

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE  
ELETRICIDADE

**SUPERFÍCIES TRIDIMENSIONAIS DE ENERGIA PELO  
FORMALISMO HAMILTONIANO: APLICAÇÃO NO  
PROBLEMA DE ESTABILIDADE TRANSITÓRIA EM  
SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA**

Autor: Emanuelle do Carmo Machado da Silva

São Luís –MA, Brasil

Fevereiro, 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE  
ELETRICIDADE

**SUPERFÍCIES TRIDIMENSIONAIS DE ENERGIA PELO  
FORMALISMO HAMILTONIANO: APLICAÇÃO NO  
PROBLEMA DE ESTABILIDADE TRANSITÓRIA EM  
SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA.**

Autor: Emanuelle do Carmo Machado da Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, área de concentração: Sistema de Energia Elétrica  
Orientador: Prof. Dr. José Eduardo Onoda Pessanha.

São Luís –MA, Brasil

Fevereiro, 2018

Machado da Silva, Emanuelle do Carmo.

SUPERFÍCIES TRIDIMENSIONAIS DE ENERGIA PELO FORMALISMO HAMILTONIANO: APLICAÇÃO NO PROBLEMA DE ESTABILIDADE TRANSITÓRIA EM SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA / Emanuelle do Carmo Machado da Silva. - 2018.

73 p.

Coorientador(a): Emanuelle Machado.

Orientador(a): José Eduardo Onoda Pessanha.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Engenharia de Eletricidade/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2018.

1. Estabilidade Transitória. 2. Mecânica Hamiltoniana. 3. Métodos Lyapunov. 4. Sistemas Dinâmicos. 5. Superfícies de Energia. I. Machado, Emanuelle. II. Onoda Pessanha, José Eduardo. III. Título.

**SUPERFÍCIES TRIDIMENSIONAIS DE ENERGIA PELO  
FORMALISMO HAMILTONIANO: APLICAÇÃO NO PROBLEMA DE  
ESTABILIDADE TRANSITÓRIA EM SISTEMAS ELÉTRICOS DE  
POTÊNCIA.**

Autor: Emanuelle do Carmo Machado da Silva.

Orientador: Professor Dr. José Eduardo Onoda Pessanha.

Aprovado em \_\_\_/\_\_\_/2018.

Membros da Banca:

---

Professor Dr. José Eduardo Onoda Pessanha  
(Orientador)  
UFMA-MA

---

Professor Dr. Luís Fernando Costa Alberto  
(Membro da Banca Examinadora)  
USP-SP

---

Professor Dr. João Viana da Fonseca Neto  
(Membro da Banca Examinadora)  
UFMA-MA

São Luís –MA, Brasil

Fevereiro, 2018

Dedicatória

*A minha querida mãe Rita e minha irmã Manuela  
por sempre acreditarem em mim.*

# AGRADECIMENTOS

Ao Nosso Senhor Jesus Cristo por me ter dado esperança todos os dias. Não teria conseguindo nada se não fosse por Ele.

A minha mãe Rita de Fátima, que sempre me acompanhou em todos os momentos felizes e tristes da minha vida. Por ela, tenho forças para prosseguir.

Ao meu pai Álvaro Olímpio que sempre me aconselha. Eu agradeço imensamente a você.

A minha dedicada e futura cientista irmã Manuela, que sempre me incentivou a enxergar o lado positivo das coisas. Por causa dela, tive coragem para finalizar o mestrado e a minha irmã Raquel, que sempre me incentiva.

Ao meu tio Raimundo (in memoriam). Não me esqueço dos seus incentivos.

Ao meu excelente orientador, Prof. Eduardo Pessanha, por sua grande paciência e pelos ensinamentos conceituais da Engenharia Elétrica. Por causa dele, consegui finalizar minha dissertação.

Ao Prof. M. Anantha Pai, pelos seus elogios e materiais de pesquisa.

Aos professores Hsiao-Dong Chiang e Luís F. Alberto Costa, por seus incentivos a pesquisa de Estabilidade. Agradeço muito as conversas via Skype.

Ao coordenador da Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE) da UFMA, o Prof. João Viana pelos seus incentivos e auxílios.

Aos professores do PPGEE da UFMA que me auxiliaram para minha formação: Prof. Osvaldo Saavedra, Prof. Leonardo Paucar, Prof. Ginalber Oliveira, Prof. Anselmo Barbosa, Prof<sup>ª</sup>. Maria da Guia, Prof. Allan Kardec, Prof. Luís Antônio e o Prof. José Gomes de Matos.

Aos meus gatinhos por seus inúmeros divertimentos e minhas queridas Katrina e Mococa.

Aos meus amigos e professores do curso de Física da UFMA e de outras universidades fora do Maranhão. Por causa deles, consegui superar algumas barreiras nas pesquisas. Muito Obrigado!

Aos meus colegas do Grupo de Sistema de Potência e do Instituto de Energia Elétrica (IEE) que me acompanharam o meu progresso durante o curso.

A CNPq, que me concedeu uma bolsa durante todo curso.

A todos que contribuíram para minha formação!

# RESUMO

Neste trabalho de pesquisa é desenvolvida uma função energia destinada a análise direta de estabilidade transitória em sistemas elétricos de potência, agregando critérios de estabilidade de Lyapunov ao formalismo Hamiltoniano. A função energia proposta objetiva identificar prováveis potenciais e possíveis deficiências do formalismo Hamiltoniano para analisar o problema. Mostrou-se que a função Hamiltoniana também pode ser tratada como uma função energia. Para simplificar e facilitar o entendimento da proposta, o modelo clássico de gerador síncrono foi usado para o desenvolvimento da função energia, sem nenhum tipo de sistema de controle. A proposta é testada em problemas de estabilidade transitória considerando três sistemas-teste distintos, todos submetidos a ação de uma força externa (falta). Os possíveis estados estável e instável de operação dos geradores foram construídos a partir da função desenvolvida e apresentadas em forma de superfícies tridimensionais.

**Palavras-chave:** *Estabilidade Transitória, Sistemas Dinâmicos, Métodos Lyapunov, Mecânica Hamiltoniana, Superfícies de Energia.*

# ABSTRACT

This work develops an energy function designed to direct analysis of transient stability in electric power systems using Lyapunov stability criteria and the Hamiltonian formalism. The proposed energy function aims to identify the highlights and possible shortcomings of the Hamiltonian formalism to analyze the problem. It has been shown that the Hamiltonian function can also be treated as a energy function. To simplify and facilitate the understanding of the proposal, the classical model of synchronous generator was used for the development of the energy function, without any kind of control system. The proposal is tested in transient stability problems considering three different test systems, all subjected to action of an external force (fault). The possible stable and unstable states of the generators were built using the proposed energy function. The results are presented in the form of three-dimensional surfaces.

**Keywords:** *Transient Stability, Dynamic Systems, Lyapunov Methods, Hamiltonian Mechanics, Energy Surfaces.*



# LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1. Representação da variação dos ângulos das máquinas em relação ao tempo.....	24
Figura 2.2. Região estável $A(x^s)$ delimitada pelo contorno $\partial A(x^s)$ .....	31
Figura 3.1. Sistema composto por um simples pêndulo de massa $m$ .....	40
Figura. 4.1. Diagrama de Fluxo do método de Hamilton.....	54
Figura 4.2. Simples sistema elétrico de potência.....	57
Figura 4.3. Sistema-Teste 1.....	59
Figura 4.4. Superfície tridimensional de energia do gerador – Sistema-Teste 1.....	60
Figura 4.5. Sistema-Teste II (configuração original).....	60
Figura 4.6. Superfície tridimensional de energia dos geradores – Sistema-Teste 2.....	61
Figura 4.7. Superfície tridimensional de energia dos geradores – Sistema-Teste 3.....	62

# LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 Dificuldades e limitações de métodos diretos.....	16
Tabela 2.1 - Classificação de estabilidade de sistemas elétricos de potência.....	19
Tabela 2.2. Dificuldades associadas a computação dos UEPs de controle.....	28
Tabela 2.3. Possibilidades de convergência.....	29
Tabela 2.4. Etapas que compõem métodos diretos.....	30
Tabela 2.5. Principais etapas do PEBS.....	32
Tabela 2.6. Método BCU – <i>versão 1</i> .....	34
Tabela 2.7. Método BCU – <i>versão 2</i> .....	34
Tabela 3.1. Momentos Canônico e Conjugado (sistemas perturbados).....	50

# SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1 - APRESENTAÇÃO.....</b>	<b>14</b>
1.1 INTRODUÇÃO.....	14
1.2 MOTIVAÇÃO.....	15
1.3 OBJETIVOS.....	16
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	17
<b>CAPÍTULO 2 - CONCEITOS FUNDAMENTAIS ASSOCIADOS À ESTABILIDADE TRANSITÓRIA ANGULAR.....</b>	<b>18</b>
2.1 INTRODUÇÃO.....	18
2.2 ESTABILIDADE ANGULAR DO ROTOR.....	20
2.2.1 Equação de Oscilação.....	21
2.2.2 Formas de Análise do Problema.....	23
2.3 MÉTODOS DIRETOS PARA ANÁLISE DE ESTABILIDADE TRANSITÓRIA: CONCEITOS FUNDAMENTAIS .....	25
2.3.1 Introdução.....	25
2.3.2 Breve Histórico e Conceitos Básicos.....	26
2.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	36
<b>CAPÍTULO 3 - FUNDAMENTOS DO FORMALISMO HAMILTONIANO .....</b>	<b>37</b>
3.1 PRINCÍPIOS DA MECÂNICA ANALÍTICA .....	37
3.2 FORMALISMO HAMILTONIANO .....	39
3.3 APLICAÇÃO DO FORMALISMO HAMILTONIANO.....	41
3.4 TEORIA DA PERTURBAÇÃO .....	44
3.4.1 PROCESSO DE SOLUÇÃO.....	45
3.4.2 APLICAÇÃO DA TEORIA DE PERTURBAÇÃO .....	47
3.5 COMENTÁRIOS FINAIS .....	51
<b>CAPÍTULO 4 - FUNÇÃO ENERGIA HAMILTONIANA PARA ANÁLISE DE ESTABILIDADE TRANSITÓRIA.....</b>	<b>52</b>
4.1 CRITÉRIOS DE LYAPUNOV PARA A FUNÇÃO ENERGIA HAMILTONIANA .....	52

4.2 ASPECTOS CONCEITUAIS DO FORMALISMO HAMILTONIANO INERENTES A FUNÇÃO ENERGIA .....	54
4.2.1 FUNÇÃO ENERGIA HAMILTONIANA .....	55
4.3 ANÁLISE DE SUPERFÍCIES DE ESTABILIDADE E INSTABILIDADE VIA MÉTODO FELH .....	58
4.3.1 ASSOCIANDO CORES AOS NÍVEIS DE ENERGIA HAMILTONIANA DOS GERADORES .....	59
4.3.2 SISTEMA TESTE 1 .....	59
4.3.3 SISTEMA-TESTE 2 .....	60
4.3.4 SISTEMA-TESTE 3 .....	61
4.4 Comentários Finais .....	62
<b>CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>63</b>
5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	63
5.2 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	64
<b>APÊNDICE A.....</b>	<b>66</b>
<b>APÊNDICE B.....</b>	<b>67</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>69</b>

# Capítulo 1

## APRESENTAÇÃO

---

*Este Capítulo descreve sucintamente o problema de interesse, a motivação do trabalho, os objetivos, possíveis contribuições e os principais tópicos de cada capítulo.*

### 1.1 INTRODUÇÃO

Técnicas de simulação no domínio do tempo aplicadas em estudos de estabilidade de sistemas de energia elétrica podem apresentar dificuldades quando se pretende desenvolver programas computacionais que agregam modelos matemáticos complexos e métodos numéricos eficientes. Geralmente, este tipo de avaliação requer a solução de sistemas de Equações Diferenciais e Algébricas (EDAs) de grande porte, processo que pode ser muito longo em termos de tempo computacional. Este esforço computacional depende principalmente das características (principalmente as limitações) dos métodos numéricos usados, da complexidade dos modelos matemáticos implementados, da dimensão do sistema elétrico simulado, das constantes de tempo envolvidas, da velocidade do fenômeno simulado (transitório ou longo-duração), da capacidade do computador, e do tempo total de simulação. Embora já existam programas de grande porte que utilizam métodos de integração de passo variável na solução destes sistemas de equações, cujo resultado pode ser uma redução significativa no tempo computacional, ainda é restrita a utilização deste tipo de ferramenta para análises em tempo real [PAZ, 2004]. Ainda, análise de estabilidade transitória no domínio do tempo não fornece de imediatas informações precisas sobre a condição de estabilidade do sistema. Curvas contendo as trajetórias de variáveis selecionadas em função do tempo devem ser geradas e analisadas por conhecedores dos problemas, caso contrário, os resultados podem ser incorretamente interpretados. Este processo pode ser oneroso. Apesar destas dificuldades, esta forma de análise é necessária em situações específicas, como as informadas no Capítulo 2.

Para superar os problemas citados acima, uma nova classe de métodos surgiu, fazendo uso de funções energia e sendo referidos como *Métodos Diretos* [PAI, 1981; PAI, 1989]. Esses métodos são capazes de determinar a estabilidade transitória sem integrar as equações diferenciais durante todo o tempo de análise especificado (pré-falta, período sob falta, pós-falta). Além de eficiente, métodos diretos também fornecem

uma medida quantitativa do grau de estabilidade do sistema. Esta informação adicional torna esses métodos atrativos em diversos cenários. Por exemplo, quando se deseja comparar a estabilidade relativa de diferentes configurações de redes elétricas, ou quando há urgência em se determinar os limites operacionais do sistema restritos pela estabilidade transitória [CHIANG, 2011].

## 1.2 MOTIVAÇÃO

Métodos diretos foram originalmente desenvolvidos para sistemas de energia com sistemas autônomos pós-falta, sob ponto de vista analítico. Portanto, existem vários desafios e limitações inerentes as aplicações práticas desses métodos nas análises de estabilidade transitória, alguns dos quais são inerentes a esses métodos, enquanto outros estão relacionados com a sua aplicabilidade nos modelos existentes de sistemas elétricos de potência. Essas dificuldades e limitações podem ser classificadas resumidamente de acordo com a Tabela 1.1 [CHIANG, 2011].

Geralmente, métodos diretos usados em análises diretas de estabilidade transitória estão baseados em funções Lyapunov [PAI, 1981; PAI, 1989] para construir funções energia. Entretanto, apesar de serem muito usadas e consolidadas para análise de estabilidade de sistemas dinâmicos [WILLEMS, 1970], essas funções podem apresentar limitações estruturais dependendo das características do sistema analisado [KAKIMOTO, 1978; POLYAKOV, 2015]. A fim de contribuir com uma nova opção para analisar o problema de interesse, e não de desqualificar métodos de energia que fazem uso de funções Lyapunov, este trabalho desenvolve investigações preliminares de uma função energia baseada no formalismo Hamiltoniano e em critérios de estabilidade de Lyapunov. Esta proposta está baseada na física Hamiltoniana na qual os comportamentos das partículas são representados por funções diferenciais que geram equações características, capazes de gerar superfícies tridimensionais de energia potencial, como também podem identificar, a priori, possíveis condições de estabilidade do sistema sob análise [LE MOS, 2004; ROBINETT, 2011; THORNTON, 2004].

Tabela 1.1 Dificuldades e limitações de métodos diretos

Desafios	Descrição	Limitações	Descrição
Modelagem	Deve existir uma função energia para o modelo pós-falta de Estabilidade transitória. Nem todos admitem uma função de energia.	Cenário	É necessária que uma condição inicial do sistema pós-falta esteja disponível e que este sistema deve ser autônomo.
Função	Aplicável à primeira oscilação nos modelos de estabilidade transitória descritos por equações diferenciais.	Condição	Problema de caráter analítico relacionado com as condições exigidas para sistemas pós-falta; limitação inerente aos fundamentos de métodos diretos.
Confiabilidade	Relacionada com a confiabilidade de um método computacional para determinar o UEP de controle para estudos de contingências.	Precisão	Não existem funções energia analíticas para modelos de Estabilidade transitória para sistemas de energia.

### 1.3 OBJETIVOS

O objetivo principal do presente trabalho de pesquisa é iniciar uma sequência de investigações associadas a aplicação do formalismo Hamiltoniano em análises diretas de problemas de estabilidade transitória angular. As investigações foram iniciadas com base em conceitos do formalismo Lagrangeano, importantes para o entendimento inicial do formalismo Hamiltoniano. Exemplos envolvendo inicialmente um pêndulo simples, e depois um gerador, foram usados na aplicação e para o entendimento desses formalismos. A partir dessas investigações iniciais, partiu-se para o desenvolvimento da função energia Hamiltoniana para ser aplicada no problema de interesse, na qual forma considerados critérios de estabilidade de Lyapunov. Estes critérios foram considerados neste trabalho, inicialmente, pelo fato de serem bem conhecidos para problemas de estabilidade de sistemas dinâmicos, além de serem bastante referenciados na literatura. Portanto, como esta pesquisa é uma etapa inicial, optou-se por estes critérios. Devido à falta de informações associadas ao uso do formalismo Hamiltoniano no problema, ainda há muito que se investigar nesta linha de pesquisa, ou seja, neste trabalho são apresentados passos iniciais e tentar identificar prováveis potencialidades deste formalismo em análises diretas de estabilidade transitória.

## 1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Para orientar o leitor, esta dissertação é organizada como segue. No Capítulo 2, é feita uma introdução aos métodos convencionais utilizados para análise de estabilidade angular transitória e introdução ao método proposto. O Capítulo 3 apresenta os principais fundamentos do formalismo Hamiltoniano aplicado em estudos de estabilidade de sistemas dinâmicos. Um exemplo simples de um pêndulo é apresentado e uma analogia é feita ao problema de estabilidade transitória. O Capítulo 4 é o foco central da pesquisa, onde são desenvolvidas a Função Energia Hamiltoniana. Problemas de estabilidade transitória angular são analisados através do método de função energia Hamiltoniana fazendo uso de três sistemas elétricos de potência. Os resultados são apresentados na forma de superfícies tridimensionais de energia, mapeando os possíveis estados de energia Hamiltoniana dos geradores em respostas as faltas provocadas. Por fim, o Capítulo 5 destaca as possíveis qualidades e precariedades detectadas nesta primeira versão do método. Com base nessas qualidades e precariedades, trabalhos futuros são propostos.



# Capítulo 2

## CONCEITOS FUNDAMENTAIS ASSOCIADOS À ESTABILIDADE TRANSITÓRIA ANGULAR

---

*Neste capítulo é feita uma análise sobre o problema da Estabilidade Transitória Angular, bem como uma introdução à métodos diretos convencionais utilizados para analisar este problema.*

### 2.1 INTRODUÇÃO

O aumento do número de sistemas interligados por razões econômicas e operacionais, a extensiva utilização de equipamentos de compensação, de controle e de proteção, e o aumento de operações em condições estressadas, fizeram surgir diferentes formas de estabilidade nos sistemas elétricos de potência [KUNDUR, 1994]. O surgimento desses novos problemas resultou na necessidade de rever definições e classificações de formas estabilidade, principalmente para planejar e operar de forma segura e confiável os complexos sistemas atuais e, desenvolver e aplicar técnicas de análise. A Tabela 2.1 ilustra de forma resumida os principais aspectos sobre formas de estabilidade [PESSANHA, 1997].

