PPGMAT - UFMA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Programa de Pós-Graduação em Matemática

MESTRADO EM MATEMÁTICA

Geilson Mendes dos Reis

Análise Quaterniônica: Teoremas e Perspectivas em Derivação e Integração.

São Luís - MA

2015

Geilson Mendes dos Reis

Análise Quaterniônica: Teoremas e Perspectivas em Derivação e Integração.

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor José Antônio Pires Ferreira Marão**.

São Luís - MA

2015

Geilson Mendes dos Reis

Análise Quaterniônica: Teoremas e Perspectivas em Derivação e Integração.

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor José Antônio Pires Ferreira Marão**.

Dissertação aprovada em 3 de fevereiro de 2015, pela **BANCA EXAMINADORA**:

(Orientador) Prof. Dr. José Antônio Pires Ferreira Marão (UFMA)

Prof. Dr. Valeska Martins de Souza (UFMA)

Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto (UNESP)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais Gerson Mariano dos Reis e Maria de Fátima Mendes dos Reis, aos meus irmãos, familiares e amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus familiares pelo apoio que tive durante todos esses anos. Em especial aos meus pais, Gerson Mariano dos Reis e Maria de Fátima Mendes dos Reis, e aos meus irmãos, Gerlan, Gesseária e Gesseane, pois eles foram a minha motivação maior para alcançar os meus objetivos.

Agradeço ao incetivo da minha namorada Keila Nunes Ferreira.

Agradeço ao Professor José Antônio Pires Ferreira Marão pela amizade, incentivo e orientação durante todo o mestrado.

Não poderia deixar de agradecer aos amigos do mestrado com quem convivi durante todo esse período e que estudamos mas também curtimos bastante: Alberto Leandro, Leomar Veras, Jadevilson Cruz, Felipe, Jorge Augusto e Diego Diniz.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

O estudo dos quatérnios tem sido desenvolvido nas últimas décadas e resultados que permitem generalizações a partir daqueles conhecidos da Análise Complexa Clássica puderam ser verificados para esta teoria. Assim, o escopo do presente trabalho é o de apresentá-los além de mostrar outros decorrentes dos anteriores, cabe citar: novos teoremas de derivação e integração quaterniônica.

Palavras-chave: Quatérnios, Análise Complexa Clássica, Derivação e integração quaterniônica.

ABSTRACT

The study of Quaternion has been developed in the last decades and results that allow results acquaintance of the Classic Complex Analysis generalizations they could be verified for that theory. Like this, the mark of the present work is it of presenting such results besides showing new current of the previous ones, it fits to mention: new theorems in quaternionic derivation and integration.

Keywords: Quaternion, Classic Complex Analysis, Quaternionic Derivation and Integration. .

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A história dos Números Complexos até os Quatérnios será aqui exposta de modo cronológico buscando o encadeamento das teorias evidenciado em resultados futuros. Todo o estudo bibliográfico baseou-se nos trabalhos de J. Marão e M. Borges [17] e A. Buchmann [9].

Os Números Complexos surgiram da necessidade de se encontrar raízes quadradas de números negativos. Quando elas apareciam na resolução de uma equação acreditava-se que o problema não tinha solução. O primeiro a efetuar cálculos com raízes de números negativos foi o matemático, físico e médico italiano Gerônimo Cardano (1501-1576). Ele, em meados do século XVI, publicou a obra *Ars Magna*, onde resolve o seguinte problema: *"dividir o número 10 em duas partes cujo produto é 40".* Isso o levava à equação $x(10-x) = -x^2+10x = 40$. Ao resolvê-la, obteve $5+\sqrt{-15}$ e $5-\sqrt{-15}$ como soluções. Em vez de simplesmente rejeitar essas operações, como era feito até então, porque as mesmas continham radicais de números negativos, Cardano resolveu multiplicá-las e obteve $(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = (5)^2 - (\sqrt{-15})^2 = 25-(-15) = 40$.

Em 1637, em uma frase descuidada de René Descartes (1596-1650), intitulou-se as raízes quadradas de valores negativos, como números imaginários: ”*nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias*”.

Em 1833, William Rowan Hamilton (1805-1865), num artigo publicado à Academia Irlandesa, quase três séculos depois da fórmula de Cardano, formalizou a álgebra dos Números Complexos. Ele considerou os Números Complexos $a+bi$ como pares ordenados de números reais (a, b) e definiu as operações de soma e multiplicação da seguinte maneira:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

e

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Os Números Complexos passaram a constituir um adequado método para resolver problemas em diversas áreas. Entretanto, havia uma restrição, eles resolviam esses problemas apenas no plano, e não no espaço. Surgiu então a questão: *é possível ampliar a teoria dos números complexos para operá-la no espaço?*

Posteriormente, Hamilton tentou estender a teoria para três dimensões partindo de um número complexo, $a + bi$, para ternas ordenadas, $a + bi + cj$. Assim, ele deparou-se com entraves ao tentar definir uma regra para multiplicar ternas que também obedecessem a regra já conhecida para multiplicar os Números Complexos. Ele assumiu naturalmente que $i^2 = j^2 = -1$, mas a dificuldade estava em determinar qual deveria ser o valor para os produtos ij e ji.

Em uma carta enviada ao seu filho Archibald em outubro de 1843, fica claro a dificuldade de Hamilton em relação ao problema:
Toda manhã, quando descia para o café, teu irmão William Edwin e você mesmo costumavam perguntar-me "Bem, pai, você já pode multiplicar ternas" A isso eu sempre me via obrigado a responder, com um triste balanço de cabeça, "Não, eu posso somá-las e subtraí-la".

Após um incessante trabalho na tentativa de se obter essa regra, Hamilton teve a ideia de usar quatro números, $a + bi + cj + dk$, que ele denominou Quatérnios. Daí, ele obteve a regra $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Com essa regra de multiplicação construiu uma detalhada teoria de um sistema algébrico não comutativo que constituiu o primeiro exemplo de **anel não comutativo com divisão**.[1]

O desenvolvimento da teoria dos quatérnios estimularam sucessivas investigações. Em 1843, Graves descobriu uma álgebra não associativa com 8 elementos de base também chamada de álgebra dos octônios. Em 1845, os octônios foram redescobertos por Artur Cayley, por causa disto os octônios também são conhecidos como números de Cayley. Em 1864, o físico James Clerk Maxwell aplicou os quatérnios na sua descoberta sobre as equações do eletromagnetismo. Outras teorias surgiram, como por exemplo, a Análise Vetorial introduzida por Josiah Willard Gibbs (1839-1903) e o Cálculo Vetorial introduzido por Oliver Heaviside (1850-1925). Entretanto, a Análise Vetorial e o Cálculo Vetorial, devido a sua grande aplicabilidade na física, fizeram com com que os quatérnios perdessem a preferência na modelagem e estudo de problemas físicos e geométricos. Posteriormente, eles são usados na Teoria da Relatividade Especial de Albert Einstein (1789-1955) com aplicação dos biquatérnios ou quatérnios complexificados.

[1]O conceito citado será definido no Capítulo 2.

Após a concepção e estruturação dos quatérnios por Hamilton, vários trabalhos foram desenvolvidos e os quatérnios foram aplicados nas teorias físicas por longos anos cabe citar: Eletromagnetismo, Mecânica Clássica, Mecânica Quântica e Gravitação. Posteriormente o ensino matemático direcionou o desenvolvimento desta teoria, e cabe citar que surge a Análise Quaterniônica com enfoque em funções quaterniônicas, suas derivadas e integração [17].

Ainda no que tange a Análise Quaterniônica alguns resultados cabem ser mencionados como as condições de Riemann-Cauchy, a derivação e integração [5]. Além disso, analogias com a Análise Complexa Clássica foram desenvolvidas e determinou-se assim, as funções exponencial, trigonométrica e logarítmica, por exemplo [3]. O outro resultado pertinente ao âmbito da analogia com a teoria complexa clássica foi o Teorema de Cauchy [6] e em seguida a formalização das séries quaterniônicas [7]. Resultados pertinentes à analogia com a Análise Complexa Clássica determinados na obtenção da Equação de Laplace a partir das condições de Riemann Cauchy [16]. A Série de Laurent [7] e uma fórmula para a determinação de derivadas com o uso do Teorema Integral de Cauchy [4] foram determinados para fins de desenvolvimento da teoria de modo paralelo à Análise Complexa Clássica.

No desenvolvimento deste trabalho serão mencionados os resultados descritos acima e alguns novos resultados decorrentes da teoria exposta serão mostrados. Sendo assim, o trabalho foi dividido como segue:

1. Noções de Álgebra, onde apresentadas as definições e principais resultados da Álgebra que serão importantes para o bom desencadeamento dos temas aqui tratados;

2. A Álgebra dos Quatérnios mostra, desde a formulação dos Números Quaterniônicos até as principais funções Quaterniônicas e algumas consequências;

3. A Derivação Quaterniônica é introduzida através dos conceitos e resultados apresentados em [5], além de apresentar resultados ainda não explorados na teoria em questão;

4. A Integração resume trabalhos [2], [4] e [6], além de apresentar novos resultados também ainda não explorados na teoria de Funções Quaterniônicas.

Capítulo 1
NOÇÕES DA TEORIA DE GRUPOS E ANÉIS

O estudo da Álgebra em seus conceitos fundamentais será aqui abordado visando bem fundamentar os demais capítulos no que tange a Álgebra e Análise Quaterniônica. Algumas definições e resultados podem ser analisados com detalhes em [12] e [14].

1.1 Teoria de Grupos

Apresentaremos nesta seção algumas definições e teoremas sobre a teoria de grupos.

Definição 1.1.1. *Um conjunto não vazio G forma um grupo se em G está definida uma operação binária $(x, y) \to x * y$ e se essa operação se sujeita aos seguintes axiomas:*
1) Associatividade - $(a * b) * c = a * (b * c)$, quaisquer que sejam $a, b, c \in G$;
2) Existência de elemento neutro - existe um único elemento $e \in G$ tal que $a*e = e*a = a$, qualquer que seja $a \in G$;
3) Existência de simétrico - para todo $a \in G$ existe um único elemento $a' \in G$ tal que $a * a' = a' * a = e$.
Se além disso, ainda for cumprido o axioma da comutatividade, ou seja, $a * b = b * a$, quaisquer que sejam $a, b \in G$, o grupo recebe o nome de grupo comutativo. [1]
O grupo G pode ser indicado apenas por $(G, *)$, onde $*$ indica a operação sobre G.

Exemplo 1.1.2. $\{$*Grupo aditivo dos complexos*$\}$ *Sabemos que, a soma de dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$ é definida por $z + w = (a + c) + (b + d)i$. É simples averiguar que essa operação é associativa e que $0 = 0 + 0 \cdot i$ é elemento neutro dessa operação. Ainda temos que para todo complexo $z = a + bi$, o número complexo $-z = -(a) + (-b)i$ é o seu simétrico.*

Exemplo 1.1.3. $\{$*Grupo multiplicativo dos complexos*$\}$ *Esse grupo é formado pelo conjunto $\mathbb{C}^*$ e a multiplicação usual de números complexos. Sabemos que o produto de dois*

[1]Também chamado de grupo abeliano, homenagem ao matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1809).

números complexos é definido por $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$. *Se os números dados são diferentes de zero, o mesmo acontece com o produto, como se pode constatar. Além disso, essa operação é associativa e comutativa. O elemento neutro é* $1 = 1 + 0i$, *e o inverso de um elemento* $z = a + bi$, *não nulo, é* $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + \dfrac{-b}{a^2 + b^2}i$, *também um número complexo não nulo, sendo* $a \neq 0$ *ou* $b \neq 0$.

Definição 1.1.4. *Seja* $(G, *)$ *um grupo. Diz-se que um subconjunto não vazio* $H \subset G$ *é um subgrupo de* G *se:*

- H *é fechado para a operação* $*$ *(isto é, se* $a, b \in H$ *então* $a * b \in H$*);*

- $(H, *)$ *também é um grupo.*

Teorema 1.1.5. *Seja* $(G, *)$ *um grupo. Para que uma parte não vazia* $H \subset G$ *seja um subgrupo de* G, *é necessário e suficiente que* $a * b'$ *seja um elemento de* H *sempre que* a *e* b *pertencerem a esse conjunto.*

Quando estudamos e analisamos os subgrupos de G estamos interessados em subconjuntos de G que têm propriedades derivadas das de G. Esse teorema é um critério para decidir se um dado subconjunto de um grupo é um subgrupo.

1.1.1 Homomorfismos e Isomorfismos de Grupos

A idéia principal no conceito de isomorfismos de grupos é a de separar os grupos em classes disjuntas tais que as propriedades deduzidas para um particular grupo possam ser transferidas para todos os grupos dessa classe, e apenas para estes, com uma mudança adequada de notações.

Definição 1.1.6. *Um homomorfismo de um grupo* $(G, *)$ *num grupo* $(J, \cdot)$ *é toda aplicação* $f : G \to J$ *tal que, quaisquer que sejam* $x, y \in G$*:*

$$f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$$

Quando o homomorfismo é uma aplicação injetora, então ele é chamado de homomorfismo injetor. E quando a aplicação é sobrejetora, de homomorfismo sobrejetor. No caso em que a aplicação é bijetora temos o conceito de isomorfismo.

Exemplo 1.1.7. *A aplicação* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ *definida por* $f(m) = i^m$ *com as operação usuais é um homomorfismos de grupos. Temos que* $\mathbb{Z}$ *é um grupo aditivo e* $\mathbb{C}^*$ *é um grupo multiplicativo. Como*

$$f(m+n) = i^{m+n} = i^m \cdot i^n = f(m) \cdot f(n)$$

fica provado que se trata de homomorfismo.

Teorema 1.1.8. *Dados* G, J *e* L *grupos. Se* $f : G \to J$ *e* $g : J \to L$ *são homomorfismos de grupos, então o mesmo se pode dizer de* $g \circ f : G \to L$.

Demonstração. Se $a, b \in G$, então:

$$(g \circ f)(ab) = g(f(ab)) = g(f(a)f(b)) = g(f(a))g(f(b)) = (g \circ f)(a)(g \circ f)(b).$$

□

Alguns resultados da Álgebra Linear que são estudados em transformações lineares também são válidos para homomorfismos. Convém observar isso nos itens 1, 3 e 4 abaixo. Sejam G e J grupos e $f : G \to J$ um homomorfismo de grupos. Então:

1) Dados e e u elementos neutros de G e J, respectivamente. Então, $f(e) = u$.

2) Se H é um subgrupo de G, então $f(H)$ é um subgrupo de J.

Uma definição importante que temos é a de núcleo de um homomorfismo, que é o conjunto de todos os elementos de G que são levados no elemento neutro de J. Ele é denotado por $N(f)$ e formalmente definido da seguinte forma:

$$N(f) = \{x \in G | f(x) = u\}.$$

Assim, temos mais dois resultados importantes:

3) $N(f)$ é um subgrupo de G;

4) f é um homomorfismo injetor se, e somente se, $N(f) = e$.

Acima definimos isomorfirmos de grupos, vamos agora ver um exemplo e depois finalizaremos este subitem com um teorema sobre essa aplicação bijetiva.

Exemplo 1.1.9. *A função logarítmica* $log : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *é um isomorfismo de grupos, como podemos constatar abaixo:*

1) $log(xy) = log\, x + log\, y$, *isto é, log preserva as operações envolvidas (a multiplicação de* $\mathbb{R}_+^*$ *e a adição de* $\mathbb{R}$*);*

2) log é uma bijeção.

Teorema 1.1.10. *Se $f : G \to J$ é um isomorfismo de grupos, então $f^{-1} : J \to G$ também é um isomorfismo de grupos.*

Demonstração. Como temos que f é uma aplicação bijetiva, logo f^{-1} também é uma aplicação bijetiva de J em G. □

1.2 Teoria de Anéis

A seguir temos um sistema algébrico que teve suas origens no século XIX e contou com a colaboração de vários matemáticos, entre eles William R. Hamilton com seu trabalho sobre quatérnios.

Definição 1.2.1. *Um conjunto não vazio A é dito um anel, se em A estão definidas duas operações, indicadas por $+$ e $\cdot$ respectivamente, tais que para todos a, b e c em A:*
1) $(A, +)$ é um grupo abeliano;
2) A multiplicação goza da propriedade associativa, isto é:

$$\text{se } a, b, c \in A, \text{ então } a(bc) = (ab)c.$$

3) A multiplicação é distributiva com relação a adição:

$$\text{se } a, b, c \in A \text{ então } a(b + c) = ab + ac \text{ e } (a + b)c = ac + bc.$$

Quando existir um elemento $1 \in A$ tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ para todo a em A, A é denominado anel com elemento unidade.
Se a multiplicação de A é tal que $a \cdot b = b \cdot a$, então A é chamado de anel comutativo.

Exemplo 1.2.2. *O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ com as operações de adição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$ usuais é um anel comutativo com elemento unidade.*

Exemplo 1.2.3. *O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ com a adição e multiplicação usuais é um anel comutativo com elemento unidade. Além disso, observa-se que os elementos de $\mathbb{Q}$, diferente de 0, formam um grupo abeliano com relação à multiplicação. Um anel com esta última propriedade é denominado um* ***corpo****.*

Definição 1.2.4. *Se A é um anel comutativo, então $a \neq 0 \in A$ é dito um divisor de zero se existe um $b \in A$, $b \neq 0$, tal que $ab = 0$.*

Definição 1.2.5. *Um anel comutativo é um anel de integridade se não possui divisores de zero.*

O anel dos inteiros é, naturalmente, um exemplo de anel de integridade.

Definição 1.2.6. *Um anel é dito anel com divisão se os seus elementos não nulos formam um grupo em relação à multiplicação.*

Já vimos anteriormente que um corpo é um anel com divisão comutativo.

Definição 1.2.7. *Dados $(A, +, \cdot)$ um anel e L um subconjunto não vazio de A. Dizemos que L é um subanel de A se:*
(i) L é fechado para as operações que dotam o conjunto A da estrutura de anel;
(ii) $(L, +, \cdot)$ também é um anel com as mesmas operações de A, porém restritas aos elementos de L.

Teorema 1.2.8. *Um subconjunto L não vazio de um anel $(A, +, \cdot)$ é um subanel de A se, e somente se valem as seguintes afirmações:*
(i) Para todo $a, b \in L \Rightarrow a - b = a + (-b) \in L$.
(ii) Para todo $a, b \in L \Rightarrow a \cdot b \in L$.

Demonstração. Provaremos, para fixar ideias, apenas ($\Rightarrow$). Como temos que L é um subanel de A, então para todo $a, b \in L$, temos que $-b \in L$ e $a \in L$. Logo, $a + (-b) = a - b \in L$, pois L é fechado para a operação $+$, e $a \cdot b \in L$ pois L é fechado para a operação $(\cdot)$. $\square$

1.2.1 Homomorfismos e Isomorfismos de Anéis

Vimos, no caso de grupos, que um homomorfismo foi definido como sendo uma aplicação tal que $f(xy) = f(x)f(y)$. Como um anel possui duas operações, temos uma extensão natural dessa fórmula dada a seguir

Definição 1.2.9. *Uma aplicação f do anel A no anel A' é dita um homomorfismo se*
1) $f(a + b) = f(a) + f(b)$
2) $f(ab) = f(a)f(b)$.
para todos $a, b \in A$.

Quando o homomorfismo de anéis é uma aplicação injetora, então ele é chamado de homomorfismo injetor. E quando a aplicação é sobrejetora, de homomorfismo sobrejetor. No caso em que a aplicação é bijetora, temos o conceito de isomorfismo.

Exemplo 1.2.10. *Quaisquer que sejam os anéis A e B, a aplicação $f : A \to B$, $f(x) = 0_B (x \in A)$ é um homomorfismo de anéis. De fato,*
1) $f(a+b) = 0_B = 0_B + 0_B = f(a) + f(b)$;
2) $f(ab) = 0_B = 0_B \cdot 0_B = f(a)f(b)$.

Note que quando ignoramos as multiplicações em ambos os anéis, em um homomorfismo de um anel A em outro A', temos pelo menos um homomorfismo de A em A' quando os consideramos como grupos abelianos em relação às suas respectivas adições. Temos alguns resultados interessantes que vimos na teoria de grupos que também são válidos para a teoria de anéis. Dados A e A' anéis e $f : A \to A'$ um homomorfismo de anéis. Então:
1) Dados e e u elementos neutros de A e A', respectivamente. Então, $f(e) = u$.
2) Se H é um subanel de A, então $f(H)$ é um subanel de A'.

