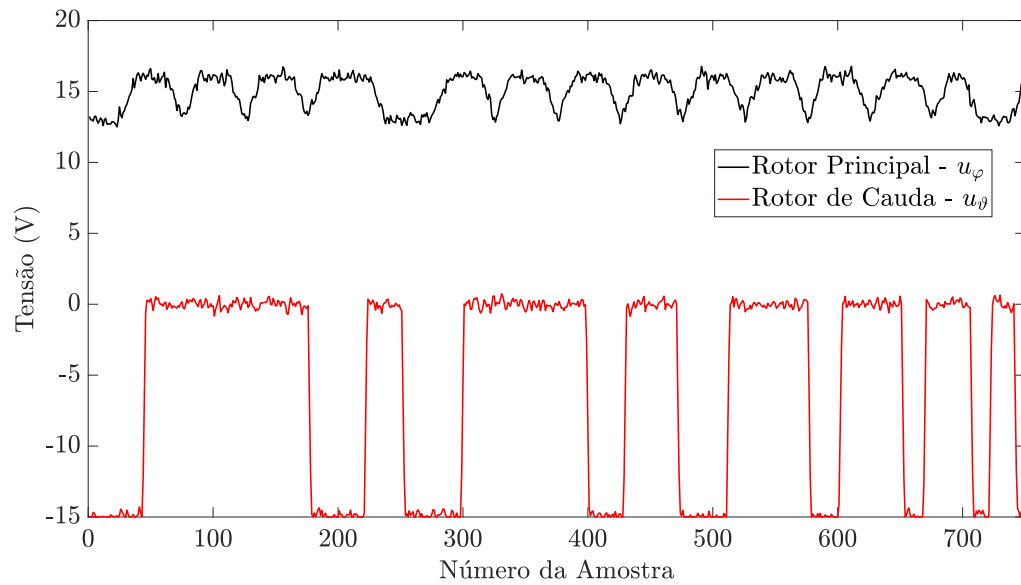
Fonte: FILHO (2017)

O conjunto de dados utilizado consistem em 750 amostras obtidas com período de amostragem de  $40ms$ , como mostrado nas Figs. 58 e 59. As primeiras 100 amostras são utilizadas para a identificação inicial do modelo nebuloso, e as outras 650 amostras são utilizadas para a identificação recursiva do helicóptero 2DoF. A regra generalizada para o modelo nebuloso é dada por

$$\begin{aligned}
 R^i : \mathbf{SE} \quad z_k &= [u_{\varphi,(k-1)} \quad u_{\vartheta,(k-1)} \quad \varphi_{(k-1)} \quad \vartheta_{(k-1)}] \sim \\
 z^{i*} &= [u_{\varphi,(k-1)}^{i*} \quad u_{\vartheta,(k-1)}^{i*} \quad \varphi_{(k-1)}^{i*} \quad \vartheta_{(k-1)}^{i*}] \\
 \text{ENTAO} \quad \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}|^i &= \mathbf{A}^i \mathbf{x}_k|^i + \mathbf{B}^i \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k|^i &= \mathbf{C}^i \mathbf{x}_k|^i + \mathbf{D}^i \mathbf{u}_k \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

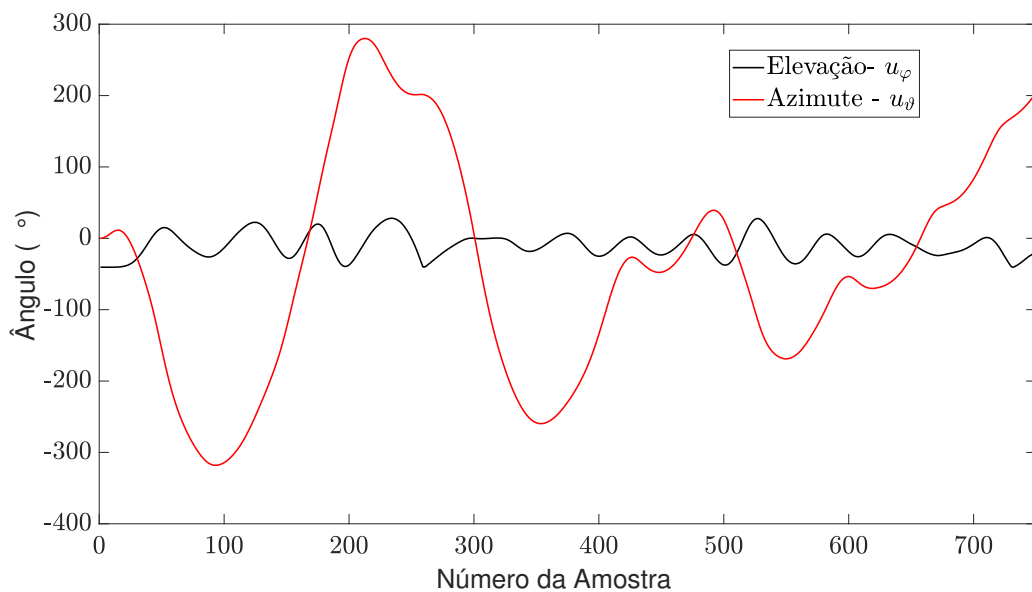
Para a implementação da metodologia nebulosa proposta foram considerados os seguintes parâmetros:  $p = 3$  (número de parâmetros de Markov independentes),  $\alpha = 100$  (número de linhas da matriz de Hankel),  $\beta = 200$  (número de colunas da matriz de Hankel),  $\varepsilon = 0.5$  (limiar de sobreposição),  $\eta = 0.3$  (limiar da utilidade). Analisando os valores singulares da matriz de

Figura 58 – Dados de entrada utilizados para identificação do Helicóptero 2DOF.



Fonte: Autor

Figura 59 – Dados de saída utilizados para identificação do Helicóptero 2DOF

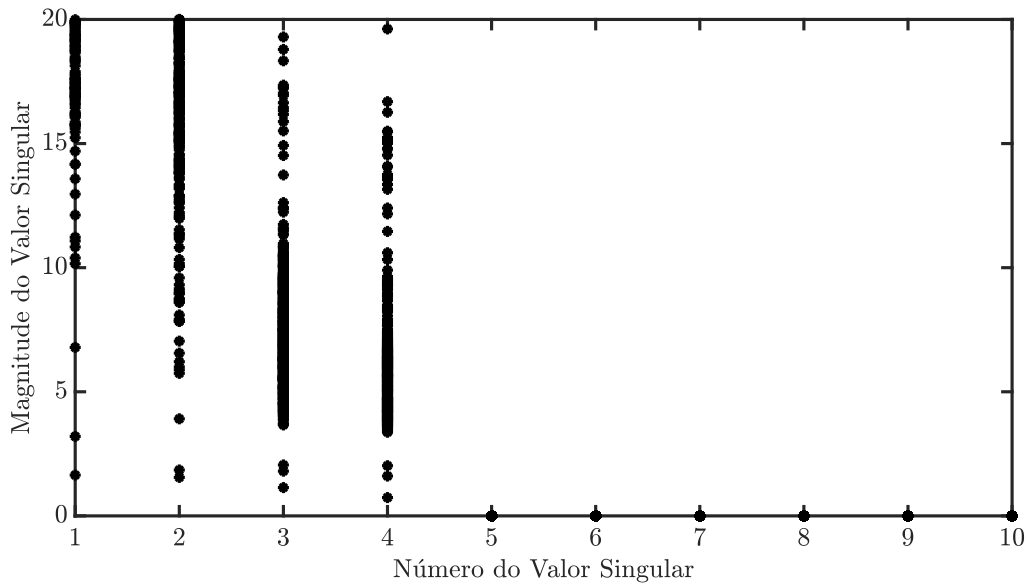


Fonte: Autor

Hankel mostrado na 60, pode-se perceber que existem quatro valores singulares significantes para todas as regras durante a identificação evolutiva, logo a ordem escolhida para o modelo nebuloso obtido é  $n = 4$ .

Na Fig. 61 é mostrada a evolução do número de regras para o modelo proposto. Depois das 100 amostras iniciais o modelo nebuloso possui 13 regras; durante o processo evolutivo, o número de regras é de 14 na amostra 135; o número de regras é de 15 na amostra 136; o número

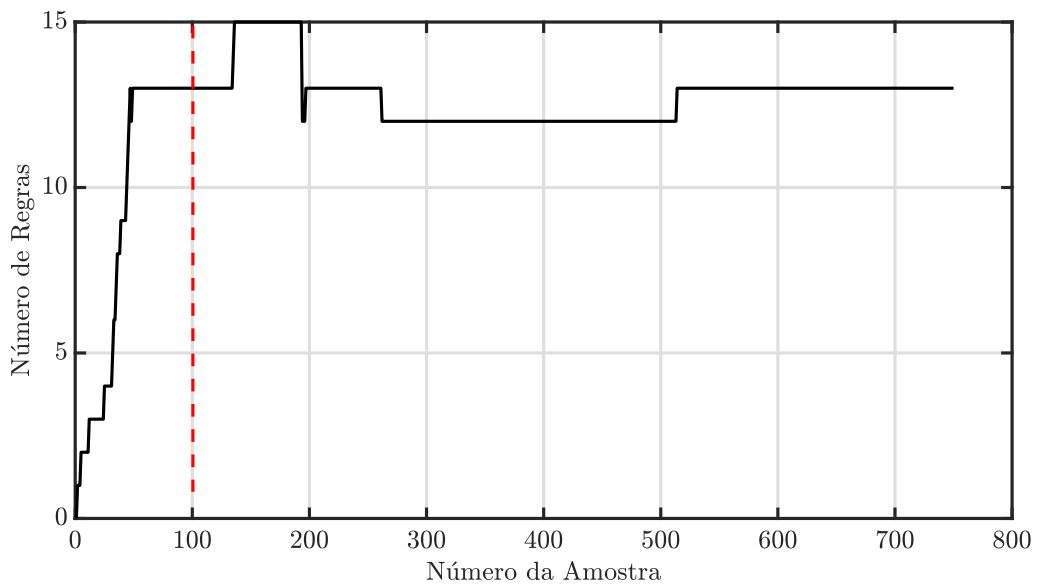
Figura 60 – Espaço dos valores singulares da matriz de Hankel para todas as regras durante o processo de identificação do Helicóptero 2DOF.



Fonte: Autor

de regras é de 12 na amostra 194; o número de regras é de 13 na amostra 197; o número de regras é de 12 na amostra 262; na amostra 514 mais uma regra é criada, então o número final de regras é 13.

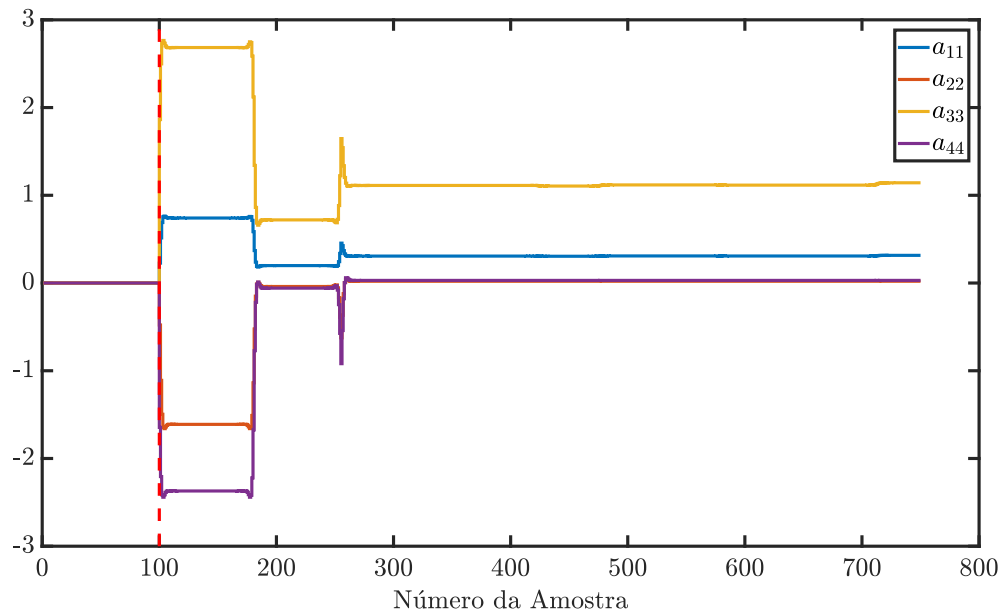
Figura 61 – Variação do número de regras durante a identificação do helicóptero 2DOF.



Fonte: Autor

A evolução dos parâmetros do consequente para cada regra, ilustrados pela atualização recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $\mathbf{A}^i$ , é mostrado nas Figs. 62-76.