Nesta dissertação, os problemas de estabilidade de interesse estão associados a manutenção do sincronismo entre as diversas unidades de geração (máquinas síncronas), ou seja, estão relacionados com o comportamento dos geradores quando uma falta ocorrer no sistema elétrico, que pode ser de grande, ou de pequeno sinal, dependendo da localização e do período de duração da falta. Esta forma de estabilidade é referenciada neste trabalho como *Estabilidade Angular do Rotor*.

Tabela 2.1 - Classificação de estabilidade de sistemas elétricos de potência

<b>Descrição</b>	<b>Estabilidade Angular do Rotor</b>	<b>Estabilidade de Tensão</b>	<b>Estabilidade de Frequência</b>
Variável de interesse	Diferença angular entre a posição dos rotores das máquinas síncronas	Níveis de tensão nas barras de carga e de geração	Frequência elétrica
Períodos de tempo	Poucos segundos - inclui apenas os efeitos transitórios ( $\approx 10$ segs.)	Poucos segundos à dezenas de minutos - inclui os efeitos transitórios e de longo-termo	Poucos minutos à dezenas de minutos - inclui os efeitos de médio e de longo-termo
Fatores que influenciam a condição de estabilidade	Equilíbrio entre torques $\rightarrow T_m - T_e = 0, T_a = 0$	Disponibilidade de reservas de potência reativa $\rightarrow Q_G - Q_C = 0$	Disponibilidade de reservas de geração de potência ativa $\rightarrow P_G - P_C = 0$
Fatores que influenciam a condição de instabilidade	Desequilíbrio entre torques $\rightarrow T_m - T_e \neq 0, T_a \neq 0$	Indisponibilidade de reservas de potência reativa $\rightarrow Q_G - Q_C \neq 0$	Indisponibilidade de reservas de geração de potência ativa $\rightarrow P_G - P_C \neq 0$

## 2.2 ESTABILIDADE ANGULAR DO ROTOR

Estabilidade angular do rotor se refere à capacidade dos geradores síncronos de um sistema elétrico interligado manterem o sincronismo devido a uma perturbação, dependendo da capacidade de cada gerador em manter/restaurar o equilíbrio entre o seu torque eletromagnético e o seu torque mecânico. A condição de instabilidade pode se manifestar através de oscilações crescentes dos ângulos de alguns geradores resultando na perda de sincronismo em relação aos demais [KUNDUR 2004].

Quando um gerador síncrono perde o sincronismo em relação aos demais, o seu rotor gira a uma velocidade superior ou inferior a necessária para gerar tensões na frequência do sistema, resultando em elevadas flutuações na potência de saída da máquina, na corrente e na tensão. Para esta condição, o gerador instável será isolado do sistema através do dispositivo de proteção. A estabilidade angular do rotor pode ser caracterizada em termos de classes permitindo um melhor entendimento da natureza dos problemas de estabilidade. Estas classes são [KUNDUR, 1994]:

a) Estabilidade de Pequenos Sinais ou Pequenos Distúrbios - o sistema elétrico de potência permanece em sincronismo durante e após pequenos distúrbios. Tais distúrbios ocorrem frequentemente no sistema devido a pequenas variações entre carga e geração. Com o propósito de simplificar a análise, estes distúrbios são considerados pequenos o suficiente para que o modelo de equações linearizadas seja válido. A instabilidade resultante pode ser de duas formas: (i) aumento permanente do ângulo do rotor devido à ausência de um torque sincronizante suficiente e, (ii) aumento na amplitude das oscilações do rotor devido à ausência de um torque de amortecimento suficiente. A natureza da resposta do sistema a pequenos distúrbios depende de um conjunto de fatores, incluindo o estado inicial de operação, a robustez do sistema de transmissão e os tipos de controle de excitação das máquinas.

b) Estabilidade Transitória Angular – os geradores permanecem em sincronismo quando o sistema é submetido a uma falta severa, como por exemplo: curto-circuito (qualquer tipo), perda de importantes unidades de geração, perda de carga e chaveamento de linhas. A estabilidade depende da condição inicial de operação, do grau de severidade do distúrbio, bem como da sua localização. Geralmente, devido a ação dos dispositivos de proteção que atuam para eliminar a falta isolando a área ou o equipamento afetado, a condição de operação pós-distúrbio é diferente da pré-distúrbio.

### 2.2.1 Equação de Oscilação

Apesar de muito conhecido e bastante referenciado na literatura [CHIANG, 2011; FOUAD, 1977; PAI, 1989], o desenvolvimento da equação de oscilação de uma máquina síncrona é apresentado nesta subseção, uma vez que tanto o ângulo, quanto a velocidade angular do gerador são as restrições holonômicas (também conhecidas como variáveis holonômicas) consideradas nesta proposta. Portanto, é importante conhecer as origens e a importância destas variáveis e como são usadas no método proposto (Capítulo 4).

A diferença angular entre os geradores operando em um sistema elétrico de potência, é determinado com a base na resolução, para cada gerador, da Equação (2.1), que descreve o movimento dos rotores das máquinas. Esta equação se baseia no princípio elementar da dinâmica de que o torque acelerante é igual ao produto do momento de inércia do rotor multiplicado pela sua aceleração angular. Esta equação é composta por  $(J)$ - momento de inércia do rotor;  $(\theta_m)$ - deslocamento angular do rotor com relação ao eixo de referência fixo expresso em radianos mecânicos, tempo em segundos  $(t)$ ;  $(T_m)$ - torque mecânico aplicado pela turbina no eixo do gerador,  $(T_e)$ - torque elétrico e por  $(T_a)$ - torque acelerante (torques expressos em Newton.metro – N.m)

$$\frac{d^2\theta_m}{dt^2} J = T_a = T_m - T_e \quad (2.1)$$

Com o gerador operando em regime permanente, os torques mecânicos e elétrico são iguais e, conseqüentemente, o torque acelerante é nulo. Portanto, não há aceleração positiva ou negativa das máquinas, resultando numa velocidade constante apresentando um valor nominal (velocidade síncrona).

A Equação (2.2) representa a posição angular  $(\delta)$  do rotor em relação a um eixo de referência que gira à velocidade síncrona, com ângulo  $(\theta_m)$  acima mencionado já expresso em radianos elétricos. Está equação está expressa em termos da velocidade síncrona em rd/s  $(\omega_0)$ , tempo em segundos  $(t)$  e o número de polos  $(p)$ . A velocidade angular com relação ao eixo de referência girante é dada pela Equação (2.3). Derivando a Equação (2.3), obtém-se a Equação (2.4) que representa a aceleração angular.

$$\theta_e = \frac{p}{2} \theta_m = \delta + \omega_0 t \quad (2.2)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\theta_e}{dt} - \omega_0 \quad (2.3)$$

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{d^2\theta_e}{dt^2} \quad (2.4)$$

Substituindo a Equação (2.4) na Equação (2.1), tem-se:

$$J \frac{2}{p} \frac{d^2\delta}{dt^2} = T_a = T_m - T_e \quad (2.5)$$

Multiplicando ambos os lados da Equação (2.5) pela velocidade angular do rotor  $\omega_m = d\theta_m/dt$ , resulta na Equação (2.6), onde  $P_m$  é a potência de entrada no eixo da máquina,  $P_e$  é a potência elétrica e  $P_a$  a potência de aceleração. Esta equação pode ser expressa em termos de momento de inércia do rotor ( $M$ ), como mostrado na Equação (2.7).

$$J \frac{2}{p} \omega_m \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_a = P_m - P_e \quad (2.6)$$

$$M \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_a = P_m - P_e \quad M = J \frac{2}{p} \omega_m \quad (2.7)$$

É importante mencionar que o coeficiente  $M$  na Equação (2.7) não é constante, uma vez que a velocidade angular  $\omega_m$  pode apresentar diferença para mais ou menos em relação a velocidade síncrona. Entretanto, como o rotor não experimenta desvios de velocidade excessivos mesmo na maioria das faltas mais severas, utilizar a velocidade síncrona na definição do momento cinético  $M$  não resulta normalmente, em diferenças significativas, e o coeficiente pode ser considerado constante.

A informação sobre a inércia do rotor dos geradores síncronos é normalmente expressa pela constante de inércia  $H$ . Esta constante é definida pela razão entre a energia cinética do rotor à velocidade síncrona e a potência nominal da máquina (Equação 2.8) em pu.

$$H = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) J \left(\frac{2}{P}\right) \omega_0^2}{S} = \frac{1}{2} \frac{M \omega_0}{S} \text{ MJ/MVA} \quad (2.8)$$

Substituindo  $M$  na Equação (2.7), determinado a partir da Equação (2.8), resulta em:

$$\frac{2H}{\omega_0} \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_m - P_e \quad (2.9)$$

Considerando  $\omega_0 = 2\pi f$ , onde ( $f$ ) é frequência nominal do sistema em Hertz, tem-se:

$$\left(\frac{H}{\pi f}\right) \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_m - P_e \quad (pu) \quad (2.10)$$

A Equação (2.9) é conhecida como equação de oscilação da máquina síncrona, sendo uma equação diferencial de segunda ordem e que pode ser representada pelas Equações (2.11) e (2.12), como um sistema de duas equações de primeira ordem, onde  $\omega$  é a velocidade angular do rotor expressa em radianos elétricos por segundo.

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_0}{2H} [P_m - P_e] \quad (2.11)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega - \omega_0 \quad (2.12)$$

As Equações (2.11) e (2.12) são vinculadas ao movimentos da máquina síncrona, sem considerar o coeficiente de amortecimento ( $D$ ), o qual pode ser utilizado para incorporar os efeitos dos torques de atrito e ventilação, que se opõem ao movimento do rotor, e mesmo que estes efeitos dos torques de amortecimento quando não incluídos na definição, pelos modelos da máquina utilizados. Considerando estes efeitos de amortecimento na Equação (2.11), tem-se a Equação (2.13). O coeficiente de amortecimento é expresso em Watts/rad.s, geralmente assumindo-se um valor de 1 pu [FOUAD, 1977].

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\omega_0}{2H} \left[ (P_m - P_e - D) \frac{d\delta}{dt} \right] \quad (2.13)$$

## 2.2.2 Formas de Análise do Problema

Existem duas classes de métodos normalmente consideradas para realizar estudos de estabilidade transitória em sistemas elétricos de potência, ambas através de simulações computacionais. Na primeira, a dos métodos indiretos, as equações do sistema elétrico de potência incluindo as equações diferenciais dos dispositivos de controle e das cargas dinâmicas, em conjunto com as da rede (algébricas), formam um sistema de equações diferenciais e algébricas (EDAs) e pode ser expresso pelas Equações (2.14) e (2.15), com as condições iniciais ( $x_0, V_0$ ) conhecidas a partir da solução do fluxo de potência da rede em regime-permanente. Na simulação computacional, os valores de  $x$  e  $y$  são calculados em intervalos discretos de tempo  $\Delta t$ .

$$\dot{x} = f(x, V) \quad (2.14)$$

$$g(x, y) = 0 \quad (2.15)$$

A solução das EDAs envolve métodos numéricos de integração onde o esforço computacional pode ser excessivo, dependendo das limitações do método usado, da complexidade do sistema e dos objetivos dos estudos. Por exemplo, o tempo de simulação pode ser de 10s, ou se estender até 15s caso estudos envolvendo múltiplas oscilações forem de interesse. O tempo computacional elevado faz com que simulações no domínio do tempo não sejam adequadas para investigações em tempo real, além de não fornecerem informações imediatas de sensibilidade e do grau de estabilidade [PESSANHA, 2005; CHIANG, 2011]. Se a trajetória no estado pós-falta se estabelecer, então o sistema pós-falta é avaliado como estável; caso contrário, é instável [CHIANGb,1987; CHIANG, 2015].

A Figura 2.1 ilustra duas condições distintas associadas a estudos de estabilidade transitória em um sistema-teste de pequeno-porte, contendo apenas três geradores síncronos. No caso das curvas da Figura 2.1(a), uma pequena parcela da energia gerada pela falta é consumida pela carga e dissipada devido à perdas elétricas no sistema, enquanto que a maior parcela é convertida em energia cinética, acarretando em um aumento nas velocidades angulares dos rotores. Porém, este comportamento não resulta em perda de sincronismo, uma vez que a diferença angular entre os geradores ao longo da simulação é pequena. Já nas curvas ilustradas na Figura 2.1(b) pode-se notar a separação dos ângulos dos geradores em dois grupos, cujo ângulo do gerador G1 se desloca em sentido oposto ao dos demais geradores. Neste caso, há perda de sincronismo uma vez que a diferença angular entre o gerador G1 e os demais geradores aumenta ao longo do tempo, caracterizando uma condição de operação instável de G1.

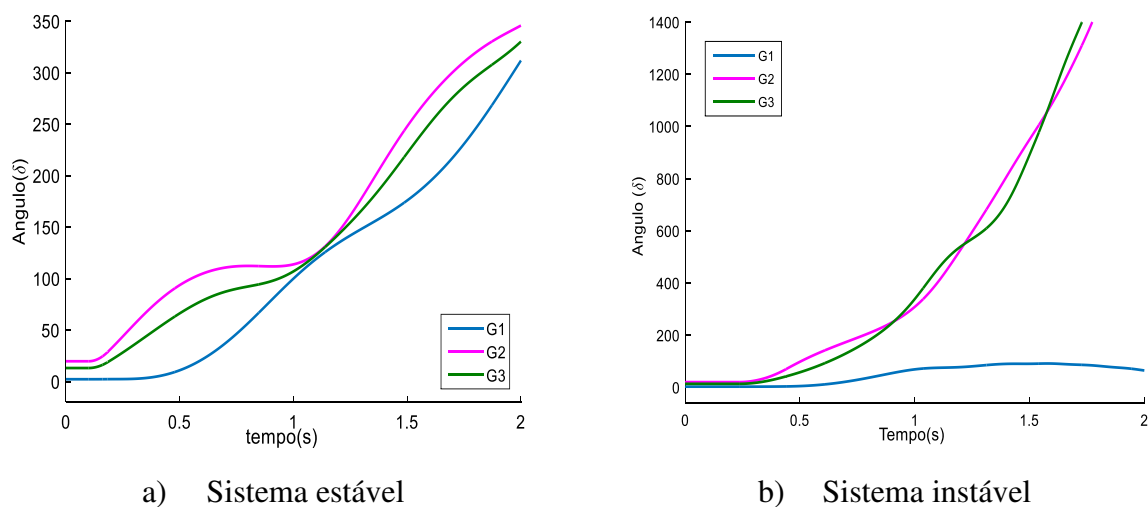


Figura 2.1 Representação da variação dos ângulos das máquinas em relação ao tempo

A localização da falta, o seu tempo de duração até o instante de eliminação ( $t_{cl}$ ), são fatores importantes nos estudos de estabilidade transitória. O tempo de eliminação é fator importante para a manutenção do sincronismo entre as unidades geradoras.

Na segunda classe, a dos métodos diretos, o processo de integração é realizado apenas durante o período da falta, e determinam sem a necessidade de estender o processo para o período pós-falta se o sistema permanecerá estável após a eliminação da falta, comparando a energia do sistema (quando a falta é eliminada) com um valor crítico de energia. Esta classe de métodos também fornece um quantitativo da medida do grau de estabilidade/instabilidade. O comportamento do ângulo de um determinado gerador a uma falta é analisado com base na comparação entre a sua energia pós-falta e a sua energia crítica. Se a energia no estado pós-falta for menor que a energia crítica, então a sua condição de operação é estável; caso contrário, é instável [CHIANG, 2011].

Por serem de interesse neste trabalho, ao contrário dos métodos indiretos, métodos diretos são abordados em maiores detalhes na seção seguinte. Caso o leitor também tenha interesse em métodos indiretos, são sugeridas as referências [PESSANHA, 1997; CHEN, 2005] para consulta.

## **2.3 MÉTODOS DIRETOS PARA ANÁLISE DE ESTABILIDADE TRANSITÓRIA: CONCEITOS FUNDAMENTAIS**

### **2.3.1 Introdução**

Como já mencionado, técnicas indiretas de investigação de problemas de estabilidade transitória envolvem simulações numéricas que, dependendo das características do sistema elétrico, como dimensão (elevado número de barras, ramos e geradores), complexidade matemática dos modelos dinâmicos, quantidade de equipamentos de controle (FACTS) e cargas dinâmicas presentes, geralmente exigem um tempo computacional elevado, apesar dos avanços tecnológicos em hardwares. Outros fatores que podem atenuar este custo computacional são métodos numéricos que podem ser usados em computação paralela [CHEN, 2005]. Mesmo com estes avanços, o uso de técnicas indiretas para análises de estabilidade transitória em tempo real continua muito restrito.

Uma outra desvantagem associada aos métodos indiretos é que os resultados obtidos por estes métodos reproduzem o comportamento de variáveis selecionadas pelo usuário ao longo do tempo estipulado na simulação. Um sistema contendo um grande número de variáveis, o



usuário precisa ter uma boa experiência no problema a fim de selecionar cenários e variáveis adequadas para que a investigação seja eficiente, já que esta é feita baseada em trajetórias no domínio do tempo, disponibilizadas por meio de gráficos. Entretanto, simulações no domínio do tempo, incluindo modelos apropriados, detectam os eventos e registram o período de tempo que o sistema leva para entrar numa região de instabilidade e o tempo de coordenação dos equipamentos; p.ex., controle da excitação dos geradores, controle de bancos de capacitores, compensadores estáticos e dispositivos para corte de carga devido à subtensão [TAYLOR, 1992].

A alternativa para contornar as dificuldades associadas aos métodos indiretos é o uso de métodos diretos baseados em funções Lyapunov [WILLEMS, 1971; ABIAD, 1966]. Não é objetivo neste trabalho investigar em detalhes métodos diretos existentes, ou seja, não é feita uma investigação crítica, e sim conceitual. Métodos diretos para análise de estabilidade transitória não usam integração numérica como os indiretos. O perfil de estabilidade é avaliado com base na trajetória na condição pós-falta do sistema sob análise (ângulo do gerador, por exemplo), através de comparação entre a energia do sistema no estado inicial pós-falta e um valor crítico de energia.

### 2.3.2 Breve Histórico e Conceitos Básicos

#### I. Breve Histórico

O sistema elétrico de potência está constantemente sujeito a ação de forças externas (perturbações), ou seja, uma falta pode ocorrer em qualquer ponto e dependendo da sua amplitude, localização e duração, esta perturbação pode afetar severamente a condição de operação do sistema. Após a falta ser eliminada, o sistema tende à uma condição de equilíbrio pós-falta, mas pode não ser o estado de equilíbrio desejado. A questão é se o sistema irá, ou não, convergir para este estado. Este é um típico exemplo no qual estabilidade assintótica no sentido de Lyapunov é de extrema importância e avanços objetivando aprimorar estes métodos têm sido reportados na literatura há décadas [CHIANGa, 1987; VARAIYA, 1985; WILLEMS, 1971; WILLEMS, 1970].