No caso de grupos, dado um homomorfismo, associamos a este homomorfismo um certo subconjunto do grupo que denominamos núcleo do homomorfismo. Como temos que o anel possui duas operações, adição e multiplicação, é natural perguntar: *Qual destas operações deve ser escolhida para ser a base da definição?*
Assim, na definição de um anel arbitrário temos a condição de que os anéis formam um grupo abeliano em relação a adição. A multiplicação do anel é deixada muito mais irrestrita e, de certo modo, muito menos sob o nosso controle que a adição. Em virtude disso é dado ênfase à operação de adição e com ela definimos núcleo de um homomorfismo de anéis.

Definição 1.2.11. *Seja $f : A \to A'$ um homomorfismo de anéis. O núcleo de f, que é o conjunto de todos os elementos de A que são levados no elemento neutro de A' é denotado por $N(f)$ e formalmente definido como segue:*

$$N(f) = \{x \in A | f(x) = 0_{A'}\}.$$

Com essa definição temos mais dois resultados importantes:
3) $N(f)$ é um subanel de A;
4) f é um homomorfismo injetor se, e somente se, $N(f) = 0_{A'}$.

Teorema 1.2.12. *Seja $f : A \to A'$ um isomorfismo de anéis. Então$f^{-1} : A' \to A$ também é um isomorfismo de anéis.*

Demonstração. Como temos que f é um isomorfismo do grupo aditivo A no grupo aditivo A', então f^{-1} é um isomorfismo do grupo aditivo A' no grupo aditivo A. Basta agora provar que f^{-1} preserva as multiplicações.
Dados $c, d \in A'$. Como f é sobrejetora, $c = f(a)$ e $d = f(b)$, para convenientes elementos $a, b \in A$. Logo, $a = f^{-1}(c)$ e $b = f^{-1}(d)$. Portanto,

$$f^{-1}(cd) = f^{-1}(f(a)f(b)) = f^{-1}(f(ab)) = ab = f^{-1}(c)f^{-1}(d)$$

temos que f^{-1} é um isomorfismo de anéis. $\square$

As definições e resultados apresentados neste capítulo serão fundamentais para o bom entendimento dos capítulos seguintes levando em consideração o importante papel da Álgebra no desenvolvimento da teoria quaterniônica. Principalmente pelo fato de a Análise de Quatérnios ser não comutativa, fato que será evidenciado no Capítulo 3.

Capítulo 2

NOÇÕES PRELIMINARES DA ANÁLISE COMPLEXA

A Análise Complexa Clássica possui elementos fundamentais para o desenvolvimento e entendimento da Análise Quaterniônica. Sendo assim, serão apresentados resultados e definições tais como derivada e integral complexa buscando bem fundamentar os próximos capítulos a serem apresentados. Os resultados não demonstrados podem ser lidos em detalhes em [10] e [15].

2.1 Definições Preliminares.

Definição 2.1.1. *Um Número Complexo z é um número da forma $z = a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$. O número a é chamado de parte real de z indicado por $a = Re(z)$ e o b é chamado de parte imaginária de z e indicado por $b = Im(z)$. O conjunto dos Números Complexos é denotado por $\mathbb{C}$.*

Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$ podemos definir as operações soma, subtração, multiplicação e divisão de números complexos da seguinte maneira:

1. $z + w = (a + c) + (b + d)i$;

2. $z - w = (a - c) + (b - d)i$;

3. $z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

4. $\dfrac{z}{w} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$.

Definição 2.1.2. *O conjugado de um número complexo $z = a+bi$ é definido por $\bar{z} = a-bi$. Note que $\bar{z}$ geometricamente é a reflexão de z em relação ao eixo real do plano complexo.*

Definição 2.1.3. *O módulo de um número complexo é definido por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Podemos perceber que geometricamente o módulo é a distância de z até a origem.*

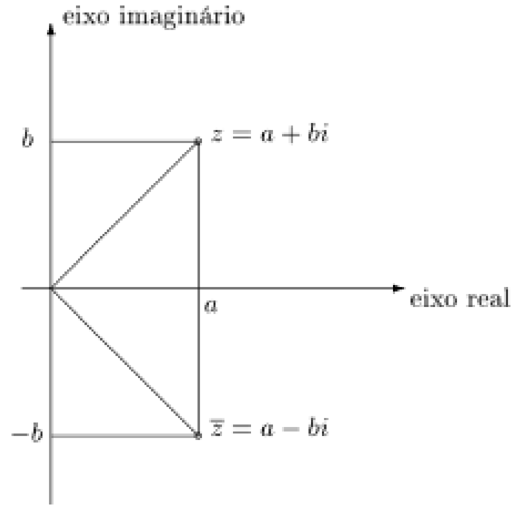

Figura 2.1: O conjugado de um número complexo.

Pela noção de conjugado e módulo de um número complexo podemos determinar z^{-1} da seguinte forma:

$$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

ou seja, $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
A partir dessas definições as seguintes propriedades podem ser facilmente verificadas para os números complexos:

1. $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$;

2. $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$;

3. $|Re(z)| \leq |z|$;

4. $|Im(z)| \leq |z|$;

5. $|z+w| \leq |z| + |w|$.

2.2 Conceitos elementares de topologia nos Números Complexos

O conjunto dos números complexos possuem a mesma topologia do conjunto $\mathbb{R}^2$, isto por causa do isomorfismo entre estes dois conjuntos que associa $z = x + yi$ ao par ordenado (x, y).

Definição 2.2.1. *Fixado* $z_0 \in \mathbb{C}$ *e um número real* $r > 0$, *o conjunto*

$$D_r(z_0) = \{z; |z - z_0| < r\}$$

é chamado de disco aberto de raio r *e centro* z_0.
Designa-se por disco fechado de centro z_0 *e raio* r *e representa-se por* $D_r'(z_0)$ *o conjunto*

$$\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq r\}$$

Definição 2.2.2. *Uma vizinhança de um ponto* z_0 *é o conjunto de todos os pontos para os quais*

$$|z - z_0| < \epsilon$$

Diz-se que z_0 é ponto interior de um conjunto V se existe um disco de centro z_0 todo contido em V, ou seja, V é vizinhança de z_0.
Um conjunto A é dito aberto se todos os seus pontos são pontos interiores, ou seja, se A é vizinhança de cada um de seus pontos.

Exemplo 2.2.3. *O disco aberto é um exemplo de conjunto aberto, bem como uma reunião qualquer de discos abertos.*

O ponto z_0 é aderente a A se qualquer vizinhança de z_0 contém pontos de A.
O fecho do conjunto $A \subset \mathbb{C}$ é o conjunto $\bar{A}$ formado pelos pontos aderentes a A.
Diz-se que o conjunto A é fechado quando todo ponto aderente a A pertence a A, ou seja, $A = \bar{A}$.

Exemplo 2.2.4. *O disco fechado é um exemplo de conjunto fechado, bem como uma interseção qualquer de discos fechados.*

O ponto z_0 é de acumulação de A, se qualquer vizinhança de z_0 contém pontos de A diferente de z_0.
O fecho de um conjunto $A \subset \mathbb{C}$ é obtido acrescentando-se a A os seus pontos pontos de acumulação, ou seja, $\bar{A} = A \cup A'$.
O conjunto aberto é conexo se quaisquer dois de seus pontos podem ser ligados por um arco todo contido no conjunto. Denomina-se região a todo conjunto aberto e conexo.
Entende-se que o conjunto A é limitado, se existe um número positivo K tal que $|z| \leq K$ para todo z em A. Além disso, A é compacto se A é limitado e fechado.
Por fim, a fronteira de um conjunto A é conjunto de pontos z tais que qualquer vizinhança de z contém pontos de A e pontos do seu complementar.

2.3 Funções Analíticas

Antes de definirmos as funções analíticas iremos apresentar os conceitos de função de variável complexa, limite, continuidade e derivada de uma função complexa de variável complexa.

Definição 2.3.1. *(Função Complexa) Dado um subconjunto $A \subset \mathbb{C}$, uma função complexa $f : A \to \mathbb{C}$ associa a cada $z \in A$ um único elemento w no plano complexo.*

O conjunto A é chamado de domínio, $\mathbb{C}$ de contradomínio e

$$f(A) = \{f(a) : a \in A\}$$

o conjunto imagem da função f.
Observa-se que cada elemento da imagem de f é um número complexo, daí

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

em que $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são funções reais de duas variáveis reais x e y, designadas por parte real e imaginária de $f(z)$, respectivamente.

As definições de limite e continuidade de uma função complexa de variável complexa são análogas as de funções reais.

Definição 2.3.2. *Consideremos uma função complexa $f : A \to \mathbb{C}$ e z_0 um ponto de acumulação de A. O limite de f quando z se aproxima de z_0 é L, e escrevemos*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

se dado qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - L| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < |z - z_0| < \epsilon$$

Se existe o limite de f no ponto z_0, então ele é único. Observa-se que as propriedades operacionais de limites de funções complexas é essencialmente a mesma da de funções reais.

Definição 2.3.3. *Seja $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função de uma variável. Dizemos que f é contínua num ponto $z_0 \in A$ se*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Dizemos que f é contínua no conjunto A se ela for contínua em todos os pontos de A.

A análise de f em termos de sua parte real e imaginária, implica que f é contínua em z_0 se e somente se sua parte real e imaginária forem contínuas nesse ponto.

Definição 2.3.4. *Seja f uma função complexa de variável complexa definida num conjunto aberto A e seja $z_0 \in A$. Dizemos que f é diferenciável no ponto $z_0 \in A$, se*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Se o limite existir indicamos o seu valor por $f'(z_0)$ e dizemos que a derivada de f no ponto z_0 é $f'(z_0)$.

Note que as regras de derivação de funções reais permanecem válidas para funções complexas.

Um importante resultado tal qual nas funções reais é que se uma função é diferenciável em z_0, então ela é contínua em z_0. Mas a recíproca não é verdadeira, como podemos constatar pela função $f : z \in \mathbb{C} \to \bar{z} \in \mathbb{C}$ que é contínua e não diferenciável em todos os pontos.

A caracterização de funções de uma variável complexa diferenciáveis é resumida nos resultados que seguem.

Teorema 2.3.5. *(Equações de Cauchy-Riemann) Seja $f : A \to \mathbb{C}$ uma função complexa de variável complexa definida por $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ num conjunto aberto A e $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$. Se f é diferenciável em z_0, então as derivadas parciais de u e v existem e elas satisfazem as equações de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \qquad e \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

Além disso,

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0).$$

A recíproca do Teorema 2.3.5. não é verdadeira. Considere a função $f(x+iy) = |xy|^{\frac{1}{2}}$ para $x + iy \in \mathbb{C}$, onde as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas em $z_0 = 0$, e f não é diferenciável em z_0.

Por outro lado, ela é válida se acrecentarmos a hipótese adicional sobre a função de que as derivadas parciais em relação a u e v existem e são contínuas em z_0.

Definição 2.3.6. *Uma função $f : A \to \mathbb{C}$ é analítica em z_0 se ela é diferenciável em todo disco contendo z_0. Dizemos que f é analítica em A se f é analítica em todos os pontos de A.*

Quando a função é analítica em todos os pontos de $\mathbb{C}$ ela é chamada de inteira.

2.4 Integração complexa

Serão agora expostas algumas definições que serão importantes para o entendimento da teoria de integração de funções de uma variável complexa, além disso, alguns exemplos serão apresentados.

Definição 2.4.1. *Uma curva, um contorno ou caminho entre dois pontos z, w de $A \subset \mathbb{C}$ é uma função contínua*

$$\alpha : [a, b] \to A, a, b \in \mathbb{R},$$

tal que $\alpha(a) = z, \alpha(b) = w$. Desta forma, o ponto z é chamado de ponto inicial, e o ponto w é chamado de ponto terminal e α é o caminho que une os pontos a e b.

Definição 2.4.2. *Seja $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$. Definimos a curva oposta de α como $-\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ por*

$$(-\alpha)(t) = \alpha(a + b - t).$$

Uma curva fechada α é simples quando seus únicos pontos de interseção são os ponto inicial e terminal.

Definição 2.4.3. *Dizemos que duas curvas simples α e β são homotópicas quando uma pode ser transformada na outra por uma sequência de funções contínuas*[1].

Exemplo 2.4.4. *Todos os círculos e elipses são curvas homotópicas. Podemos transformar o círculo de raio 1 e centro 0 no círculo de raio 2 com o mesmo centro pela aplicação*

$$\alpha_r : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ definida por } \alpha_r(\theta) = \left(1 + \frac{1}{r}\right)e^{i\theta}.$$

onde $r \in [1, \infty)$ é real e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Com a noção de homotopia vamos definir o que é uma região simplesmente conexa. Dizemos que um conjunto $A \subset \mathbb{C}$ é uma região simplesmente conexa quando todas as curvas simples em A são homotópicas com um ponto.

Exemplo 2.4.5. *O conjunto $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ é uma região simplesmente conexa.*

[1] Diz-se que a transformação em questão é uma deformação contínua.

2.4.1 Integral Curvilínea

Definição 2.4.6. *Se $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ é um caminho suave e se f é uma função complexa definida e contínua em α, definimos a integral de f sobre α por*

$$\int_\alpha f(z)dz = \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)dt.$$

Exemplo 2.4.7. *Consideremos a circunferência centrada em 2 e raio 1. Uma parametrização para esta curva suave pode ser definida por*

$$\gamma(t) = 2 + e^{it}, t \in [0, 2\pi]$$

. Queremos calcular o valor da integral de $f(z) = \dfrac{1}{z}$ ao longo da curva γ. Note que γ é um caminho fechado. Pela regra da cadeia temos,

$$\gamma'(t) = ie^{it}.$$

Calculando a integral pela definição acima,

$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{2 + e^{it}}dt = 0.$$

Os teoremas 2.4.8. e 2.4.9. caracterizam e mostram propriedades fundamentais da integração complexa.

Teorema 2.4.8. *Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, então*

$$\int_\alpha f(z)dz = \int_\alpha [u(x, y) - v(x, y)dy] + i \int_\alpha [v(x, y) + u(x, y)dy].$$

Teorema 2.4.9. *Dadas $f, g : A \to \mathbb{C}$ funções integráveis definidas em um aberto de $\mathbb{C}$ e α, α_1 e α_2 caminhos contidos em A. Considere também a e b dois números constantes. Então valem as seguintes propriedades:*

(1) $\displaystyle\int_\alpha (af(z) + bg(z))dz = a \int_\alpha f(z)dz + b \int_\alpha g(z)dz;$

(2) $\displaystyle\int_{-\alpha} f(z)dz = - \int_\alpha f(z)dz;$

(3) $\displaystyle\int_{\alpha_1+\alpha_2} f(z)dz = \int_{\alpha_1} f(z)dz + \int_{\alpha_2} f(z)dz,$ *quando $\alpha_1 + \alpha_2$ está definido.*

Teorema 2.4.10. *Sejam $f : A \to \mathbb{C}$ uma função integrável definida em um aberto de $\mathbb{C}$ e $\alpha : [a, b] \to A$ um caminho suave por partes. Suponha que F é a sua primitiva. Então,*

$$\int_\alpha f(z)dz = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a)).$$

Em particular, se α é fechado, então

$$\int_\alpha f(z)dz = 0.$$

Demonstração. Por hipótese, F é primitiva de f, então $F'(z) = f(z)$. Tome $F(\alpha(t)) = g(t) = u(t) + iv(t)$. Então,

$$F'(\alpha(t))\alpha'(t) = g'(t) = u'(t) + iv'(t).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_\alpha F'(z)dz &= \int_a^b F'(\alpha(t))\alpha'(t)dt = \int_a^b g'(t)dt \\
&= \int_a^b u'(t)dt + i\int_a^b v'(t)dt \\
&= (u(b) - u(a)) + i(v(b) - v(a)) \\
&= (u(b) + iv(b)) - (u(a) + iv(a)) \\
&= g(b) - g(a) = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a)).
\end{aligned}$$

No entanto, a curva é fechada temos que $\alpha(b) = \alpha(a)$ e concluimos que:

$$\int_\alpha F'(z)dz = \int_\alpha f(z)dz = 0.$$

□

2.4.2 Teorema de Cauchy e Fórmula Integral de Cauchy

Os dois teoremas que seguem, são teoremas fundamentais na Análise Complexa Clássica e recebem o nome de Teoremas de Cauchy[2]. Cabe citar que generalizações de tais resultados são objetos do presente trabalho.

[2]Augustin Louis Cauchy (1789-1857), matemático francês.

Teorema 2.4.11. *(Cauchy) Se f é uma função analítica e com derivada contínua em todos os pontos de uma região simplesmente conexa A, e γ uma curva simples e fechada contida em A. Então,*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Demonstração. Iremos demonstrar esse teorema com a ajuda do Teorema de Green, considerando que a derivada f' seja contínua em A e que $f(z) = u + iv$ com $z = x + iy$, temos

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_\gamma (u+iv)(dx+idy)\\ &= \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (udy + vdx)\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Green, as integrais com formas diferenciais do lado direito são iguais a

$$\int\int_A \Big[-\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big]dxdy + i\int\int_A \Big[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big]dxdy = 0,$$

e pelas equações de Cauchy-Riemann concluimos a igualdade acima. □

Uma versão mais precisa desse teorema foi desenvolvida pelo matemático francês Eduardo Goursart (1858-1936) em 1883. Ele provou que a hipótese de continuidade pode ser omitida.

Teorema 2.4.12. *Seja $f : A \to \mathbb{C}$ uma função contínua definida em uma região $A \subset \mathbb{C}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*
(1) f tem uma primitiva em A;
(2) $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para qualquer caminho fechado, suave por partes γ em A;
(3) $\int_\gamma f(z)dz$ só depende dos pontos inicial e final de qualquer caminho suave por partes γ em A.

Teorema 2.4.13. *Seja f uma função analítica em uma região simplesmente conexa A. Então, f tem primitiva.*

Teorema 2.4.14. *(Cauchy-Goursat) Se f é uma função analítica em uma região simplesmente conexa A e γ uma curva simples e fechada contida em A, então*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.4.13. como f é analítica em uma região simplesmente conexa A, então f tem primitiva. Tendo f primitiva, pelo Teorema 2.4.12. concluimos que $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$. □

Teorema 2.4.15. *(Fórmula integral de Cauchy) Seja f uma função analítica em uma região simplesmente conexa A. Então*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha} \frac{f(z)}{z - z_0}dz, z \in A,$$

onde α é uma curva simples fechada em A e z_0 um ponto qualquer no interior de α.

Teorema 2.4.16. *Seja f uma função analítica em uma região A. Então f tem todas as derivadas em z_0 e a n-ésima derivada é dada por*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\alpha} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz,$$

onde α é uma curva simples fechada em A e z_0 um ponto qualquer no interior de α.

O Teorema 2.4.16, definimos função analítica como aquela que admite derivada em todos os pontos do seu domínio sem fazer quaisquer outras hipóteses sobre a derivada. Tem-se portanto, de maneira resumida e ilustrativa, resultados importantes na Análise Complexa Clássica. Iniciamos esse capítulo com a formulação de $\mathbb{C}$, em seguida definimos as funções complexas e finalizamos com teoremas de derivação e integração, teoremas estes fundamentais nas generalizações a que o trabalho propõe.

Capítulo 3

ÁLGEBRA DE QUATÉRNIOS

Neste capítulo serão apresentados as operações de soma e multiplicação nos quatérnios. Em seguida definimos função quaterniônica e exibimos algumas de suas propriedades, o que terá cunho teórico e será o ponto inicial para o estudo aqui proposto. Todos os detalhes podem ser encontrados em [3],[13] e [18].

3.1 Números quaterniônicos

Definição 3.1.1. *O conjunto dos Quatérnios, denotado por* $\mathbb{H}$*, é formado por todos os números da forma* $q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k$ *ou equivalentemente* $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$*, em que* $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R}$ *e* i, j, k *satisfazem a relações*

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1;$$

$$ij = k;$$

$$jk = i;$$

$$ki = j.$$

Os quatérnios são compostos de uma parte escalar $q_1 \in \mathbb{R}$ e uma parte vetorial $\vec{q} = (q_2, q_3, q_4) \in \mathbb{R}^3$ e podem ser escritos da seguinte forma:

$$q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k = q_1 + \vec{q} \text{ ou } q = [q_1, (q_2, q_3, q_4)]$$

Observe que quando $q_2 = q_3 = q_4 = 0$ temos $q = q_1$ é um escalar. Se $q_3 = q_4 = 0$ temos $q = q_1 + q_2 i$ um número complexo. E, por último, quando $q_1 = 0$ temos $q = \vec{q}$ um vetor, chamado de quatérnio puro.