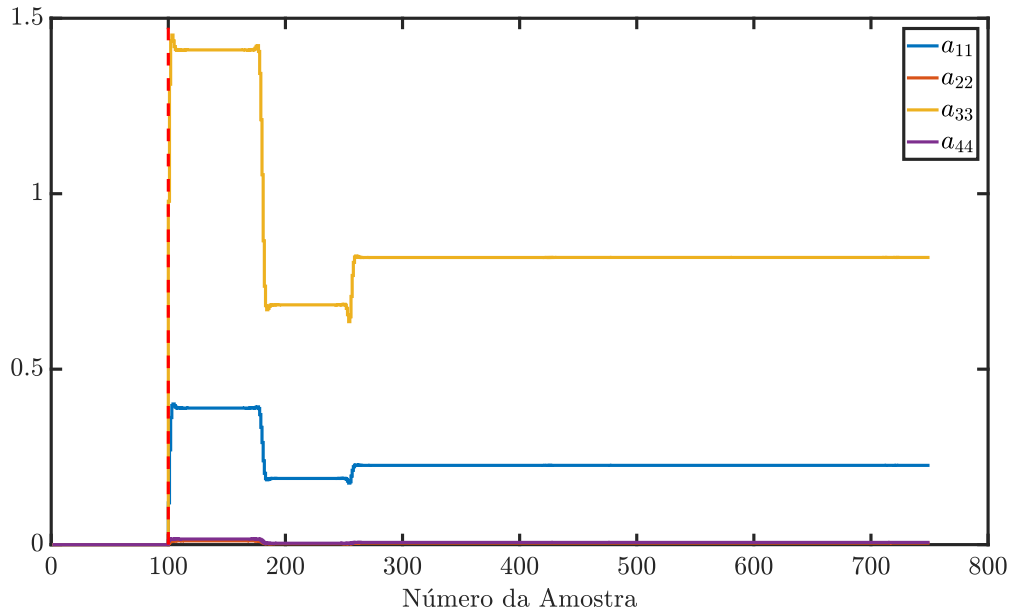
Figura 62 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $A^1$  para a regra 1 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF.



Fonte: Autor

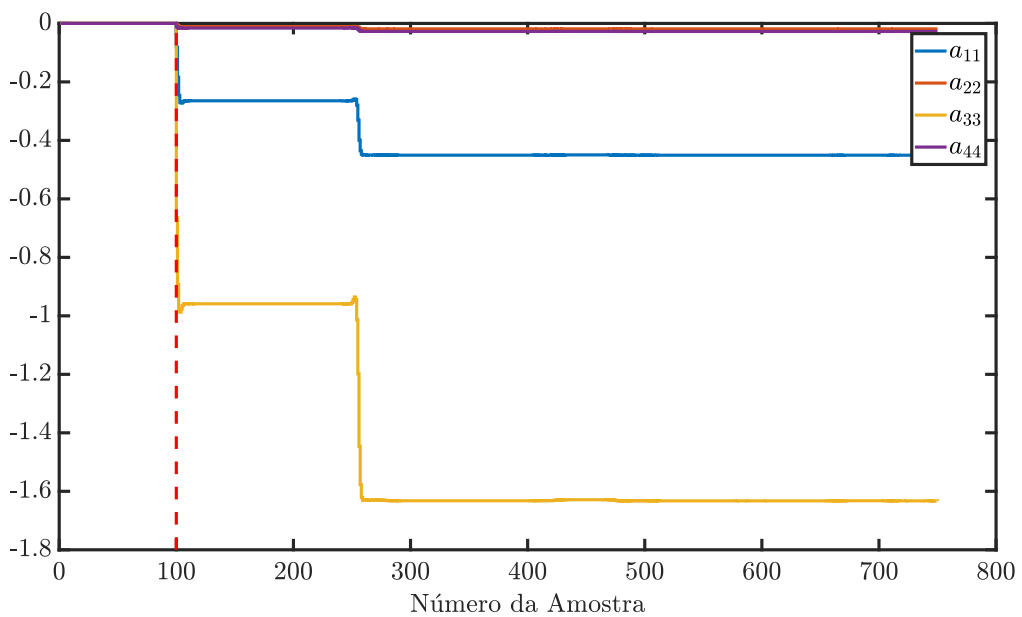
Uma comparação entre o modelo obtido e a resposta real do helicóptero 2DoF é mostrada nas Figs. 77-78. A metodologia proposta obteve  $VAF = 98,06\%$  para o ângulo de elevação  $\varphi$  e  $VAF = 97,87\%$  para o ângulo de azimute  $\vartheta$ .

Figura 63 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $A^2$  para a regra 2 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF.



Fonte: Autor

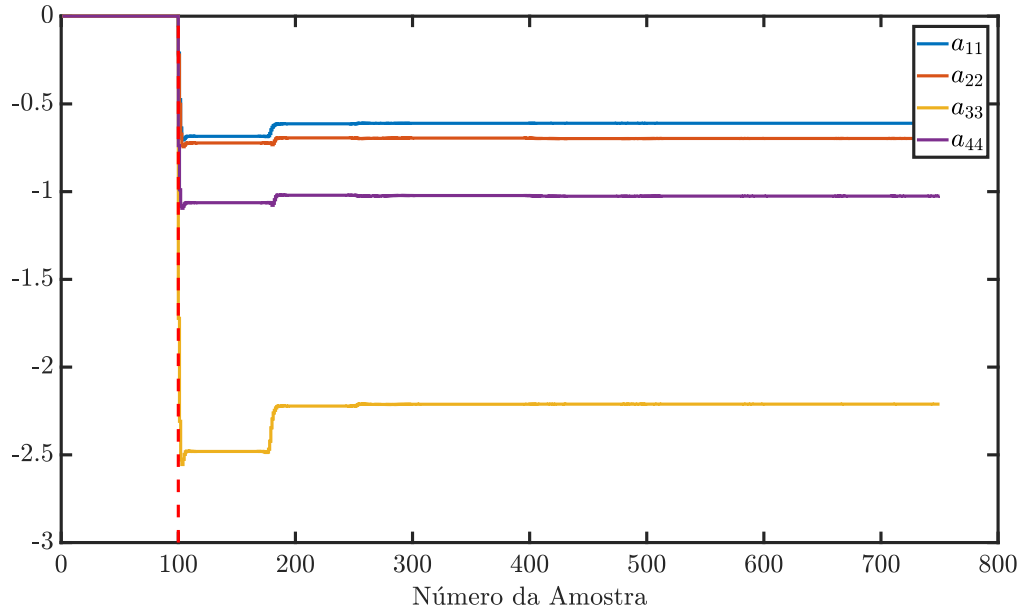
Figura 64 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $A^3$  para a regra 3 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF.



Fonte: Autor

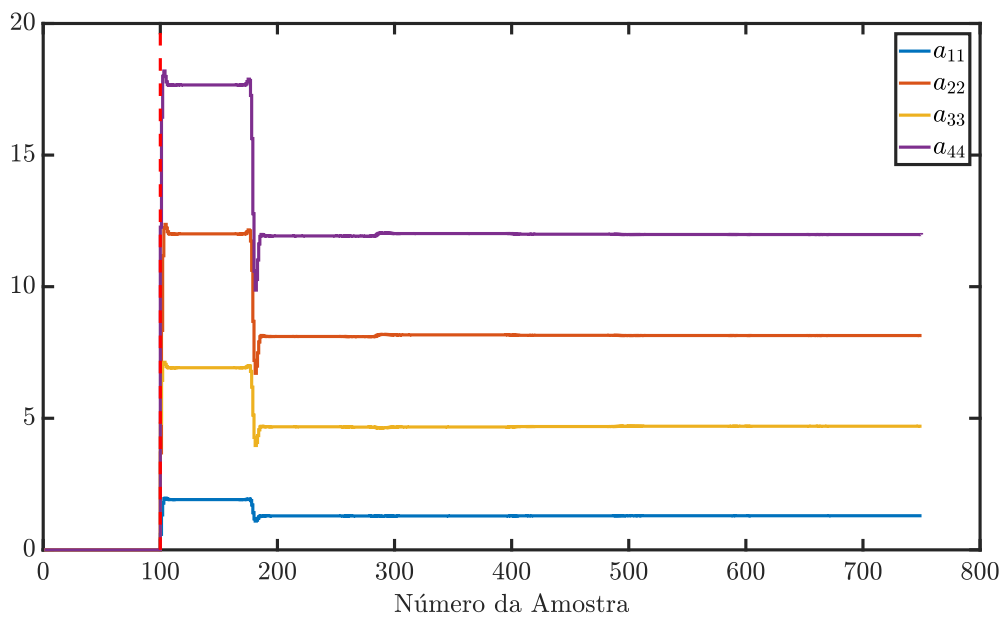


Figura 65 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $A^4$  para a regra 4 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF.



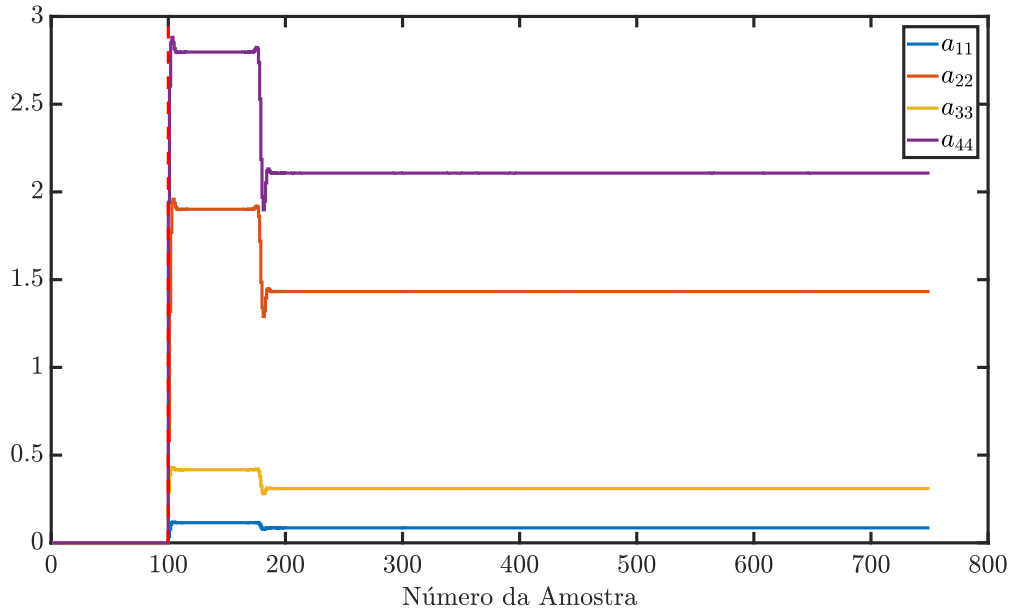
Fonte: Autor

Figura 66 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $A^5$  para a regra 5 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF.



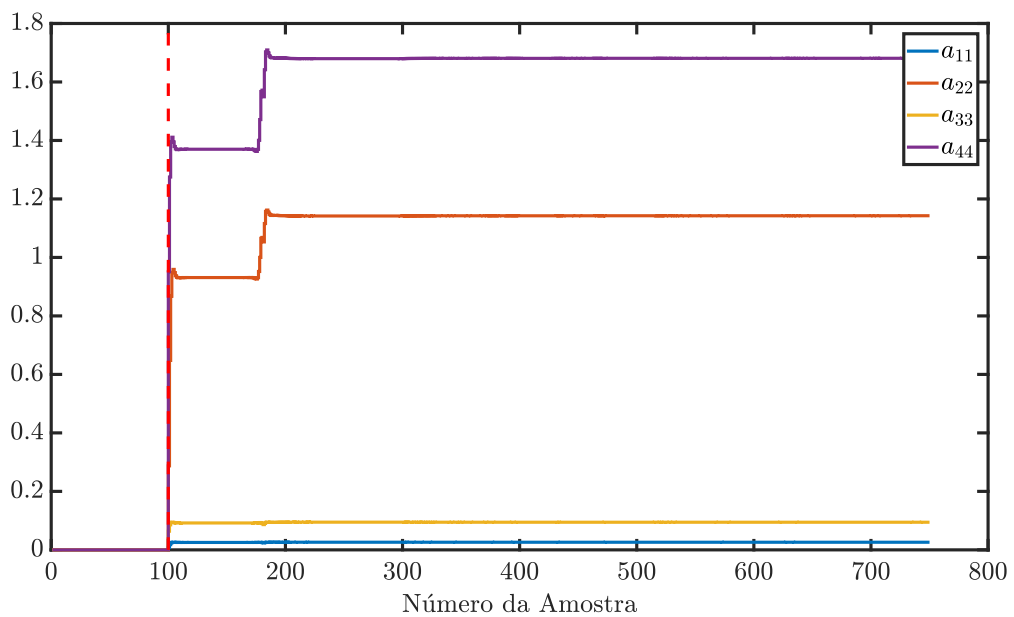
Fonte: Autor

Figura 67 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $A^6$  para a regra 6 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF.