Inicialmente, métodos diretos faziam uso do modelo clássico de gerador, além de simplificações nos sistemas de transmissão e nos modelos de cargas. A carga era do tipo impedância constante, as linhas de transmissão e as cargas eram reduzidas a um sistema de pequeno porte a partir do circuito interno do gerador, e não se consideravam as condutâncias de transferência associadas as cargas. Estes procedimentos resultavam nos seguintes problemas [VARAIYA, 1985]:

- a) Não eram consideradas as variações na demanda de potência reativa e nos níveis de tensão nas barras de carga;
- b) A redução do sistema de transmissão devido a uma representação simplificada resultava em perda topológica deste sistema, impedindo o estudo envolvendo trocas de energia transitória entre seus diferentes componentes;
- c) A não consideração de condutâncias de transferência das cargas compromete a análise do problema de estabilidade de direção e magnitude desconhecidas; e
- d) A não consideração do decaimento do fluxo e do controle de excitação podem ser simplificações inaceitáveis.

Com bases nestes problemas, três propostas foram apresentadas enfocando modelos de cargas mais realistas, não sendo mais tratadas com do tipo impedância constante, além de considerar a topologia original do sistema de transmissão. Uma vez que a estrutura do sistema de transmissão passou a ser preservada, as funções Lyapunov passaram a ser identificadas como funções energia *estrutura de rede preservada* ou *topológicas*. Estas três propostas foram apresentadas como:

- a) Modelo Bergen-Hill [BERGEN, 1981] - propõem um modelo de carga dependente da frequência e a topologia do sistema de transmissão original sendo representada explicitamente.
- b) Modelo Narasimhamurthi-Musavi [NARA, 1984] - A principal contribuição deste trabalho é a generalidade do tipo cargas, modeladas como potência constante (parcela ativa), e a parcela reativa como uma função arbitrária do nível de tensão do barramento. Este modelo captura transitórios de tensão nos barramentos além do sistema sob análise atender a lei da conservação da energia.
- c) Modelo Tsolas-Arapostathis-Varaiya [TSOLAS, 1985] – Neste artigo, a carga é modelada como barra tipo PQ, considera também o decaimento do fluxo de campo do gerador, além de manter a topologia original da rede. Estas características são consideradas na função energia, incluindo termos adicionais correspondentes. Uma caracterização da região de estabilidade é derivada com base nesta nova função energia.

Um dos métodos diretos mais tradicionais é conhecido como UEP (do acrônimo em inglês *Unstable Equilibrium Point*) [CHIANGa, 1987]. A análise da condição de estabilidade deste método depende apenas da posição pós-falta inicial do ponto, sendo independente da sua trajetória durante a falta, além de fornecer resultados muito conservativos. As referências [ATHAY, 1979; KAKIMOTO, 1978] sugeriram um método de controle do UEP, no qual a trajetória durante a falta é usada na análise da condição de estabilidade. Um outro método

também foi proposto, conhecido pelo acrônimo PEBS (do inglês, *Potential Energy Boundary Surface*). Este método enfoca um problema associado ao controle do UEP que é exatamente a dificuldade em encontrar um controle do UEP relativo a trajetória na condição de falta (ainda não eliminada). O método PEBS tenta encontrar uma aproximação local da fronteira de estabilidade sem a necessidade de computar os UEPs do sistema na condição pós-falta [CHIANGa, 1987].

De uma forma geral, muitos dos trabalhos focando o método de controle dos UEPs estão baseados em conceitos físicos, heurísticas e simulações computacionais, sem um suporte teórico convincente. A Tabela 2.2 destaca dificuldades pertinentes a computação dos UEPs de controle [CHIANG, 2011].

Tabela 2.2. Dificuldades associadas a computação dos UEPs de controle.

I.	O UEP de controle é um UEP específico incorporado em um elevado-grau espaço estado.
II.	O UEP de controle é o primeiro UEP cuja região estável apresenta interseção não vazia com a trajetória da falta no ponto de saída <sup>1</sup> .
III.	O esforço para computar o ponto de saída é alto uma vez que, geralmente, esta tarefa requer um processo numérico iterativo no domínio do tempo.
IV.	A determinação do UEP de controle requer a solução de um grande conjunto de equações algébricas não lineares com restrições.
V.	É difícil estabelecer uma boa estimativa inicial para computar o UEP de controle.
VI.	A dimensão da região de convergência de um UEP de controle associado a um método numérico pode ser muito pequena e irregular.
VII.	Assumindo o ponto de saída como uma estimativa inicial, um método numérico, tal como o método de Newton pode não convergir para o UEP de controle.

As dificuldades I – III dependem da existência de um método numérico capaz de calcular diretamente o UEP de controle, sendo uma tarefa extremamente difícil, se não impossível, sem usar um método numérico iterativo no domínio do tempo, justificando as falhas de métodos anteriores propostos na literatura [CHIANG, 2011].

Com relação a dificuldade VI, considerando o método numérico selecionado, cada ponto de equilíbrio contém sua própria região de convergência, ou seja, a região gerada (sequência)

<sup>1</sup> O ponto de saída é definido como o ponto de interseção entre a trajetória sob falta e o limite de estabilidade do sistema pós-falta – ver Figura 10.5, pág. 169, [CHIANG, 2011].

pelo método numérico a partir de um ponto nesta região irá convergir para um ponto de equilíbrio.

Tem sido observado e teoricamente investigado que no método de Newton, o tamanho da região de convergência do UEP pode ser muito menor do que do SEP (acrônimo em inglês para *Stable Equilibrium Point*). Além disso, a região de convergência de um SEP ou de um UEP com relação ao método de Newton é um *fractal*, ou seja, a estrutura da região de convergência não pode ser descrita por típicos objetos geométricos, tais como linhas, superfícies e sólidos [THORP, 1989].

Se uma estimativa inicial não estiver suficientemente próxima ao UEP de controle, então a sequência resultante, gerada, por exemplo, pelo método de Newton, irá divergir ou convergir para um ponto de equilíbrio com as possibilidades apresentadas na Tabela 2.3[CHIANG, 2011].

Tabela 2.3. Possibilidades de convergência.

I.	Converge para o SEP pós-falta.
II.	Converge para um outro SEP.
III.	Converge para o UEP no limite da região de estabilidade.
IV.	Converge para um UEP fora da região estabilidade.

Das possibilidades acima, a I é fácil de detectar, enquanto que as outras três não. As análises das condições de estabilidade estarão incorretas se um método encontrar uma das possibilidades II, III e IV. Infelizmente, encontrar uma estimativa inicial suficientemente próxima ao UEP de controle, tal que a estimativa inicial esteja dentro da região de convergência do UEP de controle, não é uma tarefa trivial. Na literatura, um número de métodos baseados em raciocínios físicos tenta encontrar o UEP de controle. Esses métodos são classificados como:

- a) Método de aceleração de máquina [RIBBENS, 1985; PAVELLA, 1994];
- b) Método de separação do sistema [FOUAD, 1981]; e
- c) Método de modo de distúrbio – MOD (do acrônimo em inglês *Mode Of Disturbance method*) [FOUAD, 1991].

Esses três métodos podem falhar e não encontrar o UEP de controle se estimativa inicial fornecida por cada método estiver muito longe do UEP de controle, ou fora da região de convergência.

As dificuldades apresentadas, justificam a necessidade de contribuições para atenuar, quando possível, algumas (se não todas) destas dificuldades. Uma proposta consolidada para atingir tais objetivos foi apresentada por [CHIANG, 1994; CHIANG, 1995; CHIANG, 2011], sendo conhecida como método BCU (do inglês *Boundary of stability region - based Controlling Unstable equilibrium*). Desde então, vários artigos têm sido devotados a este método [CHIANG, 1999; CHIANG, 2002; CHIANG, 2006], inclusive patentes [CHIANG, 1996; CHIANG, 2005; CHIANG, 2009]. O método BCU incorpora fatores importantes para a determinação do UEP de controle, não considerados pelos métodos anteriores, como por exemplo, a dificuldade II da Tabela 2.2. Mais informações sobre o método BCU são dadas no próximo item (*Conceitos Fundamentais*).

## II. Conceitos Fundamentais – Métodos PEBS e BCU

### a) *Introdução*

De acordo com a [CHIANG, 2011], considerando um modelo de sistema elétrico de potência para análise direta de estabilidade transitória, sob condição de falta (sistema assume características específicas para esta condição) e posteriormente eliminada (sistema assume características específicas a condição *pós-falta*), métodos diretos executam as etapas mostradas na Tabela 2.4.

Tabela 2.4. Etapas que compõem métodos diretos.

<b>Etapa</b>	<b>Procedimento</b>
<b>01</b>	Simular numericamente a trajetória do sistema no período da falta.
<b>02</b>	Calcular o ponto inicial do sistema na condição pós-falta.
<b>03</b>	Construir uma função de energia para o sistema na condição pós-falta.
<b>04</b>	Calcular o valor da função energia no ponto inicial do sistema pós-falta.
<b>05</b>	Calcular a energia crítica da trajetória durante a falta.
<b>06</b>	Realizar análise direta de estabilidade, comparando a energia do sistema no estado inicial pós-falta calculada na etapa 4 ( $E_4$ ), com a energia crítica calculada na etapa 5 ( $E_5$ ). Caso $E_4 < E_5$ , o sistema na condição pós-falta será estável; caso contrário, pode ser instável.

Como pode se observar nas duas primeiras etapas, o processo de integração é realizado apenas durante o período da falta. Como já informado, na etapa 3, geralmente, métodos diretos fazem uso de funções Lyapunov na construção das funções energia [PAI, 1981]. Na etapa 4, calcula-se o valor da função energia na condição inicial obtida na etapa 2. Na etapa 6, métodos diretos determinam, sem a necessidade de integração numérica, se o sistema de potência permanecerá estável na condição pós-falta comparando-se a energia do sistema calculada na etapa 4 com a energia crítica [PAI, 1981; THEODORO, 2014] calculada na etapa 5. Logo, é importante que métodos diretos possuam uma função energia, capaz de capturar o valor da energia do sistema, e seja usada para computar a energia do sistema, bem como um valor crítico de energia exato (durante a aplicação da falta). Esta classe de métodos também fornece um quantitativo da medida do grau de estabilidade/instabilidade [CHIANG, 1988; CHIANG, 1989].

A base teórica de métodos diretos para a avaliação da estabilidade de um sistema elétrico na condição pós-falta, é o conhecimento da sua (do sistema) região de estabilidade para esta condição (pós-falta). Caso a condição inicial pós-falta estiver dentro da região de estabilidade de um ponto desejado de equilíbrio estável pós-falta ( $x^s$ ) - SEP acrônimo em inglês para *Stable Equilibrium Point*, pode-se garantir, sem realizar integrações numéricas, que a condição pós-falta resultante irá convergir para o ponto desejado. Esta contextualização pode ser visualizada, resumidamente, na Figura 2.2, onde  $A(x^s)$  a região de estabilidade é delimitada pelo contorno  $\partial A(x^s)$ . Com o passar do tempo, cada trajetória na região de estabilidade ( $x^s$ ) tende a convergir para o SEP; cada trajetória em uma região de estabilidade reside inteiramente na região de estabilidade e que a dimensão desta região é  $n$ , onde  $x \in R^n$  [CHIANG, 2011].

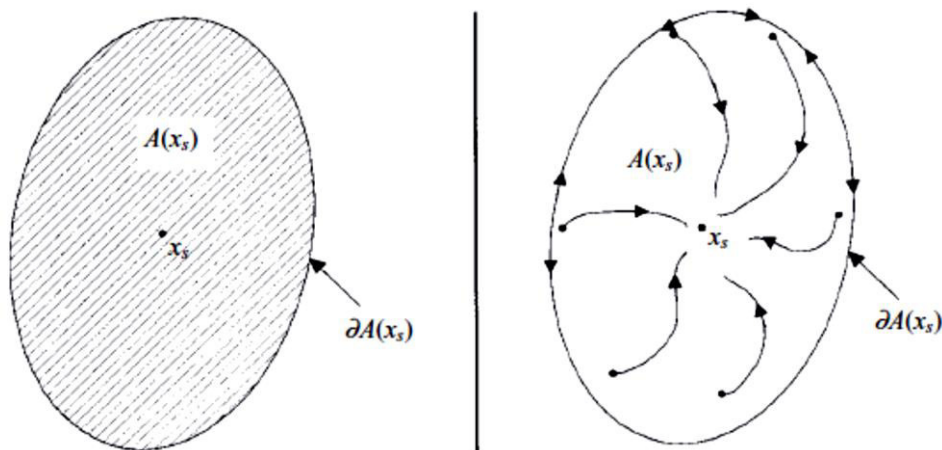


Figura 2.2. Região estável  $A(x^s)$  delimitada pelo contorno  $\partial A(x^s)$ .

b) *O Método PEBS- Superfície de Fronteira de Energia Potencial*

Um dos principais problemas do método UEP de controle é a dificuldade em encontrar o UEP de controle em relação a trajetória do ponto durante a falta. O método PEBS (baseado em heurísticas) tenta encontrar uma aproximação local da fronteira de estabilidade sem a necessidade de computar os UEPs do sistema pós-falta. Este método está baseado na análise de estimação do ponto de equilíbrio de controle, e da solução das Equações Diferenciais e Algébricas (EDAs) que representam a rede elétrica e seus dispositivos, equipamentos e cargas, sob condição de falta (nova configuração do sistema), até que a projeção da trajetória do ponto atravesse (ponto de saída) a Superfície de Fronteira de Energia Potencial [CHIANG, 1987a]. Uma das dificuldades deste método é determinar a energia crítica em relação a trajetória do ponto com o sistema sob falta e derivar funções energia para modelos de estabilidade transitória [CHIANG, 1994].

A Equação (2.16) expressa o modelo matemático do método PEBS e representa a fronteira da área de atração do sistema gradiente reduzido [CHIANG, 1988] associada ao modelo do sistema original dado pela Equação (2.17), onde  $V_P$  é a energia potencial do sistema. As etapas básicas do método PEBS são informadas na Tabela 2.5 [CHIANG, 2011].

$$\dot{\delta} = \begin{cases} -\frac{\partial V_P}{\partial \delta} \\ P_m - P_e \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \omega \\ M \dot{\omega} = -\frac{\partial V_P}{\partial \delta} - D\omega = P_m - P_e - D\omega \end{cases} \quad (2.17)$$

Tabela 2.5. Principais etapas do *PEBS*.

<b>Passo 1</b>	Integrar a trajetória do ponto $(x(t), \dot{x}(t))$ durante a falta. Suponha que $x(t)$ atravessa a Superfície de Fronteira de Energia Potencial (PEBS) em um ponto de interseção cujo valor da energia potencial é $v$ . O valor da energia crítica a trajetória $(x(t), \dot{x}(t))$ durante a falta é $v$ .
<b>Passo 2</b>	Usar superfície de energia constante $\{(x, \dot{x}): V(x, \dot{x}) < v\}$ como uma aproximação local da fronteira de estabilidade. Se o valor de energia quando a falta é eliminada for menor que a energia crítica $v$ , o sistema pós-falta é estável; caso contrário, pode ser instável.

Se a falta for rapidamente eliminada, a trajetória será oscilatória em torno de um ponto de equilíbrio ( $x_0$ ), e possivelmente não ultrapassará o PEBS.

Limitações do PEBS [CHIANG, 2011]

- A extensão do método PEBS para o caso de multimáquinas baseia-se em argumentos heurísticos. Não se encontram justificativas teóricas para o PEBS, exceto para o caso de um sistema simples, composto por uma única máquina e barra-infinita.
  - Não está claro, se este método é a interseção do limite da estabilidade do sistema multimáquinas com o subespaço  $\{(x, \dot{x}) : \dot{x} = 0\}$ .
  - Devido as heurísticas consideradas nos desenvolvimentos do PEBS, é difícil verificar se o método fornece uma boa aproximação local da fronteira de estabilidade ou sob quais condições a aproximação é boa.
- c) *O Método BCU- Ponto de Equilíbrio Instável de Controle Baseado no Limite da Região de Estabilidade*

O BCU é um método sistemático para determinar o UEP de controle de sistemas elétricos de potência de grande-porte. Inicialmente, o BCU explora a estrutura especial do modelo implícito a fim de definir um modelo de estado reduzido artificial, capaz de capturar todos os pontos de equilíbrio na fronteira de estabilidade do modelo original. Em seguida, calcula a UEP de controle do modelo original computando a UEP de controle do modelo de estado reduzido, cujo cálculo é bem mais simples que o modelo original. As suas diferentes versões aperfeiçoadas do BCU têm sido usadas por várias concessionárias de energia em diferentes países, e diferentemente do PEBS e de métodos clássicos de energia, o BCU possui fundamentos teóricos consolidados para determinar o UEP de controle [CHIANG, 1995; CHIANG, 2011].

O BCU se baseia na relação entre o limite de estabilidade do modelo clássico de sistema elétrico de potência e o limite de estabilidade do sistema reduzido, definido apenas no espaço ângulo. O fundamento do BCU é que este método determina o UEP de controle através do UEP de controle do sistema reduzido, sendo este último definido no espaço ângulo onde o UEP de controle é mais fácil de calcular. Apenas para fins informativos, devido as diferentes versões existentes do BCU, nesta dissertação são apresentadas nas Tabelas 2.6 e 2.7 apenas as etapas das versões 1 e 2 do método [CHIANG, 2011], as quais, por suposição, resumem os principais fundamentos do método.



Tabela 2.6. Método BCU – versão 1

<b>Etapas</b>	<b>Objetivo(s)</b>
<b>01</b>	A partir da trajetória $(\delta(t), \omega(t))$ sob condição de falta, determinar o ponto de saída $\delta^*$ que corresponde ao ponto que a projeção da trajetória $\delta(t)$ atravessa o limite de estabilidade do sistema reduzido.
<b>02</b>	Usar o ponto $\delta^*$ como condição inicial e integrar o sistema reduzido na condição pós-falta para encontrar o primeiro mínimo local de $\sum_{i=1}^n \ f_i(\delta)\ $ , em $\delta_0^*$ .
<b>03</b>	Usar o ponto $\delta_0^*$ como estimativa inicial para solucionar $\sum_{i=1}^n \ f_i(\delta)\  = 0$ em $\delta_{co}^*$ .
<b>04</b>	Estabelecer o UEP de controle em relação trajetória sob condição de falta como sendo $(\delta_{co}^*, 0)$ .

Tabela 2.7. Método BCU – versão 2

<b>Etapas</b>	<b>Objetivo(s)</b>
<b>01</b>	Da trajetória sob condição de falta $(\delta(t), \omega(t))$ , determinar o ponto $\delta^*$ no qual a projeção da trajetória alcança o primeiro ponto de máximo local de $V_p(\cdot)$ . Determinar o ponto $\delta^+$ que é o passo seguinte a $\delta^*$ .
<b>02</b>	Usar o ponto $\delta^*$ como condição inicial e integrar o sistema reduzido pós-falta para encontrar o primeiro ponto de mínimo local a projeção da trajetória alcança o primeiro ponto de máximo local de $\sum_{i=1}^n \ f_i(\delta)\ $ em $\delta_0^*$ .
<b>03</b>	Usar o ponto $\delta^+$ como condição inicial e repetir etapa 2 para encontrar os pontos correspondentes $(\delta_0^+)$ .
<b>04</b>	Comparar os valores de $\ f(\delta)\ $ em $\delta_0^*$ e $\delta_0^+$ e usar o de menor valor como estimativa inicial para solucionar a Equação (2.18) para um sistema de $n$ geradores e assumindo o gerador $i$ como referência, $f_i(\delta) = 0$ , com a solução sendo $\delta_{co}$ .
<b>05</b>	O ponto UEP de controle com relação a trajetória sob falta é $(\delta_{co}, 0)$ .

