Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO: uma análise de erros em provas da OBMEP no Maranhão

Thyago Araujo Ferreira

Junho de 2017

São Luis - MA

Thyago Araujo Ferreira

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO: uma análise de erros em provas da OBMEP no Maranhão

Dissertação apresentada à Coordenação Académica do Programa de Pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal do Maranhão oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Sob orientação do Prof(a). Dr(a). Valdiane Sales Araujo.

Junho de 2017

São Luis - MA

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Ferreira, Thyago Araujo.
Resolução de problemas de probabilidade no ensino médio: uma análise de erros em provas da OBMEP no Maranhão / Thyago Araujo Ferreira. - 2017.
118 p.

Orientador(a): Valdiane Sales Araujo.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2017.

1. Análise de erros. 2. OBMEP. 3. Probabilidade. I. Araujo, Valdiane Sales. II. Título.

Thyago Araujo Ferreira

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO: uma análise de erros em provas da OBMEP no Maranhão

A presente Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da UFMA/PROFMAT, e elaborada por Thyago Araujo Ferreira, sob o titulo: *"RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO: uma análise de erros em provas da segunda fase da OBMEP no Maranhão"*, foi aprovada em ________ de ________________ de 2017 e recebeu conceito: ____________________

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof Dra. Valdiane Sales Araujo (Orientadora)
Doutora em Matemática
Universidade Federal do Maranhão

Profa Dra. Dea Nunes Fernandes
Doutora em Educação Matemática
Instituto Federal do Maranhão

Profa Dra. Valeska Monteiro de Souza
Doutora em Matemática
Universidade Federal do Maranhão

São Luis

2017

Agradecimentos

À Deus, que sempre esteve ao meu lado pois, quando não eu tinha mais forças para caminhar, me carregou em seus braços.

Aos meus pais, que foram instrumentos para que eu recebesse o dom da vida e em especial à minha mãe Cilene que dedicou grande parte da sua vida a mim. Sendo uma mulher forte e guerreira, assumiu os papéis de pai e mãe na minha criação.

À todos os membros de minha família que, de uma maneira ou outra, contribuíram para a conclusão desta jornada.

À minha amiga Msc. Samara Araujo que muito colaborou para o êxito desta pesquisa.

À minha professora orientadora, Dra. Valdiane Sales Araujo, pela confiança, pelas dicas, orientação, apoio e especialmente pelas palavras de incentivo no decorrer do mesmo.

À CAPES, pelo apoio financeiro e por acreditar na educação básica brasileira.

A todos os colegas das turmas do PROFMAT 2015, que muito colaboraram com o meu desenvolvimento durante o mestrado.

A todos os professores do curso, que direta e indiretamente contribuíram para o meu crescimento.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo principal identificar as dificuldades e os principais erros cometidos pelos alunos do Ensino Médio na resolução de problemas de Probabilidade, mediante análise e classificação de erros nas provas da segunda fase da OBMEP – Nível 3 nos anos 2015 e 2016 no estado do Maranhão. Para tanto, está composto de sete capítulos, os quais versarão sobre: um breve histórico sobre o desenvolvimento dos estudos acerca da probabilidade, bem como do seu ensino; o estabelecimento dos critérios de classificação de erros a serem analisados nas resoluções dos problemas de probabilidade nas provas da OBMEP – Nível 3 nos anos 2015 e 2016 no estado do Maranhão e as análises dos tipos de erros mais frequentes nas resoluções de questões de probabilidade. Tendo como principal aporte teórico e metodológico os trabalhos de Cury (2008, 2009 e 2010), os quais garantem a análise de erros sobre os registros escritos dos alunos, a partir da análise de questões que abordaram o conteúdo de probabilidade nas provas da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) dos anos de 2015 e 2016, a partir das etapas de leitura flutuante de todo material, unitarização e categorização das respostas e tratamento dos resultados.

Palavras-chave: Probabilidade, OBMEP, Análise de erros.