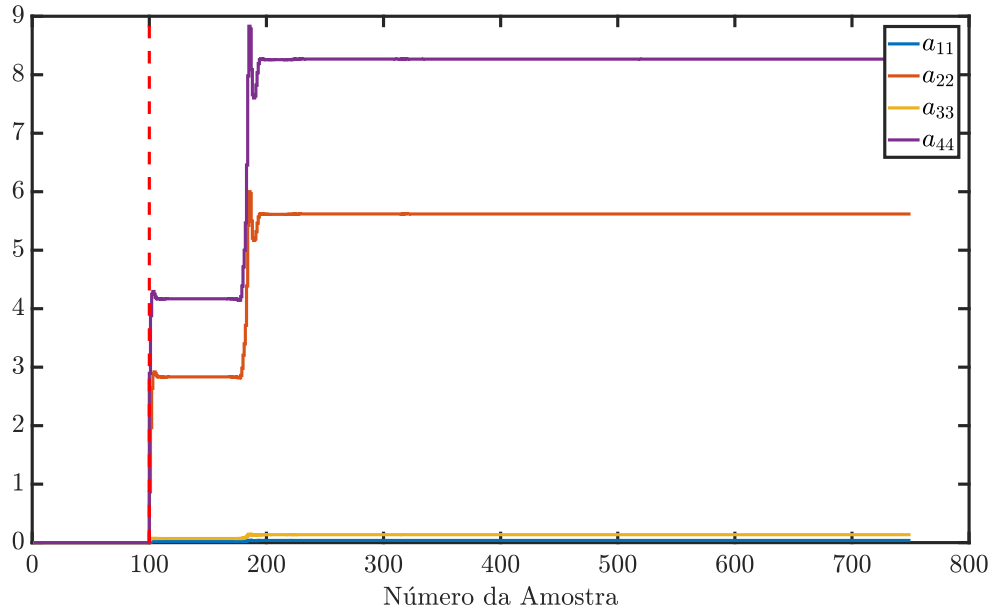
Fonte: Autor

Figura 68 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $A^7$  para a regra 7 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF.



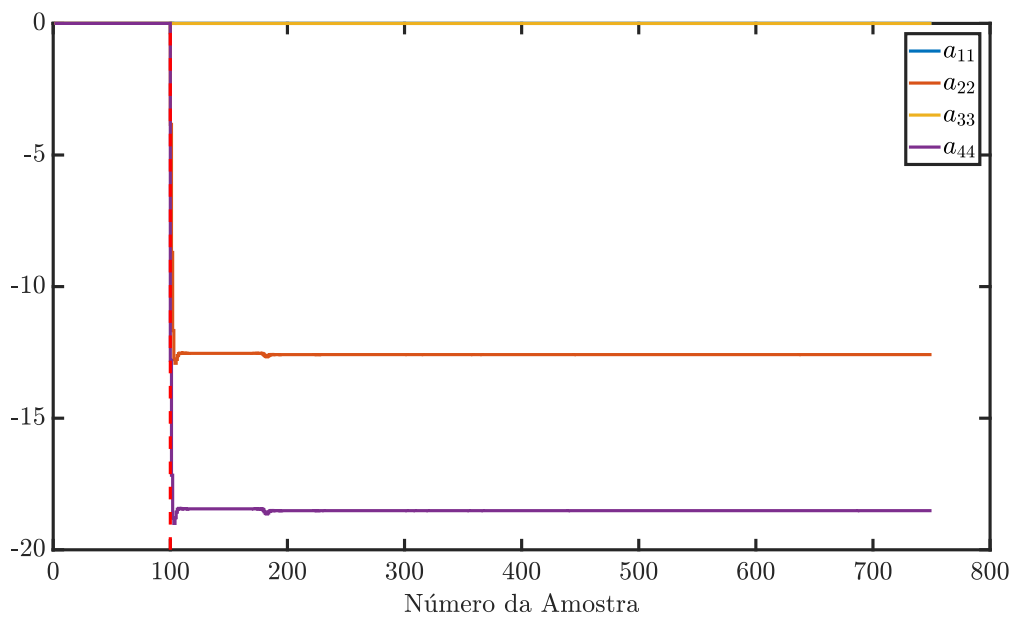
Fonte: Autor

Figura 69 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $A^8$  para a regra 8 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF.



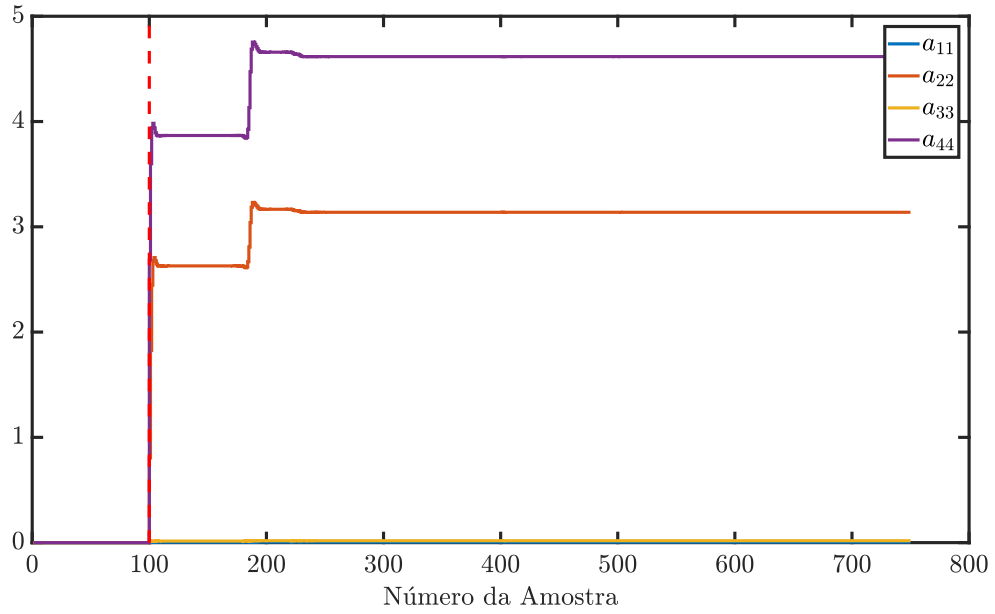
Fonte: Autor

Figura 70 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $A^9$  para a regra 9 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF.



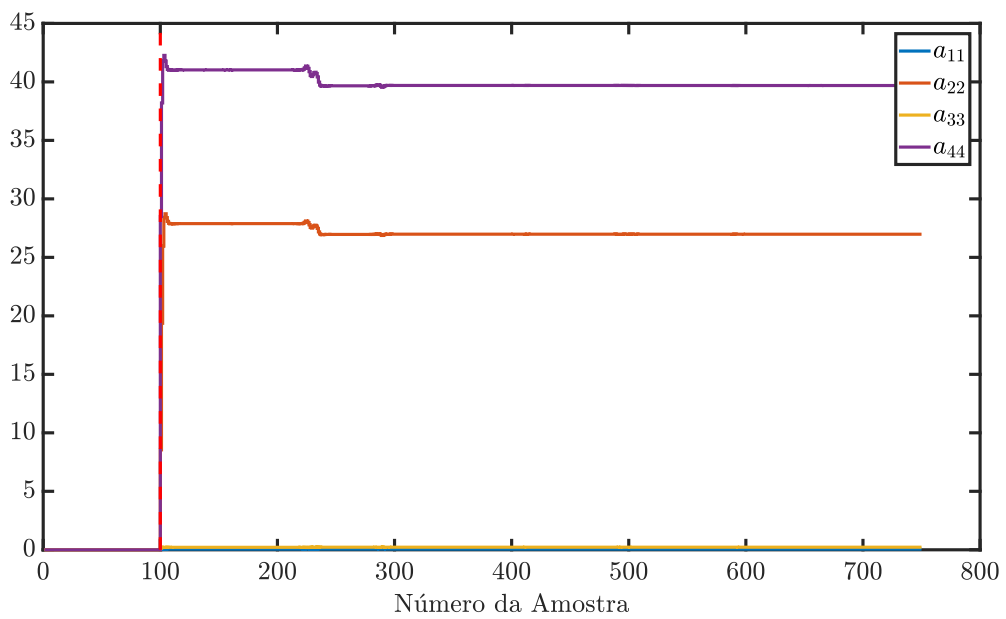
Fonte: Autor

Figura 71 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $A^{10}$  para a regra 10 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF.



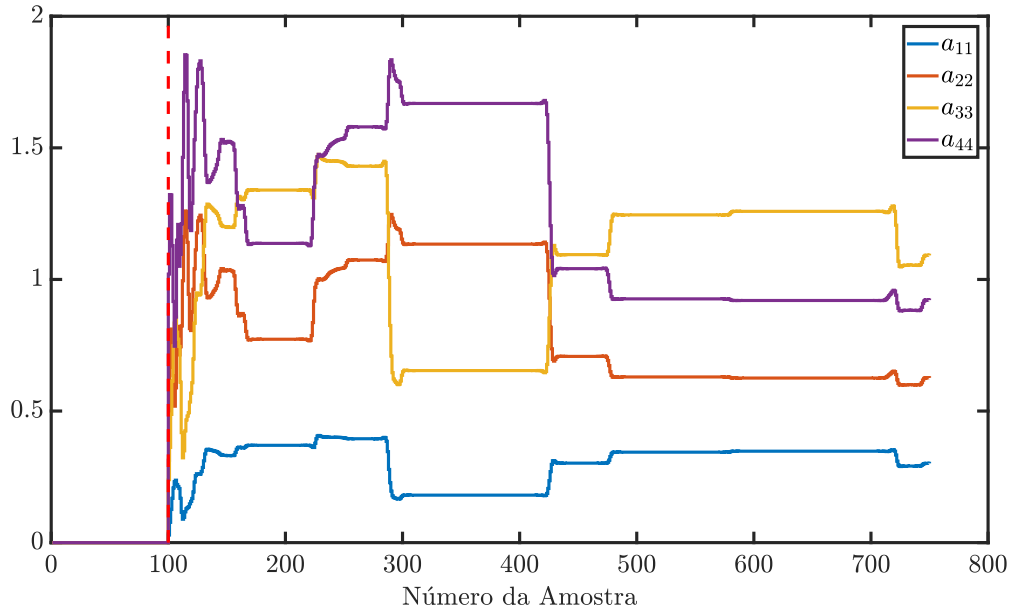
Fonte: Autor

Figura 72 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $A^{11}$  para a regra 3 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF.



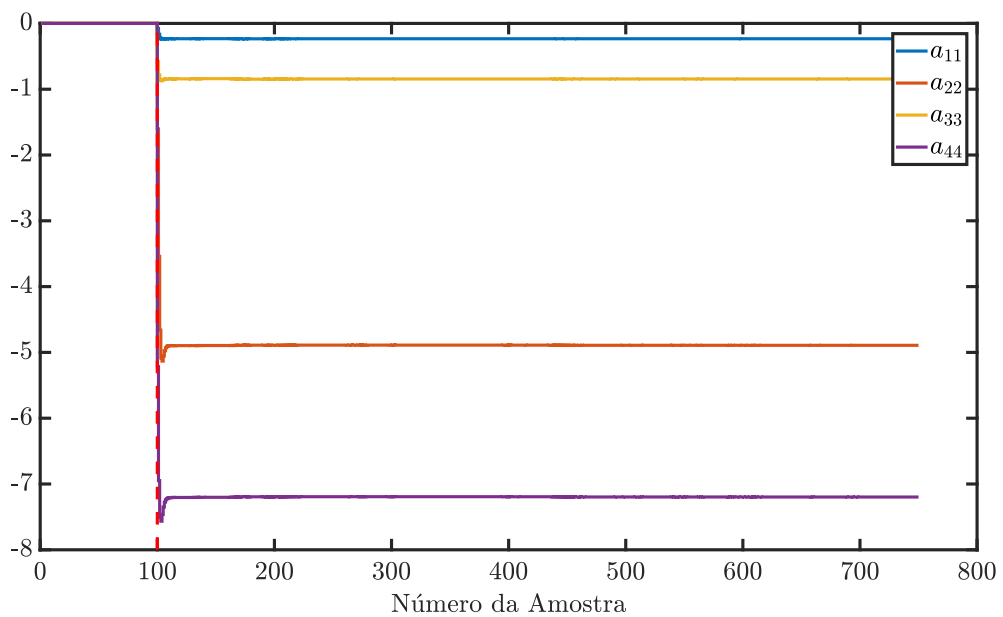
Fonte: Autor

Figura 73 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $\mathbf{A}^{12}$  para a regra 12 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF.