Pela definição de quatérnios temos as seguintes implicações:

$$1)\ (1, 0, 0, 0) = 1$$

$$2)\ (0, 1, 0, 0) = i$$

$$3)\ (0, 0, 1, 0) = j$$

$$4)\ (0, 0, 0, 1) = k$$

3.2 Operações com Quatérnios

3.2.1 Soma de Quatérnios

Dados $p, q \in \mathbb{H}$ em que $p = p_1 + p_2 i + p_3 j + p_4 k$ e $q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k$. A soma de p e q é definida pela adição dos componentes correspondentes:

$$p + q = (p_1 + q_1) + (p_2 + q_2)i + (p_3 + q_3)j + (p_4 + q_4)k.$$

Como temos que p e q podem ser escritos na forma $p = p_1 + \vec{p}$ e $q = q_1 + \vec{q}$, onde $\vec{p} = (p_2, p_3, p_4)$ e $\vec{q} = (q_2, q_3, q_4)$. Então, $p + q = [p_1 + q_1, \vec{p} + \vec{q}]$.

3.2.2 Multiplicação de Quatérnios

Dados $p, q \in \mathbb{H}$ em que $p = p_1 + p_2 i + p_3 j + p_4 k = p_1 + \vec{p}$ e $q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k = q_1 + \vec{q}$. O produto de p e q é dado por:

$$\begin{aligned} pq &= (p_1 + p_2 i + p_3 j + p_4 k)(q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k) \\ &= p_1 q_1 - (p_2 q_2 + p_3 q_3 + p_4 q_4) + p_1(q_2 i + q_2 j + q_2 k) \\ &+ q_1(p_2 i + p_3 j + p_4 k) + (p_3 q_4 - p_4 q_3)i + (p_4 q_2 - p_2 q_4)j + (p_2 q_3 - p_3 q_2)k \end{aligned} \tag{3.1}$$

Agora iremos expressar os resultados obtidos em (3.1) em termos de produtos escalares e vetoriais da seguinte forma:

$$pq = (p_1 q_1 - \vec{p} \cdot \vec{q}, p_1 \vec{q} + q_1 \vec{p} + \vec{p} \times \vec{q})$$

onde $p \cdot q$ indica o produto escalar de p e q, e $p \times q$ indica o produto vetorial de p e q. Observe que a multiplicação geralmente é não comutativa, como podemos constatar através do contra exemplo: $ij = k$ e $ji = -k$.

O conjunto $\mathbb{H}$ com as operações usuais de soma e multiplicação descritas acima é um **anel não comutativo**.

Definição 3.2.1. *O conjugado de um quatérnio $q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k = q_1 + \vec{q}$ é definido por $\bar{q} = q_1 - q_2 i - q_3 j - q_4 k = q_1 - \vec{q}$.*

Da definição acima temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.2. *Sejam* $p, q \in \mathbb{H}$. *Então:*

1) $\bar{\bar{q}} = q$;

2) $\overline{pq} = \bar{p}\bar{q}$;

3) $\overline{p+q} = \bar{p} + \bar{q}$;

4) $q\bar{q} = \bar{q}q$.

Definição 3.2.3. *A norma* $|q|$ *de um quatérnio* $q = (q_1, q_2, q_3, q_4) = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k$ *é o número real* $|q| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}$.

Dado um quatérnio $q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k \in \mathbb{H}$ temos que $q\bar{q} = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2$. Logo, temos uma relação entre o conjugado e o módulo de um quatérnio que é dada por:

$$|q|^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = q\bar{q} \text{ ou } |q| = \sqrt{q\bar{q}}.$$

3.3 Funções Quaterniônicas

As funções quaterniônicas serão abordadas nesta seção e o objetivo é o de fundamentar o estudo de derivadas e integrais além de ser fundamento necessário para o estudo de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

Definição 3.3.1. *Seja* $E^4 \subset \mathbb{H}$ *um espaço quadridimensional e* $q \in E^4$ *uma variável da forma* $q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k$, *com* $q_i \in \mathbb{R}, (i = 1, 2, 3, 4)$. *Uma aplicação quaterniônica* $f : E^4 \to \mathbb{H}$ *é uma aplicação que faz corresponder a cada* $q \in E^4$ *um número quaterniônico* $w = f(q)$, *isto é:*

$$f : E^4 \to \mathbb{H};$$
$$(q_1, q_2, q_3, q_4) \longmapsto w = f(q_1, q_2, q_3, q_4).$$

Como temos que f é uma função de variáveis quaterniônicas, podemos decompô-la em uma parte escalar $\phi(q)$ e uma parte vetorial $\psi(q)$, isto é,

$$f(q) = \phi(q) + \vec{\psi}(q)$$

em que $\phi(q) = f_1(q), \vec{\psi}(q) = f_2(q)i + f_3(q)j + f_4(q)k$ e as funções $f_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, são funções coordenadas de valores reais.

3.3.1 Funções quaterniônicas regulares

De acordo com a Teoria de Fueter, [11], o operador quaterniônico Γ é dado como:

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial q_1} + i\frac{\partial}{\partial q_2} + j\frac{\partial}{\partial q_3} + k\frac{\partial}{\partial q_4}$$

que também pode ser descrito dessa maneira:

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial q_1} + \nabla,$$

onde ∇ é o operador gradiente.

Definição 3.3.2. (Regularidade à Esquerda) *Uma função f de uma variável quaterniônica, tal que $f = f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4 = \phi + \psi$, com as $f_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, parcialmente diferenciáveis, é regular à esquerda se:*

$$\Gamma f = 0$$

Com efeito, como $pq = (p_1q_1 - \vec{p}\cdot\vec{q}, p_1\vec{q} + q_1\vec{p} + \vec{p}\times\vec{q})$ temos,

$$\Gamma f = \Big(\frac{\partial}{\partial q_1} + \nabla\Big)(\phi + \psi) = \frac{\partial \phi}{\partial q_1} - \nabla\cdot\psi + \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \nabla\phi + \nabla\times\psi = 0.$$

O operador quaterniônico aplicado à esquerda de uma função f de uma variável quaterniônica, de uma forma mais clara, é dado por

$$\begin{aligned}
\Gamma f &= \Big(\frac{\partial}{\partial q_1} + i\frac{\partial}{\partial q_2} + j\frac{\partial}{\partial q_3} + k\frac{\partial}{\partial q_4}\Big)(f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4)\\
&= \Big(\frac{\partial f_1}{\partial q_1} - \frac{\partial f_2}{\partial q_2} - \frac{\partial f_3}{\partial q_3} - \frac{\partial f_4}{\partial q_4}\Big) + i\Big(\frac{\partial f_2}{\partial q_1} + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} + \frac{\partial f_4}{\partial q_3} - \frac{\partial f_3}{\partial q_4}\Big)\\
&+ j\Big(\frac{\partial f_3}{\partial q_1} - \frac{\partial f_4}{\partial q_2} + \frac{\partial f_1}{\partial q_3} + \frac{\partial f_2}{\partial q_4}\Big) + k\Big(\frac{\partial f_4}{\partial q_1} + \frac{\partial f_3}{\partial q_2} - \frac{\partial f_2}{\partial q_3} + \frac{\partial f_1}{\partial q_4}\Big).
\end{aligned}$$

Definição 3.3.3. (Regularidade à Direita) *Uma função f de uma variável quaterniônica, tal que $f = f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4 = \phi + \psi$, com as $f_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, parcialmente diferenciáveis, é regular à direita se:*

$$f\Gamma = 0.$$

Com efeito, a igualdade acima pode ser vista como:

$$f\Gamma = (\phi + \psi)\Big(\frac{\partial}{\partial q_1} + \nabla\Big) = \frac{\partial \phi}{\partial q_1} - \psi\cdot\nabla + \nabla\phi + \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \psi\times\nabla = 0.$$

O operador quaterniônico aplicado à direita da função f de uma variável quaterniônica, de uma forma mais clara, é dado como:

$$\begin{aligned}
f\Gamma &= (f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4)\Big(\frac{\partial}{\partial q_1} + i\frac{\partial}{\partial q_2} + j\frac{\partial}{\partial q_3} + k\frac{\partial}{\partial q_4}\Big)\\
&= \Big(\frac{\partial f_1}{\partial q_1} - \frac{\partial f_2}{\partial q_2} - \frac{\partial f_3}{\partial q_3} - \frac{\partial f_4}{\partial q_4}\Big) + i\Big(\frac{\partial f_2}{\partial q_1} + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} - \frac{\partial f_4}{\partial q_3} + \frac{\partial f_3}{\partial q_4}\Big)\\
&+ j\Big(\frac{\partial f_3}{\partial q_1} + \frac{\partial f_4}{\partial q_2} + \frac{\partial f_1}{\partial q_3} - \frac{\partial f_2}{\partial q_4}\Big) + k\Big(\frac{\partial f_4}{\partial q_1} - \frac{\partial f_3}{\partial q_2} + \frac{\partial f_2}{\partial q_3} + \frac{\partial f_1}{\partial q_4}\Big).
\end{aligned}$$

Os resultados acima são consolidados nas definições e teoremas abaixo.

Definição 3.3.4. *Uma função f de uma variável quaterniônica é dita regular se ela for regular à direita e à esquerda simultaneamente.*

A seguir temos dois teoremas que apresentam precisamente as definições de regularidade à esquerda e regularidade à direita.

Teorema 3.3.5. *Sejam $f = f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4 = \phi + \psi$ uma função f de uma variável quaterniônica e o operador quaterniônico*

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial q_1} + i\frac{\partial}{\partial q_2} + j\frac{\partial}{\partial q_3} + k\frac{\partial}{\partial q_4} = \frac{\partial}{\partial q_1} + \nabla$$

. A função f é regular à esquerda se, e somente se,

1. $\dfrac{\partial \phi}{\partial q_1} = \nabla \cdot \psi$
2. $\nabla\phi = -\dfrac{\partial \psi}{\partial q_1} - \nabla \times \psi.$

Demonstração. Sabendo que f é regular à esquerda, então por definição $\Gamma f = 0$. Logo,

$$\Gamma f = \Big(\frac{\partial}{\partial q_1} + \nabla\Big)(\phi + \psi) = \frac{\partial \phi}{\partial q_1} - \nabla\cdot\psi + \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \nabla\phi + \nabla\times\psi = 0 = 0 + \vec{0}.$$

Observe que $\dfrac{\partial}{\partial q_1}$ e $\nabla\cdot\psi$ formam a parte escalar de Γf e $\nabla\phi$, $\dfrac{\partial\phi}{\partial q_1}, \nabla\times\psi$ formam a parte vetorial de Γf. Pela igualdade acima podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial q_1} - \nabla\cdot\psi = 0 &\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial q_1} = \nabla\cdot\psi\\
\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \nabla\phi + \nabla\times\psi = \vec{0} &\Rightarrow \nabla\phi = -\frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \nabla\times\psi.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, temos por hipótese

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial q_1} - \nabla\cdot\psi = 0;\\
\nabla\phi + \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \nabla\times\psi = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Somando essas duas últimas igualdades obtemos

$$\Gamma f = \frac{\partial \phi}{\partial q_1} - \nabla \cdot \psi + \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \nabla \phi + \nabla \times \psi = 0,$$

onde concluimos que f é regular à esquerda. $\square$

Teorema 3.3.6. *Sejam $f = f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4 = \phi + \psi$ uma função f de uma variável quaterniônica e o operador quaterniônico*

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial q_1} + i\frac{\partial}{\partial q_2} + j\frac{\partial}{\partial q_3} + k\frac{\partial}{\partial q_4} = \frac{\partial}{\partial q_1} + \nabla$$

. A função f é regular à direita se, e somente se,

1. $\dfrac{\partial \phi}{\partial q_1} = \nabla \cdot \psi$

2. $\nabla \phi = -\dfrac{\partial \psi}{\partial q_1} + \nabla \times \psi.$

Demonstração. Como temos que f é regular à direita, então por definição $f\Gamma = 0$. Logo,

$$f\Gamma = (\phi + \psi)\Big(\frac{\partial}{\partial q_1} + \nabla\Big) = \frac{\partial \phi}{\partial q_1} - \psi \cdot \nabla + \nabla \phi + \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \psi \times \nabla = 0 = 0 + \vec{0}.$$

Observe que $\dfrac{\partial}{\partial q_1}$ e $\psi \cdot \nabla$ formam a parte escalar de $f\Gamma$ e $\nabla\phi$, $\dfrac{\partial \phi}{\partial q_1}, \psi \times \nabla$ formam a parte vetorial de $f\Gamma$. Pela igualdade acima podemos concluir que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial q_1} - \psi \cdot \nabla = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial q_1} = \psi \cdot \nabla;$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \nabla \phi + \psi \times \nabla = \vec{0} \Rightarrow \nabla \phi = -\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \nabla \times \psi.$$

Reciprocamente, temos por hipótese

$$\frac{\partial \phi}{\partial q_1} - \nabla \cdot \psi = 0;$$
$$\nabla \phi + \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \psi \times \nabla = \vec{0}.$$

Somando essas duas últimas igualdades obtemos

$$f\Gamma = \frac{\partial \phi}{\partial q_1} - \psi \cdot \nabla + \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \nabla \phi + \psi \times \nabla = 0,$$

onde concluimos que f é regular à direita. $\square$

Por fim, o teorema a seguir define uma função quaterniônica regular.

Teorema 3.3.7. *Sejam* $f = f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4 = \phi + \psi$ *uma função* f *de uma variável quaterniônica e o operador quaterniônico*

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial q_1} + i\frac{\partial}{\partial q_2} + j\frac{\partial}{\partial q_3} + k\frac{\partial}{\partial q_4} = \frac{\partial}{\partial q_1} + \nabla$$

. Se f *é regular, então*

1. $\dfrac{\partial \phi}{\partial q_1} = \nabla \cdot \psi$

2. $\nabla \phi = -\dfrac{\partial \psi}{\partial q_1}$

Demonstração. Por definição temos que se f é regular, então f é regular à esquerda e regular à direita simultaneamente. Assim, pelos teoremas 3.3.5. e 3.3.6. são válidas as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial q_1} &= \nabla \cdot \psi; \\ \nabla \phi &= -\frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \nabla \times \psi; \\ \nabla \phi &= -\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \nabla \times \psi. \end{aligned}$$

Destas duas últimas igualdades temos que $\nabla \times \psi = 0$. Portanto,

$$\frac{\partial \phi}{\partial q_1} = \nabla \cdot \psi;$$

$$\nabla \phi = -\frac{\partial \psi}{\partial q_1}.$$

□

3.3.2 Equações envolvendo operadores

Na subseção anterior vimos que a ação do operador quaterniônico Γ sobre uma função quaterniônica f é dado por:

$$\begin{aligned} \Gamma f &= \Big(\frac{\partial}{\partial q_1} + i\frac{\partial}{\partial q_2} + j\frac{\partial}{\partial q_3} + k\frac{\partial}{\partial q_4}\Big)(f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4) \\ &= \Big(\frac{\partial f_1}{\partial q_1} - \frac{\partial f_2}{\partial q_2} - \frac{\partial f_3}{\partial q_3} - \frac{\partial f_4}{\partial q_4}\Big) + i\Big(\frac{\partial f_2}{\partial q_1} + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} + \frac{\partial f_4}{\partial q_3} - \frac{\partial f_3}{\partial q_4}\Big) \\ &+ j\Big(\frac{\partial f_3}{\partial q_1} - \frac{\partial f_4}{\partial q_2} + \frac{\partial f_1}{\partial q_3} + \frac{\partial f_2}{\partial q_4}\Big) + k\Big(\frac{\partial f_4}{\partial q_1} + \frac{\partial f_3}{\partial q_2} - \frac{\partial f_2}{\partial q_3} + \frac{\partial f_1}{\partial q_4}\Big). \end{aligned}$$

Analogamente, a definição de operador quaterniônico defini-se o operador conjugado $\overline{\Gamma}$ como

$$\overline{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial q_1} - i\frac{\partial}{\partial q_2} - j\frac{\partial}{\partial q_3} - k\frac{\partial}{\partial q_4}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}f &= \Big(\frac{\partial}{\partial q_1} - i\frac{\partial}{\partial q_2} - j\frac{\partial}{\partial q_3} - k\frac{\partial}{\partial q_4}\Big)(f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4)\\ &= \Big(\frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} + \frac{\partial f_3}{\partial q_3} + \frac{\partial f_4}{\partial q_4}\Big) + i\Big(\frac{\partial f_2}{\partial q_1} - \frac{\partial f_1}{\partial q_2} - \frac{\partial f_4}{\partial q_3} + \frac{\partial f_3}{\partial q_4}\Big)\\ &+ j\Big(\frac{\partial f_3}{\partial q_1} + \frac{\partial f_4}{\partial q_2} - \frac{\partial f_1}{\partial q_3} - \frac{\partial f_2}{\partial q_4}\Big) + k\Big(\frac{\partial f_4}{\partial q_1} - \frac{\partial f_3}{\partial q_2} + \frac{\partial f_2}{\partial q_3} - \frac{\partial f_1}{\partial q_4}\Big).\end{aligned}$$

Seja o operador $Tf = \dfrac{1}{2}(\Gamma f + \overline{\Gamma}f)$. Portanto,

$$\begin{aligned}Tf = \frac{1}{2}\Big[\Big\{&\Big(\frac{\partial f_1}{\partial q_1} - \frac{\partial f_2}{\partial q_2} - \frac{\partial f_3}{\partial q_3} - \frac{\partial f_4}{\partial q_4}\Big) + i\Big(\frac{\partial f_2}{\partial q_1} + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} + \frac{\partial f_4}{\partial q_3} - \frac{\partial f_3}{\partial q_4}\Big)\\ &+ j\Big(\frac{\partial f_3}{\partial q_1} - \frac{\partial f_4}{\partial q_2} + \frac{\partial f_1}{\partial q_3} + \frac{\partial f_2}{\partial q_4}\Big) + k\Big(\frac{\partial f_4}{\partial q_1} + \frac{\partial f_3}{\partial q_2} - \frac{\partial f_2}{\partial q_3} + \frac{\partial f_1}{\partial q_4}\Big)\Big\}\\ &+ \Big\{\Big(\frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} + \frac{\partial f_3}{\partial q_3} + \frac{\partial f_4}{\partial q_4}\Big) + i\Big(\frac{\partial f_2}{\partial q_1} - \frac{\partial f_1}{\partial q_2} - \frac{\partial f_4}{\partial q_3} + \frac{\partial f_3}{\partial q_4}\Big)\\ &+ j\Big(\frac{\partial f_3}{\partial q_1} + \frac{\partial f_4}{\partial q_2} - \frac{\partial f_1}{\partial q_3} - \frac{\partial f_2}{\partial q_4}\Big) + k\Big(\frac{\partial f_4}{\partial q_1} - \frac{\partial f_3}{\partial q_2} + \frac{\partial f_2}{\partial q_3} - \frac{\partial f_1}{\partial q_4}\Big)\Big\}\Big].\end{aligned}$$

Daí, tem-se:

$$Tf = \frac{\partial f_1}{\partial q_1} + i\frac{\partial f_2}{\partial q_1} + j\frac{\partial f_3}{\partial q_1} + k\frac{\partial f_4}{\partial q_1}.$$

Pode-se verificar de imediato que as exponenciais quaterniônicas

$$e^q = e^{q_1}\Big\{cos\Big(\sqrt{q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}\Big) + \vec{q}\Big(\frac{sen\sqrt{q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}{\sqrt{q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}\Big)\Big\},$$

tem a propriedade $T(e^q) = e^q$.