ABSTRACT

Recognize the problems and central errors completed by High school students in explaining Probability problems is the paper's main aim. It analyzed errors in OBMEP's second step - Level 3 between 2015 and 2016 years in Maranhão. Therefore, it was elaborated by seven chapters, talking about: a short history and teaching about probability's studies; The establishing measures of error classification will be analyze in resolution of OBMEP's mistakes probability tests - Level 3 in 2015 and 2016 years of Maranhão and in the most frequent errors types analyzes about probability inquiries. In Cury's (2008, 2009 and 2010) studies assurances the errors analysis on the students written records, established on the questions analysis of OBMEP's probability content tests (Public Schools' Brazilian Mathematics Olympiad) 2015 and 2016 years, from the floating reading steps of all material, union and categorization answers and management results.

Keyword: Probability , OBMEP, Mistake analysis.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

SUMÁRIO

Capítulo 1

Introdução

No decorrer de toda a história da origem e do desenvolvimento do estudo da Matemática e, em especial, da Teoria das Probabilidades, observa-se que muitos avanços se deram mediante as inquietações de estudiosos em suas determinadas épocas. A exemplo, pode-se citar as trocas de cartas entre Fermat e Pascal, que continham problemas de probabilidade, o que, de certo modo, ajudou a desenvolver tal teoria, já que o interesse por esses problemas fomentaram novos olhares e discussões acerca da probabilidade para além de sua aplicação em jogos de azar.

Após décadas de estudo e desenvolvimento, o ensino da Probabilidade foi "regulamentado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) editados em 1998" (CURY, 2009, p. 373). Porém, mesmo com a regulamentação pelos PCN's e com todas as evoluções no ensino durante os últimos anos até o ano corrente, ainda encontra-se, nas salas de aula da educação básica, alunos que não conseguem construir de maneira satisfatória o conhecimento sobre a probabilidade e consequentemente, os alunos que ingressam às universidades também apresentam esta dificuldade neste conteúdo. De forma que, ao chegarem ao ensino superior possuem pouco ou nenhum conhecimento dessa área (CURY, 2009).

Na educação básica, bem como na educação superior, é nítida a dificuldade dos alunos em compreender e resolver problemas que envolvam a probabilidade, sejam eles voltados para os jogos de azar ou para qualquer outra aplicação deste conteúdo. Diante dessas dificuldades apresentadas pelos alunos, professores e pesquisadores da área não podem ser indiferentes a esta situação, mas têm que buscar alternativas metodológicas para identificar estas dificuldades e, além disso, buscar formas de saná-las ou ao menos minimizá-las. Assim, neste bojo, esta pesquisa pretende oferecer à comunidade acadêmica e ou profissional uma alternativa metodológica, no sentido de contribuir para o desenvolvimento da Teoria da Probabilidade e de suas aplicações no processo de ensino e aprendizagem, ou seja, estabelecer-se como um instrumento teórico e prático.

Propor-se-á nesta pesquisa, o uso da metodologia de ANÁLISE DE ERROS (CURY, 2009) sobre os registros escritos dos alunos, a partir da análise de questões que abordaram o conteúdo de probabilidade nas provas da OBMEP (Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas) dos anos de 2015 e 2016, sendo analisada nessas provas somente a sexta questão. Estas provas constituem o objeto de estudo, no qual a partir da identificação e classificação dos erros cometidos pelos alunos, acredita-se poder ofertar subsídios aos professores para que possam buscar alternativas para melhorar o processo de ensino e aprendizagem por meio do conhecimento das dificuldades dos alunos.

Para a análise dos dados coletados, serão utilizados os passos da metodologia de Cury (2009), cujas etapas são: leitura flutuante de todo material, unitarização e categorização das respostas e tratamento dos resultados. Cada umas destas etapas será descrita no decorrer deste trabalho.

Esta pesquisa, cujo tema é **"RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO: uma análise de erros em provas da OBMEP no Maranhão"**, tem como objetivo geral: identificar as dificuldades dos alunos do Ensino Médio na resolução de problemas de Probabilidade, mediante análise e classificação de erros nas provas da segunda fase da OBMEP – Nível 3 nos anos 2015 e 2016 no estado do Maranhão.

Para que o objetivo geral deste estudo fosse alcançado, foram traçados os seguintes objetivos específicos: apresentar um breve histórico sobre o desenvolvimento dos estudos a cerca da probabilidade, bem como do seu ensino; estabelecer os critérios de classificação de erros a serem analisados nas resoluções dos problemas de probabilidade nas provas da OBMEP – Nível 3 nos anos 2015 e 2016 no estado do Maranhão e analisar os tipos de erros mais frequentes nas resoluções de questões de probabilidade.