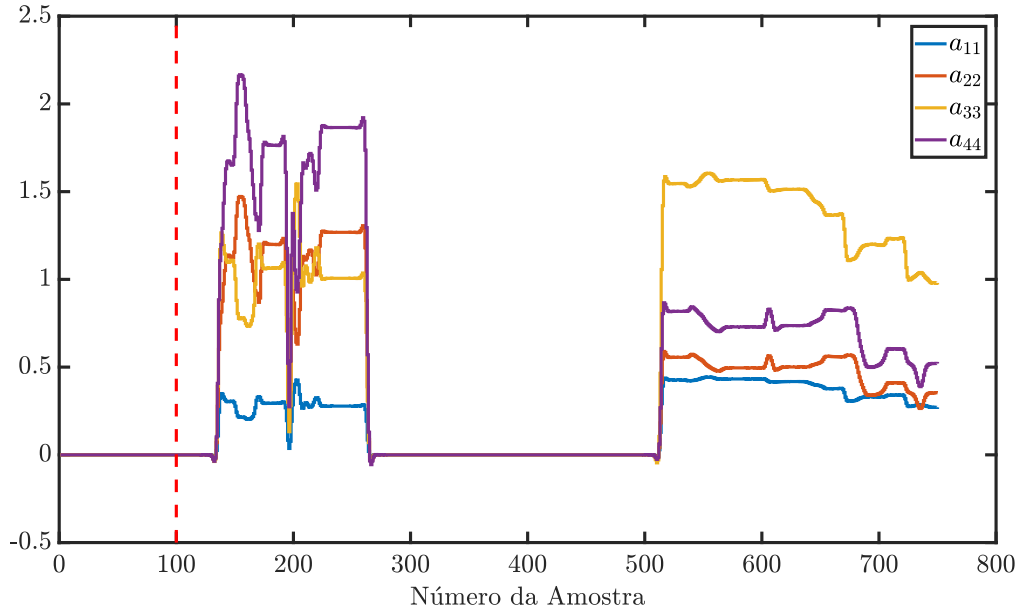
Fonte: Autor

Figura 74 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $\mathbf{A}^{13}$  para a regra 13 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF.



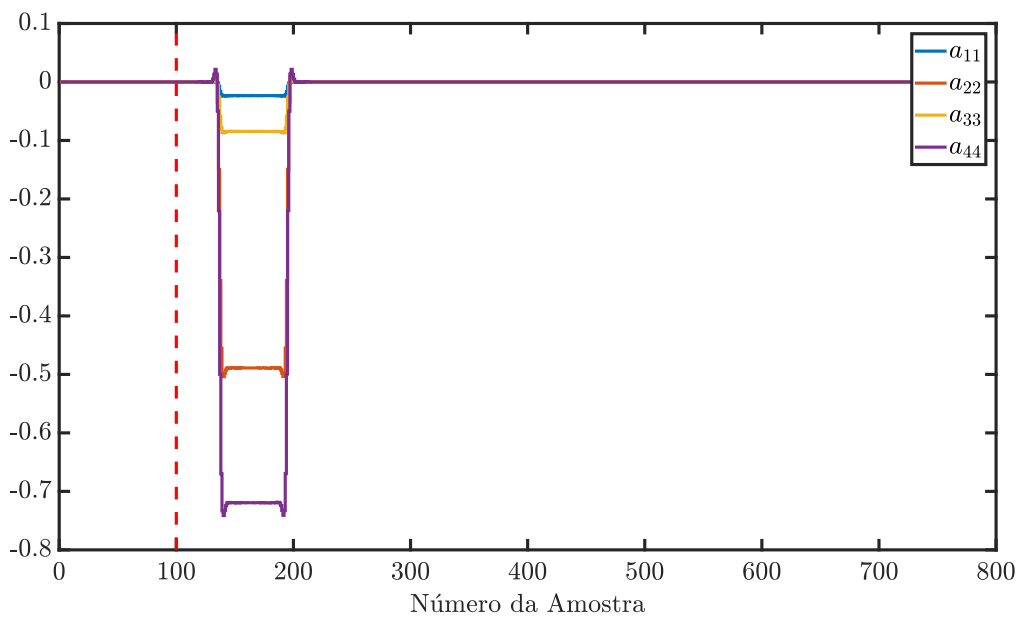
Fonte: Autor

Figura 75 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $\mathbf{A}^{14}$  para a regra 14 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF.



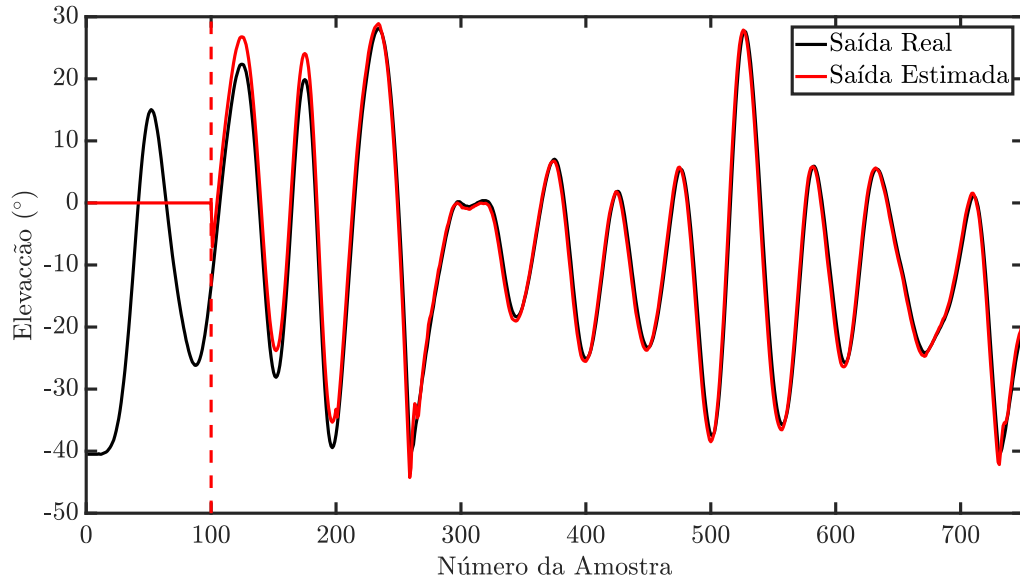
Fonte: Autor

Figura 76 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $\mathbf{A}^{15}$  para a regra 15 durante o processo de identificação do helicóptero 2DoF.



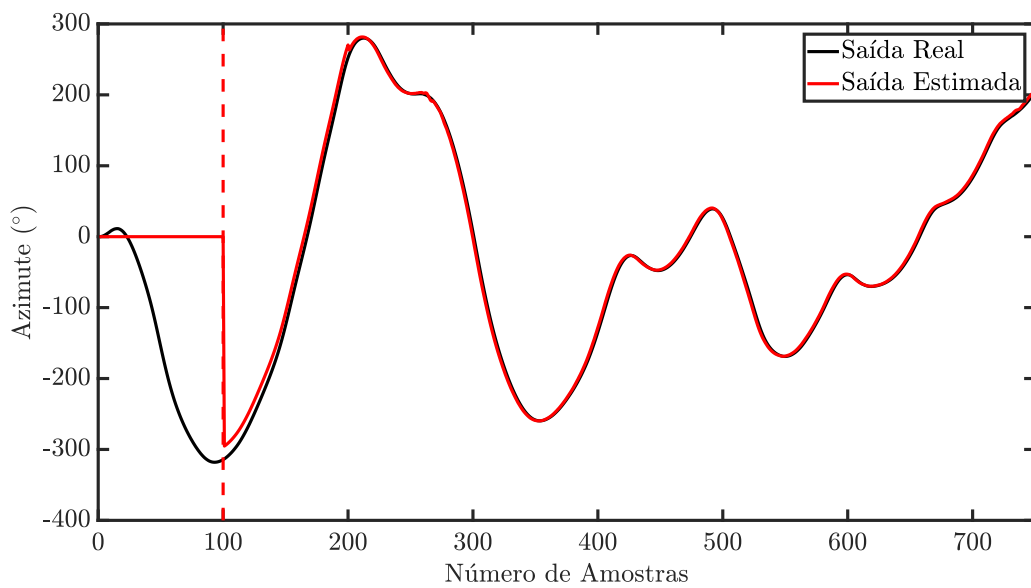
Fonte: Autor

Figura 77 – Estimação obtida como o modelo proposto para o Ângulo de Elevação.



Fonte: Autor

Figura 78 – Estimação obtida como o modelo proposto o Ângulo de Azimute.



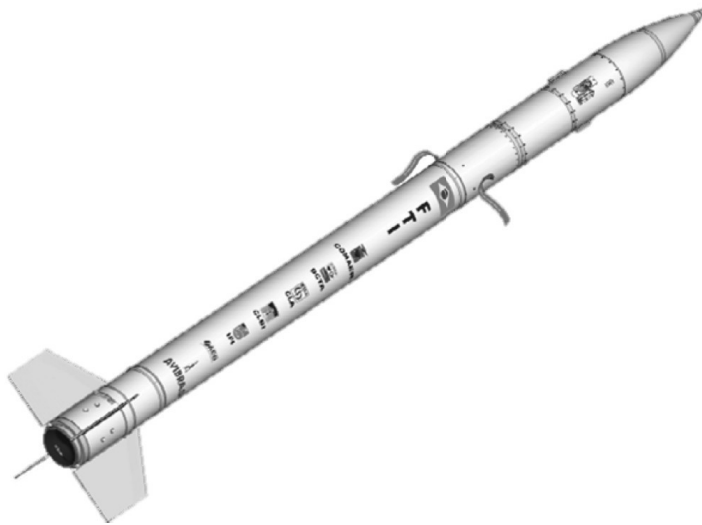
Fonte: Autor

#### 4.4 Caso 4: Estimação *Online* da Trajetória de Foguete de Treinamento Intermediário

Para validar a aplicabilidade da metodologia na solução de problemas reais de alta complexidade, é proposta a utilização do modelo nebuloso evolutivo no espaço de estados para a previsão da trajetória de um foguete.

O foguete utilizado para a obtenção dos dados é o FTI (foguete de treinamento intermediário), ilustrado na Fig. 79, que é um veículo de treinamento destinado a proporcionar treinamento operacional, de forma isolada, sem participação de estação remota. O foguete é instrumentado com telemetria banda S, transponder radar banda C, terminação de voo e apogeu superior a 60 km. Utiliza propelente sólido, é lançado a partir de trilhos e é estabilizado aerodinamicamente por quatro empenas retas fixas. O veículo é composto de: motor-foguete, terminação de voo e carga-útil.

Figura 79 – Foguete de treinamento intermediário utilizado para a estimação da trajetória.



Fonte: Adaptado Mata (2017)

O foguete foi modelado como um sistema não linear possuindo três entradas e três saídas. Como o objetivo é a previsão um passo a frente da trajetória do foguete, as entradas utilizadas são o ângulo de elevação  $y_{k-1}^1$  em graus, ângulo de azimute  $y_{k-1}^2$  em graus, e a distância  $y_{k-1}^3$  em *km* atrasados em uma amostra. As saídas utilizadas são o ângulo de elevação  $y_k^1$  em graus, ângulo de azimute  $y_k^2$  em graus, e a distância  $y_k^3$  em *km*. O conjunto de dados do lançamento consiste de 4080 amostras com período de amostragem de 50ms. Desse total, 3891 amostras rotuladas como válidas pelo sistema de aquisição de dados foram utilizadas para a estimação da trajetória.



A regra generalizada para o modelo nebuloso é dada por

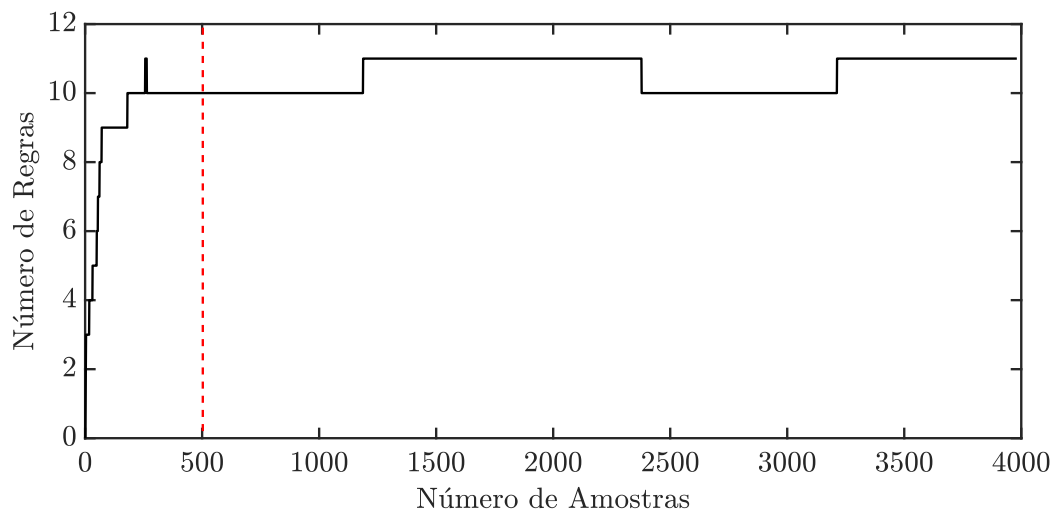
$$R^i : \text{SE } \mathbf{z}_k = [\mathbf{y}_{k-1}] \sim \mathbf{z}^{i*} = [\mathbf{y}_{k-1}^{(i*)}]$$

$$\text{ENTAO } \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}|^i = \mathbf{A}^i \mathbf{x}_k|^i + \mathbf{B}^i \mathbf{y}_k|^i \\ \mathbf{y}_k|^i = \mathbf{C}^i \mathbf{x}_k|^i + \mathbf{D}^i \mathbf{y}_{k-1}|^i \end{cases} \quad (4.7)$$

Para a implementação da metodologia proposta foram considerados os seguintes parâmetros:  $p = 18$  (número de parâmetros de Markov independentes),  $\alpha = 100$  (número de linhas da matriz de Hankel),  $\beta = 200$  (número de colunas da matriz de Hankel),  $\varepsilon = 0.3$  (limiar de sobreposição),  $\eta = 0.3$  (limiar da utilidade), onde um conjunto de 500 é utilizado para a estimação inicial do modelo.