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_{kn} &= (P_k - P_{ek}) - \left( \frac{M_k}{M_n} \right) (P_n - P_{en}); \quad := f_k(\delta); \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \\ P_k &= P_{mk} - E_k^2 G_{kk} \\ P_{ek} &= \sum_{k \neq m}^{n+1} E_k E_m B_{km} \text{sen}(\delta_k - \delta_m) + \sum_{j \neq i}^{n+1} E_k E_m G_{km} \cos(\delta_k - \delta_m)\end{aligned}\tag{2.18}$$

As variáveis de estado do sistema reduzido expresso pela equação acima são apenas os ângulos das máquinas de dimensão é  $n-1$ , enquanto que a do sistema original é de  $2(n-1)$  [CHIANG, 1995]. Portanto, o esforço computacional do método BCU é reduzido em comparação aos demais apresentados na literatura.

#### d) *O Formalismo Hamiltoniano Aplicado em Sistemas Elétricos de Potência*

Um dos poucos artigos encontrados numa pesquisa bibliográfica tratando de conceitos Hamiltonianos aplicados em estudos envolvendo sistemas elétricos de potência foi inicialmente apresentado por [VITTAL, 1983]. Neste artigo, os autores estabelecem condições necessárias e suficientes para estabilidade assintótica de uma condição de equilíbrio para sistemas elétricos de potência. São considerados sistemas de energia com amortecimento e os seus respectivos modelos são representados por aproximações de sistemas Hamiltonianos. Um novo método de avaliar a estabilidade assintótica foi proposto usando o princípio de invariância de equações diferenciais ordinárias.

A formulação dos sistemas elétricos de potência por sistemas quase Hamiltonianos é mostrada neste artigo com o modelo clássico [FOUAD, 1977]. O procedimento acompanha os fundamentos da análise direta de estabilidade transitória usando funções de energia, com o movimento dos geradores expresso em relação ao centro inercial do sistema [FOUADa, 1981]. De acordo com os autores, os resultados preliminares forneceram justificativas analíticas para o conceito de superfície limite de energia potencial em sistemas de potência, obtido até então por argumentos heurísticos e simulações numéricas.

Na referência [WANG, 2003], sistemas elétricos de potência multimáquinas são expressos como um sistema hamiltoniano dissipativo. Baseado nas ações dissipativas, a atenuação de perturbação  $L_2$  [SHEN, 2000; BESACON, 1998] dos sistemas de potência multimáquinas foi investigada sendo proposta uma estratégia descentralizada de controle simples. Simulações computacionais com um sistema de seis-máquina mostram que a estratégia de controle de atenuação do perturbação  $L_2$  proposta é bem eficaz.

Já na referência [XI, 2002], os autores consideraram a estabilização e controle  $H_\infty$  de sistemas de potência multimáquinas. Usando o método de função Hamiltoniana, um controlador simples, descentralizado e mensurável foi projetado para atenuar as consequências do distúrbio e estabilizar o sistema. Um algoritmo foi designado para a seleção do ganho e do nível de atenuação. Um sistema de energia com três geradores foi usado para validar a proposta.

## 2.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo apresentou, inicialmente, o desenvolvimento da conhecida equação de oscilação do gerador, com destaque para o seu ângulo  $\delta$  e sua velocidade angular  $\omega$ . Apesar desta equação ser bastante referenciada em livros textos, este desenvolvimento teve por objetivo destacar as variáveis usadas no desenvolvimento da atual proposta, ou seja, com o formalismo Hamiltoniano. O Capítulo 3 introduz conceitos deste formalismo, associados a análise direta do problema da estabilidade transitória, em particular para a construção de superfícies tridimensionais do sistema sob análise.

Em seguida, foi apresentado um breve histórico sobre métodos diretos, bem como conceitos fundamentais sobre os métodos PEBS e BCU, devido à importância destes para esta classe de métodos. Por fim, pesquisas que já fizeram uso do formalismo Hamiltoniano em estudos envolvendo sistemas elétricos de potência foram apresentados. Entretanto, nenhum deles está associado a atual proposta desta dissertação, visto que o primeiro apenas aproximou sua proposta ao formalismo Hamiltoniano; e os outros dois propuseram estratégias de controle para atenuar perturbações em sistema elétricos de potência multimáquinas.

# Capítulo 3

## FUNDAMENTOS DO FORMALISMO HAMILTONIANO

---

*Este capítulo apresenta conceitos fundamentais do formalismo Hamiltoniano e procura estabelecer vínculos com o problema da estabilidade transitória angular.*

### 3.1 PRINCÍPIOS DA MECÂNICA ANALÍTICA

Neste trabalho de pesquisa as prováveis potencialidades do formalismo Hamiltoniano são investigadas em análises diretas de estabilidade transitória, desenvolvido com base nas equações de movimento da mecânica de Lagrange. Na formulação Lagrangeana, o comportamento dinâmico de um sistema com  $k$  graus de liberdade (variáveis essenciais para analisar o problema) é caracterizada por um conjunto de coordenadas generalizadas de “posição”  $q_k$ , coordenadas generalizadas de “velocidade”  $\dot{q}_k = dq_k/dt$  e a variável independente  $t$ , geralmente, mas não necessariamente a variável do tempo. A função Lagrangeana ( $L$ ) para um sistema dinâmico genérico é dada por (3.1), sendo, portanto, uma função com  $2k$  variáveis dinâmicas [MONTAGUE, 1993]

$$L = (q_k, \dot{q}_k, t) \quad (3.1)$$

Como recordado no Capítulo 2, os fundamentos do problema da estabilidade transitória angular se baseia na capacidade dos geradores se manterem em sincronismo devido a um distúrbio de grande amplitude no sistema elétrico. O movimento dos geradores é regido fundamentalmente por (2.9), conhecida como equação de oscilação da máquina síncrona, cuja variável de interesse é o deslocamento angular ( $\Delta\delta$ ) de cada gerador em relação a uma referência de gira a velocidade síncrona. Nota-se também, que outro fator importante é a variação da sua velocidade angular ( $\Delta\omega$ ). Portanto, o ângulo ( $\delta_k$ ) de cada gerador- $k$  e a sua velocidade angular ( $\omega_k$ ) podem ser associados a (3.1), resultando em (3.2).

$$L = (\delta_k, \dot{\delta}_k, t); \quad \dot{\delta}_k = \omega_k \quad (3.2)$$

O uso da mecânica Lagrangeana em vez da mecânica Newtoniana pode apresentar vantagens em certos problemas, os quais a solução das equações da mecânica Newtoniana não seria trivial. Na mecânica Lagrangeana, é definida uma “quantidade” chamada de “Lagrangeana”, dada por (3.3), sendo definida com a diferença entre a energia cinética  $K$  e a energia potencial  $U$ .

$$L \equiv K - U \quad (3.3)$$

Visto que a energia cinética é função da velocidade, ou seja,  $\omega$  no caso da velocidade angular do gerador, e a energia potencial é, geralmente, função da posição, ou seja, a posição do ângulo  $\delta$  do gerador, a Lagrangeana é uma função de  $\delta$  e de  $\omega$ , como expresso por (3.2).

A formulação mais geral das leis que regem o movimento de sistemas dinâmicos é o “Princípio de Ação Mínima” ou “Princípio de Hamilton”, de acordo com o qual todo sistema mecânico é caracterizado por uma função definida (3.1) e o movimento do sistema é tal que uma certa condição é satisfeita [LANDAU, 1981]. A condição que deve ser satisfeita é a seguinte:

- O sistema satisfaz as condições de contorno  $q(t_1) = q^{(1)}$  e  $q(t_2) = q^{(2)}$  e se movimenta entre estas posições de tal forma que a integral em (3.4) é minimizada (os subscritos não estão incluídos).  $S$  é chamado de ação e  $L$  é a Lagrangeana do sistema.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (3.4)$$

A solução geral de (3.4) é obtida através do cálculo de variações [ELSGOLTS, 1977]. Por questões de simplicidade, assume-se que o sistema possui apenas um grau de liberdade, e  $q = q(t)$  é a função para qual  $S$  seja mínimo. Isto significa que  $S$  irá aumentar quando  $q(t)$  for substituído por qualquer função da forma  $q(t) + \Delta q(t)$ , onde  $\Delta q(t)$  é uma pequena variação. Uma vez que as condições de contorno  $q(t_1) = q^{(1)}$  e  $q(t_2) = q^{(2)}$  devem ser satisfeitas, tem-se que  $\Delta q(t_1) = \Delta q(t_2) = 0$ . Aplicando esta variação em (3.4), tem-se (3.5), que pode ser reescrita na forma (3.6), que representa uma integral de primeira ordem, que por sua vez conduz a (3.7).

$$\tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \Delta q, \dot{q} + \dot{\Delta} q, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (3.5)$$

$$\tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left( L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial L}{\partial q} \Delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\Delta} q \right) dt \quad (3.6)$$

$$\Delta S = \Delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \Delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\Delta q} \right) dt = 0 \quad (3.7)$$

Visto que  $\Delta \dot{q} = \frac{d\Delta q}{dt}$ , através de integração por partes, (3.7) pode ser escrita como:

$$\Delta S = \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \Delta q dt = 0 \quad (3.8)$$

Lembrando que as condições de contorno para  $\Delta q$  devem ser satisfeitas, a integral em (3.8) deve “desaparecer” para quaisquer valores de  $\Delta q$ , logo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (3.9)$$

O termo  $\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)$  é conhecido como momento canônico “ $p$ ” e estes conjuntos de equações diferenciais são as “Equações de Lagrange” correspondendo as equações de movimento de um sistema fornecendo as relações entre aceleração, velocidades e coordenadas. Se o sistema conter  $k$  graus de liberdade, este irá possuir um conjunto de  $k$  equações diferenciais de segunda ordem, cuja solução geral irá conter  $2k$  constantes que podem ser determinadas a partir das condições iniciais do sistema. No caso do sistema ser um gerador síncrono, a (3.9) passa a ser representada pela (3.10), e as condições iniciais são o ângulo  $(\delta_0)$  e a velocidade angular  $(\omega_0)$  do gerador.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \delta} = 0 \quad (3.10)$$

## 3.2 FORMALISMO HAMILTONIANO

O formalismo Hamiltoniano ( $H$ ) descreve um sistema em termos de coordenadas generalizadas ( $q$ ) e momento generalizado ( $p$ ), da mesma forma que o momento canônico identificado em (3.9). A adaptação do conjunto  $(q, \dot{q}, t)$  para  $(q, p, t)$  é obtida através da transformação de Legendre, definida pela seguinte função [MONTAGUE, 1993]:

$$H(q, p, t) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t) \quad (3.11)$$

Diferenciando o termo a esquerda de (3.11):

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial p} dp \quad (3.12)$$

Ou pelo termo a direita de (3.11):

$$dH = pd\dot{q} + \dot{q}dp - \frac{\delta L}{\delta q} dq - \frac{\delta L}{\delta \dot{q}} d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (3.13)$$

Designando o momento canônico de (3.9) como:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (3.14)$$

O primeiro e o quarto termo de (3.13) se anulam e os demais podem ser identificados pelos termos correspondentes em (3.12), ou seja:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (3.15)$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (3.16)$$

$$\dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q} \quad (3.17)$$

A função  $H(q, p, t)$  é a Hamiltoniana e as Equações (3.16) e (3.17) são as Equações de movimento de Hamilton de primeira ordem apresentando uma forte simetria na forma entre sua coordenada (posição) generalizada  $q$  e seu momento conjugado  $p$ . Esta simetria conduz a propriedades de transformação muito flexíveis entre os conjuntos de variáveis dinâmicas. Para movimento clássico, é geralmente, mas não necessariamente, a soma entre as energias cinética ( $K$ ) e potencial ( $U$ ), ou seja:

$$H(q, p, t) = K + U \quad (3.18)$$

Existem estratégias para simplificar a solução de um problema pelo formalismo Hamiltoniano, conhecidas como Transformações Canônicas. Essas transformações são efetuadas a partir de escolhas adequadas de coordenadas a fim de reduzir os graus de liberdade do sistema através de quantidades invariantes ou “quase invariantes”, permitindo assim a aplicação da teoria da perturbação. Esta transformação é feita no espaço de fase  $\{q, p\}$  para novas coordenadas generalizadas e momentos conjugados  $\{Q, P\}$  [SAKURAI, 1994; MESSIAH, 1970; EISBERG, 1985]. A forma de Hamilton deve ser preservada e a condição necessária e suficiente para que a transformação seja canônica é:

$$\left[ Pdq - H_1(Q, P, t) dt \right] - \left[ pdq - H(q, p, t) dt \right] = dG \quad (3.19)$$

Onde  $dG$  é a diferencial total, e com base no princípio variacional de Hamilton e de (3.11):

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} [p\dot{q} - H(q, p, t)] dt = 0 \quad (3.20)$$

A transformação canônica  $Q = Q(q, p, t)$  e  $P = P(q, p, t)$  é derivada da função geradora  $G$  podendo apresentar uma das seguintes formas:

$$G_1(q, Q, t) \quad p = \frac{\partial G}{\partial q} \quad P = -\frac{\partial G}{\partial Q} \quad (3.21)$$

$$G_2(q, P, t) \quad p = \frac{\partial G}{\partial q} \quad Q = \frac{\partial G}{\partial P} \quad (3.22)$$

$$G_3(Q, p, t) \quad P = -\frac{\partial G}{\partial Q} \quad q = -\frac{\partial G}{\partial p} \quad (3.23)$$

$$G_4(p, P, t) \quad q = -\frac{\partial G}{\partial p} \quad Q = \frac{\partial G}{\partial P} \quad (3.24)$$

Quando o tempo  $t$  não exercer nenhuma influência, este parâmetro pode ser omitido. Ainda, no caso do formalismo Lagrangeano,  $p$  é designado como momento canônico. Já no formalismo Hamiltoniano é o momento conjugado.

### 3.3 APLICAÇÃO DO FORMALISMO HAMILTONIANO

As seções anteriores apresentaram as principais etapas do formalismo Hamiltoniano, até se chegar a sua nova forma (3.25), ou seja, após a transformação canônica. Nesta seção, um simples exemplo irá demonstrar a aplicação deste formalismo e compará-lo com o Lagrangeano. Em seguida, uma analogia desta aplicação com um simples sistema de potência é feita.

#### a) Pêndulo Simples

Vamos considerar um pêndulo simples composto de um objeto de massa  $m$  e uma corda de massa desprezível de comprimento  $l$  em um campo gravitacional constante com aceleração  $g$ . Embora o movimento do pêndulo seja bidimensional, uma única coordenada é necessária para descrever a configuração do pêndulo. Este sistema é mostrado na Figura (3.1).



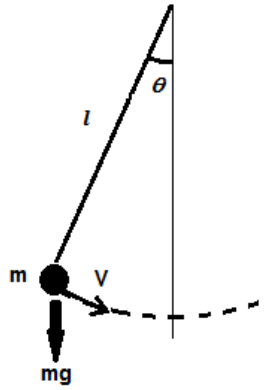


Figura 3.1. Sistema composto por um simples pêndulo de massa  $m$ .

A energia potencial do sistema é dada por:

$$U = mgl(1 - \cos \theta) \quad (3.26)$$

E a cinética:

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} \quad (3.27)$$

De acordo com a Lagrangeana dada por (3.9) e sabendo que  $q = \theta$  e  $\dot{q} = \dot{\theta}$ , tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left[ \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta) \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta) \right] = 0 \quad (3.28)$$

Computando as derivadas parciais, tem-se as seguintes equações diferenciais de segunda ordem (equivalentes):

$$\frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\theta}) + mgl \sin \theta = 0 \quad (3.31)$$

$$(ml^2 \ddot{\theta}) + mgl \sin \theta = 0 \quad (3.32)$$

A solução de (3.31) ou (3.32) não é trivial, mas pode ser simplificada caso o pêndulo faça pequenos deslocamentos. Neste caso,  $\sin \theta \approx \theta$  e a solução é um simples oscilador harmônico cuja solução é:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \delta) \quad (3.33)$$

Onde  $\theta_0$  é a amplitude angular do pêndulo,  $\omega$  é a sua frequência angular e  $\delta$  é uma constante de fase que depende da localização do pêndulo em  $t = 0$ .

Para solucionar este problema através da Hamiltoniana, deve-se primeiro estabelecer a energia cinética em termos de momento ( $p$ ), dado por (3.34), e incluir em (3.27), resultando em (3.35).

$$p = \frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta}; \quad \dot{\theta} = \frac{p}{ml^2} \quad (3.34)$$

$$K = \frac{p^2}{2ml^2} \quad (3.35)$$

E a Hamiltoniana é:

$$H(\theta, p) = K + U = \frac{p^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos \theta) \quad (3.36)$$

Substituindo  $H$  de (3.16) e (3.17) por (3.36):

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left[ \frac{p^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos \theta) \right] = \frac{p}{ml^2} \quad (3.37)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{p^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos \theta) \right] = -mgl \operatorname{sen} \theta \quad (3.38)$$

As Equações (3.37) e (3.38) são duas equações diferenciais de primeira ordem acopladas, que devem ser solucionadas simultaneamente para encontrar  $\theta$  e o momento conjugado  $p$ .