Quanto à composição formal da pesquisa, apresentar-se-á o estudo seccionado em sete capítulos: Introdução; A probabilidade e seus aspectos históricos; A probabilidade e o seu ensino; A análise de erros; Procedimentos metodológicos; A pesquisa e Considerações finais.

No primeiro capítulo - INTRODUÇÃO - realiza-se um delineamento geral do estudo realizado, apresentando os tópicos que serão abordados em cada um dos capítulos contidos nesta pesquisa.

No segundo capítulo - A PROBABILIDADE E SEUS ASPECTOS HISTÓRICOS -, será apresentado um breve retrospecto histórico acerca da origem e desenvolvimento da teoria das probabilidades, dando ênfase aos principais nomes que se destacaram e que mais contribuíram para esta teoria.

No terceiro capítulo, A PROBABILIDADE E O SEU ENSINO, destacar-se-á o ensino da Probabilidade nos dias de hoje, comentando sobre alguns trabalhos desenvolvidos nesta área, e, em seguida, uma abordagem sobre a Probabilidade segundo os documentos oficiais que regem o ensino tanto no âmbito nacional quanto no âmbito do estado do Maranhão. Estes documentos são: Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM), Diretrizes Curriculares do Estado do Maranhão (DCEM) e Matriz de Referência para o ENEM.

Ainda no terceiro capítulo, a probabilidade será abordada através da resolução de problemas segundo Polya (1995) e Tao (2013). O capítulo será encerrado com as análises dos conteúdos de Probabilidade em dois livros didáticos da segunda série do ensino médio dos autores Dante (2013) e Paiva (2013).

No quarto capítulo - A ANÁLISE DE ERROS -, buscar-se-á, inicialmente, abordar o erro no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, buscando evidenciar a visão positiva sobre o erro e de como é possível usá-lo para o enriquecimento da prática docente e em prol do desenvolvimento dos alunos. De maneira especial, nesta secção, será apresentada a metodologia utilizada nesta pesquisa, que é a Análise de Erros, a partir dos estudos de Cury (2009). Por fim, serão comentados dois trabalhos sobre a aplicação da Análise de Erros no ensino da probabilidade.

No quinto capítulo - PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS - delimitar-se-á o estudo, ressaltando que inicialmente foi realizado um levantamento teórico, abordado nos capítulos 2, 3 e 4. Além disso, aponta-se que para a coleta dos dados fora utilizado cinquenta provas da segunda fase da OBMEP dos anos 2015 e 2016. Neste capítulo, define-se, portanto, a modalidade da pesquisa, os instrumentos de coleta de dados, além de expor um breve comentário sobre as Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

No sexto capítulo - A PESQUISA -, serão apresentadas as questões que foram analisadas nas provas da OBMEP, bem como as soluções propostas pela própria OBMEP. Serão também estabelecidas as classificações dos erros adotados para a análise realizada, e, em seguida, a verificação de item por item, identificando e classificando os erros cometidos, apontando as principais dificuldades que os alunos envolvidos na pesquisa possuem em relação à resolução de situações-problema que envolvam o conteúdo de probabilidade.

Nas Considerações Finais, buscar-se-á a discriminação dos diferentes elementos que surgiram ao analisar os dados obtidos e a dimensão da origem e da abrangência dos erros cometidos pelos alunos, além de estabelecer conclusões sobre: o estudo, as respostas encontradas pelas questões da pesquisa e as indagações e reflexões que surgiram ao longo da elaboração deste trabalho.

Capítulo 2

A Probabilidade e o seus aspectos históricos

Relatos históricos remetem a origem da Probabilidade aos estudos dos possíveis resultados em jogos, popularmente chamados de jogos de azar, tais como: jogos de cartas, dados, loteria, rifa, roleta, cara ou coroa, bingo, "pedra, papel e tesoura" e vários outros. Portanto, "são inúmeras as aplicações dessas ideias no cotidiano humano e o limite dessas aplicações, só o futuro poderá nos revelar". (BRITO, 2015, p. 20).

Para Coutinho (2007, apud MOURA, 2014, p. 25), a origem dos jogos de azar é muito antiga, apontando a existência de comprovações arqueológicas da prática de jogos com ossos tirados de animais. Estes ossos eram utilizados em um jogo, de forma semelhante aos dados, ganhando o que acertasse a face escolhida. O autor afirma ainda, que para os povos que viviam na Mesopotâmia ou o Egito Antigo, o acaso era associado às questões divinas.