O número de regras no modelo nebuloso evolutivo, é mostrada na Fig. 80. Depois das 500 amostras iniciais o modelo possui 10 regras; durante o processo evolutivo, o número de regras é de 11 na amostra 1188; o número de regras é 10 na amostra 2378; na amostra 3213 uma regra é criada então o número final de regras é 11.

Figura 80 – Variação do número de regras durante a estimação da trajetória do foguete FTI.

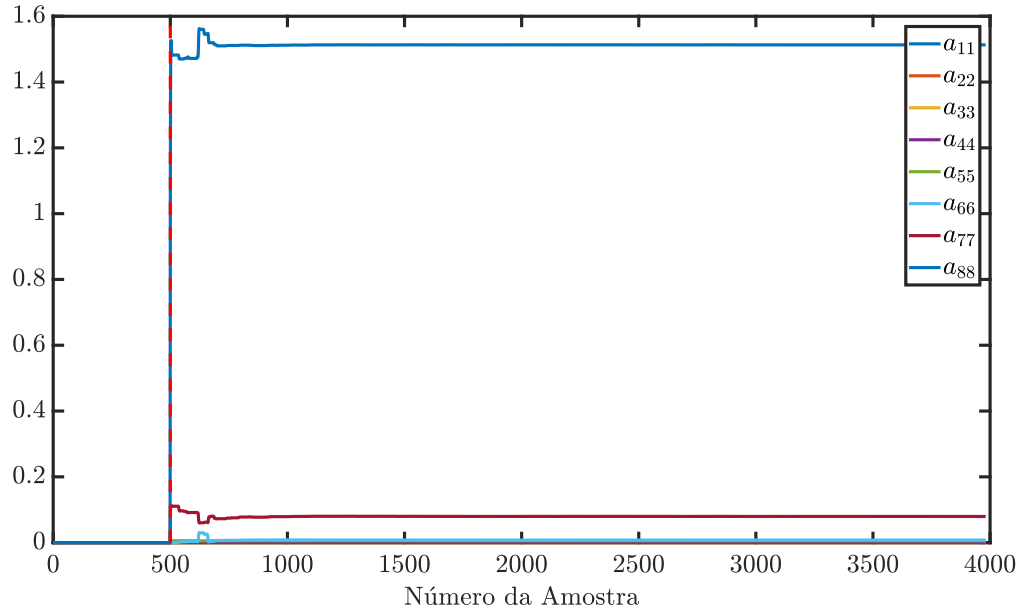


Fonte: Autor

A evolução dos parâmetros do consequente para cada regra, ilustrados pela atualização recursiva dos elementos da diagonal principal da matriz  $\mathbf{A}^i$ , é mostrado nas Figs. 81-91.

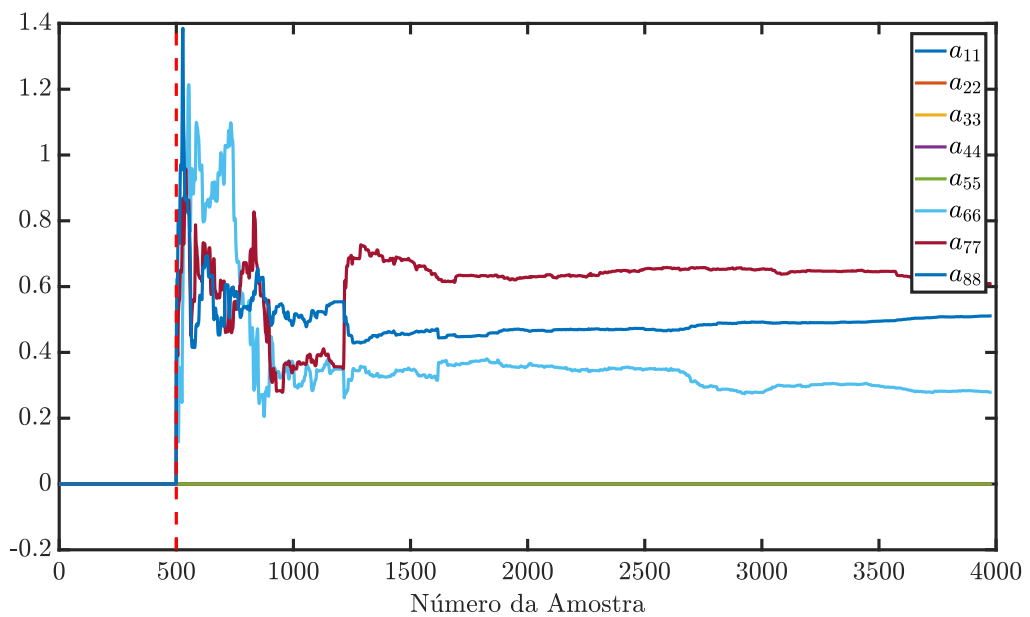
Uma comparação entre a trajetória estimada e a trajetória real do foguete é mostrada nas Figs. 92-94. A metodologia proposta obteve  $VAF = 99,95\%$  para o ângulo de elevação,  $VAF = 99,98\%$  para o ângulo de azimute, e  $VAF = 99,95\%$  para a distância.

Figura 81 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $A^1$  para a regra 1 durante o processo de identificação do foguete.



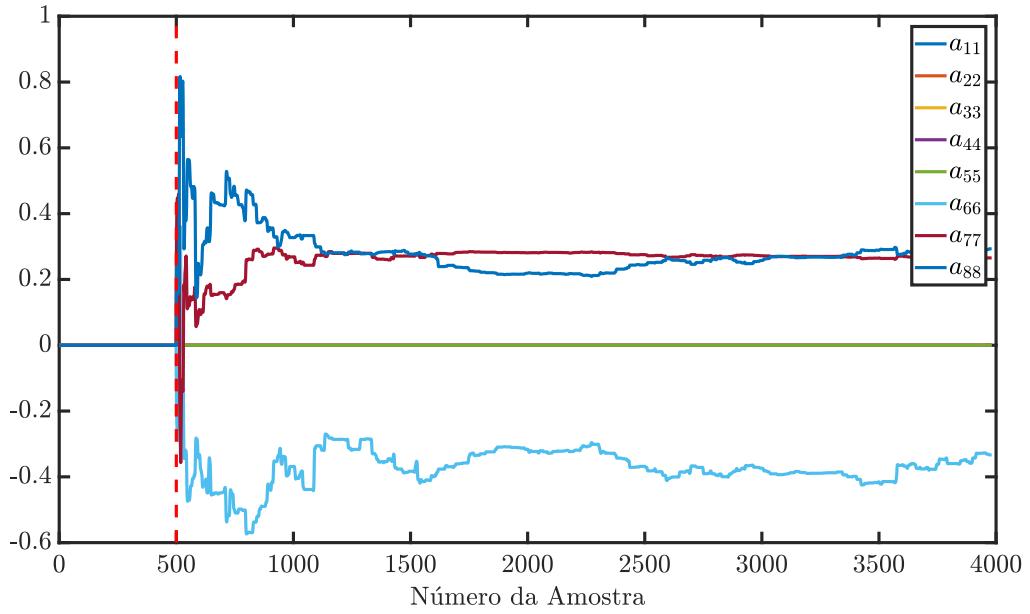
Fonte: Autor

Figura 82 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $A^2$  para a regra 2 durante o processo de identificação do foguete.



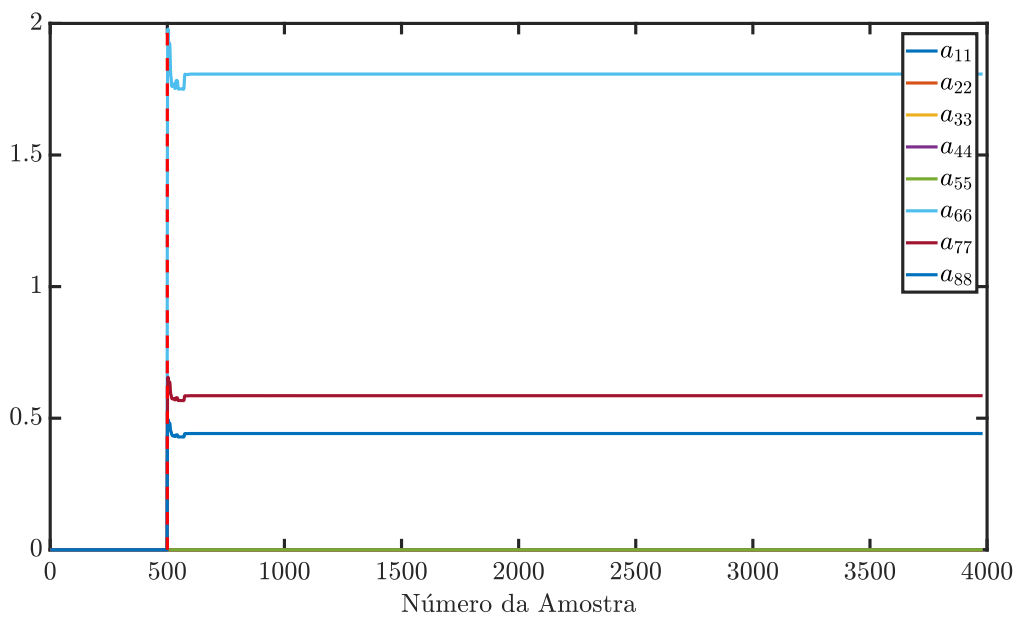
Fonte: Autor

Figura 83 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $A^3$  para a regra 3 durante o processo de identificação do foguete.



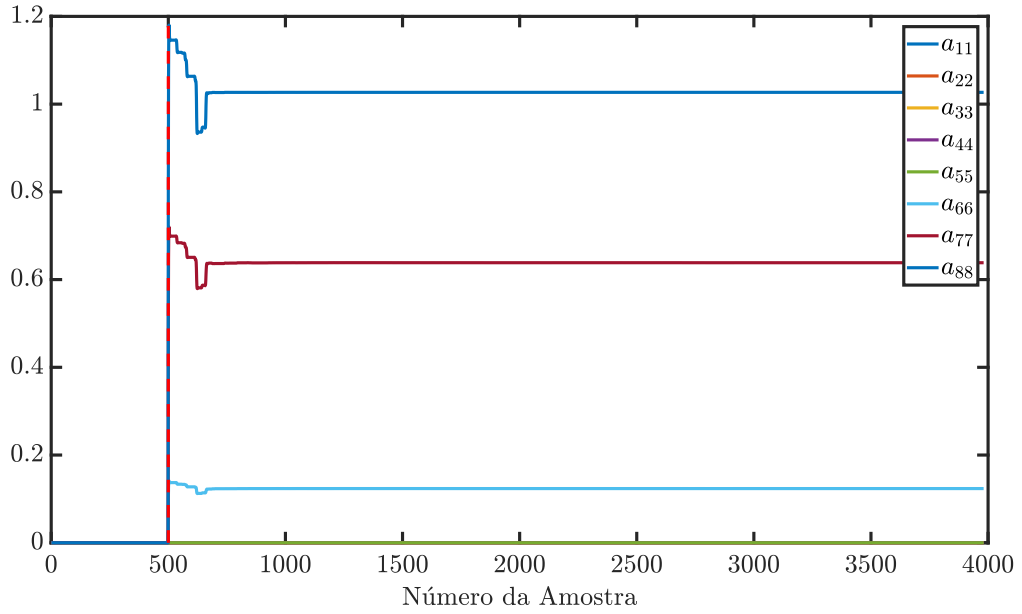
Fonte: Autor

Figura 84 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $A^4$  para a regra 4 durante o processo de identificação do foguete.



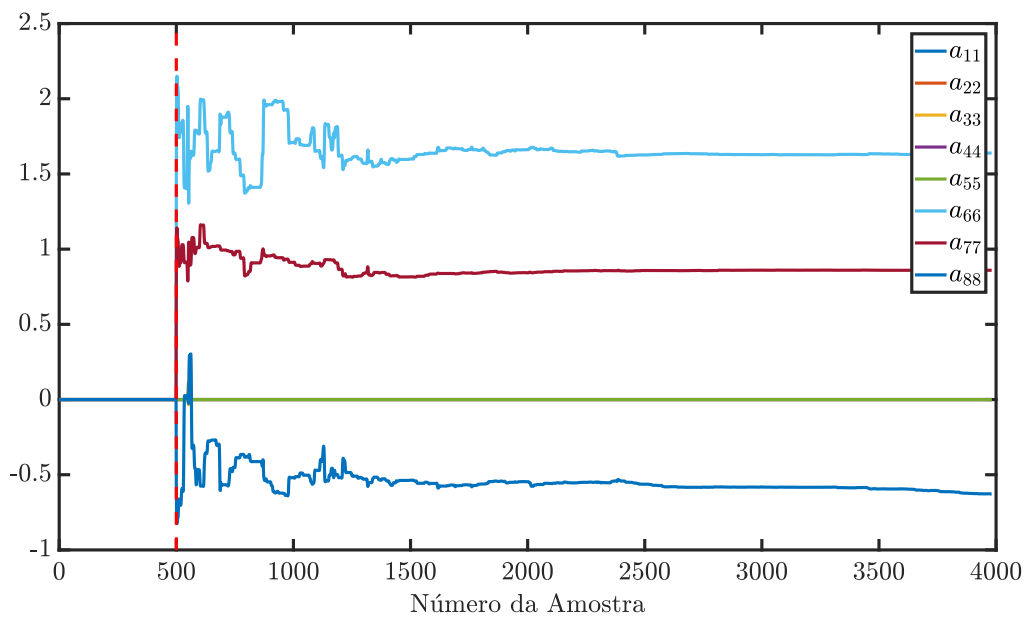
Fonte: Autor

Figura 85 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $A^5$  para a regra 5 durante o processo de identificação do foguete.