#### b) Um Simples Gerador Síncrono

O exemplo anterior usou um simples pêndulo a fim de introduzir o uso do formalismo Hamiltoniano em uma análise de um corpo em movimento. Para fins de familiarização inicial na solução de problemas de estabilidade transitória, o presente exemplo usa um simples gerador síncrono para ilustrar o processo de análise através do formalismo Hamiltoniano. Nesta análise, as energias potencial e cinética são dadas por:

$$U = P_m - P_e \operatorname{sen} \delta \quad (3.40)$$

$$K = \frac{1}{2} M \omega^2 \quad (3.41)$$

Onde  $P_m$  e  $P_e$  correspondem, respectivamente, as potências mecânica e elétrica do gerador,  $M$  é a sua constante de inércia e  $\omega$  a sua velocidade angular. Note que nesta análise,  $\delta \rightarrow \theta$  e  $\omega \rightarrow \dot{\delta}$ . O próximo passo é determinar o momento conjugado  $p$  e incluí-lo em (3.41), como segue:

$$p = \frac{\partial H}{\partial \dot{\delta}} = M \dot{\delta}; \quad \dot{\delta} = \frac{p}{M} \quad (3.42)$$

$$K = \frac{p^2}{2M} \quad (3.43)$$

Portanto, a Hamiltoniana passa a ser expressa da seguinte forma:

$$H(\delta, p) = K + U = \frac{p^2}{2M} + [P_m - P_e \text{sen}\delta] \quad (3.44)$$

Substituindo  $H$  de (3.16) e (3.17) por (3.44):

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left[ \frac{p^2}{2M} + [P_m - P_e \text{sen}\delta] \right] = \frac{p}{M} \quad (3.45)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial \delta} = -\frac{\partial}{\partial \delta} \left[ \frac{p^2}{2M} + [P_m - P_e \text{sen}\delta] \right] = P_e \cos \delta \quad (3.46)$$

Como no caso do pêndulo, aqui neste exemplo, as Equações (3.45) e (3.46) também são duas equações diferenciais de primeira ordem acopladas, que devem ser solucionadas simultaneamente para encontrar  $\delta$  e o momento conjugado  $p$ . A energia total ( $E$ ) do gerador é calculada a partir das suas condições iniciais  $(\delta_0, \omega_0)$  [BRIZARD, 2004]:

$$E = \frac{1}{2} M \omega_0^2 + [P_m - P_e \text{sen}\delta_0] \quad (3.47)$$

### 3.4 TEORIA DA PERTURBAÇÃO

Muitos problemas com sistemas reais não podem ser resolvidos de forma exata, sendo, portanto necessário o uso de ferramentas adequadas para tais situações. A teoria da perturbação, é, geralmente, bem-sucedida quando os problemas podem ser modelados como uma "pequena deformação" de um sistema, neste caso possibilitando a solução de forma exata, sendo um procedimento sistemático usado na obtenção de soluções do problema quando o sistema é submetido a uma perturbação, com base nas soluções conhecidas para o caso não perturbado. Sob o ponto de vista matemático, nestes casos, a Hamiltoniana ( $H$ ) pode ser representada da seguinte forma geral [BRUNT, 2004; GRIFFITHS, 2016]:

$$H = H_0 + \lambda V = H_0 + H_1 \quad (3.48)$$

Onde  $H_0$  é a Hamiltoniana do sistema não perturbado,  $\lambda$  é um parâmetro que pode variar de 0 a 1 (casos extremos),  $V$  é o potencial que descreve a perturbação (pode ser assumida independente do tempo  $t$ ) e  $H_1 = \lambda V$  (sistema perturbado). Com base nas transformações canônicas (3.21) - (3.24),  $H_1$  passa ser representado por (3.49), onde o termo da derivada parcial de  $G$  corresponde a perturbação.

$$H_1(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial G}{\partial t} \quad (3.49)$$

Note que se  $\lambda=0$ , o sistema se encontra em um estado não-perturbado e a Hamiltoniana total é igual a inicial ( $H=H_0$ ). Por outro lado, se  $\lambda=1$ , o sistema se encontra em um estado perturbado e o potencial associado a perturbação passa a fazer parte da Hamiltoniana total ( $H=H_0+H_1$ ). A escolha deste parâmetro, já que possui uma margem de valores no intervalo [0-1], depende do problema de interesse [GRIFFITHS, 2016], mas para o problema da estabilidade transitória angular, neste trabalho os valores de  $\lambda$  são assumidos como “0” e “1”, principalmente por se tratar de uma investigação inicial. Isto significa que, o sistema pode estar em uma condição não-perturbada ( $\lambda=0$ ), ou perturbada (crítica, já que  $\lambda=1$ ), ou seja, estão sendo considerados apenas os casos extremos.

### 3.4.1 PROCESSO DE SOLUÇÃO

Por (3.50) - *Equação de Schroedinger* e independente do tempo [SAKURAI, 1994; EISBERG, 1985], (3.48) é solucionada para  $H_0$ , conhecidos seus autovalores e suas autofunções:

$$H_0\psi_{(n)}(x) = E_{(n)}\psi_{(n)}(x) \quad (3.50)$$

Onde  $\psi_{(n)}(x)$  é uma função de onda,  $n$  é o nível de perturbação e  $E$  é energia permitida pelo sistema dinâmico.

Em relação a (3.48), o valor de  $\lambda$  varia entre zero e um [GRIFFITHS, 2016], na seguinte forma. Para pequenas perturbações, o valor de  $\lambda \cong 0$ , e para perturbações severas  $\lambda \cong 1$ . Para análise de transições de condições, ou seja, quando o sistema passa de um estado para outro, usa-se tanto a Hamiltoniana ( $H_0$ ) não perturbada (a solução conhecida) e a perturbada ( $H_1$ ), que é a solução procurada. Pode-se, então, escrever a energia  $E$  e a função de onda  $\psi$  (na condição não-perturbada “0” e perturbada “1”) em função de  $\lambda$ , na seguinte forma [BUTKOV, 1968; GRIFFITHS, 2016; HARRIS, 1963]:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + \lambda\psi_1 \\ E &= E_0 + \lambda E_1 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Incluindo (3.51) em (3.48) e (3.50), resulta na (3.52) onde ambos estados são considerados, e separando os termos Hamiltonianos ( $H_0$   $H_1$ ) e de Energia ( $E_0$   $E_1$ ), tem-se (3.53).

$$(H_0 + \lambda H_1)[\psi_0 + \lambda\psi_1] = (E_0 + \lambda E_1)[\psi_0 + \lambda\psi_1] \quad (3.52)$$

$$H_0\psi_0 + \lambda(H_0\psi_1 + H_1\psi_0) = E_0\psi_0 + \lambda(E_0\psi_1 + E_1\psi_0) \quad (3.53)$$

Observando (3.53), se  $\lambda = 0$  e a função de onda for  $\psi_0 = 1$  (característica do sistema não-perturbado) [BUTKOV, 1968; GRIFFITHS, 2016; THORNTON, 2004], tem-se.

$$H_0 = E_0 \quad (3.54)$$

Caso  $\lambda = 1$ , e com base na igualdade (3.54), tem-se a (3.55) com os termos Hamiltonianos ( $H_0$   $H_1$ ) e de Energia ( $E_0$   $E_1$ ).

$$H_0\psi_1 + H_1\psi_0 = E_0\psi_1 + E_1\psi_0 \quad (3.55)$$

(3.54) - (3.55) podem ser classificadas de acordo com o valor de  $\lambda$  :

$$\lambda = 0 \quad H_0\psi_0 = E_0\psi_0 \quad \begin{array}{l} \text{Solução conhecida das condições iniciais-} \\ \text{Sistema não perturbado} \end{array} \quad (3.56)$$

$$\lambda = 1 \quad H_0\psi_1 + H_1\psi_0 = E_0\psi_1 + E_1\psi_0 \quad \text{Solução procurada - Sistema Perturbado} \quad (3.57)$$

A solução de (3.56) é a Hamiltoniana dada por (3.18), indicando que esta é igual à energia total (potencial e cinética) do sistema, ou seja, o sistema é conservativo, portanto, a energia do sistema é constante como mostra (3.58).

$$H_0 = \text{constante} \quad (3.58)$$

Para a solução de (3.57), tem-se informações da Hamiltoniana conhecida (estado não perturbado), sendo úteis para encontrar o valor da nova Hamiltoniana (estado perturbativo). A solução da função de onda ( $\psi_1$ ) é baseada na combinação linear<sup>1</sup> de ( $\psi_0$ ), representado por (3.59) [EISBERG, 1985; GRIFFITHS, 2016].

$$\psi_1 = \sum_n c_n \psi_0 \quad (3.59)$$

Multiplicando os dois lados de (3.57) por  $\psi_0$ , tem-se o produto interno ( $\langle \rangle$ ) representado por [MESSIAH, 1970; SAKURAI, 1994]:

$$\langle \psi_0 | H_0 | \psi_1 \rangle + \langle \psi_0 | H_1 | \psi_1 \rangle = E_1 \langle \psi_0 | \psi_1 \rangle + E_0 \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle \quad (3.60)$$

Incluindo (3.59) em (3.60), e sabendo que  $\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = 1$ , chega-se a (3.61) (Apêndice A).

$$E_1 = \langle \psi_0 | H_1 | \psi_0 \rangle \quad (3.61)$$

Se a Hamiltoniana  $H_1$  for igual a  $H_0$ , então  $E_1 = E_0$ , logo a solução é conhecida (3.18). Este resultado é um fundamento da teoria de perturbação de primeira ordem [GRIFFITHS, 2016], onde a energia total é calculada com base nas informações do estado não perturbado. No caso de  $H_1 \neq H_0$ , então  $E_1 \neq E_0$ , logo (3.49) é a Hamiltoniana do sistema perturbado.

---

<sup>1</sup> Uma combinação linear das funções  $f_0(x), f_1(x), \dots$  é uma expressão da forma:  $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots$   
Em que  $c_1, c_2, \dots$  são constantes relacionadas ao fator de perturbação  $\lambda$ .

### 3.4.2 APLICAÇÃO DA TEORIA DE PERTURBAÇÃO

Nos exemplos anteriores, foram considerados apenas sistemas não perturbados. Aqui, os mesmos sistemas sofrem uma determinada perturbação, como descritas a seguir.

#### a) Pêndulo Simples

Considere um pêndulo em um meio viscoso, e devido a este fato, existe uma força de resistência (atrito, por exemplo) que deve ser considerada em (3.36). Se o pêndulo for deslocado do seu estado inicial, neste caso há resistência de movimento e quanto maior for a velocidade do pêndulo, maior será a força de resistência. De acordo com (3.62), esta força é determinada em função da velocidade do pêndulo  $(\dot{\theta})$  e do  $\beta$  é um coeficiente de proporcionalidade  $(\beta)$ , que depende da viscosidade do meio onde o sistema se encontra [ARNOLD, 1989; THIRRING, 1991; GOLDSTEIN, 2001]. Modificando (3.36) para incluir a força externa, têm-se as energias potencial  $(U)$  e cinética  $(K)$  do sistema, como mostra (3.63).

$$F_{ext} = \beta l \dot{\theta} \quad (3.62)$$

$$\begin{cases} K = \left( \frac{ml^2 \dot{\theta}^2}{2} + \beta \dot{\theta} l \right) \\ U = -mgl(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (3.63)$$

A Lagrangeana é alterada devido à presença do termo da força externa e seguindo os passos (3.28) - (3.31), (3.32) passa a ser escrita por (3.64). Lembrando que  $\dot{\theta} = \sqrt{g/l}$  e  $d\dot{\theta}/dt = -\dot{\theta}^2 \text{sen} \theta$  [GOLDSTEIN, 2001].

$$\ddot{\theta} + \frac{\beta}{m} \dot{\theta} + \dot{\theta}^2 \text{sen} \theta = 0 \quad (3.64)$$

A Hamiltoniana também se altera devido à presença da força externa, resultando em (3.65), sendo a nova configuração do sistema em função das modificações das variáveis  $(\theta, \dot{\theta})$  sujeitas a ação da força externa (perturbação).

$$H_1(Q, P) = H(q, p) + \frac{\partial G}{\partial t} \leftrightarrow H_1(\theta, \dot{\theta}) = H(\theta, p) + \frac{\partial F_{ext}}{\partial t} = \frac{p^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos \theta) + \beta l \dot{\theta} \quad (3.65)$$

Agora, inicia-se o processo de estudo das perturbações em torno da força perturbativa e observa-se que, se  $\beta/m = 0$  em (3.64), as Lagrangeanas (3.32) e (3.64) são equivalentes já que não houve a ação de nenhuma força externa.

Se  $\lambda = 0$ , não há força externa, então a solução é conhecida das condições iniciais, e para este caso,  $\psi_0 = 1$ , resultando em (3.66). Por outro lado, caso o parâmetro seja diferente de zero ( $\lambda = 1$ ), resulta em (3.67), com os termos das funções de ondas ( $\psi_0 \psi_1$ ) separados.

$$\lambda = 0; H_0 = E_0 = \frac{p^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos \theta) \quad (3.66)$$

$$\lambda = 1; (H_0 - E_0)\psi_1 = (H_1 - E_1)\psi_0 \quad (3.67)$$

Com a utilização de (3.59), a solução da função de onda ( $\psi_1$ ) passa a ser dada por (3.68), onde se considera apenas uma perturbação [GRIFFITHS, 2016].

$$\psi_1 = c_0 \psi_0 \quad (3.68)$$

Seguindo os passos de (3.60) e (3.61), obtém-se (3.69) que é a energia modificada pelo fator de perturbação ( $\lambda = \beta/m$ ) na Hamiltoniana, e (3.70) é uma forma alternativa para representá-la.

$$E_1 = H_1 \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = \left[ \frac{p^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos \theta) + \beta l \ddot{\theta} \right] \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle \quad (3.69)$$

$$E_1 = \left( \frac{p^2}{2} + \frac{g}{l}(1 - \cos \theta) \right) \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle + \frac{\beta}{m} \frac{\ddot{\theta}}{l} \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle \quad (3.70)$$

A primeira parte de (3.70) é a Hamiltoniana ( $H_0$ ) cuja solução é conhecida, e a segunda parte considera o parâmetro de perturbação, ou seja:

$$\lambda = \frac{\beta}{m} \cong 1, H_1 = H_0 + \frac{\ddot{\theta}}{l} \quad (3.71)$$

Devido a perturbação, a energia Hamiltoniana do sistema já não é mais conservada e neste caso tende ao estado inicial em torno dos pontos  $(0, \pm 2\pi)$ .

### c) Um Simples Gerador Síncrono

Usando os mesmos parâmetros básicos do exemplo do sistema com gerador não perturbado, ou seja, com as energias cinética e potencial do gerador dadas por (3.40) e (3.41), aqui este sistema é submetido a uma pequena perturbação dada pela variação do seu ângulo (3.72).

$$(\Delta \delta) = \delta_1 - \delta_0 \quad (3.72)$$

Com estas informações, as energias cinética ( $K$ ) e potencial ( $U$ ) passam a ser dadas por:

$$\begin{cases} K = \frac{M\bar{\omega}^2}{2} \\ U = P_m - P_e \text{sen}(\Delta\delta) \end{cases} \quad (3.72)$$

Usando (3.72), se chega a (3.73) que representa a função Lagrangeana do sistema-gerador, e dada por (3.74) na sua forma expandida a partir de (3.10). Note que ( $\bar{\omega} \equiv \dot{\delta}$ ) corresponde a variação da velocidade angular do gerador.

$$L(\Delta\delta, \bar{\omega}) = \frac{M\bar{\omega}^2}{2} - [P_m + P_e \text{sen}(\Delta\delta)] \quad (3.73)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{\omega}} \left[ \frac{M\bar{\omega}^2}{2} - P_m - P_e \text{sen}(\Delta\delta) \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial \delta} \left[ \frac{M\bar{\omega}^2}{2} - P_m - P_e \text{sen}(\Delta\delta) \right] = 0 \quad (3.74)$$

A Hamiltoniana (inicial) do sistema, ou seja, sem variação do ângulo, é representada por (3.73) que corresponde a Energia total do gerador na condição de não perturbado.

$$H_0(\delta_0, \omega_0) = \frac{M\omega_0^2}{2} + [P_m - P_e \text{sen}\delta_0] \quad (3.75)$$

Note que há diferença do caso do pêndulo simples com força externa, pois o pêndulo se modifica somente em função da força de amortecimento no meio viscoso. Aqui, com a variação do ângulo, os termos correspondentes as energias cinética e potencial da Hamiltoniana variam, e com base em (3.49), onde o termo  $\partial G/\partial t$  é responsável por considerar a perturbação ( $\Delta\delta$ ), assumindo  $\partial \dot{q}/\partial \dot{Q} = \partial q/\partial Q$ . A Força externa é simplesmente a Hamiltoniana modificada expressa em termos das transformações canônicas ( $Q, P$ ). Com o gerador submetido a uma perturbação, neste caso a variação do seu ângulo, as transformações das variáveis  $(\delta_0, \omega_0) \rightarrow (\Delta\delta, \bar{\omega})$  são dadas por (3.76). A partir destas análises, (3.49) para o estado perturbado passa a ser dada por (3.77) e (3.78). O sistema Hamiltoniano representado por (3.76) – (3.78) é autônomo, ou seja, não depende diretamente do tempo, mas pode variar ao longo de um determinado período.

$$\frac{\partial G}{\partial t} = H(q(Q), p(Q, P)) = H(\delta_0(\Delta\delta, t), \omega_0(\Delta\delta, \bar{\omega}, t)) \quad (3.76)$$

$$H_1 = H(\delta_0, \omega_0) + H(\delta_0(\Delta\delta, t), \omega_0(\Delta\delta, \bar{\omega}, t)) \quad (3.77)$$

$$H_1(\Delta\delta, \bar{\omega}) = H_0(\delta_0, \omega_0) + \left\{ \frac{M\bar{\omega}^2}{2} + [P_m - P_e \text{sen}(\Delta\delta)] \right\} \quad (3.78)$$



Observa-se que, se  $\delta_1 = \delta_0 = 0$ , as Hamiltonianas (3.75) e (3.78) são equivalentes já que não houve variação do ângulo ( $\lambda = 0, \psi_0 = 1$ ) e a solução é dada por (3.79). Caso ocorra um distúrbio ( $\lambda = 1$ ) que desvie o ângulo do gerador do seu valor inicial, a solução passa a ser dada por (3.80). Trabalhando com (3.60), (3.61) e (3.80), chega-se a (3.81), que representa a energia do gerador sob condição de perturbação.

$$\lambda = 0; H_0 = E_0 = \frac{M\omega_0^2}{2} + [P_m - P_e \text{sen}\delta_0] \quad (3.79)$$

$$\lambda = 1; (H_0 - E_0)\psi_1 = (H_1 - E_1)\psi_0; \quad (3.80)$$

$$E_1 = H_1 \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = H_0 \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle + \frac{M\bar{\omega}^2}{2} + [P_m - P_e \text{sen}(\Delta\delta)] \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle \quad (3.81)$$

Note que, se a variação do ângulo for pequena ( $\Delta\delta = \delta_1 - \delta_0 \cong 0$ ), a Hamiltoniana do sistema perturbado ( $H_1$ ) é dada por (3.82). Por outro lado, caso esta variação seja grande, passa a ser dada por (3.83).

$$E_1 = H_1 = H_0 \rightarrow \frac{M\omega_0^2}{2} + [P_m - P_e \text{sen}\delta_0] \quad (3.82)$$

$$E_1 = H_1 = \frac{M\bar{\omega}^2}{2} + [P_m - P_e \text{sen}(\delta_1 - \delta_0)] \quad (3.83)$$

Portanto, com base nas análises acima, as funções energia do sistema-gerador nos estados não-perturbado e perturbado, são dadas por (3.75) e (3.83), respectivamente. A Tabela 3.1 informa os momentos canônico e conjugado do caso sistema-gerador com perturbação.

Tabela 3.1. Momentos Canônico e Conjugado (sistemas perturbados).