Para Viali, o acaso se configura como uma das peças fundamentais no estudo da probabilidade, sendo entendido como "[...] um conjunto de forças, em geral, não determinadas ou controladas, que exercem individualmente ou coletivamente papel preponderante na ocorrência de diferentes resultados de um experimento ou fenômeno". (VIALI, 2008, p.144).

Com o passar do tempo e com a evolução dos estudos, a Teoria das Probabilidades modificou-se, apresentando grande versatilidade de aplicações, tais como na biologia, nas finanças, no marketing, na econometria, dentre outras áreas.

Segundo Paulo (2013), o surgimento e o desenvolvimento da probabilidade não se deram por acaso, mas através de estudos realizados durante aproximadamente os últimos 500 anos. Em seu Resumo histórico do cálculo de probabilidades, o autor elenca uma série de estudiosos da Matemática e áreas afins que contribuíram para o desenvolvimento da Teoria das Probabilidades, indicando as principais colaborações de cada um deles para tal desenvolvimento. Dentre os quais, destaca-se aqui: Luca Pacioli, Girolamo Cardano, Nicolo Fontana de Brescia, Pierre de Fermat, Blaise Pascal, Christiaan Huygens, Jakob Bernouli, Daniel Bernouli, De Moivre, Pierre Simon Laplace, Andrei Kolmogorov e Richard Threlkeld Cox.

Dentre os nomes citados, merece destaque o de Cardano, considerado um dos mais importantes para o desenvolvimento do estudo matemático da probabilidade devido a descobertas interessantes na área e no arremesso de dados, sendo o livro Liber de Ludo Aleae (Livro dos jogos de azar) a sua principal contribuição. Outro nome é o de Fermat, que, apesar de jurista e amante da Matemática, proporcionou diversas descobertas no campo da probabilidade, dando alicerces à Teoria das Probabilidades Moderna. Além desses, pode-se citar: Laplace, responsável pela primeira tentativa de deduzir uma regra para a combinação de observações dos princípios da Teoria das Probabilidades e pela autoria do livro Theorié Analytique dês Probabilités; além de Andrei Kolmogorov, responsável por axiomas que tornaram a teoria uma parte autônoma da Matemática (PAULO, 2013).

Segundo Moura (2014), a fim de tornar suas ideias mais acessíveis, Laplace, em 1902, publicou outro livro: Ensaio Filosófico sobre Probabilidades, em que defendia a aplicabilidade da Probabilidade em diversas atividades humanas, entre elas a política.

A partir das ideias de Laplace, segundo Gonçalves (2014), diversos matemáticos, como, por exemplo, Chebyshev, Markov, Kolmogorov e Von Mises ofereceram muitas contribuições para o ramo em questão, destacando Kolmogorov, considerado por muitos, o pai da probabilidade moderna.

Markov foi responsável por aplicar o método das frações contínuas à Teoria das Probabilidades, tendo estudado as sequências de variáveis mutuamente independentes, objetivando estabelecer as leis probabilísticas, e provando o teorema central do limite com hipóteses bastante gerais. Dessa forma, ficara lembrado pelas cadeias que levam seu nome, as quais “são sequências de variáveis aleatórias na qual uma variável é determinada pelo valor da anterior, mas são independentes no sentido de que o estado presente depende apenas da sua anterior”. (GONÇALVES, 2014, p. 10).

Já o matemático Von Mises determinou que a probabilidade não pode simplesmente ser considerada como o valor limite da frequência relativa de um evento, tendo suas ideias contidas em dois artigos publicados em 1919.

Enquanto autor da monografia intitulada em português como Fundamentos da Teoria das Probabilidades, Kolmogorov (1929), deu início ao que é chamado de era moderna dessa teoria; tendo axiomatizado a Teoria da Probabilidade da mesma forma que a Geometria foi axiomatizada por Euclides nos elementos. (GONÇALVES, 2014).

Paulo (2013), em seu resumo, conforme já exposto, organiza os acontecimentos de forma cronológica, elencando os principais nomes que contribuíram ao desenvolvimento dos estudos, mas não dividiu a história em períodos, divisão esta que foi realizada por Gadelha (2004), que caracterizou cada período, identificando os principais pesquisadores e resultados.