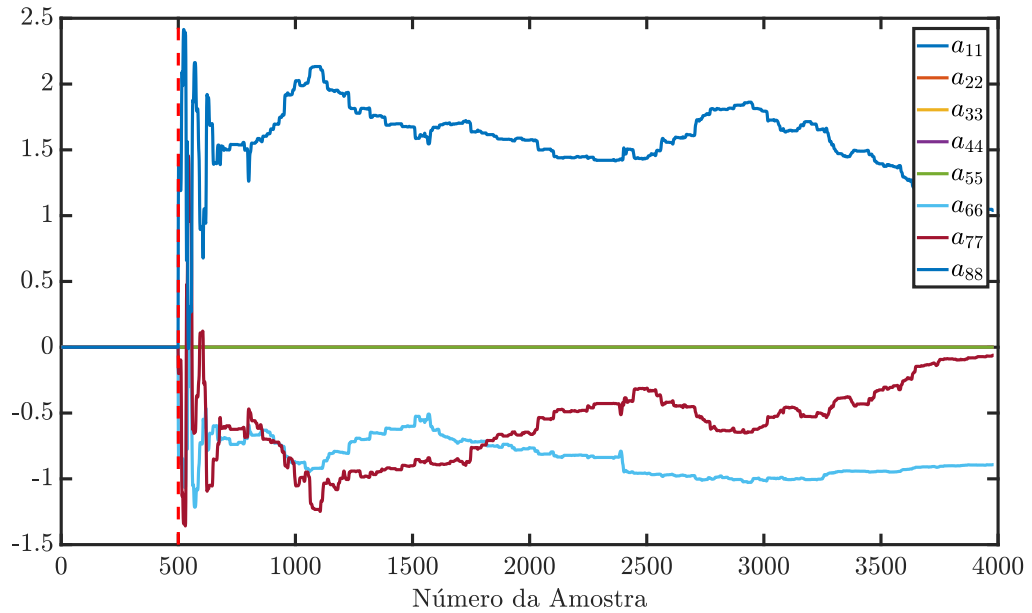
Fonte: Autor

Figura 86 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $A^6$  para a regra 6 durante o processo de identificação do foguete.



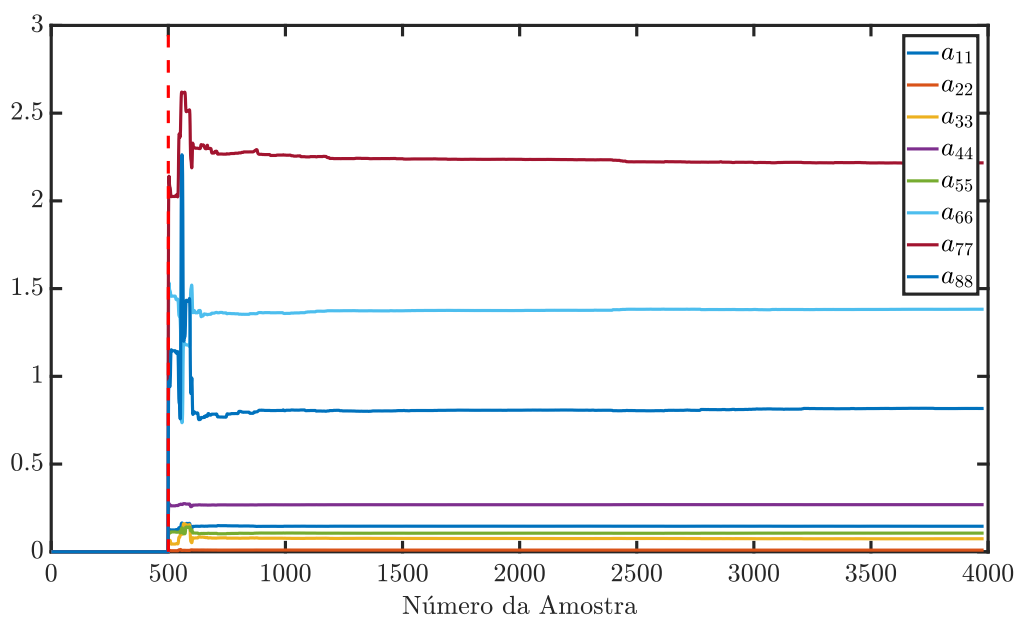
Fonte: Autor

Figura 87 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $A^7$  para a regra 7 durante o processo de identificação do foguete.



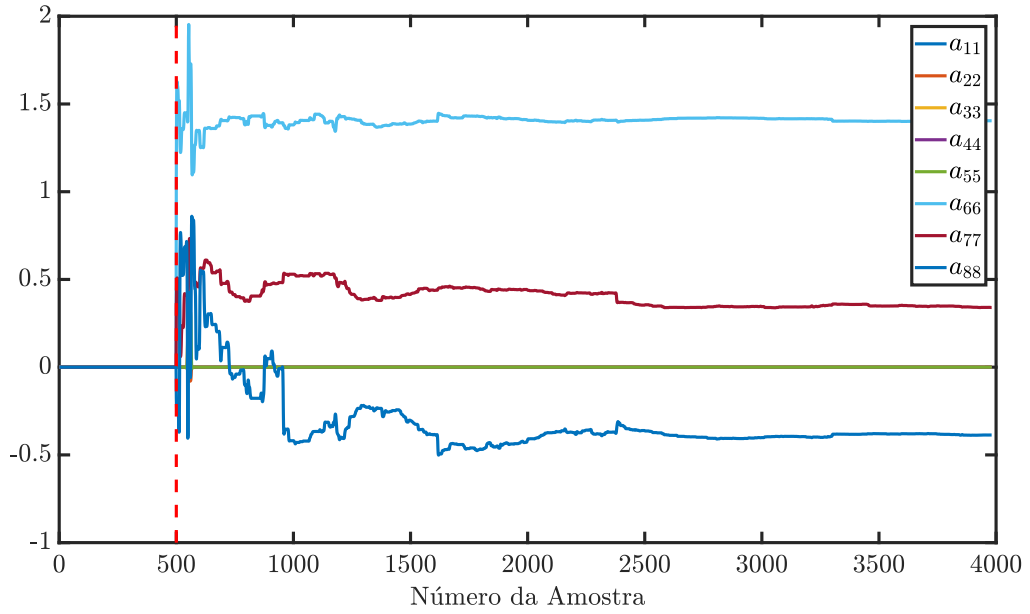
Fonte: Autor

Figura 88 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $A^8$  para a regra 8 durante o processo de identificação do foguete.



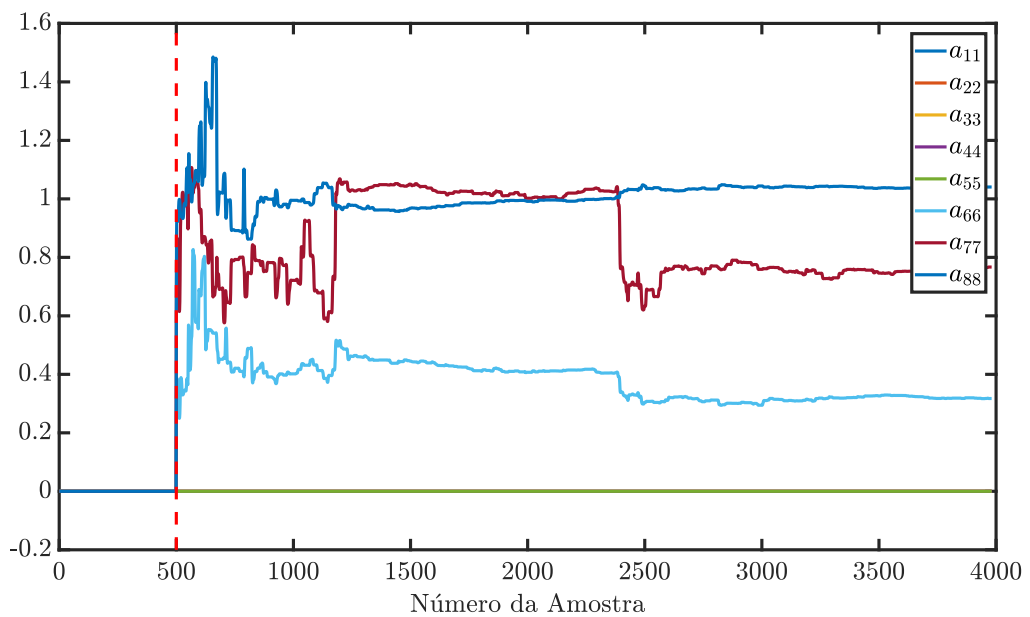
Fonte: Autor

Figura 89 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $A^9$  para a regra 9 durante o processo de identificação do foguete.



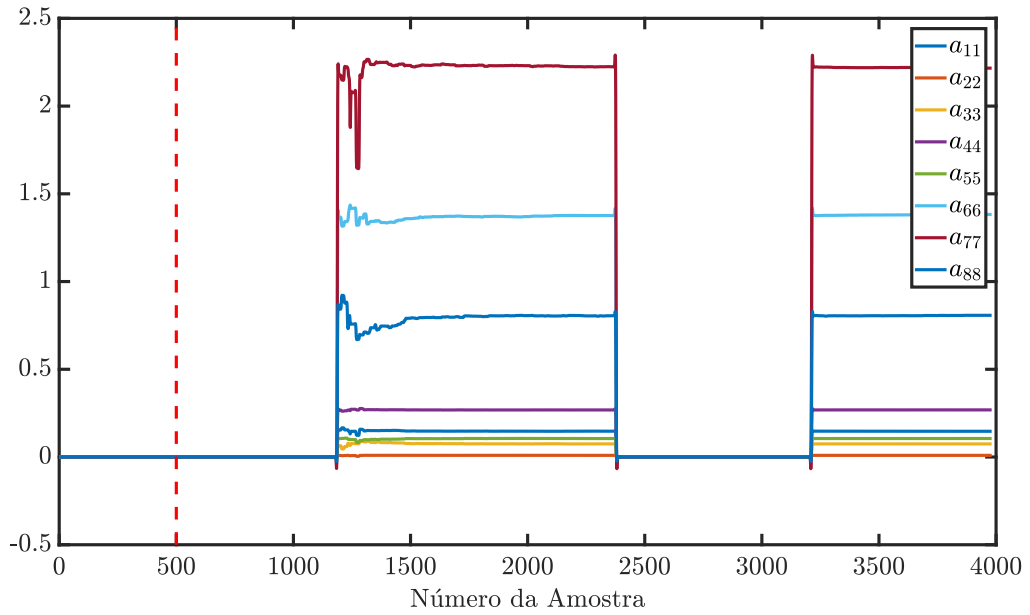
Fonte: Autor

Figura 90 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $A^{10}$  para a regra 10 durante o processo de identificação do foguete.



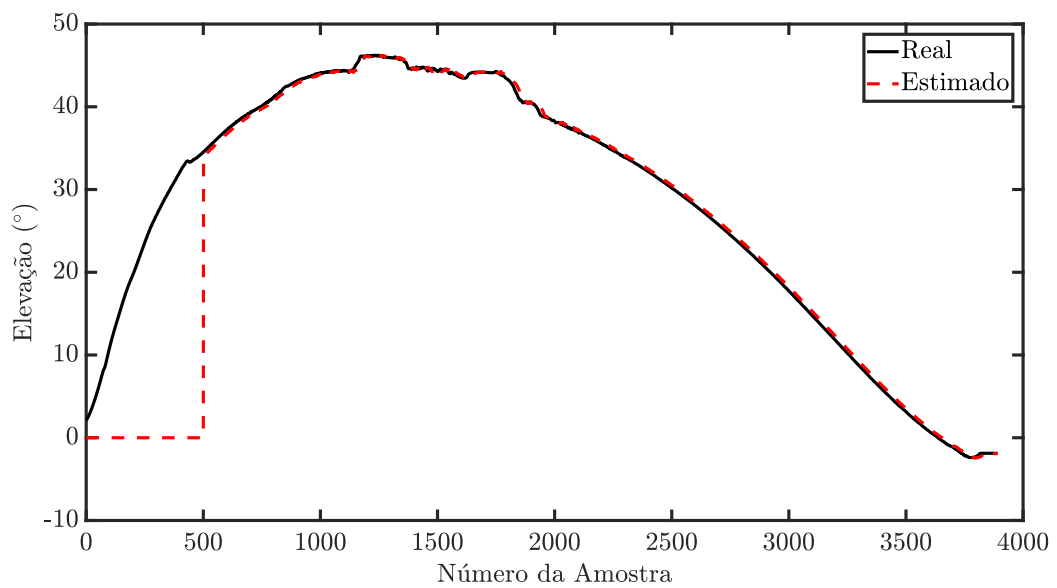
Fonte: Autor

Figura 91 – Estimação recursiva dos elementos da diagonal principal  $A^{11}$  para a regra 11 durante o processo de identificação do foguete.