Existem outras equações do operador que não são tão triviais quanto essa, mas podem também ser deduzidas. Podemos, por exemplo, definir o operador $Sf = \dfrac{1}{2}(\Gamma f - \overline{\Gamma}f)$. Desenvolvendo Sf temos:

$$\begin{aligned}Sf = \frac{1}{2}\Big[\Big\{&\Big(\frac{\partial f_1}{\partial q_1} - \frac{\partial f_2}{\partial q_2} - \frac{\partial f_3}{\partial q_3} - \frac{\partial f_4}{\partial q_4}\Big) + i\Big(\frac{\partial f_2}{\partial q_1} + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} + \frac{\partial f_4}{\partial q_3} - \frac{\partial f_3}{\partial q_4}\Big)\\ &+ j\Big(\frac{\partial f_3}{\partial q_1} - \frac{\partial f_4}{\partial q_2} + \frac{\partial f_1}{\partial q_3} + \frac{\partial f_2}{\partial q_4}\Big) + k\Big(\frac{\partial f_4}{\partial q_1} + \frac{\partial f_3}{\partial q_2} - \frac{\partial f_2}{\partial q_3} + \frac{\partial f_1}{\partial q_4}\Big)\Big\}\\ &- \Big\{\Big(\frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} + \frac{\partial f_3}{\partial q_3} + \frac{\partial f_4}{\partial q_4}\Big) + i\Big(\frac{\partial f_2}{\partial q_1} - \frac{\partial f_1}{\partial q_2} - \frac{\partial f_4}{\partial q_3} + \frac{\partial f_3}{\partial q_4}\Big)\\ &+ j\Big(\frac{\partial f_3}{\partial q_1} + \frac{\partial f_4}{\partial q_2} - \frac{\partial f_1}{\partial q_3} - \frac{\partial f_2}{\partial q_4}\Big) + k\Big(\frac{\partial f_4}{\partial q_1} - \frac{\partial f_3}{\partial q_2} + \frac{\partial f_2}{\partial q_3} - \frac{\partial f_1}{\partial q_4}\Big)\Big\}\Big].\end{aligned}$$

Fazendo os cálculos concluimos:

$$Sf =\Big(-\frac{\partial f_2}{\partial q_2}-\frac{\partial f_3}{\partial q_3}-\frac{\partial f_4}{\partial q_4}\Big)+i\Big(\frac{\partial f_1}{\partial q_2}+\frac{f_4}{\partial q_3}-\frac{\partial f_3}{\partial q_4}\Big)+$$
$$+j\Big(\frac{\partial f_1}{\partial q_3}+\frac{\partial f_2}{\partial q_4}-\frac{\partial f_4}{\partial q_2}\Big)+k\Big(\frac{\partial f_1}{\partial q_4}+\frac{\partial f_3}{\partial q_2}-\frac{\partial f_2}{\partial q_3}\Big).$$

Usando $f=e^q$ em S encontramos as seguintes relações:

$$\Big(-\frac{\partial f_2}{\partial q_2}-\frac{\partial f_3}{\partial q_3}-\frac{\partial f_4}{\partial q_4}\Big) =e^{q_1}\Big(-cos\Big(\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}\Big)-\Big(\frac{2sen\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}{\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}\Big)\Big);$$
$$i\Big(\frac{\partial f_1}{\partial q_2}+\frac{f_4}{\partial q_3}-\frac{\partial f_3}{\partial q_4}\Big)=-\,e^{q_1}\Big(\frac{q_2 sen\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}{\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}\Big)i;$$
$$j\Big(\frac{\partial f_1}{\partial q_3}+\frac{\partial f_2}{\partial q_4}-\frac{\partial f_4}{\partial q_2}\Big)=-\,e^{q_1}\Big(\frac{q_3 sen\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}{\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}\Big)j;$$
$$k\Big(\frac{\partial f_1}{\partial q_4}+\frac{\partial f_3}{\partial q_2}-\frac{\partial f_2}{\partial q_3}\Big)=-\,e^{q_1}\Big(\frac{q_4 sen\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}{\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}\Big)k.$$

Logo,

$$Se^q =e^{q_1}\Big(-cos\Big(\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}\Big)-\Big(\frac{2sen\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}{\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}\Big)\Big)-e^{q_1}\Big(\frac{q_2 sen\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}{\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}\Big)i$$
$$-\,e^{q_1}\Big(\frac{q_3 sen\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}{\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}\Big)j-e^{q_1}\Big(\frac{q_4 sen\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}{\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}\Big)k$$

Reorganizando e colocando termos em evidência temos:

$$Se^q =-\,e^{q_1}cos\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}-e^{q_1}\frac{sen\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}{\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}(q_2 i+q_3 j+q_4 k)-\frac{2e^{q_1}sen\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}{\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}.$$

Fazendo $A=\dfrac{2e^{q_1}sen\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}{\sqrt{q_2^2+q_3^2+q_4^2}}$ concluimos que

$$Sf=e^q-A$$

Podemos fatorar relações mais complicadas do operador com estas propriedades de forma parecida a procedimentos usados para a solução de equações diferencias ordinárias.

3.4 A exponencial quaterniônica

Nesta seção iremos apresentar a função exponencial de um número complexo e, a partir disso, fazer uma generalização para o caso quaterniônico.

3.4.1 A exponencial de um número complexo

Lembremos que a expansão em série de Maclaurin de e^t para t real é

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots.$$

Substituindo t por $iy(y \in \mathbb{R})$ nesta série e fazendo os cálculos, obtemos

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots \\ &= \Big(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots\Big) + i\Big(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots\Big). \end{aligned}$$

Observe que as duas últimas séries são as expansões em série de Maclaurin de $cos\, y$ e de $sen\, y$, respectivamente. Portanto, concluimos que $e^{iy} = cos\, y + isen\, y$. Além disso, como $e^{s+t} = e^s e^t$ para $s, t \in \mathbb{R}$, é natural esperarmos que $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$.

Definição 3.4.1. *Dado um número complexo $z = a + bi$, definimos a função exponencial de z por*

$$e^z = e^x(cos\, y + isen\, y).$$

A fórmula $e^{iy} = cos\, y + isen\, y$ é chamada **fórmula de Euler**[1].

Daí temos que a representação trigonométrica de um número complexo $z = x + yi$ pode ser indicada como:

$$z = r(cos\theta + isen\theta) = re^{i\theta}$$

Podemos perceber que e^z é imaginária de período $2\pi i$. De fato, substituindo y por $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ em e^{iy} temos:

$$\begin{aligned} e^{0i} &= 1; \\ e^{\frac{\pi}{2}i} &= i; \\ e^{\pi i} &= -1; \\ e^{\frac{3\pi}{2}i} &= -i; \\ e^{2\pi i} &= 1. \end{aligned}$$

Logo, concluimos que

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z.$$

[1]Leonhard Euler (1707-1783), matemático Suiço.

Desta forma temos,

$$e^{z+2n\pi i} = e^z,\ n = (0, 1, 2, \ldots).$$

Pela periodicidade de e^z que acabamos de ver, todos os seus valores apresentam-se na forma infinita,

$$-\pi < y \leq \pi$$

que é chamada de região fundamental de e^z, e indicada na Figura 3.1 que segue.

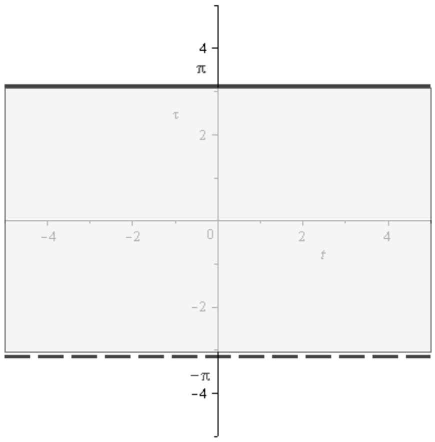

Figura 3.1: Região Fundamental de e^z.

3.4.2 A exponencial quaterniônica

Para definir a função exponencial quaterniônica faremos o processo análogo ao que fizemos no caso complexo.

Sabemos que a expansão em série de Maclaurin de e^q para $q \in \mathbb{H}$ é dada por

$$e^q = 1 + q + \frac{q^2}{2!} + \frac{q^3}{3!} + \ldots + \frac{q^n}{n!} + \ldots \tag{3.2}$$

Seja $q = q_1 + \vec{q}$, em que $\vec{q} = iq_2 + jq_3 + kq_4$ é a parte vetorial de q. Substituindo q em (3.2) obtemos,

$$e^q = 1 + (q_1 + \vec{q}) + \frac{(q_1 + \vec{q})^2}{2!} + \frac{(q_1 + \vec{q})^3}{3!} + \ldots + \frac{(q_1 + \vec{q})^n}{n!} + \ldots. \tag{3.3}$$

Iremos calcular agora os termos $(q_1 + \vec{q})^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, de forma análoga a expansão binomial de uma soma de dois números reais a e b.

Lembremos que, dados a e b dois números reais, a expansão binomial de a e b é dada por:

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \tag{3.4}$$

em que $\binom{n}{r}$ denota a combinação de n e r.

Calculando os termos de (3.3) e usando em (3.4) obtemos,

$\bullet q^0 = 1;$

$\bullet q^1 = q_1 + \vec{q};$

$\bullet q^2 = (q_1 + \vec{q})^2 = \sum_{r=0}^{2} \binom{2}{r} q_1^{2-r} (\vec{q})^r = \binom{2}{0} q_1^2 (\vec{q})^0 + \binom{2}{1} q_1 (\vec{q}) + \binom{2}{2} q_1^0 (\vec{q})^2 =$
$= q_1^2 + 2q_1\vec{q} + (\vec{q})^2.$

De forma análoga temos,

$\bullet q^3 = q_1^3 + 3q_1^2\vec{q} + 3q_1(\vec{q})^2 + (\vec{q})^3;$

$\bullet q^4 = q_1^4 + 4q_1^3\vec{q} + 6q_1^1(\vec{q})^2 + 4q_1(\vec{q})^3 + (\vec{q})^4;$

$\bullet q^5 = q_1^5 + 5q_1^4\vec{q} + 10q_1^3(\vec{q})^2 + 10q_1^2(\vec{q})^3 + 5q_1(\vec{q})^4 + (\vec{q})^5;$

$\bullet q^6 = q_1^6 + 6q_1^5\vec{q} + 15q_1^4(\vec{q})^2 + 20q_1^3(\vec{q})^3 + 15q_1^2(\vec{q})^4 + 6q_1(\vec{q})^5 + (\vec{q})^6.$

Logo, os termos representados na série (3.2) serão dados por

$\bullet q^0 = 1;$

$\bullet q^1 = q_1 + \vec{q};$

$\bullet \dfrac{q^2}{2!} = \dfrac{q_1^2}{2!} + \dfrac{2q_1\vec{q}}{2!} + \dfrac{(\vec{q})^2}{2!};$

$\bullet \dfrac{q^3}{3!} = \dfrac{q_1^3 + 3q_1^2\vec{q}}{3!} + \dfrac{3q_1(\vec{q})^2}{3!} + \dfrac{(\vec{q})^3}{3!};$

$\bullet \dfrac{q^4}{4!} = \dfrac{q_1^4}{4!} + \dfrac{4}{4!}q_1^3\vec{q} + \frac{6}{4!}q_1^2(\vec{q})^2 + \dfrac{4}{4!}q_1(\vec{q})^3 + \dfrac{(\vec{q})^4}{4!};$

$\bullet \dfrac{q^5}{5!} = \dfrac{q_1^5}{5!} + \dfrac{\frac{5!}{4!}q_1^4\vec{q}}{5!} + \dfrac{\frac{5!}{3!2!}q_1^3(\vec{q})^2}{5!} + \dfrac{\frac{5!}{2!3!}q_1^2(\vec{q})^3}{5!} + \dfrac{\frac{5!}{4!}q_1(\vec{q})^4}{5!} + \dfrac{(\vec{q})^5}{5!}$

$\bullet \dfrac{q^6}{6!} = \dfrac{q_1^6}{6!} + \dfrac{\frac{6!}{5!}q_1^5\vec{q}}{6!} + \dfrac{\frac{6!}{4!2!}q_1^4(\vec{q})^2}{6!} + \dfrac{\frac{6!}{3!3!}q_1^3(\vec{q})^3}{6!} + \dfrac{\frac{6!}{2!4!}q_1^2(\vec{q})^4}{6!} + \dfrac{\frac{6!}{5!}q_1(\vec{q})^5}{6!} + \dfrac{(\vec{q})^6}{6!}.$

$$\vdots$$

Substituindo os resultados acima em (3.3) obtemos:

$$e^q = [1] + [q_1 + \vec{q}] + \left[\frac{q_1^2}{2!} + \frac{2q_1\vec{q}}{2!} + \frac{(\vec{q})^2}{2!}\right] + \left[\frac{q_1^3}{3!} + \frac{q_1^2\vec{q}}{2!} + \frac{q_1(\vec{q})^2}{2!} + \frac{(\vec{q})^2\vec{q}}{3!}\right] +$$
$$+ \left[\frac{q_1^4}{4!} + \frac{q_1^3\vec{q}}{3!} + \frac{q_1^2(\vec{q}^2)}{2!2!} + \frac{q_1(\vec{q})^2\vec{q}}{3!} + \frac{(\vec{q})^2(\vec{q})^2}{4!}\right] +$$
$$+ \left[\frac{q_1^5}{5!} + \frac{q_1^4\vec{q}}{4!} + \frac{q_1^3(\vec{q}^2)}{2!3!} + \frac{q_1^2(\vec{q})^2\vec{q}}{3!2!} + \frac{q_1^2(\vec{q})^2(\vec{q})^2}{4!} + \frac{(\vec{q})^2(\vec{q})^2\vec{q}}{5!}\right] +$$
$$+ \left[\frac{q_1^6}{6!} + \frac{q_1^5\vec{q}}{5!} + \frac{q_1^4(\vec{q}^2)}{2!4!} + \frac{q_1^3(\vec{q})^2\vec{q}}{3!3!} + \frac{q_1^2(\vec{q})^2(\vec{q})^2}{2!4!} + \frac{q_1(\vec{q})^2(\vec{q})^2\vec{q}}{5!} + \frac{(\vec{q})^2(\vec{q})^2(\vec{q})^2}{6!}\right] + \cdots.$$

Pela multiplicação de quatérnios temos que $(\vec{q})^2 = \vec{q}\vec{q} = -(q_2^2+q_3^2+q_4^2) = -|q|^2$. Agrupando os termos de e^q na igualdade anterior e usando as potências de $q = q_1 + \vec{q}$ calculadas anteriormente temos:

$$e^q = \left[1 - \frac{|\vec{q}|^2}{2!} + \frac{|\vec{q}|^4}{4!} - \frac{|\vec{q}|^6}{6!} + \cdots\right] + \left[q_1 - \frac{q_1|\vec{q}|^2}{2!} + \frac{q_1|\vec{q}|^4}{4!} - \cdots\right] + \left[\frac{q_1^2}{2!} - \frac{q_1^2|\vec{q}|^2}{2!2!} \frac{q_1^2|\vec{q}|^4}{2!4!} - \cdots\right] +$$
$$+ \left[\frac{q_1^3}{3!} - \frac{q_1^3|\vec{q}|^2}{3!2!} + \cdots\right] + \left[\frac{q_1^4}{4!} - \frac{q_1^4|\vec{q}|^2}{4!2!} + \cdots\right] + \left[\vec{q} - \frac{\vec{q}|\vec{q}|^2}{3!} + \frac{\vec{q}|\vec{q}|^4}{5!} - \cdots\right] +$$
$$+ \left[q_1\vec{q} - \frac{q_1\vec{q}|\vec{q}|^2}{3!} + \frac{q_1\vec{q}|\vec{q}|^4}{5!} - \cdots\right] + \left[\frac{q_1^2\vec{q}}{2!} - \frac{q_1^2\vec{q}|\vec{q}|^2}{2!3!} + \cdots\right] + \left[\frac{q_1^3\vec{q}}{3!} - \frac{q_1^3\vec{q}|\vec{q}|^2}{3!3!} + \cdots\right] +$$
$$+ \left[\frac{q_1^4\vec{q}}{4!} - \cdots\right] + \left[\frac{q_1^5}{5!} - \cdots\right] + \left[\frac{q_1^5\vec{q}}{5!} - \cdots\right] + \left[\frac{q_1^6}{6!} - \cdots\right] + \cdots. \tag{3.5}$$

Colocando em evidência os primeiros termos dos primeiros cinco grupos de somas infinitas da soma em (3.5) e executando algo semelhante nos termos seguintes obtemos

$$e^q = \left[1 + q_1 + \frac{q_1^2}{2!} + \frac{q_1^3}{3!} + \frac{q_1^4}{4!} + \frac{q_1^5}{5!} + \frac{q_1^6}{6!} + \cdots\right]\left[1 - \frac{|\vec{q}|^2}{2!} + \frac{|\vec{q}|^4}{4!} - \frac{|\vec{q}|^6}{6!} + \cdots\right] +$$
$$+ \vec{q}\left\{\left[1 + q_1 + \frac{q_1^2}{2!} + \frac{q_1^3}{3!} + \frac{q_1^4}{4!} + \frac{q_1^5}{5!} + \frac{q_1^6}{6!} + \cdots\right] - \frac{|\vec{q}|^2}{3!}\left[1 + q_1 + \frac{q_1^2}{2!} + \frac{q_1^3}{3!} + \frac{q_1^4}{4!} + \frac{q_1^5}{5!} + \frac{q_1^6}{6!} + \cdots\right] +\right.$$
$$\left.+ \frac{|\vec{q}|^4}{5!}\left[1 + q_1 + \frac{q_1^2}{2!} + \frac{q_1^3}{3!} + \frac{q_1^4}{4!} + \frac{q_1^5}{5!} + \frac{q_1^6}{6!} + \cdots\right] + \cdots\right\} \tag{3.6}$$

Colocando $\left[1 + q_1 + \frac{q_1^2}{2!} + \frac{q_1^3}{3!} + \frac{q_1^4}{4!} + \frac{q_1^5}{5!} + \frac{q_1^6}{6!} + \cdots\right]$ em evidência obtemos:

$$e^q = \left[1 + q_1 + \frac{q_1^2}{2!} + \frac{q_1^3}{3!} + \frac{q_1^4}{4!} + \frac{q_1^5}{5!} + \frac{q_1^6}{6!} + \cdots\right]\left\{\left[1 - \frac{|\vec{q}|^2}{2!} + \frac{|\vec{q}|^4}{4!} - \frac{|\vec{q}|^6}{6!} + \cdots\right] +\right.$$
$$\left.+ \vec{q}\left[1 - \frac{|\vec{q}|^2}{3!} + \frac{|\vec{q}|^4}{5!} - \frac{|\vec{q}|^6}{7!}\right]\right\}. \tag{3.7}$$

Sabemos que a função cosseno em série de Maclaurin é dada por:

$$cos\, x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

Por (3.7) temos,

$$\left[1 - \frac{|\vec{q}|^2}{2!} + \frac{|\vec{q}|^4}{4!} - \frac{|\vec{q}|^6}{6!} + \cdots\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{|\vec{q}|^{2n}}{(2n)!} = cos|\vec{q}|.$$

Por outro lado, a expansão da função seno em série de Maclaurin é dada por

$$sen\, x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots .$$

Assim, de (3.7) temos,

$$\begin{aligned}
\Big[1 - \frac{|\vec{q}|^2}{3!} + \frac{|\vec{q}|^4}{5!} - \frac{|\vec{q}|^6}{7!} + \cdots\Big] &= \Big[\frac{\vec{q}}{\vec{q}} - \frac{|\vec{q}|^3}{3!|\vec{q}|} + \frac{|\vec{q}|^5}{5!|\vec{q}|} - \frac{|\vec{q}|^7}{7!|\vec{q}|} + \cdots\Big] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{|\vec{q}|^{2n+1}}{(2n+1)!|\vec{q}|} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{|\vec{q}|^{2n+1}}{(2n+1)!}}{|\vec{q}|} \\
&= \frac{sen|\vec{q}|}{|\vec{q}|}.
\end{aligned}$$

Como a expansão em série de Maclaurin da função exponencial real e^x é dada por

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

e usando (3.7) temos:

$$e^{q_1} = 1 + q_1 + \frac{q_1^2}{2!} + \frac{q_1^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_1^n}{n!}.$$

Assim, se $q \in \mathbb{H}$ podemos escrever e^q da seguinte forma

$$e^q = e^{q_1}\Big\{cos|\vec{q}| + \vec{q}\Big(\frac{sen|\vec{q}|}{|\vec{q}|}\Big)\Big\},$$

em que $|\vec{q}| = \sqrt{q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}$.

Teorema 3.4.2. *Seja e^q uma função exponencial do tipo quaterniônica. Então $|e^q| = e^{q_1}$, em que $q = q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4$.*

Demonstração. Vimos anteriormente que:

$$e^q = e^{q_1 + \vec{q}} = e^{q_1}e^{\vec{q}} = e^{q_1}\Big\{cos|\vec{q}| + \vec{q}\Big(\tfrac{sen|\vec{q}|}{|\vec{q}|}\Big)\Big\}$$

Daí temos:

$$\begin{gathered}
|e^q| = |e^{q_1}|\Big|cos|\vec{q}| + \vec{q}\Big(\frac{sen|\vec{q}|}{|\vec{q}|}\Big)\Big| = |e^{q_1}|\Big\{cos^2|\vec{q}| + \sum_{n=2}^{4} q_n^2\Big(\frac{sen|\vec{q}|}{|\vec{q}|}\Big)^2\Big\} = \\
|e^{q_1}|\Big\{cos^2|\vec{q}| + (q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)\Big(\frac{sen|\vec{q}|}{|\vec{q}|}\Big)^2\Big\} = |e^{q_1}|\Big\{cos^2|\vec{q}| + |\vec{q}|^2\Big(\frac{sen|\vec{q}|}{|\vec{q}|}\Big)^2\Big\} = \\
= |e^{q_1}|\{cos^2|\vec{q}| + sen^2|\vec{q}|\} = e^{q_1}.
\end{gathered}$$

Logo,

$$|e^q| = e^{q_1}.$$

□

Pelo Teorema 3.4.2., concluimos que se e^q é uma função exponencial quaterniônica então $|e^{\vec{q}}| = 1$.