Para Gadelha, o desenvolvimento da Teoria das Probabilidades é caracterizado da seguinte forma:

> 1. Pré-história: do passado remoto aos trabalhos de Cardano, Paccioli, Tartaglia e Galileu.
> 2. Origens: trabalhos de Pascal e Fermat na solução do problema dos pontos propostos por Paccioli; publicação de Huygens — primeiras aplicações de probabilidade em demografia, seguros e erros de observações.
> 3. Maturação da probabilidade clássica: publicação de "Ars Conjectandi" de J. Bernoulli, com a introdução da lei dos grandes números; trabalhos de DeMoivre, Laplace, Gauss e Poisson; aplicações nas ciências naturais.
> 4. Escola de São Petersburgo: Chebyshev, Markov e Lyapunov; extensões da lei dos grandes números e do teorema central do limite; estudo de variáveis dependentes (cadeias de Markov); aplicações em Física.
> 5. Período moderno: iniciado pela axiomatização da teoria de Probabilidade por Kolmogorov e os trabalhos de P. Lévy, W. Feller, J. Doob; estudo de processos estocásticos — processos de Wiener; Martingales; integrais estocásticas; aplicações e conexões em várias áreas da Matemática, Física, Engenharia, Economia. (GADELHA, 2004, p.1).

A análise dos períodos: Pré-história, Origens, Maturação da probabilidade clássica, Escola de São Petersburgo e Período Moderno, realizada pelo autor, evidencia que a evolução dos estudos de probabilidade e a consolidação desta Teoria deram-se por um longo período, mostrando que além das inquietações dos amantes da Matemática, das intenções de compreender o acaso e de tirar vantagens em jogos de azar, o diálogo entre os estudiosos e suas obras foi de grande importância para a obtenção dos resultados que existem na atualidade.

Desse modo, tais resultados mais atuais têm sido importantes para ratificar a relevância da probabilidade e do seu ensino, visto que, como já pontuado, tem sido aplicada para além do campo do saber matemático, alcançando diversas áreas como: economia, administração, medicina, biologia, telecomunicação e muitas outras, as quais utilizam diversas aplicações do conhecimento das probabilidades. Além disso,

> [...] muito conhecimento está agregado ao conhecimento probabilístico de tal maneira que é impossível, hoje, uma exposição rigorosa de teoria de probabilidades sem usar noções de funções mensuráveis e teorias modernas de integração. (BRITO, 2015, p. 19).

Capítulo 3

A Probabilidade e o seu ensino

A Probabilidade, bem como seu ensino, através da prática docente, tem se tornado cada vez mais importante de forma que este conteúdo seja cada vez mais utilizado como instrumento social, devido a sua vasta aplicabilidade no cotidiano, seja em pesquisas estatísticas ou em tomadas simples de decisão, o conhecimento dessa ferramenta matemática nos torna mais capacitados a exercer nossos papéis sociais.

O objetivo deste capítulo é apresentar como o ensino da probabilidade está se desenvolvendo nos dias de hoje. Deste modo, será apresentada uma análise do posicionamento em relação ao ensino de Probabilidade no Ensino Médio nos documentos oficiais, tais como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, as Diretrizes Curriculares do Estado do Maranhão e a Matriz de Referência para o ENEM. Além disso, dois livros de matemática presentes no PNLD para o período de 2015 a 2017 serão analisados quanto ao ensino da probabilidade.

Ainda neste capítulo, a probabilidade será abordada através da resolução de problemas segundo Polya (1995) e Tao (2013).

3.1 O ensino da Probabilidade nos dias de hoje

Mediante a trajetória histórica do desenvolvimento da Teoria da Probabilidade, é notória a sua importância devido à vasta aplicabilidade em diversas áreas de estudo. No entanto, no atual momento da educação brasileira, percebe-se que tal conteúdo não é abordado de maneira adequada ou apenas não é abordado, já que "a probabilidade no Ensino Fundamental e Médio, muitas vezes, é deixada de lado ou até mesmo não é ensinada" (SILVA, 2013, p. 15).