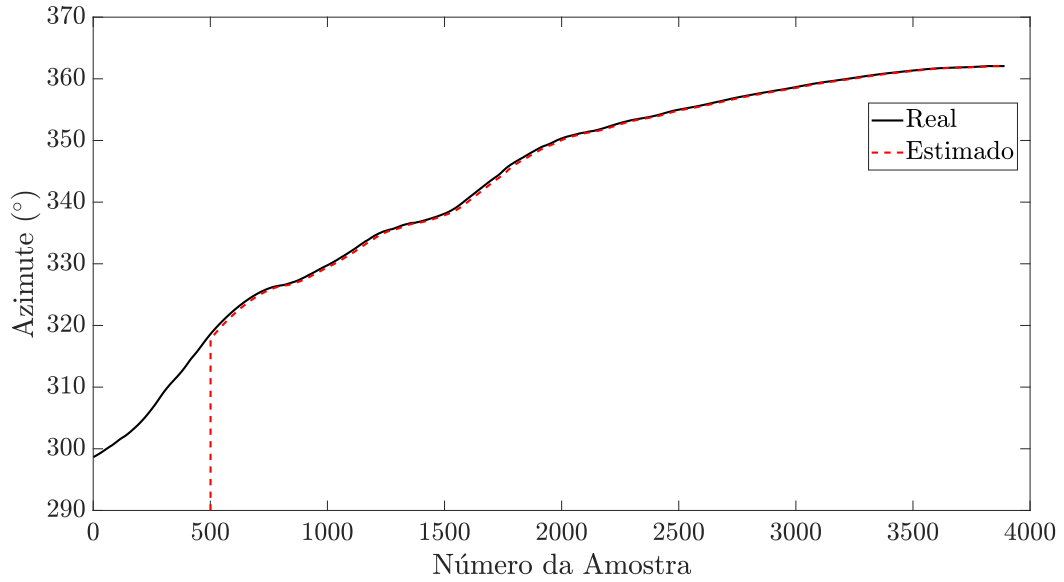
Fonte: Autor

Figura 92 – Ângulo de elevação real e estimado para o foguete.



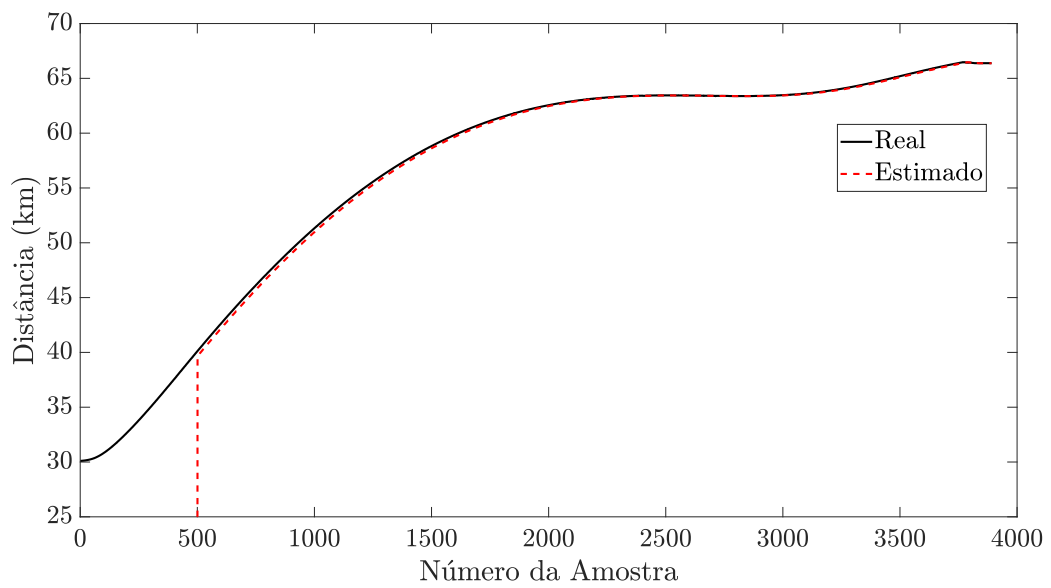
Fonte: Autor

Figura 93 – Ângulo de azimute real e estimado para o foguete.



Fonte: Autor

Figura 94 – Distância real e estimada para o foguete.



Fonte: Autor



## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 5.1 Conclusões

Nessa dissertação, uma metodologia nebulosa evolutiva para a identificação de sistemas não-lineares foi proposta. O modelo evolutivo obtido é capaz de alterar sua estrutura de maneira autônoma de acordo com o fluxo de dados, i.e., a metodologia proposta permite a eficiência do modelo nebuloso evolutivo no rastreamento das incertezas inerentes a dados experimentais. Além disso, a realização mínima dos submodelos do consequente das regras garante a simplicidade do modelo obtido. O algoritmo proposto foi desenvolvido para lidar com os dados que chegam a cada instante, ou seja, realizar seu processamento de forma *online*.

A metodologia proposta mostrou-se competitiva em relação às outras técnicas existentes na literatura de acordo com os critérios de avaliação utilizados. Os dois *benchmarks* utilizados são amplamente utilizados para a avaliação do desempenho de técnicas de identificação de sistemas. Para o Evaporador Industrial, o modelo obtido através da metodologia proposta obteve resultados vantajosos em relação à técnica utilizada para comparação, considerando critérios MSE e FIT. Já para a Fornalha para Vidro, os resultados mostraram que o modelo obtido com a metodologia proposta possui melhores valores de MSE e FIT para quatro das seis saídas do sistema, e valores compatíveis para as outras duas saídas. Além disso, a metodologia proposta também apresenta melhor performance considerando os valores médios para o MSE e FIT.

A metodologia proposta foi aplicada na identificação de um sistema dinâmico experimental, um helicóptero com dois graus de liberdade. Tal sistema é altamente complexo e por isso representa um desafio para metodologia de identificação de sistemas. Os bons resultados obtidos para esse sistema destacam a capacidade da metodologia proposta de representar de maneira satisfatória sistemas dinâmicos complexos. A evolução no número de regras demonstra a capacidade do modelo obtido de adaptar as diversas características do sistema dinâmico.

Para demonstrar a aplicabilidade da metodologia nebulosa evolutiva para identificação recursiva no espaço de estados, foi proposta a predição da trajetória de um foguete utilizado para treinamento. Os resultados obtidos foram satisfatórios e demonstraram a aplicabilidade da metodologia proposta em aplicações com alto nível de complexidade. Devido à natureza variante no tempo do foguete, uma boa predição da trajetória do foguete durante todo seu tempo de voo se deve à capacidade do modelo evolutivo de adaptar ao conjunto de dados de maneira *online*, assim garantindo bons resultados durante todas as etapas do voo.

É importante destacar a contribuição desta pesquisa em relação à obtenção de modelos nebulosos no espaço de estados com ordem mínima, i.e., o modelo nebuloso obtido possui a menor dimensão entre todos os modelos nebulosos controláveis e observáveis com a mesma realização entrada-saída. Isso garante ao modelo obtido simplicidade, mas sem perda na capacidade

de representação do mesmo. Isso garante também um menor esforço computacional na aplicação da metodologia, devido a simplicidade da estrutura do modelo nebuloso obtido.

## 5.2 Trabalhos Futuros

Sugestões de trabalhos futuros são apresentadas a seguir:

- Realizar uma análise comparativa do custo computacional da metodologia proposta em relação a outras técnicas existentes na literatura;
- Desenvolvimento de uma metodologia para a estimação de modelos nebulosos evolutivos no espaço de estados no contexto estocástico;
- Avaliar a metodologia proposta para aplicações no projeto de controladores nebulosos no contexto evolutivo;
- Análise de outras abordagens para agrupamento nebuloso evolutivo.

## REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. A. Introdução à identificação de sistemas. *Editora UFMG, Belo Horizonte*, v. 4, 2015.
- ANGELOV, P. A fuzzy controller with evolving structure. *Information Sciences*, Elsevier, v. 161, n. 1, p. 21–35, 2004.
- ANGELOV, P. *Autonomous learning systems: from data streams to knowledge in real-time*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.
- ANGELOV, P.; BUSWELL, R. Evolving rule-based models: A tool for intelligent adaptation. In: IEEE. *IFSA world congress and 20th NAFIPS international conference, 2001. Joint 9th*. [S.l.], 2001. v. 2, p. 1062–1067.
- ANGELOV, P.; KORDON, A. Adaptive inferential sensors based on evolving fuzzy models. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, v. 40, n. 2, p. 529–539, April 2010. ISSN 1083-4419.
- ANGELOV, P. P.; FILEV, D. P. An approach to online identification of takagi-sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, IEEE, v. 34, n. 1, p. 484–498, 2004.
- ANGELOV, P. P.; ZHOU, X. Evolving fuzzy-rule-based classifiers from data streams. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, IEEE, v. 16, n. 6, p. 1462–1475, 2008.
- ANGELOV, P. P.; ZHOU, X. Evolving fuzzy-rule-based classifiers from data streams. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 16, n. 6, p. 1462–1475, Dec 2008. ISSN 1063-6706.
- ANH, V. et al. A multivariate causality model for sydney ozone prediction. *WIT Transactions on Ecology and the Environment*, WIT Press, v. 14, 1970.
- ÅSTRÖM, K. J.; EYKHOFF, P. System identification—a survey. *Automatica*, Elsevier, v. 7, n. 2, p. 123–162, 1971.
- ÅSTRÖM, K.-J.; TORSTEN, B. Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 2, n. 2, p. 96–111, 1965.
- BABUŠKA, R. *Fuzzy modeling for control*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 12.
- BAYES, T. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. 1763.
- BENEDETTO, S.; BIGLIERI, E.; DAFFARA, R. Modeling and performance evaluation of nonlinear satellite links—a volterra series approach. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, IEEE, n. 4, p. 494–507, 1979.
- BEZDEK, J. C. Objective function clustering. In: *Pattern recognition with fuzzy objective function algorithms*. [S.l.]: Springer, 1981. p. 43–93.
- BEZDEK, J. C.; EHRLICH, R.; FULL, W. Fcm: The fuzzy c-means clustering algorithm. *Computers & Geosciences*, Elsevier, v. 10, n. 2-3, p. 191–203, 1984.

- BILLINGS, S. Identification of nonlinear systems—a survey. In: IET. *IEE Proceedings D (Control Theory and Applications)*. [S.l.], 1980. v. 127, n. 6, p. 272–285.
- BIREK, L.; PETROVIC, D.; BOYLAN, J. Water leakage forecasting: the application of a modified fuzzy evolving algorithm. *Applied Soft Computing*, v. 14, n. Part B, p. 305 – 315, 2014. ISSN 1568-4946. Evolving Soft Computing Techniques and Applications. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1568494613001907>>.
- CASTRO-GARCIA, R. et al. Hammerstein system identification through best linear approximation inversion and regularisation. *International Journal of Control*, v. 0, n. 0, p. 1–17, 0.
- CERVANTES, J. S. et al. Takagi-sugeno dynamic neuro-fuzzy controller of uncertain nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, PP, n. 99, p. 1–1, 2016. ISSN 1063-6706.
- CHANG, P.-C.; WU, J.-L.; LIN, J.-J. A takagi–sugeno fuzzy model combined with a support vector regression for stock trading forecasting. *Applied Soft Computing*, v. 38, n. Supplement C, p. 831 – 842, 2016. ISSN 1568-4946.
- CHEN, C.-T. *Linear System Theory and Design*. 3rd. ed. New York, NY, USA: Oxford University Press, Inc., 1998. ISBN 0195117778.
- CHEN, S.; BILLINGS, S.; GRANT, P. Non-linear system identification using neural networks. *International journal of control*, Taylor & Francis, v. 51, n. 6, p. 1191–1214, 1990.
- CHEUNG, N. J.; DING, X. M.; SHEN, H. B. Optifel: A convergent heterogeneous particle swarm optimization algorithm for takagi-sugeno fuzzy modeling. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 22, n. 4, p. 919–933, Aug 2014. ISSN 1063-6706.
- CHIU, S. L. Fuzzy model identification based on cluster estimation. *Journal of Intelligent & fuzzy systems*, IOS Press, v. 2, n. 3, p. 267–278, 1994.
- COELHO, A. A. R.; COELHO, L. dos S. *Identificação de sistemas dinâmicos lineares*. [S.l.: s.n.], 2004.
- FANTUZZI, C.; ROVATTI, R. On the approximation capabilities of the homogeneous takagi-sugeno model. In: *Proceedings of IEEE 5th International Fuzzy Systems*. [S.l.: s.n.], 1996. v. 2, p. 1067–1072 vol.2.
- FILHO, O. D. R. *Modelagem baseada em agrupamento nebuloso evolutivo de máxima verossimilhança aplicada a sistemas dinâmicos operando em ambiente não-estacionário*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Maranhão, 2017.
- FILHO, O. D. R.; SERRA, G. L. de O. Recursive fuzzy instrumental variable based evolving neuro-fuzzy identification for non-stationary dynamic system in a noisy environment. *Fuzzy Sets and Systems*, 2017. ISSN 0165-0114.
- FOURIER, J. *Theorie analytique de la chaleur, par M. Fourier*. [S.l.]: Chez Firmin Didot, père et fils, 1822.
- FRITZKE, B. Growing cell structures—a self-organizing network for unsupervised and supervised learning. *Neural networks*, Elsevier, v. 7, n. 9, p. 1441–1460, 1994.