Sistema	Lagrangeana (Momento canônico)	Hamiltoniana (Momento conjugado)
Pêndulo Simples	$p = \frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} + \beta l$	$p = \frac{\partial H(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} + \beta l$
Gerador	$p = \frac{\partial L(\Delta\delta, \bar{\omega})}{\partial \bar{\omega}} = M\bar{\omega}$	$p = \frac{\partial H(\Delta\delta, \bar{\omega})}{\partial \bar{\omega}} = M\bar{\omega}$

### 3.5 COMENTÁRIOS FINAIS

A partir do formalismo Lagrangeano, foram desenvolvidas as energias potencial ( $K$ ) e cinética ( $U$ ) de dois sistemas dinâmicos não-perturbado e perturbados (pêndulo e gerador simples) com base no formalismo Hamiltoniano. Com base nessas investigações, observa-se que o formalismo Lagrangeano pode apresentar condições para analisar o problema da estabilidade transitória angular. Entretanto, o formalismo Hamiltoniano tende a ser mais eficiente e robusto, principalmente pelo fato da Hamiltoniana representar a energia total do sistema. Com base nisso, este formalismo vai ser utilizada para desenvolver a função energia (próximo capítulo) destinada à análise de estabilidade transitória angular, de acordo com os critérios de estabilidade de Lyapunov [LYAPUNOV, 1992; LYAPUNOV, 1966; LASALLE, 1961; ANDERSON, 1990].

# Capítulo 4

## FUNÇÃO ENERGIA HAMILTONIANA PARA ANÁLISE DE ESTABILIDADE TRANSITÓRIA

---

*Este capítulo introduz a aplicação do formalismo Hamiltoniano para a construção da função energia destinada a análise direta de estabilidade transitória cujos critérios de estabilidade se baseiam em Lyapunov.*

### 4.1 CRITÉRIOS DE LYAPUNOV PARA A FUNÇÃO ENERGIA HAMILTONIANA

Os sistemas elétricos de potência têm como objetivo principal atender a demanda de potência e energia requerida pelos consumidores dentro de limites estabelecidos de tensão e frequência [KUNDUR, 2004]. A necessidade por energia elétrica exige a construção de usinas de geração, que dependendo da distância para os centros de carga, implica na necessidade de se construir longas linhas de transmissão. Estes sistemas devem ser capazes de operar satisfatoriamente em regime permanente e quando submetido a perturbações (pequenas e grandes amplitudes) de forma garantir segurança, confiabilidade e qualidade no fornecimento de energia elétrica aos seus consumidores. Um dos problemas que merece bastante atenção neste sentido é a manutenção do sincronismo entre os geradores síncronos após um distúrbio no sistema, conforme introduzido no Capítulo 2. Neste capítulo também foram apresentadas as duas classes de métodos normalmente usadas nestas análises, classificadas como indiretas e diretas. Neste trabalho, como já informado, o interesse está na classe de métodos diretos.

Condições de estabilidade são essenciais em estudos envolvendo sistemas dinâmicos representados por (4.1). Supondo a existência de estado de equilíbrio  $x_0$ , então a solução é conhecida e é dada por (4.2).

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.1)$$

$$f(x_0) = 0 \quad (4.2)$$

A função energia Hamiltoniana desenvolvida neste trabalho para análise direta de problemas de estabilidade transitória angular necessita de critérios pré-estabelecidos para avaliar o estado (estável ou instável) do sistema sob análise, neste caso dos geradores

síncronos. Por se tratar de uma investigação inicial fazendo uso do formalismo Hamiltoniano para este fim, a função energia Hamiltoniana usa critérios de Lyapunov, cujo teorema é o seguinte [LYAPUNOV, 1966; LYAPUNOV, 1992]: *se a derivada temporal da energia ( $dE/dt = \dot{E}(x)$ ) de um determinado sistema for negativa para cada estado  $x$ , exceto para  $x_0$  que corresponde ao estado de equilíbrio, então a energia  $E(x)$  diminuirá continuamente até atingir  $E(x_0)$ , que é o valor mínimo de energia.*

Com base em Lyapunov, a solução  $x_0 = 0$  de (4.1) é estável e se encontra na origem caso exista uma função escalar  $E(x)$  que satisfaça as seguintes condições:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ E(x) > 0 \\ \dot{E}(0) = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \dot{E}(x) \leq 0 \\ \dot{E}(x) = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

As condições acima podem ser verificadas sem a necessidade de integração numérica de (4.1), sendo necessário que a energia total do sistema seja decrescente no tempo, ou seja, garantir que a sua derivada temporal  $\dot{E}(x)$  seja negativa (exceto nas condições iniciais  $x_0$ ).

O método de Lyapunov para estabilidade angular transitória de sistemas elétrico de potência consiste nas seguintes etapas principais [CHIANG, 2011; LASALLE, 1961]:

- i- Estimção da condição estável em torno do ponto inicial  $x_0$  para a configuração pós-falta do sistema;
- ii- Construção da função Lyapunov  $E(x)$  para o estado pós-falta do sistema, com base na soma das energias cinética e potencial;
- iii- As EDAs que descrevem o sistema no instante da falta são integradas até o instante da sua eliminação. Calcula-se o valor da função de Lyapunov de acordo com as condições de contorno;
- iv- Sob condições de falta, calcula-se o valor crítico da função Lyapunov -  $E_{cr}$ .

Caso o valor da função energia no instante de eliminação da falta ( $E_{cl}$ ) for menor ou igual ao valor crítico, ou seja  $E_{cl} \leq E_{cr}$ , o sistema é dito estável (caso contrário, é instável). Este é o cerne do método de Lyapunov considerado nesta pesquisa, no qual a função

candidata ( $E(x)$ ) que satisfaz as condições estabelecidas por (4.3) e (4.4) deve admitir as derivadas parciais contínuas e a temporal ( $\dot{E}(x)$ ) [LASALLE, 1961; CHIANG, 2011].

## 4.2 ASPECTOS CONCEITUAIS DO FORMALISMO HAMILTONIANO INERENTES A FUNÇÃO ENERGIA

A mecânica Hamiltoniana fornece uma forma geral e flexível para investigações estruturais estáticas e dinâmicas de um sistema dinâmico, com vasta aplicação em diferentes áreas da engenharia e da ciência, como por exemplo, em eletrodinâmica clássica, mecânica quântica, termodinâmica, relatividade restrita/geral e em outras áreas [SAKURAI, 1994; GOLDSTEIN, 2001; COURANT, 1954]. Através do formalismo Hamiltoniano, aplicável em sistemas conservativos e não dissipativos [GOLDSTEIN, 2001] é possível solucionar uma série de problemas não solucionados por outros meios, como por exemplo, campos vetoriais da gravitação quântica e o tensor de Einstein para teoria de relatividade geral [LEMOS, 2004]. Uma das propriedades deste formalismo, como introduzido no Capítulo 3, é que este pode ser usado por métodos baseados na teoria da perturbação, como por exemplo em investigações envolvendo movimentos em sistemas complexos (teoria ergódica, mecânica estatística), como resumido no diagrama de fluxo da Figura 4.1 [ROBINETT, 2011]. Este diagrama foi modificado (em vermelho) a fim de incluir a atual proposta.

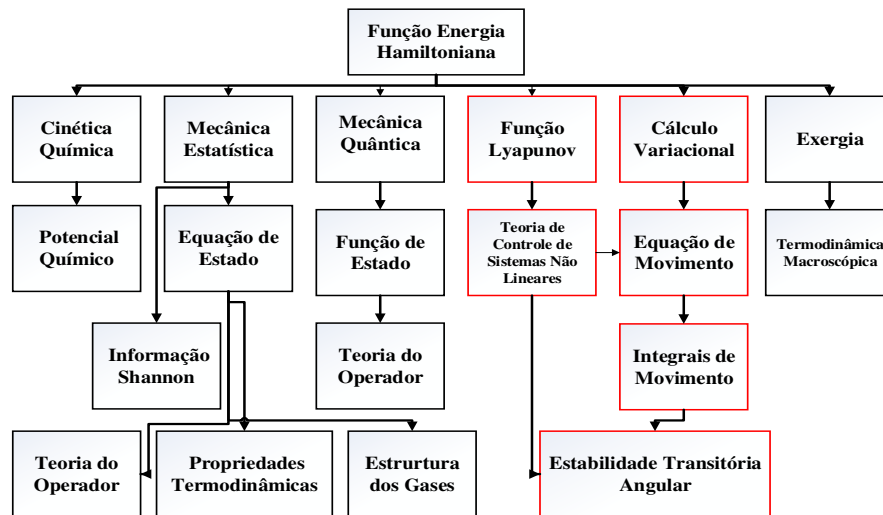


Figura. 4.1. Diagrama de Fluxo do método de Hamilton

Fonte: [ROBINETT, 2011]

### 4.2.1 FUNÇÃO ENERGIA HAMILTONIANA

Como já informado e mostrado nos simples exemplos do Capítulo 3, por se tratar de uma proposta inicial, a primeira versão do método é desenvolvida considerando o modelo clássico de gerador e as variáveis de interesse para o formalismo Hamiltoniano o seu ângulo ( $\delta$ ) e a sua velocidade angular ( $\omega$ ). O método de função Lyapunov [PAI, 1981; CHIANG, 2011] resulta na energia do gerador (4.6), onde  $E_k$  é a energia total;  $P_{ek}$  e  $P_{mk}$  correspondem as potências elétrica e mecânica, respectivamente, e  $\delta$  é o ângulo do rotor do gerador- $k$ . Em termos mais específicos, a função Lyapunov pode ser expressa por (4.7) e deve satisfazer as condições de estabilidade de Lyapunov, onde o termo  $f(\delta)$  dado por (4.8) representa uma parcela da energia potencial [CHIANG, 1995].

$$E_k = \int_{\delta_0}^{\delta_1} (P_{ek} - P_{mk}) d\delta_k \quad (4.6)$$

$$V(\delta, \omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N M \omega_k^2 - P_m - f(\delta) \quad (4.7)$$

$$f(\delta) = \sum_{k \neq m}^N V_k V_m B_{km} [\text{sen}(\delta_{km})] \quad (4.8)$$

Se (4.7) for uma função escalar e atender aos critérios de estabilidade de Lyapunov (4.3) – (4.4), então esta pode ser considerada como uma função energia que corresponde a energia total do sistema, neste caso a Hamiltoniana. Com a função energia pré-definida, a análise de estabilidade via critérios de Lyapunov pode indicar duas condições distintas. Se ocorrer uma perturbação em um sistema que reduza o seu nível de energia, este tende a atingir um estado de equilíbrio estável. No entanto, se o seu nível de energia aumentar, o sistema poderá atingir um estado de equilíbrio instável.

Nos estudos de estabilidade transitória angular é importante determinar a existência de condições de equilíbrio. Por exemplo, se um sistema se encontra inicialmente em repouso (velocidade nula), tem-se um estado inicial de equilíbrio. Entretanto, uma perturbação pode alterar este estado inicial e impor movimento ao sistema. Caso o sistema retorne para o estado inicial (neste caso o repouso), ou para muito próximo dele, tem-se um equilíbrio é estável. Caso contrário, ou seja, se o sistema se afastar da condição inicial, o equilíbrio é instável.

Para identificar condições de equilíbrio em um sistema analisado pelo formalismo Hamiltoniano (exemplos no Capítulo 3), dois fatores (variáveis) são muito importantes, sendo estes a sua velocidade e a sua posição nos instantes inicial (pré-perturbação,  $H_0$ ) e final (pós-perturbação  $H_1$ ). No caso de problemas de estabilidade transitória, nesta dissertação, estes fatores são definidos como pontos de operação do gerador. Portanto, as posições e as velocidades são classificadas como variáveis principais do sistema dinâmico [THIRRING, 1991; LEMOS, 2004].

Como visto no Capítulo 3, as variáveis de um sistema Hamiltoniano são representadas por  $(q, p)$ , necessárias para especificar a configuração (estado) do sistema. Como mostrado nos exemplos, o ângulo do rotor ( $\delta$ ) de um gerador síncrono, bem como a sua velocidade angular ( $\omega$ ) foram usados para desenvolver o sistema Hamiltoniano autônomo. É importante ressaltar que a Hamiltoniana pode ser considerada como uma função candidata de Lyapunov se obedecer aos seguintes critérios estabelecidos neste trabalho:

- i- Hamiltoniana é uma função escalar positiva e sua derivada é negativa:

$$\begin{cases} H(q, p) > 0 \\ \frac{dH}{dt} \leq 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

- ii- A função do sistema que é conservativa:

$$\begin{cases} H = \text{constante} \\ \frac{dH}{dt} = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

- iii- A Hamiltoniana é uma função energia dada pela soma das energias cinética e potencial:

$$H(q, p) = K(q, p) + U(q, p) \quad (4.11)$$

Note que os critérios Hamiltonianos seguem os critérios de Lyapunov apresentados em (4.3) e (4.4), portanto, (4.11) pode ser tratada como uma função escalar, mas apenas para sistemas Hamiltonianos autônomos. Para mostrar que a função Hamiltoniana também é uma função energia, considere  $N$ -geradores com as variáveis de interesse sendo os respectivos ângulos ( $\delta_n$ ) e velocidades angulares ( $\omega_n$ ), e assumindo a função Hamiltoniana como sendo a soma das energias cinética ( $K$ ) e potencial ( $U$ ), como dado por (4.12), que por sua vez corresponde a (4.11), considerando neste caso, as variáveis dos geradores.

$$\begin{cases} H(\delta, \omega) = K(\delta, \omega) + U(\delta, \omega) \\ H(\delta, \omega) = \frac{1}{2} M \omega_k^2 + \left[ P_{mec}^k - \sum_{m=1, j \neq m}^N V_j V_m B_{jm} \text{sen}(\phi_{jm}) \right] \end{cases} \quad (4.12)$$

Onde  $k$  corresponde ao gerador,  $j$  a sua barra terminal e  $m$  a barra receptora, como ilustrado na Figura 4.2.

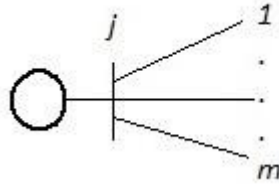


Figura 4.2. Simples sistema elétrico de potência.

Para escrever as equações do sistema autônomo Hamiltoniano dado por (4.12), utiliza-se (3.16) e (3.17), estando os momentos conjugados do gerador- $k$  representados por (4.13).

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \frac{\partial H}{\partial \omega} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \frac{1}{2} M \omega_k^2 \right] = M \omega \\ \dot{\omega} = -\frac{\partial H}{\partial \delta} \rightarrow -\frac{\partial}{\partial \delta} \left[ P_{mec}^k - \sum_{m=1, j \neq m}^N V_j V_m B_{jm} \text{sen}(\phi_{jm}) \right] = \sum_{m=1, j \neq m}^N V_j V_m B_{jm} \left[ \cos(\phi_{jm}) \right] \end{cases} \quad (4.13)$$

A Lagrangeana do sistema (4.12) pode ser dada por (4.14), que é a equação de movimento representada por (4.15). Para mais informações ver (3.10).

$$L = K - U = \frac{1}{2} M \omega_k^2 - P_{mec}^k + \sum_{m=1, j \neq m}^N V_j V_m B_{jm} \text{sen}(\phi_{jm}) = 0 \quad (4.14)$$

$$M \dot{\omega}_k = P_{mec}^k - \sum_{m=1, j \neq m}^N V_j V_m B_{jm} \left[ \cos(\phi_{jm}) \right] \quad (4.15)$$

Substituindo (4.13) e (4.14) na (3.11), tem-se um resultado similar com os resultados encontrados nas referências [PAI, 1989; CHIANG, 2005], como reproduzido em (4.16). Em (4.15) não está incluído o fator de amortecimento  $D$ . Portanto os geradores podem ser representados pelo sistema autônomo Hamiltoniano, pois apresenta características de função energia do sistema elétrico de potência.

$$M \dot{\omega}_k = P_{mec}^k - D_k \omega_k - \sum_{m=1, j \neq m}^N V_j V_m B_{jm} \text{sen}(\phi_{jm}) \quad (4.16)$$



A partir de (4.15), observa-se em relação a função Hamiltoniana [LE MOS, 2004; ROBINETT, 2011] que:

- 1- Possui informações dos geradores com suas respectivas energias cinética e potencial, ou seja, corresponde a energia total do sistema. Devido a isso, pode ser classificada como uma função energia.
- 2- Interage com os critérios da teoria da perturbação (ver 3.56 e 3.57).
- 3- Por ser uma função energia, é possível incorporar os critérios de estabilidade de Lyapunov.

Com as informações desenvolvidas e apresentadas no Capítulo 3 e no presente, a função energia Hamiltoniana é construída com base em (3.81) e (4.12), como passa ser classificada a partir deste ponto, se adequa aos critérios de estabilidade de Lyapunov (4.3) e (4.4). Os processos de construção e solução da função energia Hamiltoniana para um sistema de dois geradores são descritos no Apêndice B.

### **4.3 ANÁLISE DE SUPERFÍCIES DE ESTABILIDADE E INSTABILIDADE VIA MÉTODO FELH**

Nesta seção são realizadas simulações computacionais a fim de se construir superfícies tridimensionais de energia associados aos geradores síncronos. Para tal, usa-se os procedimentos apresentados no Apêndice B. O primeiro sistema-teste foi retirado da referência [CHOO,2006] sendo conhecido como SMIB (acrônimo do inglês Single-Machine Infinite-Bus). Este sistema é testado, por exemplo, nas referências [PAI,1989; LLAMAS,1995; CHIANG,2011] para análise direta de estabilidade transitória angular. Já o segundo sistema-teste é o conhecido WSCC (do acrônimo em inglês *Western System Coordinating Council*) contendo 3 geradores síncronos (G1, G2 e G3) e 9 barras [FOUAD, 1977]. Apesar da sua simplicidade em termos de dimensão e configuração, este sistema-teste tem sido usado para diferentes propósitos, inclusive para a análise direta de estabilidade transitória angular [CHIANG,2011; FOUAD,1992]. O último sistema teste está disponibilizado na referência [IEEE,1992], composto por 17 geradores, 162 barras e 284 ramos. Os dados dos respectivos sistemas-teste podem ser encontrados nas respectivas referências, bem como as simulações, correspondem exatamente as apresentadas nestas referências. Desta forma, é possível obter antecipadamente informações importantes dos estados (estável ou instável) dos geradores na condição pós-falta, e a partir do(s) mais crítico(s), construir as superfícies tridimensionais e analisa-las.

### 4.3.1 ASSOCIANDO CORES AOS NÍVEIS DE ENERGIA HAMILTONIANA DOS GERADORES

Antes de proceder com as simulações, uma vez que os resultados são apresentados na forma de superfícies tridimensionais [EISBERG, 1985; ROBINETT, 2011], e a fim de orientar a interpretação dos resultados, cores foram associadas aos estados (estável ou instável) dos geradores. Por exemplo, a cor azul (diferentes tonalidades) foi estabelecida para estados estáveis e a vermelha (diferentes tonalidades) para estados instáveis. Esses estados são definidos com base nos resultados das simulações associadas as respectivas referências. Em resumo, se o gerador apresentar estado estável, a tonalidade azul é predominante. Por outro lado, caso seja instável, a tonalidade vermelha predomina.

### 4.3.2 SISTEMA TESTE 1

O diagrama unifilar do sistema-teste 1 está ilustrado na Figura 4.3. Para a construção das superfícies tridimensionais, dois casos foram simulados para a mesma falta, ou seja, curto circuito trifásico aplicado no instante  $t = 0^+$  em uma das linhas do sistema-teste [CHOO,2006], eliminado com a abertura desta linha em: a)  $t = 0.04s$  e, b)  $t = 0.05s$ . O gerador está representado pelo modelo clássico e não há nenhum tipo de sistema de controle.