A ocorrência de tal fato é possivelmente relacionada à insegurança do docente diante do tema, à dificuldade na compreensão do conteúdo por parte dos alunos e à falta de estratégias didáticas estimulantes e envolventes sobre o tema (SILVA, 2013). Outros motivos que podem ser apontados são: a falta de conhecimentos prévios exigidos para a aprendizagem, o desinteresse dos alunos devido ao estudo descontextualizado e os livros didáticos que enfatizam apenas aplicação de fórmulas e resolução de exercícios repetitivos.

Inicialmente, a falta de desenvolvimento do raciocínio a cerca das probabilidades faz com que os alunos não consigam compreender a "incerteza" nos estudos da Matemática, que, por sua vez, trabalha frequentemente com certezas.

> [...]a probabilidade proporciona um modo de medir a incerteza e de mostrar aos estudantes como matematizar, como aplicar a matemática para resolver problemas reais. Para isso, recomenda-se um ensino das noções probabilísticas a partir de uma metodologia heurística e ativa, por meio da proposição de problemas concretos e da realização de experimentos reais ou simulados. (LOPES, 2008 apud MOURA, 2014, p. 32).

Outra dificuldade já citada, é o despreparo de determinados professores devido a falhas na sua formação desde o Ensino Fundamental até ao Ensino Superior. De acordo com Trompler (1982 apud LOPES et al, 2011), o ensino da Probabilidade é importante em toda vida escolar que precede a graduação, pois representa uma maneira de raciocinar desconhecida em outros ramos da Matemática.

Segundo Paulo (2013), com dedicação e boa vontade, todo professor tem capacidade plena de engrandecer o processo de ensino-aprendizagem com a utilização de métodos mais eficientes que os modelos tradicionais. Outro ponto importante, evidenciado pelo autor, é o da necessidade do professor de matemática valorizar o aprendizado em detrimento do cumprimento obrigatório da grade curricular determinada.

É facilmente observável a preocupação de professores e alunos, bem como dos coordenadores e gestores das escolas, com o cumprimento dos conteúdos determinados na grade. Tal preocupação é justificada pela necessidade de ao fim do Ensino Médio o aluno ter condições de ser aprovado nos seletivos das universidades, porém, em face do cumprimento da grade, a aprendizagem dos conteúdos, em determinados momentos, não se torna significativa, resultando em falhas na compreensão e aplicação dos conceitos de probabilidade e matemáticos em geral.

Ademais, o estudo da probabilidade sem relação com o cotidiano dos alunos, torna-se um fator desmotivador, dificultando o alcance do sucesso na aprendizagem. Sobre isto, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), no que se referem à área Matemática e suas Tecnologias, apontam como critério central, a contextualização e a interdisciplinaridade, objetivando proporcionar ao estudante a possibilidade de conectar diversos conceitos e formas de pensamentos matemáticos, não podendo assim, o estudo da probabilidade ser descontextualizado e centrado em aplicação de fórmulas e resolução de exercícios repetitivos.

Para Silva, de acordo com a metodologia utilizada, deve-se constantemente buscar a contextualização, inserindo o aluno em situações cotidianas em sala de aula. O autor indica a utilização de jogos para auxiliar na contextualização do conteúdo estudado, pois desta forma, os alunos se tornam peça ativa na construção do conhecimento, desenvolvendo seu raciocínio dedutivo e não meramente a memorização de fórmulas acabadas. Já que, "a memorização pode ser temporária, mas o desenvolvimento do raciocínio é pra toda vida" (SILVA, 2013, p. 53).

Em meio aos conteúdos abordados na Matemática, os PCNEM (2002) sugerem a aplicação de ideias de probabilidade aos fenômenos naturais e ao cotidiano, além de salientar que técnicas e raciocínios probabilísticos são instrumentos aplicáveis às Ciências da Natureza e às Ciências Humanas. Com o intuito de tornar o estudo do tema em questão mais agradável e compreensível aos alunos, os PCNEM indicam a utilização das mídias, das calculadoras e dos computadores, evidenciando o grau de importância da aplicação desses recursos.

> Existe um universo muito rico de jogos de sorte no Brasil e no mundo que podem ser explorados pelo professor de Matemática do Ensino Médio em suas aulas de probabilidade e combinatória. O cálculo das chances de vitória de cada jogo e a comparação entre eles mostram o encontro da Matemática com a vida real e com o lúdico. Esta percepção pode levar o estudante a encontrar uma motivação para os seus estudos, o que ajudará bastante ele e o professor na construção do conhecimento (CORREA, 2016, p. 65).