A função exponencial quaterniônica é uma função periódica, ou seja, para todo $p, q \in \mathbb{H}$ temos $f(q+p) = f(q)$. Veremos isso no Teorema 3.4.4..

Definição 3.4.3. Seja u_j um quatérnio cujas coordenadas são nulas exceto a j-ésima posição , e seja f uma função quaterniônica periódica, ou seja,

$$f(q + u_j) = f(q), \forall q \in \mathbb{H}.$$

O período de f será dado pelo valor da j-ésima coordenada de u_i.

Teorema 3.4.4. *Dados $q = q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4$ e os vetores $\vec{u}_i, i = 1, 2, 3, 4,$ abaixo*

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= (0, 2\pi, 0, 0);\\ \vec{u}_2 &= (0, 0, 2\pi, 0);\\ \vec{u}_3 &= (0, 0, 0, 2\pi).\end{aligned}$$

Se e^q é a função exponencial do tipo quaterniônica, então esta é periódica.

Demonstração. Observe que calculando e^{u_i} com $i = 1, 2, 3, 4$ temos:

$$\begin{aligned}e^{u_1} &= e^{(0,2\pi,0,0)}\\ &= cos\sqrt{0^2 + (2\pi)^2 + 0^2 + 0^2} + \frac{(0, 2\pi, 0, 0)}{\sqrt{0^2 + (2\pi)^2 + 0^2 + 0^2}} sen\sqrt{0^2 + (2\pi)^2 + 0^2 + 0^2}\\ &= cos 2\pi = 1;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e^{u_2} &= e^{(0,0,2\pi,0)}\\ &= cos\sqrt{0^2 + 0^2 + (2\pi)^2 + 0^2} + \frac{(0, 0, 2\pi, 0)}{\sqrt{0^2 + 0^2 + (2\pi)^2 + 0^2}} sen\sqrt{0^2 + 0^2 + (2\pi)^2 + 0^2}\\ &= cos 2\pi = 1;\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
e^{u_3} &= e^{(0,0,0,2\pi)} \\
&= cos\sqrt{0^2+0^2+0^2+(2\pi)^2} + \frac{(0,0,0,2\pi)}{\sqrt{0^2+0^2+0^2+(2\pi)^2}} sen\sqrt{0^2+0^2+0^2+(2\pi)^2} \\
&= cos 2\pi = 1.
\end{aligned}
$$

Portanto, temos $e^{u_i} = 1, i = 1, 2, 3$. Assim, $e^{q+u_i} = e^q e^{u_i} = e^q \cdot 1 = e^q$. Isso mostra que a função e^q é periódica de período imaginário em cada um dos eixos do espaço de dimensão 4 separadamente, ou seja:

$$e^{q+n\vec{u_i}} = e^q,$$

com $n = 1, 2, \cdots$, e $i = 1, 2, 3$, onde concluimos a demonstração do teorema. $\square$

Vimos na subseção anterior que a função exponencial complexa é periódica e todos os seus valores encontram-se na região infinita do plano $-\pi < y \leq \pi$. O Teorema 3.4.4. é uma generalização disso, onde a região fundamental, no caso da função exponencial quaterniônica, será uma região do $\mathbb{R}^3$ dada por

$$G = \{w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3; -\pi < w_1 \leq \pi, -\pi < w_2 \leq \pi, -\pi < w_3 \leq \pi\}.$$

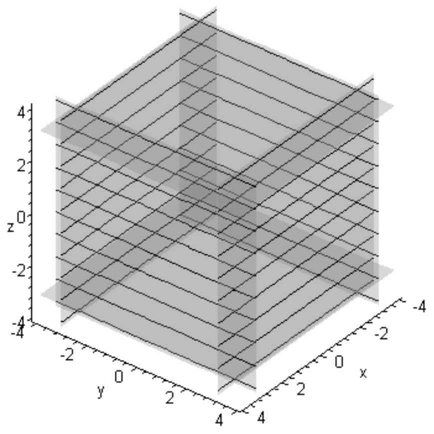

Figura 3.2: Região Fundamental de e^q

3.5 Funções Trigonométricas

As funções trigonométricas do tipo quaterniônica são determinadas usando a exponencial do tipo quaterniônica. Seja $q = q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4 = q_1 + \vec{q}$, onde $\vec{q} = iq_2 + jq_3 + kq_4$ é a parte vetorial de q. Vimos que a exponencial de q é dada por

$$e^q = e^{q_1}\Big\{cos|\vec{q}| + \vec{q}\Big(\tfrac{sen|\vec{q}|}{|\vec{q}|}\Big)\Big\}.$$

Além disso,

$$e^{-q} = e^{q_1}\Big\{cos|\vec{q}| - \vec{q}\Big(\frac{sen|\vec{q}|}{|\vec{q}|}\Big)\Big\}.$$

Daí concluimos que as funções $sen\, q$ e $cos\, q$ são dadas por

$$sen\, q = \frac{e^q - e^{-q}}{2\dfrac{\vec{q}}{|\vec{q}|}};$$

$$cos\, q = \frac{e^q + e^{-q}}{2}.$$

Com essas duas funções trigonométricas podemos determinar as outras funções trigonométricas tangente, cotangente, secante e cossecante definidas por:

$$tg\, q = \frac{sen\, q}{cos\, q} = -\frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}\frac{e^q - e^{-q}}{e^q + e^{-q}}$$

$$cotg\, q = \frac{cos\, q}{sen\, q} = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}\frac{e^q + e^{-q}}{e^q - e^{-q}}$$

$$sec\, q = \frac{1}{cos\, q} = \frac{2}{e^q + e^{-q}}$$

$$cossec\, q = \frac{1}{sen\, q} = \frac{2}{e^q - e^{-q}}.$$

Observe que estas funções tem como domínio um subconjunto de $\mathbb{H}$ que é formado por todos os pontos do espaço exceto $q = (0, 0, 0, 0)$. Podemos notar que

$$\left(\frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}\right)^2 = -1,$$

pois temos que $(\vec{q})^2 = -q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 = |\vec{q}|^2$.

Teorema 3.5.1. *Se $sen\, q$ e $cos\, q$ são funções trigonométricas do tipo quaterniônica, então*

$$sen^2 q + cos^2 q = 1.$$

Demonstração. Usando as definições de $sen\, q$ e $cos\, q$ temos

$$sen^2 q + cos^2 q = \left(\frac{e^q - e^{-q}}{2\frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}}\right)^2 + \left(\frac{e^q + e^{-q}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2q} - 2 + e^{-2q}}{-2^2} + \frac{e^{2q} + 2 + e^{-2q}}{2^2}$$

$$sen^2 q + cos^2 q = 1.$$

□

O resultado acima é similar ao resultado determinado para o caso de uma função de uma variável complexa, e demonstraremos nos próximos teoremas que as funções trigonométricas também são periódicas.

Teorema 3.5.2. *Sejam $sen\, q$ e $cos\, q$ funções trigonométricas do tipo quaterniônica e $q = q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4$. Então, essas funções são periódicas com período 2π.*

Demonstração. Dados os vetores

$$\vec{u}_1 = (0, 2\pi, 0, 0);$$
$$\vec{u}_2 = (0, 0, 2\pi, 0);$$
$$\vec{u}_3 = (0, 0, 0, 2\pi).$$

Logo,

$$sen(q + u_i) = \frac{e^{q+u_i} - e^{-q-u_i}}{2\frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}} = \frac{e^q e^{u_i} - e^{-q} e^{-u_i}}{2\frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}};$$
$$sen(q + u_i) = \frac{e^q - e^{-q}}{2\frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}} = sen\, q$$

onde $i = 2, 3, 4$. Analogamente mostramos que:

$$cos(q + u_i) = cos\, q$$

onde $i = 2, 3, 4$. □

Teorema 3.5.3. *As funções $tg\, q$ e $cotg\, q$ do tipo quaterniônica com $q = q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4$ são periódicas com período π.*

Demonstração. Sejam os vetores:

$$\vec{u}_1 = (0, \pi, 0, 0);$$
$$\vec{u}_2 = (0, 0, \pi, 0);$$
$$\vec{u}_3 = (0, 0, 0, \pi).$$

De fato temos,

$$tg(q + u_i) = -\frac{e^{(q+u_i)} - e^{(-q-u_i)}}{\frac{e^{(q+u_i)} - e^{(q-u_i)}}{\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}}} = tg\, q;$$
$$cotg(q + u_i) = \frac{\vec{u}}{|\vec{q}|} \frac{e^{q+u_i} + e^{-q-u_i}}{e^{q+u_i} - e^{-q-u_i}} = cotg\, q.$$

□

3.6 Função Logarítmica

Veremos agora uma generalização da função logarítmica para quatérnios. Para isso, será necessário o uso generalizado das coordenadas esféricas dadas abaixo:

$$\begin{aligned} q_1 =& r cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3, & 0 < r < \infty \\ q_2 =& r cos\theta_1 cos\theta_2 sen\theta_3, & 0 < \theta_3 < 2\pi \\ q_3 =& r cos\theta_1 sen\theta_2, & -\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \frac{\pi}{2} \\ q_4 =& r sen\theta_1, & -\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Seja $q = q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4$. Logo, substituindo

$$\begin{aligned} q =& q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4 \\ =& r\left(\frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{r}i + \frac{q_3}{r}j + \frac{q_4}{r}k\right) \\ =& r\Big(cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 + cos\theta_1 cos\theta_2 sen\theta_3 i + cos\theta_1 sen\theta_2 j + sen\theta_1 k\Big) \end{aligned}$$

sendo $r > 0$. O logaritmo de q é representado por $ln\, q$ e é definido como a função inversa da função exponencial do tipo quaterniônica. Deste modo $w = ln\, q$ satisfaz a relação:

$$e^w = q.$$

Tome $w = w_1 + \vec{w}$. Como $e^w = e^{w_1 + \vec{w}}$ temos que:

$$e^w = e^{w_1} e^{\vec{w}} = q.$$

Assim,

$$e^{w_1} e^{\vec{w}} = r(cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 + cos\theta_1 cos\theta_2 sen\theta_3 i + cos\theta_1 sen\theta_2 j + sen\theta_1 k).$$

Logo, concluimos que:

$$e^{w_1} = r \Rightarrow w_1 = ln|r|$$

e

$$\vec{w} = ln(cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 + cos\theta_1 cos\theta_2 sen\theta_3 i + cos\theta_1 sen\theta_2 j + sen\theta_1 k).$$

Ou seja,

$$w = ln\, q = ln|r| + ln(cos\theta_1 cos\theta_2 cos\theta_3 + cos\theta_1 cos\theta_2 sen\theta_3 i + cos\theta_1 sen\theta_2 j + sen\theta_1 k).$$

No estudo da Análise Quaterniônica resultados da Análise Complexa Clássica buscam ser generalizados para melhor fundamentar esta teoria. Assim, apresentamos neste capítulo generalizações das funções complexas exponencial, logarítmica e trigonomética, e verificou-se semelhança com os resultados já determinados na Análise Complexa Clássica.

Capítulo 4
INTEGRAÇÃO E DIFERENCIAÇÃO QUATERNIÔNICA

A derivação e integração quaterniônica são mostradas em detalhes em [5], [6] e [16]. No entanto, o intuito do presente capítulo é prosseguir com os métodos e técnicas apresentados nos trabalhos em questão com o objetivo de generalizar alguns resultados, cabe citar a derivada segunda de uma função quaterniônica e suas características. Além disso, os métodos usados em [16] serão usados na demonstração de alguns resultados.

4.1 Derivação e Integração Quaterniônica

Vimos no capítulo 3 que a multiplicação dos quatérnios não é comutativa. Assim, dada uma função quaterniônica f de uma variável quaterniônica definiremos duas integrais $\int f dz$ e $\int dz\, f$:

$$\begin{aligned}\int f dz &= \int (f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4)(dq_1 + idq_2 + jdq_3 + kdq_4)\\ &= \int (f_1dq_1 - f_2dq_2 - f_3dq_3 - f_4dq_4)\\ &\quad + \int (f_2dq_1 + f_1dq_2 - f_4dq_3 + f_3dq_4)i\\ &\quad + \int (f_3dq_1 + f_4dq_2 + f_1dq_3 - f_2dq_4)j\\ &\quad + \int (f_4dq_1 - f_3dq_2 + f_2dq_3 + f_1dq_4)k,\end{aligned} \tag{4.1}$$

e

$$\begin{aligned}\int dzf &= \int (dq_1 + idq_2 + jdq_3 + kdq_4)(f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4)\\ &= \int (dq_1f_1 - dq_2f_2 - dq_3f_3 - dq_4f_4)\\ &\quad + \int (dq_1f_2 + dq_2f_1 + dq_3f_4 - dq_4f_3)i\\ &\quad + \int (dq_1f_3 - dq_2f_4 + dq_3f_1 + dq_4f_2)j\\ &\quad + \int (dq_1f_4 + dq_2f_3 - dq_3f_2 + dq_4f_1)k.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Considere as funções coordenadas $f_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ contínuas e dado um caminho com extremos em $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ e $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ em um domínio simplesmente conexo do espaço quadridimensional.

As integrais $\displaystyle\int fdz$ e $\displaystyle\int dzf$ independem do caminho de acordo com as condições dos seguintes teoremas:

Teorema 4.1.1. *Para todo par de pontos a e b, e qualquer caminho ligando-os em um espaço simplesmente conexo quadridimensional, a integral $\int fdq$ independe do caminho dado se, e somente se, existe uma função $F = F_1 + iF_2 + jF_3 + kF_4$, com $\displaystyle\int_a^b fdq = F(b) - F(a)$ e que satisfaz as seguintes relações:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial q_1} &= \frac{\partial F_2}{\partial q_2} = \frac{\partial F_3}{\partial q_3} = \frac{\partial F_4}{\partial q_4};\\
\frac{\partial F_2}{\partial q_1} &= -\frac{\partial F_1}{\partial q_2} = \frac{\partial F_4}{\partial q_3} = -\frac{\partial F_3}{\partial q_4};\\
\frac{\partial F_3}{\partial q_1} &= -\frac{\partial F_4}{\partial q_2} = -\frac{\partial F_1}{\partial q_3} = \frac{\partial F_2}{\partial q_4};\\
\frac{\partial F_4}{\partial q_1} &= \frac{\partial F_3}{\partial q_2} = -\frac{\partial F_2}{\partial q_3} = -\frac{\partial F_1}{\partial q_4}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Demonstração. A integral $\displaystyle\int_a^b fdq$, citada anteriormente, independerá do caminho se existir uma função F tal que:

$$\int_a^b fdq = \int_a^b dF = \int_a^b d(F_1 + iF_2 + jF_3 + kF_4) = F(b) - F(a),$$

de modo que o valor dessa diferença dependerá unicamente dos pontos extremos.

Supondo a existência de F, temos que as diferenciais totais das suas funções coordenadas são dadas por:

$$\begin{aligned}
dF_1 =& \frac{\partial F_1}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial F_1}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial F_1}{\partial q_3}dq_3 + \frac{\partial F_1}{\partial q_4}dq_4\\
=& f_1dq_1 - f_2dq_2 - f_3dq_3 - f_4dq_4;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dF_2 =& \frac{\partial F_2}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial F_2}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial F_2}{\partial q_3}dq_3 + \frac{\partial F_2}{\partial q_4}dq_4\\
=& f_2dq_1 + f_1dq_2 - f_4dq_3 + f_3dq_4;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dF_3 =& \frac{\partial F_3}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial F_3}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial F_3}{\partial q_3}dq_3 + \frac{\partial F_3}{\partial q_4}dq_4\\
=& f_3dq_1 + f_4dq_2 + f_1dq_3 - f_2dq_4;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dF_4 =& \frac{\partial F_4}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial F_4}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial F_4}{\partial q_3}dq_3 + \frac{\partial F_4}{\partial q_4}dq_4 \\ =& f_4dq_1 - f_3dq_2 + f_2dq_3 + f_1dq_4; \end{aligned}$$

resultam disso as seguintes relações:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial q_1} = \frac{\partial F_2}{\partial q_2} = \frac{\partial F_3}{\partial q_3} = \frac{\partial F_4}{\partial q_4}; \\ f_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial q_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial q_2} = \frac{\partial F_4}{\partial q_3} = -\frac{\partial F_3}{\partial q_4}; \\ f_3 &= \frac{\partial F_3}{\partial q_1} = -\frac{\partial F_4}{\partial q_2} = -\frac{\partial F_1}{\partial q_3} = \frac{\partial F_2}{\partial q_4}; \\ f_4 &= \frac{\partial F_4}{\partial q_1} = \frac{\partial F_3}{\partial q_2} = -\frac{\partial F_2}{\partial q_3} = -\frac{\partial F_1}{\partial q_4}; \end{aligned}$$

concluindo nossa demonstração. □

Teorema 4.1.2. *Para todo par de pontos a e b, e qualquer caminho ligando-os em um espaço simplesmente conexo quadridimensional, a integral* $\int dqf$ *independe do caminho dado se, e somente se, existe uma função* $G = G_1 + iG_2 + jG_3 + kG_4$, *com* $\int_a^b dqf = G(b) - G(a)$, *e que satisfaz as seguintes relações:*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial G_1}{\partial q_1} = \frac{\partial G_2}{\partial q_2} = \frac{\partial G_3}{\partial q_3} = \frac{\partial G_4}{\partial q_4}; \\ &\frac{\partial G_2}{\partial q_1} = -\frac{\partial G_1}{\partial q_2} = -\frac{\partial G_4}{\partial q_3} = \frac{\partial G_3}{\partial q_4}; \\ &\frac{\partial G_3}{\partial q_1} = \frac{\partial G_4}{\partial q_2} = -\frac{\partial G_1}{\partial q_3} = -\frac{\partial G_2}{\partial q_4}; \\ &\frac{\partial G_4}{\partial q_1} = -\frac{\partial G_3}{\partial q_2} = \frac{\partial G_2}{\partial q_3} = -\frac{\partial G_1}{\partial q_4}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Demonstração. A integral $\int_a^b dqf$, citada anteriormente, independerá do caminho se existir uma função G tal que

$$\int_a^b dqf = \int_a^b dG = \int_a^b d(G_1 + iG_2 + jG_3 + kG_4) = G(b) - G(a),$$

de modo que o valor dessa diferença dependerá unicamente dos pontos extremos.

Supondo a existência de G, temos que as diferenciais totais das suas funções coordenadas são dadas por:

$$\begin{aligned} dG_1 =& \frac{\partial G_1}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial G_1}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial G_1}{\partial q_3}dq_3 + \frac{\partial G_1}{\partial q_4}dq_4 \\ =& f_1dq_1 - f_2dq_2 - f_3dq_3 - f_4dq_4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dG_2 =& \frac{\partial G_2}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial G_2}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial G_2}{\partial q_3}dq_3 + \frac{\partial G_2}{\partial q_4}dq_4 \\ =& f_2dq_1 + f_1dq_2 + f_4dq_3 - f_3dq_4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dG_3 =& \frac{\partial G_3}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial G_3}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial G_3}{\partial q_3}dq_3 + \frac{\partial G_3}{\partial q_4}dq_4 \\ =& f_3dq_1 - f_4dq_2 + f_1dq_3 + f_2dq_4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dG_4 =& \frac{\partial G_4}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial G_4}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial G_4}{\partial q_3}dq_3 + \frac{\partial G_4}{\partial q_4}dq_4 \\ =& f_4dq_1 + f_3dq_2 - f_2dq_3 + f_1dq_4; \end{aligned}$$

resultam disso as seguintes relações:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\partial G_1}{\partial q_1} = \frac{\partial G_2}{\partial q_2} = \frac{\partial G_3}{\partial q_3} = \frac{\partial G_4}{\partial q_4}; \\ f_2 &= \frac{\partial G_2}{\partial q_1} = -\frac{\partial G_1}{\partial q_2} = -\frac{\partial G_4}{\partial q_3} = \frac{\partial G_3}{\partial q_4}; \\ f_3 &= \frac{\partial G_3}{\partial q_1} = \frac{\partial G_4}{\partial q_2} = -\frac{\partial G_1}{\partial q_3} = -\frac{\partial G_2}{\partial q_4}; \\ f_4 &= \frac{\partial G_4}{\partial q_1} = -\frac{\partial G_3}{\partial q_2} = \frac{\partial G_2}{\partial q_3} = -\frac{\partial G_1}{\partial q_4}; \end{aligned}$$

concluindo nossa demonstração. □

Os Teoremas 4.1.1. e 4.1.2. podem ser vistos como o análogo quadridimensional ao Teorema de Cauchy em um domínio de duas dimensões. Veja ainda que, as relações (4.3) e (4.4) têm em comum as relações de Cauchy-Riemann que vimos no estudo de Funções de Variáveis Complexas, sendo conhecidas como as Equações de Cauchy-Riemann generalizadas.