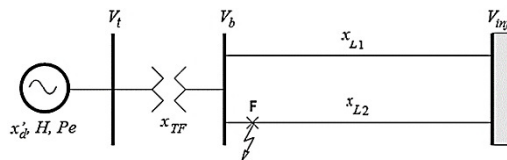
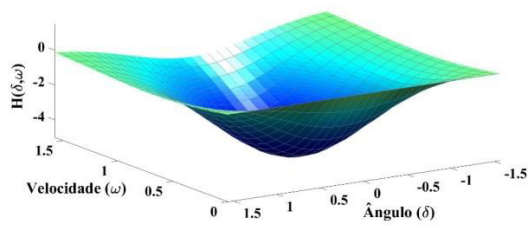
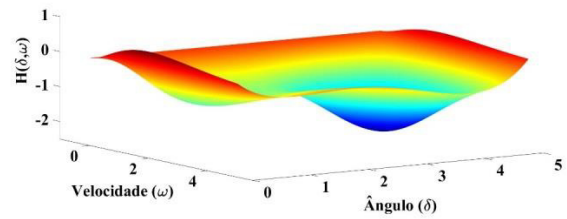


Figura 4.3. Sistema-Teste 1  
Fonte: [CHOO, 2006]

Com a falta eliminada em  $t = 0.04s$ , como pode ser comprovado na referência [CHOO, 2016], o estado do gerador na condição pós-falta é classificado como criticamente estável. Neste caso, o comportamento do ângulo do rotor do gerador é oscilatório amortecido, tendendo a uma condição de equilíbrio em regime-permanente. Por outro lado, quando a falta é eliminada em  $t = 0.05s$ , como também pode ser comprovado na referência [CHOO, 2016], o estado do gerador na condição pós-falta é classificado como instável, pois a perda de sincronismo é inevitável. Para estes casos, foram construídas as superfícies tridimensionais do gerador (Figura 4.4 a - b) onde pode se observar que as superfícies são diferentes. Para o caso estável, tem-se que  $H_1 \simeq H_0$ , e o seu estado pós-perturbação tende ao estado inicial de equilíbrio. Já para o caso instável, a superfície é deformada uma vez que  $H_1 \neq H_0$ .



a) Falta eliminada em  $t = 0.04s$



b) Falta eliminada em  $t = 0.05s$

Figura 4.4. Superfície tridimensional de energia do gerador – Sistema-Teste 1

### 4.3.3 SISTEMA-TESTE 2

O sistema usado aqui é o conhecido WSCC (Figura 4.5), com três geradores representados pelo modelo clássico (sem nenhum tipo de sistema de controle), nove barras, três transformadores e seis ramos de transmissão. Os dados dos parâmetros das linhas de transmissão e dos transformadores estão em por unidade (p.u.). Os modelos das cargas A, B e C são do tipo impedância constante.

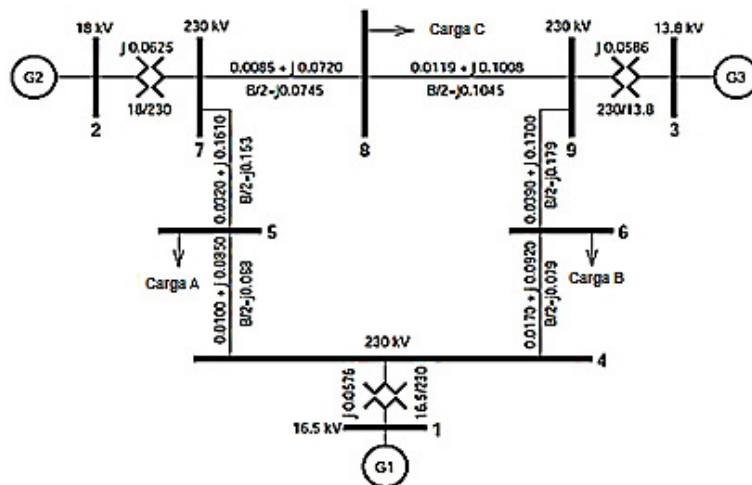


Figura 4.5. Sistema-Teste II (configuração original)  
Fonte: [FOUAD,1977]

Duas simulações foram realizadas, todas a partir da configuração inicial do sistema, ou seja, com todas as linhas inicialmente em operação. A falta consistiu na aplicação de um curto-circuito trifásico na Barra 5 no instante  $t = 0^+$ . Na primeira simulação, as superfícies tridimensionais de energia dos geradores G1, G2 e G3 foram construídas durante o período da falta, como mostrado na Figura 4.6 (a)-(c), onde é possível notar que as superfícies dos geradores apresentam características distintas. Como os geradores G1 e G2 são os mais próximos eletricamente da falta, as suas superfícies apresentam tonalidade mais avermelhada.

Por outro lado, o gerador G3 por estar mais distante do local da falta, a sua superfície a tonalidade mais azulada.

Uma segunda simulação consistiu em eliminar a falta no instante  $t = 0.103$  s com a retirada de linha entre as barras 5–7, próxima do gerador G2. Este procedimento permite verificar o comportamento dos geradores em função da distância elétrica à falta aplicada (sensibilidade do método). É de se esperar, portanto, que a resposta do método também seja coerente indicando, corretamente, os geradores mais sensíveis a falta. Estes comportamentos ocorrem tanto no período de falta, quanto após a sua eliminação.

A superfície de energia Hamiltoniana dos geradores após a retirada da linha (5 – 7) no instante  $t = 0.103$ s para eliminar o curto-circuito é mostrada na Figura 4.6 (d)-(f). As superfícies associadas as energias dos geradores mostram certos “picos” vermelhos, com a do gerador G2 apresentando características mais adversas, ou seja, maior pico e tonalidade mais avermelhada, como era esperado devido a sua proximidade à falta e a linha eliminada.

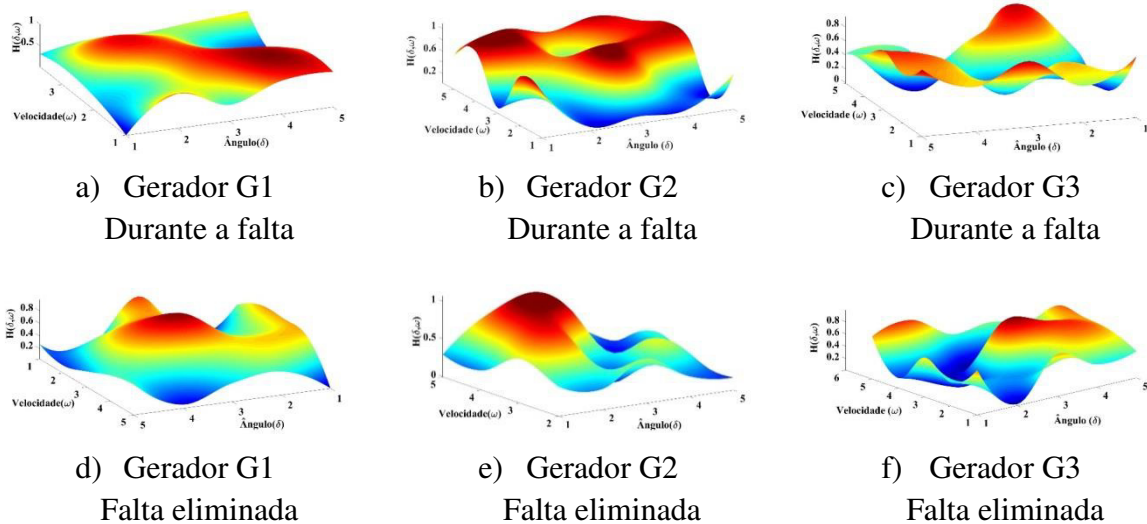


Figura 4.6. Superfície tridimensional de energia dos geradores – Sistema-Teste 2

### 4.3.4 SISTEMA-TESTE 3

Neste último conjunto de simulações, o sistema-teste considerado foi retirado da referência [IEEE,1992], que apesar de publicado em 1992, disponibiliza modelos de sistemas de energia elétrica específicos para análise direta de estabilidade transitória. Este sistema contém 17 geradores e 162 barras. Os parâmetros dos geradores (modelo clássico), bem como os demais dados podem ser encontrados no site [https://www2.ee.washington.edu/research/pstca/dyn17/pg\\_tcadd17.htm](https://www2.ee.washington.edu/research/pstca/dyn17/pg_tcadd17.htm). Os passos seguidos aqui, referentes as simulações, foram os mesmos seguidos na referência supracitada.

Similarmente ao caso anterior, duas simulações foram realizadas, todas a partir da configuração inicial do sistema, ou seja, com todas as linhas inicialmente em operação. Um curto-circuito trifásico foi aplicado em uma barra específica em  $t = 0^+$ . Na primeira simulação, como no caso anterior, as superfícies tridimensionais de energia dos geradores foram construídas durante o período da falta, como mostrado na Figura 4.7 (a)-(f), onde também é possível notar características distintas. Apenas as superfícies dos três geradores mais próximos ao local do curto-circuito (G5, G16 e G12) foram construídas.

É possível notar que os geradores são severamente perturbados pela falta, onde suas respectivas superfícies apresentam deformações severas, conforme visto nas Figura 4.7 (a) – (c). Mesmo com a falta eliminada no instante  $t = 0.354$  s (abertura de linha), os geradores continuam operando em condições adversas, indicando prováveis estados instáveis de operação. Este mesmo comportamento foi encontrado na referência [IEEE, 1992].

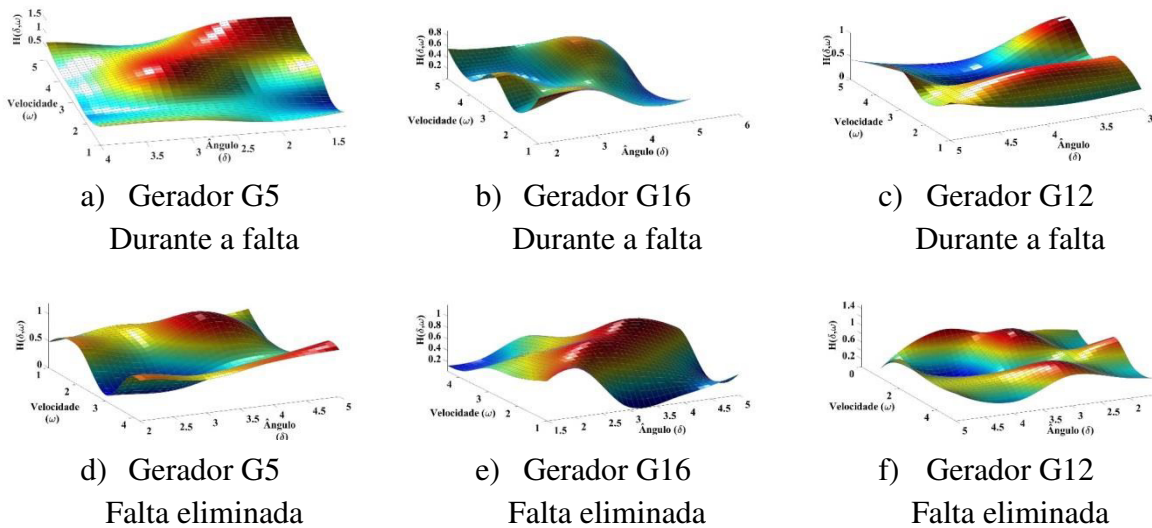


Figura 4.7. Superfície tridimensional de energia dos geradores – Sistema-Teste 3

## 4.4 Comentários Finais

As simulações apresentadas neste trabalho estão baseadas em uma proposta inicial em se usar o formalismo Hamiltoniano em análise direta de estabilidade transitória angular. Foi mostrado, que a função Hamiltoniana também pode ser tratada como uma função energia inicialmente com base nos critérios de estabilidade de Lyapunov. A função energia Hamiltoniana, através das superfícies tridimensionais, capturaram os efeitos da falta sobre os geradores, principalmente devido as visíveis deformações observadas nas respectivas superfícies.

# Capítulo 5

## CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

---

*Este Capítulo apresenta as principais conclusões do trabalho, bem como sugestões para pesquisas futuras com base no formalismo Hamiltoniano para análise direta de problemas de estabilidade transitória.*

### 5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Esta pesquisa desenvolveu uma função energia para análise direta de estabilidade transitória de sistemas elétricos de potência, agregando técnica de Lyapunov e formalismo Hamiltoniano, resultando na função energia Hamiltoniana, e apesar de terem sido encontradas referências, propondo, ou já fazendo uso do formalismo Hamiltoniano em problemas de estabilidade de sistemas elétricos de potência, as contribuições desses trabalhos não estão associadas ao que foi desenvolvido aqui. Além disso, a quantidade de referências encontradas especificamente para este tema foi muito pequena. Apenas três foram encontradas na pesquisa bibliográfica. Isto pode significar a necessidade de expandir a pesquisa bibliográfica, ou há escassez de trabalhos científicos nesta área.

Em relação a potenciais aplicações em sistemas elétricos de potência, o formalismo Hamiltoniano pode ser usado em análise direta de estabilidade transitória, incluindo modelos de geradores mais complexos, sistemas de controle, controladores FACTS e diferentes tipos de carga. Uma das vantagens deste método são as variáveis associadas aos modelos de geradores considerados. Este procedimento pode reduzir o número de equações necessárias e, por conseguinte, reduzir também o esforço computacional, sem perda de precisão nos resultados. Ainda não foram observadas limitações quanto ao seu uso para o problema de interesse. Isto não significa que não existam, mas que as investigações devem continuar. Por outro lado, em termos de qualidades, observou-se que:

- A estrutura completa do sistema é mantida, ou seja, não são feitas simplificações que resultem em perda de informações e em resultados incorretos;
- Aplicada em sistemas multi-máquinas;
- Qualquer tipo de carga, ou de equipamento de controle, pode ser considerado;

- Apenas variáveis importantes e inerentes a cada modelo são consideradas, reduzindo as estruturas das equações;
- Capaz de gerar superfícies tridimensionais de energia durante e após a falta;
- Não são necessárias estimativas iniciais, evitando que a solução esteja incorreta devido à dificuldade em se estimar valores iniciais adequados;
- Apresenta elevada sensibilidade em função da amplitude, localização e duração do tempo de falta;
- A inclusão de novos modelos não requer grande esforço, uma vez que apenas as variáveis associadas a cada modelo são consideradas para se construir uma nova função energia;
- Não requer a solução numérica de equações diferenciais, ou seja, simulações no domínio do tempo não são necessárias em nenhuma parte da análise;
- Há indicativos de que o formalismo Hamiltoniano possa ser usado para analisar outras formas de estabilidade, como a de tensão e a angular de pequeno-sinais;
- Pode ser melhorado e fazer uso apenas do formalismo Hamiltoniano, sem a necessidade de agregar outros métodos de energia.

## 5.2 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Apesar dos resultados preliminares, analisar problemas de estabilidade transitória em sistemas reais de grande porte através de superfícies tridimensionais, pode não ser uma forma adequada sob o ponto de vista de praticidade e de custo computacional. Sistemas reais podem conter milhares de barras e de geradores, portanto, gerar superfícies como as do Capítulo 4 para estudos de estabilidade, diga-se, é praticamente impossível para sistemas com estas dimensões. Ainda, informações qualitativas sob a condição de estabilidade do sistema obtidas por meio de superfícies são muito restritas. O ideal é, gerar informações que indiquem qualitativamente, sem a necessidade de recorrer inicialmente à superfícies tridimensionais ou bidimensionais, a condição inicial e final (estável ou instável) de cada gerador. A partir destas informações, o usuário poderá identificar os geradores mais, e menos críticos sob o ponto de vista de estabilidade transitória, e gerar as superfícies desejadas com base nos geradores de interesse para aprimorar a análise. Portanto, para melhorar a eficiência da proposta para estas limitações, e outras desta primeira versão, ficam como sugestões para trabalhos futuros:

- Desenvolvimento de função energia baseada apenas no formalismo Hamiltoniano, ou seja, sem incluir critérios de estabilidade de Lyapunov, por exemplo;

- Obtenção de índices qualitativos que indiquem o estado pós-falta do gerador (estável ou estável);
- Investigar possível obtenção do tempo crítico de abertura;
- Consideração de modelos de geradores mais complexos, bem como de sistemas de controle (p.ex., AVR e PSS);
- Implementação de controladores FACTS;
- Testar novos tipos de cargas, inclusive dinâmicas, como motores de indução;
- Metodologia para identificar sem a necessidade de recorrer a qualquer tipo de superfície, os geradores mais, e menos críticos sob ponto de vista de estabilidade transitória.