Em relação aos livros didáticos escolhidos e utilizados nas escolas públicas do Maranhão, observa-se que estas obras apresentam breves introduções sobre o tema, na tentativa de contextualizá-lo. No entanto, essas abordagens introdutórias são frequentemente ignoradas tanto pelos docentes quanto pelos discentes. Além do que, como pontua Silva (2013), os livros didáticos, em geral, trazem as definições de Probabilidade seguidas imediatamente de listas de exercícios repetitivos, desse modo, o estudo da probabilidade fica restrito à apresentação de conceitos e fórmulas e aplicação dessas fórmulas em exercícios comuns, os quais, muitas vezes, não estabelecem conexões com a realidade do aluno; acarretando, de maneira consecutiva num tratamento descontextualizado da temática. Em análises realizadas nas últimas décadas do século XX, a respeito do Ensino de Probabilidade no Brasil, tem-se que

> [...] através da análise de orientações institucionais publicadas a partir da década de 1970, conclui que o Ensino de Probabilidade no Brasil ocorreu nas décadas de 70, 80 e 90, por meio das abordagens Clássica e Axiomática, havendo

> variações apenas nos tipos de tarefas e técnicas apresentadas como exercícios ou exemplos: na década de70, utilizaram-se as técnicas baseadas na Teoria de Conjuntos para a resolução de problemas enquanto na década de 90, quando foram elaborados os PCN, as técnicas foram ligadas à Análise Combinatória, sendo os anos 80 um período de transição, quando utilizou-se tanto da Teoria de Conjuntos quanto da Análise Combinatória para justificar as técnicas de resolução de problemas envolvendo o cálculo de probabilidades (GONÇALVES, 2004 apud JUNIOR, 2016, p. 26).

Nos últimos anos, algumas dissertações foram elaboradas sobre o ensino de Probabilidade no programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), com ênfase em métodos de ensino que auxiliam no processo de ensino-aprendizagem da Probabilidade no Ensino Médio. Exemplos destes trabalhos são: Motivando para aprender Matemática: Uma experiência com o Ensino de Probabilidade de Guimarães (2014) e Probabilidade: Aplicação ao estudo de Genética de Araújo (2016).

A dissertação de Marcelo Guedes Guimarães, defendida na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro em 2014, sob a orientação da professora Doutora Eulina Coutinho S. do Nascimento, abordou o título Motivando para aprender Matemática: Uma experiência com o Ensino de Probabilidade.

A pesquisa de Guimarães apresenta um trabalho com alunos do Ensino Médio com o objetivo de tornar o aprendizado mais significativo e prático, transformando os discentes em agentes ativos na construção do próprio conhecimento, motivados pela utilidade da Matemática no cotidiano.

Para alcançar o objetivo da sua pesquisa, Guimarães descreve o procedimento metodológico utilizado:

> Abordaremos as concepções educacionais com a finalidade de descobrir uma melhor forma de aprendizagem para o corpo discente [...];
> Enfatizaremos a importância da motivação para provocar no aluno a busca pelo conhecimento [...];
> Destacaremos o papel do professor motivado na recuperação de alunos desmotivados [...];
> Tentaremos demonstrar a importância da motivação na Matemática para a real construção do saber matemático [...];
> Realizaremos aulas sobre probabilidade, tradicional e ludicamente, a fim de registrar o comportamento e motivação dos alunos diante da apresentação dos conteúdos;
> Analisaremos, através de gráficos e tabelas, o progresso alcançado por eles, após as aulas ministradas de forma mais dinâmica (GUIMARÃES, 2014, p. 01).

Ao tratar das concepções pedagógicas sobre o ensino da Matemática, o autor fundamenta seus argumentos a partir das ideias de Paulo Freire, Gadotti, D'Ambrósio e nas instruções contidas nos PCN's, demonstrando acreditar que o ensino deve está diretamente relacionado à realidade do aluno, chamada pelo autor de elementos de domínio dos discentes.

Guimarães (2014) afirma que a função dos alunos não é copiar e reproduzir, mas reconstruir, construir sob orientação do professor. A postura de memorização e reprodução não estimula o pensamento crítico dos discentes, fazendo com que os conteúdos estudados sejam apenas decorados e posteriormente sejam inutilizados. Além disso, comenta sobre a resistência do ensino da Matemática às mudanças impostas pela globalização, tais como a velocidade na transmissão de informações e os avanços tecnológicos.