Agora, apresentaremos dois teoremas que apresentam as funções $h(q)$ e $g(q)$, definidas em termos da função quaterniônica $f(q)$ cujas coordenadas obedecem as relações de Cauchy-Riemann generalizadas (4.3) e (4.4). As funções $h(q)$ e $g(q)$ são chamadas de derivada quaterniônica à esquerda e derivada quaterniônica à direita de $f(q)$, respectivamente.

Teorema 4.1.3. *Dada uma função $f(q)$ sobre o anel dos quatérnios, $\mathbb{H}$, com funções coordenadas diferenciáveis que satisfazem as relações (4.3), e uma função $h(q)$ definida em termos de $f(q)$ por:*

$$\begin{aligned} h(q) =& \frac{1}{4}\Big[\Big(\frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} + \frac{\partial f_3}{\partial q_3} + \frac{\partial f_4}{\partial q_4}\Big) + \\ & i\Big(\frac{\partial f_2}{\partial q_1} - \frac{\partial f_1}{\partial q_2} + \frac{\partial f_4}{\partial q_3} - \frac{\partial f_3}{\partial q_4}\Big) + \\ & j\Big(\frac{\partial f_3}{\partial q_1} - \frac{\partial f_4}{\partial q_2} - \frac{\partial f_1}{\partial q_3} + \frac{\partial f_2}{\partial q_4}\Big) + \\ & k\Big(\frac{\partial f_4}{\partial q_1} + \frac{\partial f_3}{\partial q_2} - \frac{\partial f_2}{\partial q_3} - \frac{\partial f_1}{\partial q_4}\Big)\Big] \end{aligned} \tag{4.5}$$

então $\displaystyle\int h(q)dq = f(q)$, e portanto $h(q)$ pode ser tratado formalmente como a derivada quaterniônica à esquerda de $f(q)$ e denotado por $h(q) = \dfrac{df_l(q)}{dq}$.

Demonstração. Para a demonstração, iremos fazer a seguinte identificação:

$$h(q) = \frac{1}{4}(h_1 + ih_2 + jh_3 + kh_4).$$

Observando que $dq = dq_1 + idq_2 + jdq_3 + kdq_4$ e usando a multiplicação de quatérnios tem-se:

$$\begin{aligned} \int h(q)dq =& \int \frac{1}{4}(h_1 + ih_2 + jh_3 + kh_4)(dq_1 + idq_2 + jdq_3 + kdq_4) \\ =& \frac{1}{4}\int (h_1dq_1 - h_2dq_2 - h_3dq_3 - h_4dq_4) + \\ & (h_2dq_1 + h_1dq_2 - h_4dq_3 + h_3dq_4)i + \\ & (h_3dq_1 + h_4dq_2 + h_1dq_3 - h_2dq_4)j + \\ & (h_4dq_1 - h_3dq_2 + h_2dq_3 + h_1dq_4)k. \end{aligned}$$

Substituindo as relações (4.3) em $h(q)dq$ temos que $\displaystyle\int h(q)dq$ é dada por:

$$\begin{aligned} \int h(q)dq =& \frac{1}{4}\int 4\Big(\frac{\partial f_1}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial f_1}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial f_1}{\partial q_3}dq_3 + \frac{\partial f_1}{\partial q_4}dq_4\Big) + \\ & 4\Big(\frac{\partial f_2}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial f_2}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial f_2}{\partial q_3}dq_3 + \frac{\partial f_2}{\partial q_4}dq_4\Big)i + \\ & 4\Big(\frac{\partial f_3}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial f_3}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial f_3}{\partial q_3}dq_3 + \frac{\partial f_3}{\partial q_4}dq_4\Big)j + \\ & 4\Big(\frac{\partial f_4}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial f_4}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial f_4}{\partial q_3}dq_3 + \frac{\partial f_4}{\partial q_4}dq_4\Big)k. \end{aligned}$$

Quando aplicamos a regra da cadeia obtemos as diferenciais totais das funções coordenadas, isto é,

$$\begin{aligned}\int h(q)dq =& \int (df_1 + idf_2 + jdf_3 + kdf_4)\\ =& f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4\\ =& f(q).\end{aligned}$$

□

Teorema 4.1.4. *Dada uma função $f(q)$ sobre o anel dos quatérnios, $\mathbb{H}$, com funções coordenadas diferenciáveis que satisfazem as relações (4.4), e uma função $g(q)$ definida em termos de $f(q)$ por:*

$$\begin{aligned}g(q) =& \frac{1}{4}\Big[\Big(\frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} + \frac{\partial f_3}{\partial q_3} + \frac{\partial f_4}{\partial q_4}\Big) +\\ & i\Big(\frac{\partial f_2}{\partial q_1} - \frac{\partial f_1}{\partial q_2} - \frac{\partial f_4}{\partial q_3} + \frac{\partial f_3}{\partial q_4}\Big) +\\ & j\Big(\frac{\partial f_3}{\partial q_1} + \frac{\partial f_4}{\partial q_2} - \frac{\partial f_1}{\partial q_3} - \frac{\partial f_2}{\partial q_4}\Big) +\\ & k\Big(\frac{\partial f_4}{\partial q_1} - \frac{\partial f_3}{\partial q_2} + \frac{\partial f_2}{\partial q_3} - \frac{\partial f_1}{\partial q_4}\Big)\Big],\end{aligned} \tag{4.6}$$

então $\int dqg(q) = f(q)$, e portanto $g(q)$ pode ser tratado formalmente como a derivada quaterniônica à direita de $f(q)$ e denotado por $g(q) = \frac{df_r(q)}{dq}$.

Demonstração. Primeiramente iremos fazer a seguinte identificação:

$$g(q) = \frac{1}{4}(g_1 + ig_2 + jg_3 + kg_4).$$

Observando que $dq = dq_1 + idq_2 + jdq_3 + kdq_4$ e usando a multiplicação de quatérnios tem-se:

$$\begin{aligned}\int dqg(q) =& \int (dq_1 + idq_2 + jdq_3 + kdq_4)\frac{1}{4}(g_1 + ig_2 + jg_3 + kg_4)\\ =& \frac{1}{4}\int (dq_1g_1 - dq_2g_2 - dq3g_3 - dq_4g_4) +\\ & (dq_1g_2 + dq_2g_1 + dq_3g_4 - dq_4g_3)i +\\ & (dq_1g_3 - dq_2g_4 + dq_3g_1 + dq_4g_2)j +\\ & (dq_1g_4 + dq_2g_3 - dq_3g_2 + dq_4g_1)k.\end{aligned}$$

Substituindo as relações (4.4) em $dqg(q)$ temos que $\int dqg(q)$ é dada por:

$$\begin{aligned}\int dqgq =& \frac{1}{4}\int 4\Big(\frac{\partial f_1}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial f_1}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial f_1}{\partial q_3}dq_3 + \frac{\partial f_1}{\partial q_4}dq_4\Big)+\\ & 4\Big(\frac{\partial f_2}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial f_2}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial f_2}{\partial q_3}dq_3 + \frac{\partial f_2}{\partial q_4}dq_4\Big)i+\\ & 4\Big(\frac{\partial f_3}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial f_3}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial f_3}{\partial q_3}dq_3 + \frac{\partial f_3}{\partial q_4}dq_4\Big)j+\\ & 4\Big(\frac{\partial f_4}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial f_4}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial f_4}{\partial q_3}dq_3 + \frac{\partial f_4}{\partial q_4}dq_4\Big)k.\end{aligned}$$

Quando aplicamos a regra da cadeia obtemos as diferenciais totais das funções coordenadas, isto é,

$$\begin{aligned}\int dqg(q) =& \int (df_1 + idf_2 + jdf_3 + kdf_4)\\ =& f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4\\ =& f(q)\end{aligned}$$

$\square$

4.2 Derivadas sucessivas de uma função de uma variável quaterniônica

Veremos agora as derivações sucessivas, até ordem 2, de uma função de uma variável quaterniônica. Inicialmente partindo dos Teoremas 4.1.3. e 4.1.4., definiremos a derivada quaterniônica segunda à esquerda e à direita de uma função quaterniônica f, isto é, $h_1(q) = \dfrac{d^2 f_l(q)}{dq^2}$ e $g_1(q) = \dfrac{d^2 f_r(q)}{dq^2}$, respectivamente.

4.2.1 Derivando $h(q)$

Observe que:

$$h_1(q) = \frac{d^2 f_l(q)}{d^2 q^2}\frac{d}{dq}(\frac{df_l(q)}{dq}) = \frac{dh(q)}{dq}.$$

Pelas coordenadas de $h(q)$ iremos calcular $h_1(q)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
h_1(q) \;=\; & \frac{1}{16}\Bigg[\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_1}+\frac{\partial f_2}{\partial q_2}+\frac{\partial f_3}{\partial q_3}+\frac{\partial f_4}{\partial q_4}\right)\right.\\
& +\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_1}-\frac{\partial f_1}{\partial q_2}+\frac{\partial f_4}{\partial q_3}-\frac{\partial f_3}{\partial q_4}\right)\\
& +\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial f_3}{\partial q_1}-\frac{\partial f_4}{\partial q_2}-\frac{\partial f_1}{\partial q_3}+\frac{\partial f_2}{\partial q_4}\right)\\
& \left.+\frac{\partial}{\partial q_4}\left(\frac{\partial f_4}{\partial q_1}+\frac{\partial f_3}{\partial q_2}-\frac{\partial f_2}{\partial q_3}-\frac{\partial f_1}{\partial q_4}\right)\right)\\
& +i\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_1}-\frac{\partial f_1}{\partial q_2}+\frac{\partial f_4}{\partial q_3}-\frac{\partial f_3}{\partial q_4}\right)\right.\\
& -\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_1}+\frac{\partial f_2}{\partial q_2}+\frac{\partial f_3}{\partial q_3}+\frac{\partial f_4}{\partial q_4}\right)\\
& +\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial f_4}{\partial q_1}+\frac{\partial f_3}{\partial q_2}-\frac{\partial f_2}{\partial q_3}-\frac{\partial f_1}{\partial q_4}\right)\\
& \left.-\frac{\partial}{\partial q_4}\left(\frac{\partial f_3}{\partial q_1}-\frac{\partial f_4}{\partial q_2}-\frac{\partial f_1}{\partial q_3}+\frac{\partial f_2}{\partial q_4}\right)\right)\\
& +j\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f_3}{\partial q_1}-\frac{\partial f_4}{\partial q_2}-\frac{\partial f_1}{\partial q_3}+\frac{\partial f_2}{\partial q_4}\right)\right.\\
& -\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial f_4}{\partial q_1}+\frac{\partial f_3}{\partial q_2}-\frac{\partial f_2}{\partial q_3}-\frac{\partial f_1}{\partial q_4}\right)\\
& -\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_1}+\frac{\partial f_2}{\partial q_2}+\frac{\partial f_3}{\partial q_3}+\frac{\partial f_4}{\partial q_4}\right)\\
& \left.+\frac{\partial}{\partial q_4}\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_1}-\frac{\partial f_1}{\partial q_2}+\frac{\partial f_4}{\partial q_3}-\frac{\partial f_3}{\partial q_4}\right)\right)\\
& +k\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f_4}{\partial q_1}+\frac{\partial f_3}{\partial q_2}-\frac{\partial f_2}{\partial q_3}-\frac{\partial f_1}{\partial q_4}\right)\right.\\
& +\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial f_3}{\partial q_1}-\frac{\partial f_4}{\partial q_2}-\frac{\partial f_1}{\partial q_3}+\frac{\partial f_2}{\partial q_4}\right)\\
& -\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_1}-\frac{\partial f_1}{\partial q_2}+\frac{\partial f_4}{\partial q_3}-\frac{\partial f_3}{\partial q_4}\right)\\
& \left.-\frac{\partial}{\partial q_4}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_1}+\frac{\partial f_2}{\partial q_2}+\frac{\partial f_3}{\partial q_3}+\frac{\partial f_4}{\partial q_4}\right)\right)\Bigg].
\end{aligned}$$

Fazendo os cálculos concluimos que:

$$\begin{aligned}
h_1(q) \;=\; & \frac{1}{16}\left[\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_4^2}\right.\right.\\
& +2\left.\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1\partial q_2}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1\partial q_3}+\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1\partial q_4}\right)\right)\\
& +i\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_2^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_3^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_4^2}\right.\\
& +2\left.\left(\frac{-\partial^2 f_1}{\partial q_1\partial q_2}+\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1\partial q_3}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1\partial q_4}\right)\right)\\
& +j\left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2^2}-\frac{\partial f_3}{\partial q_3^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_4^2}\right.\\
& +2\left.\left(\frac{-\partial^2 f_4}{\partial q_1\partial q_2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1\partial q_3}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1\partial q_4}\right)\right)\\
& +k\left(\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1^2}-\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_2^2}-\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_3^2}-\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_4^2}\right.\\
& +2\left.\left.\left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1\partial q_2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1\partial q_3}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1\partial q_4}\right)\right)\right].
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Derivando parcialmente todos os membros das igualdades em (4.3) decorrentes das condições de Cauchy-Riemann generalizadas em relação a q_1 temos:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2}=\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1\partial q_2}=\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1\partial q_3}=\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1\partial q_4}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1^2} &= -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1\partial q_2}=\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1\partial q_3}=-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1\partial q_4}\\
\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1^2} &= -\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1\partial q_2}=-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1\partial q_3}=\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1\partial q_4}\\
\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1^2} &= \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1\partial q_2}=-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1\partial q_3}=-\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1\partial q_4}.
\end{aligned}$$

Aplicando essas igualdades em (4.7), obtemos:

$$\begin{aligned}
h_1(q) \;=\; & \frac{1}{16}\left[\left(7\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_4^2}\right)\right.\\
& +i\left(7\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_2^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_3^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_4^2}\right)\\
& +j\left(7\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_3^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_4^2}\right)\\
& +k\left.\left(7\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1^2}-\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_2^2}-\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_3^2}-\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_4^2}\right)\right].
\end{aligned} \tag{4.8}$$

As quatro sequências de igualdades abaixo são encontradas quando derivamos parcialmente as igualdades em (4.3) decorrentes das condições de Cauchy-Riemann generalizadas em relação a q_1, q_2, q_3 e q_4 e serão usadas para simplificar a estrutura de $h_1(q)$.

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2^2} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3^2} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_4^2}$$
$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1^2} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_2^2} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_3^2} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_4^2}$$
$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1^2} = -\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2^2} = -\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_3^2} = -\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_4^2}$$
$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1^2} = -\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_2^2} = -\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_3^2} = -\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_4^2}$$

Utilizando as igualdades acima em (4.8) obtemos,

$$h_1(q) = \frac{10}{16}\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2} + i\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1^2} + j\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1^2} + k\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1^2}\right). \tag{4.9}$$

Teorema 4.2.1. *Se f é uma função quaterniônica que satisfaz as equações de Cauchy-Rieman generalizadas e h_1 a sua derivada quaterniônica segunda à esquerda, então*

$$h_1(q) = -\frac{5}{8}(\Delta f_1 + i\Delta f_2 + j\Delta f_3 + k\Delta f_4)$$

em que Δ é o operador laplaciano.

Demonstração. Procedendo de forma análoga ao que fizemos para concluir a igualdade em (4.9) temos o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
h_1(q) =& \frac{10}{16}\Big(\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2} + i\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1^2} + j\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1^2} + k\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1^2}\Big) \\
=& -\frac{10}{16}\Big(\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2^2} + i\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_2^2} + j\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2^2} + k\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_2^2}\Big) \\
=& -\frac{10}{16}\Big(\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3^2} + i\frac{\partial^3 f_2}{\partial q_3^2} + j\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_3^2} + k\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_3^2}\Big) \\
=& -\frac{10}{16}\Big(\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_4^2} + i\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_4^2} + j\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_4^2} + k\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_4^2}\Big)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Somando as quatro igualdades em (4.10) e fazendo os cálculos concluimos que

$$h_1(q) = -\frac{5}{8}(\Delta f_1 + i\Delta f_2 + j\Delta f_3 + k\Delta f_4) \tag{4.11}$$

□

4.2.2 Derivando $g(q)$

Agora vamos desenvolver $g_1(q)$ observando que

$$g_1(q) = \frac{d^2 f_r(q)}{dq^2}\frac{d}{dq}(\frac{df_r(q)}{dq}) = \frac{dg(q)}{dq}.$$

Iremos encontrar $g_1(q)$ utilizando as coordenadas de $g(q)$ analogamente ao que fizemos com $h_1(q)$ anteriormente. Assim,

$$\begin{aligned} g_1(q) \;=\; & \frac{1}{16}\left[\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_1}+\frac{\partial f_2}{\partial q_2}+\frac{\partial f_3}{\partial q_3}+\frac{\partial f_4}{\partial q_4}\right)\right.\right. \\ & +\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_1}-\frac{\partial f_1}{\partial q_2}-\frac{\partial f_4}{\partial q_3}+\frac{\partial f_3}{\partial q_4}\right) \\ & +\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial f_3}{\partial q_1}+\frac{\partial f_4}{\partial q_2}-\frac{\partial f_1}{\partial q_3}-\frac{\partial f_2}{\partial q_4}\right) \\ & \left.+\frac{\partial}{\partial q_4}\left(\frac{\partial f_4}{\partial q_1}-\frac{\partial f_3}{\partial q_2}+\frac{\partial f_2}{\partial q_3}-\frac{\partial f_1}{\partial q_4}\right)\right) \\ & +i\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_1}-\frac{\partial f_1}{\partial q_2}-\frac{\partial f_4}{\partial q_3}+\frac{\partial f_3}{\partial q_4}\right)\right. \\ & -\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_1}+\frac{\partial f_2}{\partial q_2}+\frac{\partial f_3}{\partial q_3}+\frac{\partial f_4}{\partial q_4}\right) \\ & -\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial f_4}{\partial q_1}-\frac{\partial f_3}{\partial q_2}+\frac{\partial f_2}{\partial q_3}-\frac{\partial f_1}{\partial q_4}\right) \\ & \left.+\frac{\partial}{\partial q_4}\left(\frac{\partial f_3}{\partial q_1}+\frac{\partial f_4}{\partial q_2}-\frac{\partial f_1}{\partial q_3}-\frac{\partial f_2}{\partial q_4}\right)\right) \\ & +j\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f_3}{\partial q_1}+\frac{\partial f_4}{\partial q_2}-\frac{\partial f_1}{\partial q_3}-\frac{\partial f_2}{\partial q_4}\right)\right. \\ & +\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial f_4}{\partial q_1}-\frac{\partial f_3}{\partial q_2}+\frac{\partial f_2}{\partial q_3}-\frac{\partial f_1}{\partial q_4}\right) \\ & -\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_1}+\frac{\partial f_2}{\partial q_2}+\frac{\partial f_3}{\partial q_3}+\frac{\partial f_4}{\partial q_4}\right) \\ & \left.-\frac{\partial}{\partial q_4}\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_1}-\frac{\partial f_1}{\partial q_2}-\frac{\partial f_4}{\partial q_3}+\frac{\partial f_3}{\partial q_4}\right)\right) \\ & +k\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f_4}{\partial q_1}-\frac{\partial f_3}{\partial q_2}+\frac{\partial f_2}{\partial q_3}-\frac{\partial f_1}{\partial q_4}\right)\right. \\ & -\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial f_3}{\partial q_1}+\frac{\partial f_4}{\partial q_2}-\frac{\partial f_1}{\partial q_3}-\frac{\partial f_2}{\partial q_4}\right) \\ & +\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_1}-\frac{\partial f_1}{\partial q_2}-\frac{\partial f_4}{\partial q_3}+\frac{\partial f_3}{\partial q_4}\right) \\ & \left.\left.-\frac{\partial}{\partial q_4}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_1}+\frac{\partial f_2}{\partial q_2}+\frac{\partial f_3}{\partial q_3}+\frac{\partial f_4}{\partial q_4}\right)\right)\right]. \end{aligned}$$