# APÊNDICE A

## FUNÇÃO DE ONDA

Para sistemas perturbados, considera-se:

$$H_0\psi_1 + H_1\psi_0 = E_0\psi_1 + E_1\psi_0 \quad (\text{A.1})$$

A solução da função de onda perturbada ( $\psi_1$ ) é uma combinação linear em torno das condições iniciais:

$$\psi_1 = \sum_n c_n \psi_0 \quad (\text{A.2})$$

Multiplicando os dois lados de (A.1) por  $\psi_0$ , tem-se o produto interno ( $\langle \rangle$ ) demonstrado por:

$$(\psi_0)(H_0\psi_1) + (\psi_0)(H_1\psi_0) = (\psi_0)(E_0\psi_1) + (\psi_0)(E_1\psi_0) \quad (\text{A.3})$$

Para simplificar o cálculo de (A.3), esta pode ser representada por [GRIFFITHS, 2016]:

$$\langle \psi_0 | H_0 | \psi_1 \rangle + \langle \psi_0 | H_1 | \psi_0 \rangle = E_1 \langle \psi_0 | \psi_1 \rangle + E_0 \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle \quad (\text{A.4})$$

Se a função de onda perturbada é solucionada em torno das condições iniciais da função de onda não perturbada, então, substituindo (A.2) em (A.4), resulta em:

$$(H_0) \langle \psi_0 | \psi_1 \rangle + (H_1) \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = (E_1) \langle \psi_0 | \psi_1 \rangle + (E_0) \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle \quad (\text{A.5})$$

$$c_n (H_0) \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle + \langle \psi_0 | (H_1) | \psi_0 \rangle = c_n (E_1) \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle + (E_0) \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle \quad (\text{A.6})$$

As energias e Hamiltonianas relacionadas ao fator não perturbado são conservativas, logo,  $H_0 = E_0 = \text{constante}$ , ou seja:

$$E_1 \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | H_1 | \psi_0 \rangle \quad (\text{A.7})$$

Para  $\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = 1$ ,

$$E_1 = \langle \psi_0 | H_1 | \psi_0 \rangle \quad (\text{A.8})$$

# APÊNDICE B

## FUNÇÃO ENERGIA HAMILTONIANA DE DOIS GERADORES (SISTEMA SEM PERDAS ATIVAS)

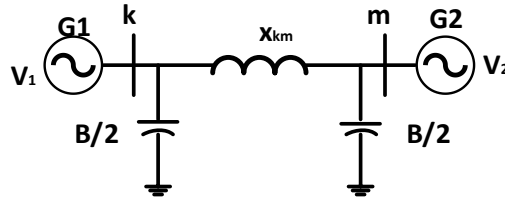


Figura B.1. Representação ilustrativa de um sistema com dois geradores e duas barras ( $k=1$  e  $m=2$ ) para um sistema sem perdas (resistência nula)

- 1) Energias cinética ( $K_{G1}$ ) e potencial ( $U_{G1}$ ) do Gerador G1:

$$K_{G1} = \frac{1}{2} M_1 \omega_1^2 \quad (B.1)$$

$$U_{G1} = P_{G1mec} - V_1 V_2 B_{12} \text{sen}(\delta_1 - \delta_2) \quad (B.2)$$

- 2) Lagrangeana do Gerador G1.

$$L_{G1} = \frac{1}{2} M_{G1} \omega_{G1}^2 - [P_{G1mec} - V_1 V_2 B_{12} \text{sen}(\delta_1 - \delta_2)] \quad (B.3)$$

Resolvendo (B.3) para encontrar a equação de Lagrange (equação de movimento do gerador G1):

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega_{G1}} \left[ \left( \frac{1}{2} M_{G1} \omega_{G1}^2 \right) - P_{G1mec} + V_1 V_2 B_{12} \text{sen}(\delta_1 - \delta_2) \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial \delta_{G1}} \left\{ \frac{1}{2} M_{G1} \omega_{G1}^2 - P_{G1mec} + V_1 V_2 B_{12} \text{sen}(\delta_1 - \delta_2) \right\} = 0 \quad (B.4)$$

$$M_1 \dot{\omega}_1 - V_1 V_2 B_{12} \cos(\delta_1 - \delta_2) = 0; \quad M_1 \dot{\omega}_1 = V_1 V_2 B_{12} \cos(\delta_1 - \delta_2) \quad (B.5)$$

A Hamiltoniana inicial do sistema (sem perturbação) é representada por (4.23) que é a Energia total dos geradores. Com o gerador no estado inicial<sup>1</sup>:

<sup>1</sup> “0” indica estado inicial (sem perturbação) e “F” indica estado final (pós-perturbação)

$$H_{G1}^0(\delta_{G1}^0, \omega_{G1}^0) = \frac{1}{2} M_{G1} (\omega_{G1}^0)^2 + P_{G1mec} - V_1 V_2 B_{12} \text{sen}(\delta_1 - \delta_2) \quad \text{B.6)}$$

Os momentos canônico e conjugado são, respectivamente:

$$p_{G1} = \omega_{G1} = \frac{\partial L(\delta_{G1}^0, \omega_{G1}^0)}{\partial \omega_{G1}} = M_{G1} \omega_{G1}^0, \quad p_{G1} = \omega_{G1} = \frac{\partial H(\delta_{G1}^0, \omega_{G1}^0)}{\partial \omega_{G1}} = M_{G1} \omega_{G1}^0 \quad \text{B.8)}$$

Sem perturbação, tem-se  $\lambda = 0$  é considerado em (B.8). Caso o sistema seja submetido a uma perturbação, tem-se  $\lambda = 1$  e a função energia Hamiltoniana é representada por (B.9). Neste caso, a Hamiltoniana se modifica em relação ao parâmetro de perturbação (ver 3.72 – 3.77) e (B.9) se altera em função desta variação, pois o termo  $\partial G / \partial t$  passa a ser considerado (B.10).

$$\lambda = 0; H_{G1}^0 = E_{G1}^0 = \frac{M_{G1} (\omega_{G1}^0)^2}{2} + P_{G1mec} - V_1 V_2 B_{12} \text{sen}(\delta_1^0 - \delta_2^0) \quad \text{(B.8)}$$

$$\lambda = 1; (H_{G1}^0 - E_{G1}^0) \psi_F = (H_{G1}^F - E_{G1}^F) \psi_0; \quad \text{(B.9)}$$

$$H(q, p) + \frac{\partial G}{\partial t} \leftrightarrow H_{G1}^F(\Delta \delta_{G1}, \bar{\omega}_{G1}) = H_{G1}^0(\delta_{G1}^0, \omega_{G1}^0) + \left\{ \frac{M_{G1} (\bar{\omega}_{G1}^F)^2}{2} - V_1 V_2 B_{12} \text{sen}(\delta_1^F - \delta_2^F) \right\} \quad \text{(B.10)}$$

Se a perturbação for pequena, a Hamiltoniana do sistema é dada por (B.8). Por outro lado, caso seja grande, passa a ser dada por (B.11), que representa a função energia Hamiltoniana do gerador G1. O mesmo procedimento é aplicado para o Gerador G2.

$$E_{G1}^F = H_{G1}^F \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = H_{G1}^0 \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle + \left[ \frac{M_{G1} (\bar{\omega}_1)^2}{2} - V_1 V_2 B_{12} \text{sen}(\delta_1^F - \delta_2^F) \right] \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle \quad \text{(B.11)}$$

# REFERÊNCIAS

[ABIAD, 1966] A. H. El-abiad and K. Nagappan, "Transient Stability Regions of Multimachine Power Systems," in IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-85, no. 2, pp. 169-179, Feb. 1966.

[ALBERTO, 2009] L. F. C. Alberto and H. D. Chiang. "Controlling unstable equilibrium point theory for stability assessment of two - time scale power system models," IEEE Power and Energy Society General Meeting, July 26 – 30, Calgary, Canada, 2009.

[ANDERSON, 1990] J. L. Anderson, *Newton's First Two Laws of Motion Are Not Definitions*, American Journal of Physics, vol. 58, 1990.

[ARNOLD, 1989] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, vol. 60. New York: Springer-Verlag, 1989, p. 520.

[ATHAY, 1979] T. Athay, R. Podmore and S. Virmani, "A Practical Method for the Direct Analysis of Transient Stability," in IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-98, no. 2, pp. 573-584, March 1979.

[BERGEN, 1981] A. R. Bergen and D. J. Hill, "A Structure Preserving Model for Power System Stability Analysis," in IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-100, no. 1, pp. 25-35, Jan. 1981.

[BESANCON, 1998] G. Besancon and S. Battiloti, "On output feedback tracking control with disturbance attenuation for Euler-Lagrange systems," Proc. 37th IEEE Conf. Decision Control, pp. 3139–3143, 1998.

[BRUNT, 2004] B. Van Brunt, *The Calculus of Variations*. New York: Springer, 2004.

[BRIZARD, 2004] A. J. Brizard "Introduction to Lagrangian and Hamilton Mechanics". Department of Chemistry and Physics, Saint Michael's College, Colchester, 2004.

[BUTKOV, 1968] E. Butkov. "Mathematical Physics", Boston: Addison-Wesley, 1968.

[CHEN, 2005] K. Chen. "Matrix Preconditioning Techniques and Applications". Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

[CHIANGa, 1987] H. D. Chiang, F. Wu, and P. P. Varaiya, Foundations of direct methods for power system transient stability analysis, Institute of Electrical and Electronics Engineers Trans. on Circuits and Systems, 34, No. 2 , pp. 160-173, 1987.

[CHIANGb, 1987] H. D. Chiang, F. Wu and P. Varaiya, "Foundations of direct methods for power system transient stability analysis," in IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 34, no. 2, pp. 160-173, Feb 1987.

[CHIANG, 1988] H. D. Chiang, M. W. Hirsch, and F. F. Wu, "Stability Regions of Nonlinear Autonomous Dynamical Systems," IEEE Trans. Autom. Control, vol. 33, no. 1, pp. 16-27, Jan. 1988.

- [**CHIANG, 1989**] H. D. Chiang and J. S. Thorp, Stability regions of nonlinear dynamical systems: a constructive methodology, IEEE Transactions on Automatic Control, 34, No. 12 (1989), 1229-1241.
- [**CHIANG, 1994**] H. D. Chiang, F. F. Wu, and P. P. Varaiya. "A BCU method for direct analysis of power system transient stability," IEEE Trans. Power Syst. 8 (3): 1194 – 1208, 1994.
- [**CHIANG, 1995**] H. D. Chiang, C. C. Chu and G. Cauley, "Direct stability analysis of electric power systems using energy functions: Theory, applications and perspectives" Proc. of the IEEE, vol. 3, n. 11, pp. 1497-1529, Nov. 1995.
- [**CHIANG, 1996**] H. D. Chiang. "On - line method for determining power system transient stability," U.S. Patent 5,483, 462, January 9, 1996.
- [**CHIANG, 1999**] H. D. Chiang, C. S. Wang, and H. Li. "Development of BCU classifiers for on - line dynamic contingency screening of electric power systems" IEEE Trans. Power Syst, 14 (2): 660 – 666, 1999.
- [**CHIANG, 2002**] H. D. Chiang , Y. Zheng , Y. Tada , H. Okamoto , K. Koyanagi , and Y. C. Zhou. "Development of an on - line BCU dynamic contingency classifiers for practical power systems" 14th Power System Computation Conference (PSCC), Spain, June 24 – 28, 2002.
- [**CHIANG, 2005**] H. D. Chiang , A. Kurita , H. Okamoto , R. Tanabe , Y. Tada , K. Koyanagi , and Y. Zhou . "Method and system for online dynamical screening of electric power system," U.S. Patent 6,868,311, March 15, 2005.
- [**CHIANG, 2006**] H. D. Chiang, Y. Tada, H. Li, and T. Takazawa, "TEPCO - BCU for online dynamic security assessments of 12,000 - bus power systems," X SEPOPE, May 21 – 25, Florianópolis, Brazil, 2006.
- [**CHIANG, 2009**] H. D. Chiang, H. Li, Y. Tada, T. Takanawa, T. Yamada, A. Kurit, and K. Koyanagi. "Group – based BCU methods for online dynamical security assessments and energy margin calculations of practical power systems," U.S. Patent 7,483,826, January 27, 2009.
- [**CHIANG, 2011**] H. D. Chiang, Direct methods for stability analysis of electric power systems: theoretical foundation, BCU methodologies, and applications. N.J: John Wiley & Sons, 2011.
- [**CHIANG, 2015**] H. D. Chiang, and L. F. C. Albeto, "Stability Regions of Nonlinear Dynamical Systems - Theory, Estimation, and Applications" . 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, vol. 1, pp. 500, 2015.
- [**CHOO, 2006**] Y.C. Choo, K.M. Muttaqi and M. Negnevitsky, "Transient Stability Assessment of a small power system subjected to large disturbances" in Proc. of Australasian Universities Power Engineering Conf. Melbourne, 2006, pp. 1-5.
- [**COURANT, 1954**] R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, vol. I. New York: Wiley Interscience, 1954.
- [**EISBERG, 1985**] R. Eisberg and R. Resnick. "Quantum Physics", New York: John Wiley, 1985.

- [ELSGOLTS, 1977] Differential Equations and the Calculus of Variations, Moscow: MIR Publishers, 1977.
- [FOUAD, 1977] P. M. Anderson and A. A. Fouad, Power System Control and Stability. Ames: Iowa State University Press, 1977.
- [FOUAD, 1981] A. A. Fouad and S. E. Stanton. "Transient stability of a multimachine power system. Part I: Investigation of system trajectories," IEEE Trans. Power Appar. Syst. PAS - 100: 3408 – 3414, 1981.
- [FOUADA, 1981] A. A. Fouad, "Transient Stability Margin as a Tool for Dynamic Security Assessment" \*. EPRI Report EL-1755, Março 1981.
- [FOUAD, 1991] A. A. Fouad and V. Vittal (). Power System Transient Stability Analysis: Using the Transient Energy Function Method. Englewood Cliffs, NJ: Prentice – Hall, 1991.
- [FOUAD, 1992] A. A. Fouad and V. Vittal, "Power System Transient Stability Analysis Using the Transient Energy Function Method". NJ: Prentice Hall, 1992.
- [GOLDSTEIN, 2001] H. Goldstein, C.P. Poole and J.L. Safko, "Classical Mechanics". 3rd ed. Boston: Addison-Wesley, 2001.
- [GRIFFITHS, 2016] D. J. Griffiths. "Introduction to Quantum Mechanics". Cambridge: Cambridge University Press, 2016.
- [HARRIS, 1963] L.Harris and L. Loeb, *Indroduction to Wave Mechanics*. New York: MacGraw-Hill, 1963.
- [IEEE, 1992] IEEE Committee Report, "Transient Stability Test Systems for Direct Stability Analysis", IEEE Transactions on Power Systems, Vol.7, N.1, pp.37-43,1992.
- [KAKIMOTO, 1978] N. Kakimoto, Y. Ohsawa and M. Hayashi, "Transient Stability Analysis of Electric Power System via Lure-Type Lyapunov Function, Part I and II", Trans. IEE of Japan, vol-98, pp.516, 1978.
- [KUNDUR, 1994] P. Kundur, "Power System Stability and Control", McGraw Hill Text, 1994.
- [KUNDUR, 2004] P. Kundur, J. Parseba and V. Ajjarapu. "Definition and classification of power system stability IEEE/CIGRE joint task force on stability terms and definitions," in IEEE Transactions on Power Systems, vol. 19, no. 3, pp. 1387-1401, Aug. 2004.
- [LANDAU, 1981] L. D. Landau and E. M. Lifschitz. "Mechanics". Oxford: Butterworth, 1981.
- [LASALLE, 1961] J. LaSalle and S. Lefschetz, "Stability by Liapunov's Direct Method with Applications". San Diego: Academic Press, 1961.
- [LE MOS, 2004] N. A. Lemos, Analytical Mechanics, São Paulo: Livraria da Física, 2004.
- [LLAMAS, 1995] A. Llamas, J. D. L. R. Lopez, L. Mili, A. G. Phadke and J. S. Thorp, "Clarifications of the BCU method for transient stability analysis," IEEE Trans. on Power Systems, vol. 10, pp. 210-219, 1995.
- [LYAPUNOV, 1966] A. M. Lyapunov, "Stability of Motion". New York: Academic Press, 1966.

- [LYAPUNOV, 1992] A. M. Lyapunov. "The general problem of the stability of motion". *Int. Journal Control*, vol. 55, n.3, pp.531-534, 1992.
- [MESSIAH, 1970] A. Messiah. *Quantum Mechanics*, New York: North-Holland Publishing Company, vol.1, 1970.
- [MONTAGUE, 1993] B. W. Montague. *Advanced Accelerator Physics. Proceedings, 5th Course of the CERN Accelerator School, Rhodos, Greece, Vol. 1-2, 1993.*
- [NARA, 1984] N. Narasimhamurthi and M. Musavi, "A generalized energy function for transient stability analysis of power systems," in *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 31, no. 7, pp. 637-645, Jul 1984.
- [PAI, 1981] M. A. Pai, *Power System Stability: Analysis by the Direct Method of Lyapunov*, North-Holland Systems and Control Series, Vol. 3, North-Holland Publishing Company, 1981.
- [PAI, 1989] M. A. Pai, "Energy Function Analysis for Power System Stability". Boston: Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [PAVELLA, 1994] M. Pavella and P. G. Murthy. *Transient Stability of Power Systems: Theory and Practice*. New York, Wiley, 1994.
- [PAZ, 2004] A. R. A. Paz. Implementação de um Simulador-Numérico num Programa Computacional de Estabilidade. 2004. O f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Eletricidade) - Universidade Federal do Maranhão, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.
- [PESSANHA, 1997] J.E.O. Pessanha, *Análise do Fenômeno da Estabilidade de Tensão no Domínio do Tempo: Simulação dos Períodos Transitórios e de Longo-Termo*, Tese de Doutorado, PUC-RJ, Departamento de Engenharia Elétrica, 1997.
- [PESSANHA, 2005] J. E. O. Pessanha, O. R. Saavedra, A. R. A. Paz, C. E. P. Poma, *Power System Stability Computer Simulation Using a Differential-Algebraic Equation Solver*. *International Journal of Emerging Electric Power Systems*, v. 4, n.2, p. 1-16, 2005.
- [POLYAKOV, 2015] A. Polyakov, D. Efimov, W. Perruquetti, J. -P. Richard, "Implicit Lyapunov-Krasovskii functionals for stability analysis and control design of time-delay systems", *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 60, no. 12, pp. 3344-3349, 2015.
- [RIBBENS, 1985] M. Ribbens - Pavella and F. J. Evans. "Direct methods for studying dynamics of large - scale electric power systems - A survey," *Automatica* 32: 1 – 21, 1985.
- [ROBINETT, 2011] R. D. Robinett III; D. G. Wilson, *Nonlinear power flow control design: utilizing exergy, entropy, static and dynamic stability, and Lyapunov analysis*. New York: Springer Science & Business Media, 2011.
- [SAKURAI, 1994] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Boston: Addison-Wesley, 1994.
- [SHEN, 2000] T. Shen, R. Ortega, Q. Lu, S. Mei, and K. Tamura, "Adaptive disturbance attenuation of Hamiltonian systems with parameter perturbations and application to power systems," *Proc. 39th IEEE Conf. Decision Control*, vol. 5, pp. 4939–4944, 2000.

- [**TAYLOR, 1992**] C. W. Taylor, "Power System Voltage Stability", McGraw-Hill, 1994.
- [**THIRRING, 1991**] W. Thirring. Classical Mathematical Physics, Berlin: Springer, 1991.
- [**THORNTON, 2004**] S. T. Thornton and J. B. Marion, Classical Dynamics of Particles and Systems. New York: Academic Press, 2004.
- [**THORP, 1989**] J. S. Thorp and S. A. Naqavi, "Load flow fractals," Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control, Tampa, FL, pp. 1822-1827 vol.2, 1989.
- [**TSOLAS, 1985**] N. Tsolas, A. Arapostathis and P. Varaiya, "A structure preserving energy function for power system transient stability analysis," in IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 32, no. 10, pp. 1041-1049, October 1985.
- [**VARAIYA, 1985**] P. Varaiya, F. F. Wu and Rong-Liang Chen, "Direct methods for transient stability analysis of power systems: Recent results," in Proceedings of the IEEE, vol. 73, no. 12, pp. 1703-1715, Dec. 1985.
- [**VITTAL, 1983**] V. Vittal, A. N. Michel and A. A. Fouad. "Power System Transient Stability Analysis: Formulation as Nearly Hamiltonian Systems," in American Control Conf., pp. 668-673, 1983.
- [**WANG, 2003**] Y. Wang, D. Cheng, C. Li and Y. Ge, "Dissipative Hamiltonian realization and energy-based L2-disturbance attenuation control of multimachine power systems," in IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 48, no. 8, pp. 1428-1433, Aug. 2003.
- [**WILLEMS, 1970**] J. L. Willems and J. C. Willems, "The Application of Lyapunov Methods to the Computation of Transient Stability Regions for Multimachine Power Systems," in IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-89, no. 5, pp. 795-801, 1970.
- [**WILLEMS, 1971**] J. Willems,. Direct method for transient stability studies in power system analysis. Automatic Control, IEEE Transactions on. vol. 16. pp. 332 – 341, 1971.
- [**XI, 2002**] Z. Xi, D. Cheng, et al, "Nonlinear decentralized controller design for multimachine power systems using Hamiltonian function method," Automatica, Volume 38, Issue 3, March 2002, Pages 527-534.