- GAUSS, C. F. *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium auctore Carolo Friderico Gauss*. [S.l.]: sumtibus Frid. Perthes et IH Besser, 1809.
- GUSTAFSON, D. E.; KESSEL, W. C. Fuzzy clustering with a fuzzy covariance matrix. In: IEEE. *Decision and Control including the 17th Symposium on Adaptive Processes, 1978 IEEE Conference on*. [S.l.], 1979. p. 761–766.
- HSIA, T. *System identification: least-squares methods*. Lexington Books, 1977. ISBN 9780669996302. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=XUhAAQAAIAAJ>>.
- ISERMANN, R.; MARCO, M. *Identification of dynamic systems: an introduction with applications*. [S.l.]: Springer, 2011.
- JAFARI, M.; SALIMIFARD, M.; DEGHANI, M. Identification of multivariable nonlinear systems in the presence of colored noises using iterative hierarchical least squares algorithm. *ISA Transactions*, v. 53, n. 4, p. 1243 – 1252, 2014. ISSN 0019-0578. Disturbance Estimation and Mitigation.
- JAMALUDIN, I. et al. N4sid and moesp subspace identification methods. In: IEEE. *Signal Processing and its Applications (CSPA), 2013 IEEE 9th International Colloquium on*. [S.l.], 2013. p. 140–145.
- JUANG, J.-N. *Applied system identification*. [S.l.]: Prentice Hall, 1994.
- JUANG, J.-N.; COOPER, J.; WRIGHT, J. An eigensystem realization algorithm using data correlations (era/dc) for modal parameter identification. 1987.
- JUANG, J.-N.; PAPPA, R. S. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. *Journal of Guidance*, v. 8, n. 5, p. 620–627, 1985.
- JÚNIOR, S. E. R.; SERRA, G. L. de O. A novel intelligent approach for state space evolving forecasting of seasonal time series. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Elsevier, v. 64, p. 272–285, 2017.
- KALMAN, R.; HO, B. Effective construction of linear state variable models from input output data. In: *Proc. 3rd Allerton Conf.* [S.l.: s.n.], 1965. p. 449–459.
- KALMAN, R. E. et al. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basic Engineering*, v. 82, n. 1, p. 35–45, 1960.
- KASABOV, N. K.; SONG, Q. Denfis: dynamic evolving neural-fuzzy inference system and its application for time-series prediction. *IEEE transactions on Fuzzy Systems*, IEEE, v. 10, n. 2, p. 144–154, 2002.
- KOHONEN, T. The self-organizing map. *Neurocomputing*, Elsevier, v. 21, n. 1, p. 1–6, 1998.
- KUMAR, E. V.; RAAJA, G. S.; JEROME, J. Adaptive pso for optimal lqr tracking control of 2 dof laboratory helicopter. *Applied Soft Computing*, v. 41, n. Supplement C, p. 77 – 90, 2016. ISSN 1568-4946.
- KWOK, T.-Y.; YEUNG, D.-Y. Constructive algorithms for structure learning in feedforward neural networks for regression problems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, IEEE, v. 8, n. 3, p. 630–645, 1997.

- LEMOS, A.; CAMINHAS, W.; GOMIDE, F. Fuzzy evolving linear regression trees. *Evolving Systems*, Springer, v. 2, n. 1, p. 1–14, 2011.
- LEMOS, A. P. Modelagem nebulosa evolutiva: novas topologias e algoritmos de aprendizagem. UFMG, 2011.
- LIN, Y. Y.; CHANG, J. Y.; LIN, C. T. Identification and prediction of dynamic systems using an interactively recurrent self-evolving fuzzy neural network. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, v. 24, n. 2, p. 310–321, Feb 2013. ISSN 2162-237X.
- LJUNG, L. System identification. In: *Signal analysis and prediction*. [S.l.]: Springer, 1998. p. 163–173.
- LJUNG, L.; GUNNARSSON, S. Adaptation and tracking in system identification—a survey. *Automatica*, Elsevier, v. 26, n. 1, p. 7–21, 1990.
- LUGHOFER, E. *Evolving fuzzy systems-methodologies, advanced concepts and applications*. [S.l.]: Springer, 2011. v. 53.
- LUGHOFER, E.; KLEMENT, E. Online adaptation of takagi-sugeno fuzzy inference systems. In: *Proceedings of CESA*. [S.l.: s.n.], 2003.
- LUGHOFER, E.; PRATAMA, M.; SKRJANC, I. Incremental rule splitting in generalized evolving fuzzy systems for autonomous drift compensation. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, PP, n. 99, p. 1–1, 2017. ISSN 1063-6706.
- LUO, X.; SONG, Y. Adaptive predictive control: A data-driven closed-loop subspace identification approach. In: HINDAWI PUBLISHING CORPORATION. *Abstract and Applied Analysis*. [S.l.], 2014. v. 2014.
- LUO, X.-S.; SONG, Y.-D. Data-driven predictive control of hammerstein–wiener systems based on subspace identification. *Information Sciences*, Elsevier, v. 422, p. 447–461, 2018.
- MAACHOU, A. et al. Nonlinear thermal system identification using fractional volterra series. *Control Engineering Practice*, v. 29, p. 50 – 60, 2014. ISSN 0967-0661.
- MACIEL, L.; BALLINI, R.; GOMIDE, F. Evolving possibilistic fuzzy modeling for realized volatility forecasting with jumps. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 25, n. 2, p. 302–314, April 2017. ISSN 1063-6706.
- MATA, H. O. d. *Modelo de Cálculo de Parâmetros de Segurança de Veículos Suborbitais Baseado em Voos do Centro de Lançamento de Alcântara*. Tese (Doutorado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2017.
- MATLAB. *version 9.3.0.713579 (R2017b)*. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2017.
- MOOR, B. D. et al. Daisy: A database for identification of systems. *JOURNAL A, KONINKLIJKE VLAAMSE INGENIEURSVVERENIGING*, v. 38, p. 4–5, 1997.
- MZYK, G.; WACHEL, P. Kernel-based identification of wiener–hammerstein system. *Automatica*, v. 83, p. 275 – 281, 2017. ISSN 0005-1098.
- NARENDRA, K.; GALLMAN, P. An iterative method for the identification of nonlinear systems using a hammerstein model. *IEEE Transactions on Automatic control*, IEEE, v. 11, n. 3, p. 546–550, 1966.

- NINNESS, B. Some system identification challenges and approaches. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 42, n. 10, p. 1–20, 2009.
- OVERSCHEE, P. V.; MOOR, B. D. N4sid: Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems. *Automatica*, Elsevier, v. 30, n. 1, p. 75–93, 1994.
- OVERSCHEE, P. V.; MOOR, B. D. N4sid: Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems. *Automatica*, Elsevier, v. 30, n. 1, p. 75–93, 1994.
- PRAWIN, J.; RAO, A. R. M. Nonlinear identification of mdof systems using volterra series approximation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 84, p. 58 – 77, 2017. ISSN 0888-3270.
- PRECUP, R.-E. et al. Online identification of evolving takagi–sugeno–kang fuzzy models for crane systems. *Applied Soft Computing*, v. 24, p. 1155 – 1163, 2014. ISSN 1568-4946.
- RAJ, R.; SIVANANDAN, K. Comparative study on estimation of elbow kinematics based on emg time domain parameters using neural network and anfis narx model. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, IOS Press, v. 32, n. 1, p. 791–805, 2017.
- ROTONDO, D. et al. Automated generation and comparison of takagi-sugeno and polytopic quasi-lpv models. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 277, p. 44 – 64, 2015. ISSN 0165-0114.
- RUBIO, J. de J.; BOUCHACHIA, A. Msafis: an evolving fuzzy inference system. *Soft Computing*, Springer, v. 21, n. 9, p. 2357–2366, 2017.
- SA'AD, H. H. Y. et al. A robust structure identification method for evolving fuzzy system. *Expert Systems with Applications*, v. 93, n. Supplement C, p. 267 – 282, 2018. ISSN 0957-4174. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417417306851>>.
- SALGADO, C. M. et al. Takagi-sugeno fuzzy modeling using mixed fuzzy clustering. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, PP, n. 99, p. 1–1, 2017. ISSN 1063-6706.
- SJÖBERG, J. et al. Nonlinear black-box modeling in system identification: a unified overview. *Automatica*, Elsevier, v. 31, n. 12, p. 1691–1724, 1995.
- SORENSEN, H. W. Least-squares estimation: from gauss to kalman. *IEEE spectrum*, IEEE, v. 7, n. 7, p. 63–68, 1970.
- SUBRAMANIAN, R. G.; ELUMALAI, V. K. Robust mrac augmented baseline lqr for tracking control of 2 dof helicopter. *Robotics and Autonomous Systems*, v. 86, n. Supplement C, p. 70 – 77, 2016. ISSN 0921-8890.
- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-15, n. 1, p. 116–132, Jan 1985. ISSN 0018-9472.
- TAN, J.; DIAN, S.; ZHAO, T. Further studies on stability and stabilization of t-s fuzzy systems with time-varying delays via fuzzy lyapunov-krasovskii functional method. *Asian Journal of Control*, Wiley Online Library, 2018.
- TANGIRALA, A. K. *Principles of system identification: theory and practice*. [S.l.]: Crc Press, 2014.

- TORRES, L. M. M. a.; SERRA, G. L. O. d. Algoritmo baseado em realização de auto-sistema para identificação *Fuzzy* recursiva multivariável no espaço de estados. In: *XXI CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA*. [S.l.: s.n.], 2016.
- TORRES, L. M. M. a.; SERRA, G. L. O. d. Metodologia baseada em realização de auto-sistema para identificação fuzzy evolutiva de sistemas dinâmicos multivariáveis não-lineares. In: *XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. [S.l.: s.n.], 2017.
- TORRES, L. M. M. a.; SERRA, G. L. O. d. Evolving method applied to multivariable fuzzy modeling from experimental data. In: EDITOR, T. (Ed.). *Fuzzy Modeling and Control: Methods, Applications and Research*. [S.l.]: Nova Science Publishers, Inc., 2018.
- TRAUWAERT, E.; KAUFMAN, L.; ROUSSEEUW, P. Fuzzy clustering algorithms based on the maximum likelihood principle. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 42, n. 2, p. 213–227, 1991.
- TSAI, S.-H.; CHEN, Y.-W. A novel identification method for takagi–sugeno fuzzy model. *Fuzzy Sets and Systems*, p. –, 2017. ISSN 0165-0114.
- VERHAEGEN, M.; DEWILDE, P. Subspace model identification part 1. the output-error state-space model identification class of algorithms. *International journal of control*, Taylor & Francis, v. 56, n. 5, p. 1187–1210, 1992.
- WILLIAMSON, J. R. Gaussian artmap: A neural network for fast incremental learning of noisy multidimensional maps. *Neural networks*, Elsevier, v. 9, n. 5, p. 881–897, 1996.
- WU, C.-Y. et al. A novel on-line observer/kalman filter identification method and its application to input-constrained active fault-tolerant tracker design for unknown stochastic systems. *Journal of the Franklin Institute*, v. 352, n. 3, p. 1119 – 1151, 2015. ISSN 0016-0032.
- YOUNG, P. C. *Recursive estimation and time-series analysis: an introduction*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- ZADEH, L. A. From circuit theory to system theory. *Proceedings of the IRE, IEEE*, v. 50, n. 5, p. 856–865, 1962.
- ZHAO, H. et al. Identification of nonlinear dynamic system using a novel recurrent wavelet neural network based on the pipelined architecture. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 61, n. 8, p. 4171–4182, Aug 2014. ISSN 0278-0046.
- ZHU, Y. et al. Comparison of three classes of identification methods. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 27, n. 8, p. 169 – 174, 1994. ISSN 1474-6670. IFAC Symposium on System Identification (SYSID'94), Copenhagen, Denmark, 4-6 July.