Isso resulta:

$$\begin{aligned}
g_1(q) &= \frac{1}{16}\Bigg[\Bigg(\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_4^2}\\
&+2\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1\partial q_2}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1\partial q_3}+\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1\partial q_4}\right)\Bigg)\\
&+i\Bigg(\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_2^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_3^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_4^2}\\
&+2\left(\frac{-\partial^2 f_1}{\partial q_1\partial q_2}-\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1\partial q_3}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1\partial q_4}\right)\Bigg)\\
&+j\Bigg(\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_3^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_4^2}\\
&+2\left(\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1\partial q_2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1\partial q_3}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1\partial q_4}\right)\Bigg)\\
&+k\Bigg(\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1^2}-\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_2^2}-\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_3^2}-\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_4^2}\\
&+2\left(-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1\partial q_2}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1\partial q_3}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1\partial q_4}\right)\Bigg)\Bigg]. \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Derivando parcialmente todos os membros das igualdades decorrentes em (4.4) das condições de Cauchy-Riemann generalizadas em relação a q_1 temos:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2}=\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1\partial q_2}=\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_3\partial q_1}=\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_4\partial q_1}$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1^2}=-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1\partial q_2}=-\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1\partial q_3}=\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1\partial q_4}$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1^2}=\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1\partial q_2}=-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1\partial q_3}=-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1\partial q_4}$$

$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1^2}=-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1\partial q_2}=\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1\partial q_3}=-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1\partial q_4}.$$

Utilizando essas igualdades em (4.12), obtemos:

$$\begin{aligned}
g_1(q) &= \frac{1}{16}\Bigg[\left(7\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_4^2}\right)\\
&+i\left(7\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_2^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_3^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_4^2}\right)\\
&+j\left(7\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_3^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_4^2}\right)\\
&+k\left(7\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1^2}-\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_2^2}-\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_3^2}-\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_4^2}\right)\Bigg]. \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

As quatro sequências de igualdades abaixo são encontradas quando derivamos parcialmente as igualdades em (4.4) decorrentes das condições de Cauchy-Riemann generalizadas em relação a q_1, q_2, q_3 e q_4 e serão usadas para simplificar a estrutura de $g_1(q)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2} &= -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2^2} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3^2} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_4^2}\\
\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1^2} &= -\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_2^2} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_3^2} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_4^2}\\
\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1^2} &= -\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2^2} = -\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_3^2} = -\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_4^2}\\
\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1^2} &= -\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_2^2} = -\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_3^2} = -\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_4^2}
\end{aligned}$$

Portanto, aplicando as igualdades acima em (4.13) temos:

$$g_1(q) = \frac{10}{16}\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2} + i\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1^2} + j\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1^2} + k\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1^2}\right). \tag{4.14}$$

Teorema 4.2.2. *Se f é uma função quaterniônica que satisfaz as equações de Cauchy-Rieman generalizadas e g_1 a sua derivada quaterniônica segunda à direita, então*

$$g_1(q) = -\frac{5}{8}(\Delta f_1 + i\Delta f_2 + j\Delta f_3 + k\Delta f_4)$$

em que Δ é o operador laplaciano.

Demonstração. Procedendo de forma análoga ao que fizemos para concluir a igualdade em (4.14) temos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
g_1(q) =& \frac{10}{16}\Big(\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2} + i\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1^2} + j\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1^2} + k\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1^2}\Big)\\
=& -\frac{10}{16}\Big(\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2^2} + i\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_2^2} + j\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2^2} + k\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_2^2}\Big)\\
=& -\frac{10}{16}\Big(\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3^2} + i\frac{\partial^3 f_2}{\partial q_3^2} + j\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_3^2} + k\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_3^2}\Big)\\
=& -\frac{10}{16}\Big(\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_4^2} + i\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_4^2} + j\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_4^2} + k\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_4^2}\Big).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Somando as quatro igualdades em (4.15) e fazendo os cálculos concluimos:

$$g_1(q) = -\frac{5}{8}(\Delta f_1 + i\Delta f_2 + j\Delta f_3 + k\Delta f_4). \tag{4.16}$$

□

Os Teoremas 4.2.1. e 4.2.2. nos fornecem um resultado imediato:

Teorema 4.2.3. *Uma função quaterniônica f que satisfaz as equações de Cauchy-Riemann tem as suas derivadas quaterniônicas segunda à esquerda e à direita iguais.*

Demonstração. De fato, por (4.11) e (4.16) concluimos que h_1 e g_1 são iguais. □

4.3 Equações de Laplace para funções quaterniônicas

4.3.1 Caso Complexo

Definição 4.3.1. *Considere um conjunto aberto $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dita harmônica se for solução da equação de Laplace*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Teorema 4.3.2. *Se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é uma função analítica em um conjunto aberto $A \subseteq \mathbb{C}$, então u e v são funções harmônicas em $A \subseteq \mathbb{R}^2$.*

Demonstração. Seja $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função analítica em uma região A. Como f é analítica em A então f satisfaz as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) \tag{4.17}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z). \tag{4.18}$$

Derivando (4.17) em relação a x e (4.18) em relação a y, obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(z) \text{ e } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z) = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}(z).$$

Então,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \tfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \tfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

Logo, a parte real de uma função analítica é uma função harmônica.
Analogamente, prova-se que v é uma função harmônica. □

4.3.2 Caso Quaterniônico

Nesta seção mostraremos que as equações de Laplace da Análise Complexa podem ser generalizadas para as funções quaterniônicas. Para isso usamos as equações de Cauchy-Riemann generalizadas e suponhamos que as funções coordenadas f_i, $i = 1, 2, 3, 4$, de f são de classe C^2 e, portanto, o Teorema de Schwartz é válido.
Por (4.3), temos que as equações de Cauchy-Riemann são dadas por:

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_1} = \frac{\partial f_2}{\partial q_2} = \frac{\partial f_3}{\partial q_3} = \frac{\partial f_4}{\partial q_4}; \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial q_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_2} = \frac{\partial f_4}{\partial q_3} = -\frac{\partial f_3}{\partial q_4}; \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial q_1} = -\frac{\partial f_4}{\partial q_2} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_3} = \frac{\partial f_2}{\partial q_4}; \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial q_1} = \frac{\partial f_3}{\partial q_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial q_3} = -\frac{\partial f_1}{\partial q_4}. \tag{4.22}$$

Inicialmente iremos derivar as equações (4.19), (4.20), (4.21), (4.22) em relação a q_1, q_2, q_3 e q_4 e, a partir disso, concluir que as equações de Laplace são válidas. Asim, derivando a equação (4.19) em relação a q_1, q_2, q_3 e q_4 temos:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1 \partial q_3} = \frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1 \partial q_4} \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_2^2} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2 \partial q_3} = \frac{\partial^2 f_4}{\partial q_2 \partial q_4} \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3 \partial q_1} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_3 \partial q_2} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_3^2} = \frac{\partial^2 f_4}{\partial q_4 \partial q_3} \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1 \partial q_4} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_4 \partial q_2} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_4 \partial q_3} = \frac{\partial^2 f_4}{\partial q_4^2}.
\end{gathered} \tag{4.23}$$

Derivando as condições da equação (4.20) obtemos:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1^2} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2 \partial q_1} = \frac{\partial^2 f_4}{\partial q_3 \partial q_1} = -\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_4 \partial q_1} \\
\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1 \partial q_2} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2^2} = \frac{\partial^2 f_4}{\partial q_3 \partial q_2} = -\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_4 \partial q_2} \\
\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1 \partial q_3} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2 \partial q_3} = \frac{\partial^2 f_4}{\partial q_3^2} = -\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_4 \partial q_3} \\
\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1 \partial q_4} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_2 \partial q_4} = \frac{\partial^2 f_4}{\partial q_3 \partial q_4} = -\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_4^2}.
\end{gathered} \tag{4.24}$$

Derivando as condições da equação (4.21) obtemos:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1^2} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3 \partial q_1} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_4 \partial q_1} = -\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_2 \partial q_1} \\
\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1 \partial q_2} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3 \partial q_2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_4 \partial q_2} = -\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_2^2} \\
\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1 \partial q_3} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_4 \partial q_3} = -\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_2 \partial q_3} \\
\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1 \partial q_4} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3 \partial q_4} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial q_4^2} = -\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_2 \partial q_4}.
\end{gathered} \tag{4.25}$$

Derivando as condições da equação (4.22) obtemos:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1^2} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_4 \partial q_1} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_3 \partial q_1} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2 \partial q_1} \\
\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1 \partial q_2} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_4 \partial q_2} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_3 \partial q_2} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2^2} \\
\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1 \partial q_3} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_4 \partial q_3} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_3^2} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2 \partial q_3} \\
\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1 \partial q_4} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_4^2} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_3 \partial q_4} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2 \partial q_4}.
\end{gathered} \tag{4.26}$$

Pelas equações (4.23), (4.24), (4.25) e (4.26) temos os seguintes resultados:

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_1^2}+\frac{\partial f_1}{\partial q_2^2}+\frac{\partial f_1}{\partial q_3^2}+\frac{\partial f_1}{\partial q_4^2}=\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_2\partial q_1}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1\partial q_2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_4\partial q_3}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_3\partial q_4}=0 \tag{4.27}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial q_1^2}+\frac{\partial f_2}{\partial q_2^2}+\frac{\partial f_2}{\partial q_3^2}+\frac{\partial f_2}{\partial q_4^2}=-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1\partial q_2}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_1\partial q_2}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_4\partial q_3}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial q_3\partial q_4}=0 \tag{4.28}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial q_1^2}+\frac{\partial f_3}{\partial q_2^2}+\frac{\partial f_3}{\partial q_3^2}+\frac{\partial f_3}{\partial q_4^2}=-\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_2\partial q_1}+\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_1\partial q_2}+\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_4\partial q_3}-\frac{\partial^2 f_4}{\partial q_3\partial q_4}=0 \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial q_1^2}+\frac{\partial f_4}{\partial q_2^2}+\frac{\partial f_4}{\partial q_3^2}+\frac{\partial f_4}{\partial q_4^2}=\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_2\partial q_1}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_1\partial q_2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_4\partial q_3}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial q_3\partial q_4}=0 \tag{4.30}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\Delta f_1 &= 0;\\ \Delta f_2 &= 0;\\ \Delta f_3 &= 0;\\ \Delta f_4 &= 0.\end{aligned} \tag{4.31}$$

Por (4.31) concluimos que se uma função quaterniônica satisfaz as condições de Cauchy-Riemann, o laplaciano das suas funções coordenadas é nulo.
Além disso, obtemos um novo resultado:

Teorema 4.3.3. *Uma função quaterniônica f que satisfaz as condições de Cauchy-Riemann generalizadas tem as suas derivadas quaterniônicas segunda à esquerda e à direita nulas.*

Demonstração. De fato, pelos Teoremas 4.2.1. e 4.2.2. temos

$$h_1(q)=g_1(q)=-\frac{5}{8}(\Delta f_1+i\Delta f_2+j\Delta f_3+k\Delta f_4) \tag{4.32}$$

Utilizando (4.31) em (4.32) concluimos que

$$h_1(q)=g_1(q)=0.$$

□

O teorema seguinte é uma consequência do teorema 4.3.1.:

Teorema 4.3.4. *Se f é uma função quaterniônica que satisfaz as equações de Cauchy-Riemann generalizadas, então as suas derivadas quaterniônicas à esquerda e à direita são funções constantes.*

Demonstração. De fato, como $h_1(q) = g_1(q) = 0$ concluimos que as funções h e g dadas pelos Teoremas 4.1.3. e 4.1.4. são constantes. $\square$

Inicialmente apresentamos a derivada segunda de uma função quaterniônica, em seguida a generalização das equações de Laplace para o caso quaterniônico e, finalmente, resultados novos foram apresentados como a derivada quaterniônica segunda de uma função escrita em função do laplaciano de suas funções coordenadas. A partir disso concluimos que se a função satisfaz as condições de Cauchy-Riemann, então a sua derivada quaterniônica segunda é zero.

Capítulo 5

FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY E SÉRIE DE POTÊNCIAS PARA FUNÇÕES QUATERNIÔNICAS

A fórmula integral de Cauchy e as séries de Potências apresentadas neste capítulo tem uma grande utilidade no desenvolvimento da teoria de integração na variável quaterniônica. Assim, serão apresentados aqui alguns resultados que fundamentam esta teoria. Todos os detalhes desta teoria pode ser lida com detalhes em [2], [4], [6], [7] e [16]. Além de, por fim, apresentar uma demonstração, baseada em hipóteses adicionais do Teorema de Cauchy (nulidade).

5.1 Fórmula Integral de Cauchy e Fórmula geral de Cauchy-caso quaterniônico

Nesta seção iremos apresentar uma generalização da fórmula integral de Cauchy que vimos na Análise Complexa para o caso quaterniônico.

Teorema 5.1.1. *Seja Ω um domínio simplesmente conexo num espaço quadridimensional e $f(q)$ uma função regular em Ω. Então,*

$$\int_{\varphi} \frac{f(q)}{q-q_0}dq = f(q_0)\pi(i+j+2k) \tag{5.1}$$

onde φ é uma hipersuperfície fechada simples em Ω e q_0 um ponto qualquer em φ.

Demonstração. Seja φ_0 uma hiperesfera em torno do ponto q_0, $|q-q_0| = r_0$, onde r_0 é suficientemente pequeno para que φ_0 esteja no interior de φ. Como a função $\dfrac{f(q)}{q-q_0}$ é regular em $\Omega/\{q_0\}$, temos:

$$\int_{\varphi} \frac{f(q)}{q-q_0}dq = \int_{\varphi_0} \frac{f(q)}{q-q_0}dq.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{\varphi} \frac{f(q)}{q-q_0}dq &= \int_{\varphi_0} \frac{f(q)}{q-q_0}dq \\ &= \int_{\varphi_0} [\frac{f(q_0)+f(q)-f(q_0)}{q-q_0}]dq \\ &= f(q_0)\int_{\varphi_0} \frac{dq}{q-q_0} + \int_{\varphi_0} \frac{f(q)-f(q_0)}{q-q_0}dq.\end{aligned}$$

Podemos escrever o quatérnio $q - q_0$ da seguinte forma:

$$q - q_0 = r_0 e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k}, \tag{5.2}$$

onde $r_0 > 0$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \theta_3 \leq 2\pi$.
Segue de (5.2) que:

$$dq = d(r_0 e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k}) = r_0 d(e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k}).$$

Daí verificamos que:

$$\begin{aligned} d(e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k}) =& \frac{\partial (e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k})}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial (e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k})}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \frac{\partial (e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k})}{\partial \theta_3} d\theta_3 \\ =& (i d\theta_1 + j d\theta_2 + k d\theta_3) e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k}. \end{aligned}$$

Utilizando a expressão (5.2) e a diferencial dada acima temos:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_0} \frac{dq}{q - q_0} =& \int_{\varphi_0} \frac{r_0 e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k}}{r_0 e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k}} (i d\theta_1 + j d\theta_2 + k d\theta_3) \\ =& \int_{\varphi_0} (i d\theta_1 + j d\theta_2 + k d\theta_3) \\ =& i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_1 + j \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta_2 + k \int_0^{2\pi} d\theta_3 \\ =& \pi(i + j + 2k) \end{aligned}$$

Usando agora o fato de f ser contínua no ponto q_0, para $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$, tal que

$|q-q_0|<0$, o que implica que $|f(q)-f(q_0)|<\epsilon=\frac{\epsilon_0}{4\pi}$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\Big|\int_{\varphi_0}\frac{f(q)-f(q_0)}{q-q_0}dq\Big| =&\Big|\int_{\varphi_0}\frac{f(q)-f(q_0)}{r_0e^{\theta_1 i+\theta_2 j+\theta_3 k}}r_0e^{\theta_1 i+\theta_2 j+\theta_3 k}(id\theta_1+jd\theta_2+kd\theta_3)\Big|\\
=&\Big|\int_{\varphi_0}(f(q)-f(q_0))(id\theta_1+jd\theta_2+kd\theta_3)\Big|\\
=&\Big|\int_0^{2\pi}(f(q)-f(q_0))id\theta_1+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(f(q)-f(q_0))jd\theta_2+\\
&+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(f(q)-f(q_0))kd\theta_3\Big|\\
&\leq\Big|\int_0^{2\pi}(f(q)-f(q_0))id\theta_1\Big|+\Big|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(f(q)-f(q_0))jd\theta_2\Big|+\\
&+\Big|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(f(q)-f(q_0))kd\theta_3\Big|\\
&<\int_0^{2\pi}|f(q)-f(q_0)|d\theta_1+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|f(q)-f(q_0)|d\theta_2+\\
&+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|f(q)-f(q_0)|d\theta_3\\
&<\int_0^{2\pi}\epsilon d\theta_1+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\epsilon d\theta_2+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\epsilon d\theta_3\\
=&2\pi\epsilon+\pi\epsilon+\pi\epsilon\\
=&4\pi\frac{\epsilon_0}{4\pi}=\epsilon_0.
\end{aligned}
$$

Como $\epsilon\to 0$, tem-se:

$$\int_{\varphi_0}\frac{f(q)-f(q_0)}{q-q_0}dq=0.$$

Logo,

$$\int_{\varphi}\frac{f(q)}{q-q_0}dq=f(q_0)\pi(i+j+2k),$$

o que conclui a demonstração. □

A seguir, apresentamos dois teoremas que são formulações equivalentes para a Fórmula Integral de Cauchy. As provas serão mostradas em partes, pois o restante final é análogo ao teorema anterior.

Teorema 5.1.2. *Seja Ω um domínio simplesmente conexo num espaço quadridimensional e $f(q)$ uma função regular em Ω. Então,*

$$\int_{\varphi}\frac{f(q)}{q-q_0}dq=f(q_0)\pi(i+2j+k) \tag{5.3}$$

onde φ é uma hipersuperfície fechada simples em Ω e q_0 um ponto qualquer em φ.

Demonstração. Seja φ_0 uma hiperesfera em torno do ponto q_0, $|q-q_0| = r_0$, onde r_0 é suficientemente pequeno para que φ_0 esteja no interior de φ. Como a função $\dfrac{f(q)}{q-q_0}$ é regular em $\Omega/\{q_0\}$, temos:

$$\int_{\varphi} \frac{f(q)}{q-q_0} dq = \int_{\varphi_0} \frac{f(q)}{q-q_0} dq.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{\varphi} \frac{f(q)}{q-q_0} dq &= \int_{\varphi_0} \frac{f(q)}{q-q_0} dq \\ &= \int_{\varphi_0} \Big[\frac{f(q_0)+f(q)-f(q_0)}{q-q_0}\Big] dq \\ &= f(q_0) \int_{\varphi_0} \frac{dq}{q-q_0} + \int_{\varphi_0} \frac{f(q)-f(q_0)}{q-q_0} dq.\end{aligned}$$

Podemos escrever o quatérnio $q-q_0$ da seguinte forma:

$$q - q_0 = r_0 e^{\theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k},$$

onde $r_0 > 0$. Fazendo agora $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_3 \leq \frac{\pi}{2}$ e procedendo de forma análoga à demonstração do Teorema 5.1.1. concluimos:

$$\int_{\varphi} \frac{f(q)}{q-q_0} dq = f(q_0)\pi(i+2j+k).$$

□

Teorema 5.1.3. *Seja Ω um domínio simplesmente conexo num espaço quadridimensional e $f(q)$ uma função regular em Ω. Então,*

$$\int_{\varphi} \frac{f(q)}{q-q_0} dq = f(q_0)\pi(2i+j+k) \tag{5.4}$$

onde φ é uma hipersuperfície fechada simples em Ω e q_0 um ponto qualquer em φ.

Demonstração. Seja φ_0 uma hiperesfera em torno do ponto q_0, $|q-q_0| = r_0$, onde r_0 é suficientemente pequeno para que φ_0 esteja no interior de φ. Como a função $\dfrac{f(q)}{q-q_0}$ é regular em $\Omega/\{q_0\}$, temos:

$$\int_{\varphi} \frac{f(q)}{q-q_0} dq = \int_{\varphi_0} \frac{f(q)}{q-q_0} dq.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{\varphi}\frac{f(q)}{q-q_0}dq &= \int_{\varphi_0}\frac{f(q)}{q-q_0}dq\\ &= \int_{\varphi_0}\Big[\frac{f(q_0)+f(q)-f(q_0)}{q-q_0}\Big]dq\\ &= f(q_0)\int_{\varphi_0}\frac{dq}{q-q_0}+\int_{\varphi_0}\frac{f(q)-f(q_0)}{q-q_0}dq.\end{aligned}$$

Podemos escrever o quatérnio $q-q_0$ da seguinte forma:

$$q-q_0 = r_0 e^{\theta_1 i+\theta_2 j+\theta_3 k},$$

onde $r_0 > 0$. Tomando $0 \le \theta_1 \le 2\pi, -\frac{\pi}{2} \le \theta_2 \le \frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2} \le \theta_3 \le \frac{\pi}{2}$ e procedendo de forma análoga à demonstração do Teorema 5.1.1. concluimos:

$$\int_{\varphi}\frac{f(q)}{q-q_0}dq = f(q_0)\pi(2i+j+k).$$

□

O teorema seguinte é uma consequência dos Teoremas 5.1.1., 5.1.2. e 5.1.3. e nos dá uma “fórmulação fechada”para a Fórmula Integral de Cauchy.

Teorema 5.1.4. *Seja Ω um domínio simplesmente conexo num espaço quadridimensional e $f(q)$ uma função regular em Ω. Então,*

$$\int_{\varphi}\frac{f(q)}{q-q_0}dq = \frac{4}{3}\pi f(q_0)(i+j+k),$$

onde φ é uma hipersuperfície fechada simples em Ω e q_0 um ponto qualquer em φ.

Demonstração. Por (5.1), (5.2) e (5.4) temos

$$\begin{aligned}\int_{\varphi}\frac{f(q)}{q-q_0}dq &= f(q_0)\pi(i+j+2k)\\ &= f(q_0)\pi(i+2j+k)\\ &= f(q_0)\pi(2i+j+k).\end{aligned}$$

Somando as igualdades acima concluimos que

$$\int_{\varphi}\frac{f(q)}{q-q_0}dq = \frac{4}{3}\pi f(q_0)(i+j+k).$$

□

Agora iremos mostrar a Fórmula geral de Cauchy que será importante para resultados futuros.

Considerando a fórmula integral de Cauchy dada em (5.1) temos:

$$f(q_0) = \frac{1}{\pi(i+j+2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q)}{q-q_0} dq.$$

Colocando q' como variável de integração e q como ponto do domínio Ω, a expressão é reeescrita da seguinte maneira:

$$f(q) = \frac{1}{\pi(i+j+2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{q'-q} dq'.$$

Afim de determinar a derivada $f'(q)$ devemos tomar a diferença:

$$\begin{aligned} f(q+\Delta q) - f(q) =& \frac{1}{\pi(i+j+2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{q'-q-\Delta q} dq' - \frac{1}{\pi(i+j+2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{q'-q} dq', \\ =& \frac{1}{\pi(i+j+2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')(q'-q) - f(q')(q'-q-\Delta q)}{(q'-q)(q'-q-\Delta q)} dq', \\ =& \frac{1}{\pi(i+j+2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')\Delta q}{(q'-q)(q'-q-\Delta q)} dq', \\ =& \frac{\Delta q}{\pi(i+j+2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{(q'-q)(q'-q-\Delta q)} dq'. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{f(q+\Delta q) - f(q)}{\Delta q} = \frac{1}{\pi(i+j+2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{(q'-q)(q'-q-\Delta q)} dq'.$$

Fazendo Δq tender para zero, chegamos a expressão:

$$f'(q) = \frac{1}{\pi(i+j+2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{(q'-q)^2} dq'.$$

Afim de assegurar o que foi feito, é necessário mostrar que a diferença:

$$\zeta = \frac{1}{\pi(i+j+2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{(q'-q)^2} dq' - \frac{1}{\pi(i+j+2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{(q'-q)(q'-q-\Delta q)} dq',.$$

tende para 0 quando $\Delta q \to 0$. Fazendo a diferença, segue-se:

$$\zeta = -\frac{\Delta q}{\pi(i+j+2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{(q'-q)^2(q'-q-\Delta q)} dq'..$$

Observe que:

$$|q'-q|^2 \geq d^2, \forall q \in \Omega \Rightarrow \frac{1}{|q'-q|^2} \leq \frac{1}{d^2}.$$

Pela desigualdade triangular:

$$d \leq |q'-q| = |q'-q-\Delta q + \Delta q| \leq |q'-q-\Delta q| + |\Delta q|$$

Fazendo $|\Delta q| \leq \frac{d}{2}$ temos $-|\Delta q| \geq -\frac{d}{2}$. Logo,

$$\frac{1}{2}d \leq d - |\Delta q| \leq |q' - q - \Delta q| \Rightarrow \frac{1}{|q' - q - \Delta q|} \leq \frac{2}{d}.$$

A função $f(q')$ é contínua e limitada em φ, ou seja, $|f'(q)| < M$. Considere A a área da hiperesfera de raio d e centrada em q. Assim,

$$|\zeta| = \frac{|\Delta q|}{6\pi}\left|\int_{\varphi} \frac{f(q')}{(q'-q)^2(q'-q-\Delta q)}dq'\right|..$$

Logo,

$$|\zeta| < \frac{|\Delta q|}{3\pi}MA\frac{1}{d^3}$$

Daí, resulta que $\zeta \to 0$ quando $\Delta q \to 0$. Portanto,

$$f"(q) = \frac{2!}{\pi(i+j+2k)}\int_{\varphi}\frac{f(q')}{(q'-q)^3}dq'.$$

Procedendo indutivamente segue-se:

$$f^n(q) = \frac{n!}{\pi(i+j+2k)}\int_{\varphi}\frac{f(q')}{(q'-q)^{n+1}}dq'. \tag{5.5}$$

A igualdade acima é chamada de **Fórmula Geral de Cauchy** para funções quaterniônicas.

5.2 *Série de Potências para funções quaterniônicas*

O desenvolvimento em série de potências é um recurso natural para determinar como uma função pode ser expandida em série de potências. Isso ajuda na determinação de integração em alguns casos.

Em Análise Complexa temos que a série de Taylor centrada em a de uma função analítica é dada por

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1!}f'(z) + \frac{(z-a)^2}{2!}f"(z) + \ldots + \frac{(z-a)^n}{n!}f^n(z) + R_n(z)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n,$$

em que $a_n = \frac{f^n(a)}{n!}$ e $\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0$.

Para o caso em que $a = 0$, a série é chamada de Série de Maclaurin.

Para a determinação da série de Taylor para funções quaterniônicas considere uma função quaterniônica que tem derivadas em uma vizinhança do ponto $q = a$ e seja a hiperesfera que existe naquela vizinhança e tem centro em a.

Considere também a fórmula integral de Cauchy:

$$f(q) = \frac{1}{\pi(i+j+2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{q'-q} dq' \tag{5.6}$$

onde q é um ponto arbitrário fixado no interior de Ω e q' é a variável de integração.

Note que:

$$\frac{1}{q'-q} = \frac{1}{(q'-a)-(q-a)} = \frac{1}{(q'-a)(1-\frac{q-a}{q'-a})}.$$

Dados q e q' segue-se que

$$\left|\frac{q-a}{q'-a}\right| < 1.$$

Além disso, temos

$$\frac{1}{1-\frac{q-a}{q'-a}} = 1 + \frac{q-a}{q'-a} + \left[\frac{q-a}{q'-a}\right]^2 + \ldots + \left[\frac{q-a}{q'-a}\right]^n + \left[\frac{q-a}{q'-a}\right]^{n+1} + \ldots, \tag{5.7}$$

que é determinada pela progressão geométrica.

Substituindo (5.7) em (5.6) segue que $f(q)$ é dada por:

$$\begin{aligned} f(q) =& \frac{1}{(i+j+2k)\pi} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{q'-a} dq' + \frac{q-a}{(i+j+2k)\pi} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{(q'-a)^2} dq' + \\ & \ldots + \frac{(q-a)^n}{(i+j+2k)\pi} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{(q'-a)^{n+1}} + R_n(q) \end{aligned} \tag{5.8}$$

onde $R_n(q) = \frac{(q-a)^n}{(i+j+2k)\pi} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{(q'-a)^{n+1}(q'-q)} dq'$.

Seja a função $f(q)$ desenvolvida como segue abaixo

$$f(q) = f(a) + \frac{q-a}{1!} c_1 + \frac{(q-a)^2}{2!} c_2 + \frac{(q-a)^n}{n!} c_n(q) + R_n(q)$$

ou

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (q-a)^n.$$

Realizando derivações sucessivas em $f(q)$ obtém-se

$$c_n = \frac{f^n(q)}{n!}.$$

Além disso, usando a forma geral de Cauchy dada em (5.5) por

$$f^n(q) = \frac{n!}{\pi(i+j+2k)} \int_{\varphi} \frac{f(q')}{(q'-q)^{n+1}} dq'.$$

concluimos o resultado em (5.8).

Resta agora provar o limite abaixo:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(q) = 0.$$

Usando os fatos abaixo

$$|q'-q| > 0,$$

$$\left|\frac{f(q')}{q'-q}\right| < k$$

e

$$|q'-a| = r,$$

tendo em vista que $f'(q)$ é analítica em φ e $q' \in \varphi$. Desde que a área da hiperesfera é $2\pi^2 r^3$, segue-se então

$$\begin{aligned} |R_n| =& \frac{|q-a|^n}{6\pi} | \int_{\varphi} \frac{f(q')}{(q'-a)^{n+1}} dq' \\ <& \frac{|q-a|^{n+1}}{6\pi} k \frac{1}{r^{n+1}} 2\pi^2 r^3 \\ =& \frac{1}{3}\pi r^3 k \left|\frac{q-a}{r}\right|^{n+1}. \end{aligned}$$

Mas como $\left|\dfrac{q}{q'-a}\right| = \left|\dfrac{q}{r}\right| < 1$ quando $n \to \infty$ a expressão segue.

Todos os resultados nessa seção estão resumidos no teorema seguinte:

Teorema 5.2.1. *Se f é analítica em P e $q = a \in P$. Existe uma série de potência centrada em a tal que*

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (q-a)^n,$$

onde

$$c_n = \frac{1}{n!} f^n(q), n = 0, 1, 2, \ldots$$

e

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Este teorema nos diz que toda função quaterniônica analítica pode ser escrita como uma série de Taylor.

Utilizando o resultado do Teorema 4.2.1. obtemos o seguinte resultado:

Teorema 5.2.2. *Se f é uma função quaterniônica que satisfaz as equações de Cauchy-Riemann generalizadas, então f pode ser escrita pela série de Taylor centrada em a da seguinte forma:*

$$f(q) = \sum_{n=0}^{1} c_n (q-a)^n \text{ onde } c_n = \frac{f^n(q)}{n!}$$

ou

$$f(q) = f(a) + \frac{q-a}{1!} f'(a) + R_n(q) \text{ onde } \lim_{n\to\infty} R_n(q) = 0$$

Esse teorema garante que dada uma função que satisfaça as hipóteses acima, então ela pode ser aproximada apenas duas vezes pelo polinômio de Taylor.

O próximo teorema trata de mais uma analogia com a Análise Complexa Clássica, e será mostrado que, usando algumas restrições para $f(q)$, tem-se que o Teorema de Cauchy (nulidade) para Funções Quaterniônicas.

Teorema 5.2.3. *Seja $f(q)$ uma função quaterniônica, onde $f(q) = f(q_1, q_2, q_1, q_2)$, então*

$$\int_a^b f(q)dq = 0,$$

onde a e b são pontos ligados em um espaço simplesmente conexo quadridimensional.

Demonstração. Considerando, segundo [3], a integral em questão em relação às variáveis (q_1, q_2, q_3, q_4), temos:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(q)dq &= \int_a^b (f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4)(dq_1 + idq_2 + jdq_3 + kdq_4) \\ &= \int_a^b (f_1 dq_1 - f_2 dq_2 - f_3 dq_3 - f_4 dq_4) \\ &\quad + \int_a^b (f_2 dq_1 + f_1 dq_2 - f_4 dq_3 + f_3 dq_4) i \\ &\quad + \int_a^b (f_3 dq_1 + f_4 dq_2 + f_1 dq_3 - f_2 dq_4) j \\ &\quad + \int_a^b (f_4 dq_1 - f_3 dq_2 + f_2 dq_3 + f_1 dq_4) k, \end{aligned} \tag{5.9}$$

Usando agora as identidades mostradas em [3], segue imediatamente que:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(q)dq &= \int_a^b (f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4)(dq_1 + idq_2 + jdq_3 + kdq_4) \\
&= \int_a^b \Big(\frac{\partial F_3}{\partial q_3}dq_1 + \frac{\partial F_3}{\partial q_4}dq_2 - \frac{\partial F_3}{\partial q_1}dq_3 - \frac{\partial F_3}{\partial q_2}dq_4\Big) \\
&+ \int_a^b \Big(\frac{\partial F_4}{\partial q_4}dq_2 + \frac{\partial F_4}{\partial q_3}dq_1 - \frac{\partial F_4}{\partial q_1}dq_3 - \frac{\partial F_4}{\partial q_2}dq_4\Big)i \\
&+ \int_a^b \Big(- \frac{\partial F_1}{\partial q_3}dq_1 - \frac{\partial F_1}{\partial q_4}dq_2 + \frac{\partial F_1}{\partial q_1}dq_3 + \frac{\partial F_1}{\partial q_2}dq_4\Big)j \\
&+ \int_a^b \Big(- \frac{\partial F_2}{\partial q_3}dq_1 - \frac{\partial F_2}{\partial q_4}dq_2 + \frac{\partial F_2}{\partial q_1}dq_3 + \frac{\partial F_2}{\partial q_2}dq_4\Big)k.
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

Por hipótese, $q = (q_1, q_2, q_1, q_2)$. Logo,

$$\int_a^b f(q)dq = 0.$$

□

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS.

A formulação da Teoria dos Quatérnios e, particularmente, das Funções Quaterniônicas apresenta uma configuração adequada para a estruturação e estudo de problemas físicos e também geométricos [3] e [17]. No entanto, o estudo de problemas dessa natureza por vezes ficou limitado a uma teoria que alguns de seus resultados importantes ainda não haviam sido determinados ou consolidados, cabe citar que as derivadas de ordem superior e Teoremas de Integração como, por exemplo, o Teorema de Cauchy (nulidade) ainda não haviam sido determinados e demonstrados.

O presente trabalho apresentou resultados já analisados e consolidados na Análise Quaterniônica, cabe citar, [2], [3]-[8], [17] e [19]. Sendo assim, a teoria de derivação quaterniônica [3], [5] e [8] careciam de mais resultados e foi determinada uma fórmula para derivações de ordem superior além da verificação que a derivada segunda à direita e à esquerda são iguais, ou seja, comutam. Além disso, verificou-se que se a função quaterniônica satisfaz as condições de Riemann-Cauchy generalizadas então suas derivadas quaterniônicas à direita e à esquerda são constantes. Já no que concerne à Teoria de Integração de Funções Quaterniônicas, a obtenção de uma fórmula unificada para o Teorema Integral de Cauchy, além do Teorema Integral de Cauchy (nulidade) foram demonstrados e uma aproximação por série de Taylor Quaterniônica como aplicação das derivadas sucessivas foi demonstrado, apresentando assim, uma configuração própria para a referida aproximação.

O estudo e o desenvolvimento propostos neste trabalho tem importância na estruturação da Análise Quaterniônica tanto como uma teoria que faz analogias com a Análise Complexa Clássica quanto na consolidação desta teoria com resultados próprios, isto é, resultados que não são determinados na Teoria Clássica. O fato de a derivação de ordem superior ter sido determinada motiva o estudo da Geometria associada à Funções Quaterniônicas, além de bem fundamentar uma possível formulação de Mecânica Clássica, Mecânica Quântica e Relatividade, baseada nos resultados determinados neste trabalho. Por outro lado, a Teoria de Integração e a aproximação destas funções, quando satisfazem as condições de Riemann-Cauchy, serão de fundamental importância na obtenção de uma configuração algébrica e geométrica adequada da teoria de modo consistente.

Por fim, o trabalho aqui apresentado mostra-se uma alternativa para obtenção de novos resultados como a Teoria Quaterniônica de Resíduos, a generalização para ordens superiores das derivadas e análise posterior da comutatividade das referidas derivadas quando de ordem $n > 2$.

REFERÊNCIAS

[1] ABLAMOWICZ, R.P.; LOUNESTO, P. *On Clifford algebras of a bilinear form with an antisymmetric part*, In: Clifford Algebras with Numeric and Symbolic Computations (Ed. R. Ablamowicz, P. Lounesto and J.M. Parra), Birkhauser, Boston (1996), 167-189.

[2] BAEZ, J. *The octonions*. Bull. Amer. Math. Soc., v.39, n.2, p. 145-205, Dec. 2001.

[3] BORGES, M.F.; COELHO, J. ; MARÃO, J.A.P.F. *Geometrical Logarithmic and Trigonometric Hypercomplex Functions of Quaternionic Type*. Far East Journal of Mathematical Sciences: FJMS, v.50, p. 45-53, 2011.

[4] BORGES, M.F.; FIGUEIREDO, A.D.; MARÃO, J.A.P.F. . *Hypercomplex Geometric Derivate from a Cauchy-Like Integral Formula*. International Journal of Pure and Applied Mathematics, v.68, n.1, p. 55-69, (2011).

[5] BORGES, M.F.; MACHADO, J.M. . *New Remarks on the Differentiability of hypercomplex functions*. International Journal of Applied Mathematics, v.8, n.1, p.85-101, 2002.

[6] BORGES, M.F.; MARÃO, J.A.; BARREIRO, R.C. *A Cauchy-Like Theorem for Hypercomplex Functions, Jornal of Geometry and Topology*, 3. (2009), 263-271.

[7] BORGES, M.F.; MARÃO, J.A.P.F. *The Laurent Series for the Quaternionic Case*. International Journal of Pure and Applied Mathematics, v.90, n.3, p. 281-285, 2014.

[8] BORGES, M.F.; MARÃO, J.A.; MACHADO, J.A. . *Geometrical octonions II: Hiper regularity and hyper periodicity of the exponential function*, International Journal of Pure and Applied Math., 48 (2008), 495-500.

[9] BUCHMANN, A. *A Brief History of Quaternions and the Theory of Holomorphic Functions of Quaternionic Variables*. Chapman University, p.11.

[10] CONWAY, J.H. *On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic and Symmetry*; A.K.Peters, Ltda, Batiek, MA, 20, (2003) p.159.

[11] FUETER, R. *Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen* $\Delta u = 0$ *und* $\Delta\Delta u = 0$ *mit vier reelen Variablen*. Comment. Math. Helv., v.7, n.1, p. 307-330, 1934.

[12] GARCIA, A.; LEAQUIN, Y. *Álgebra: Um Curso de Introdução*, Edited by IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro (1988), 119-122.

[13] H.B. LI. *Some applications of Clifford algebra to geometries*, Lecture Notes on Artificial Inteligence, 1669 (1999), 156-179.

[14] HERNSTEIN, I.N. *Tópicos de Álgebra*, Edited by USP - Universidade de São Paulo, São Paulo (1970), 408p.

[15] KUNIHIKO KODAIRA, *Complex Analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press Cambrigde (2007), 406pp.

[16] MARÃO, J.A.P.F.; BORGES, M.F. *A Note on the Hypercomplex Riemann-Cauchy Like Relations for Quaternions and Laplace Equations.* p.5, (2014).

[17] MARÃO, J. A. P. F., BORGES, M.F., *Geometrical Hypercomplex Coupling Between Electric and Gravitacional Fields.* In: International Journal of Pure and Applied Mathematics; International Journal of Pure and Applied Maathematics, IJPAM, v.88, n.4, p. 475-482, (2013).

[18] MARÃO, J.A.P.F.; BORGES, M.F. *Liouville's Theorem and Power Series for Quaternionic Functions.* International Journal of Pure and Applied Mathematics, v.71, n.3, p. 383-389, (2011).

[19] Marques, S.; Oliveira, C. *An extension of quaternionic metrics to octonions*, J. Math. Phis., 26 (1985), 3131-3139.

[20] SINEGRE, L. *Quaternions and motion of a solid body about a fixed point according to Hamilton*, Rev.-Historie-Math,1, No. 1 (1995), 83-109.