Ainda segundo o autor, é possível perceber que a motivação é fator determinante para o sucesso no processo de ensino e aprendizagem, com a sua existência no ambiente escolar, impulsiona alunos e professores na obtenção de resultados positivos. Alunos motivados passam a acreditar nas suas capacidades de compreender novos conceitos, realizar atividade e superar desafios com mais naturalidade. Porém, a desmotivação contribui para o baixo rendimento, pois discentes desmotivados estudam pouco ou nada. No entanto, segundo o autor, deve-se ter cuidado com o excesso de motivação, pois pode gerar grande ansiedade em relação às obrigações escolares, prejudicando o processo de ensino-aprendizagem.

A experiência apresentada por Guimarães, com o ensino de probabilidade, foi realizada através de atividades com o objetivo de

> [...]mostrar as diferentes mudanças de comportamento, de interesse e de atitude que os alunos demonstraram durante todo o processo, comparando-os na aula tradicional e na aula mais lúdica (GUIMARÃES, 2014, p. 23).

O trabalho foi realizado com vinte e sete (27) alunos do segundo ano do ensino médio de uma escola particular no município de Nova Iguaçu, durante os meses de outubro e novembro do ano de dois mil e treze (2013). Estes alunos participaram da pesquisa de maneira espontânea, possuindo liberdade para responder às perguntas dadas nos questionários aplicados.

Antes de iniciarem as aulas e as atividades, os alunos responderam um questionário que possuía três perguntas relacionadas ao gosto pela Matemática, às expectativas em relação às aulas e às aplicações no cotidiano dos conteúdos da disciplina. Posteriormente, foram realizadas aulas e atividades no modelo de aula tradicional e no modelo de aula contextualizada e com utilização de recursos.

Após as aulas, foi aplicado um segundo questionário para verificar qual era a preferência dos alunos em relação ao modelo de aula adotado, e sobre os possíveis benefícios que a aula contextualizada e com utilização de recurso trouxe.

Segundo o autor, os resultados obtidos foram:

> [...] pudemos comprovar que a memorização de conteúdos não é a forma mais adequada para se adquirir conhecimentos [...].
> Comprovamos que ao motivar os alunos a relacionar a matemática com acontecimentos reais, desafiando-os a resolver situações pertinentes ao dia a dia deles, conseguimos despertar seus interesses, transcendendo a prática imediata das salas de aula.
> Alcançando um objetivo mais abrangente, um aprendizado realmente significativo, que visa à consolidação dos conceitos matemáticos.
> Verificamos que, nas aulas tradicionais, os alunos são levados à simples memorização dos conteúdos, sem a construção do conhecimento, por isso não entendem a utilidade da Matemática [...]. Enquanto nas aulas lúdicas, ao ter sua experiência facilitada pelo professor, pelo ambiente propício e pelo material concreto, usado na contextualização da Matemática em situações do cotidiano [...] (GUIMARÃES, 2014, p. 57).

Guimarães (2014) deixa como sugestão para o ensino, que os professores incentivem os alunos a aplicar seus conhecimentos, pondo em prática os conteúdos aprendidos em sala de aula, direcionando suas experiências a favor do saber matemático.

A dissertação de João Henrique Fontenele de Araújo, defendida na Universidade Federal do Piauí em 2016, sob a orientação do professor Mestre Cleyton Natanael Lopes Carvalho Cunha, abordou o título Probabilidade: Aplicação ao estudo de genética.

Araújo, em seu trabalho, propôs:

> [...] apresentar uma proposta de sequência didática para ser adotada por professores de matemática no intuito de promover a compreensão por parte dos alunos da relação entre probabilidade e genética, que seja mais dinâmica e atraente para a fixação do conteúdo para facilitar assim o conhecimento sobre Probabilidade e Genética (Primeira Lei de Mendel) capaz de melhorar a construção de aprendizagem e ensino dos alunos do terceiro ano do Ensino Médio (ARAÚJO, 2016, p. 03).

Desta forma, o objetivo da sua pesquisa foi propor uma abordagem dos conteúdos de probabilidade e genética estabelecendo uma interação entre a Matemática e a Biologia, utilizando uma sequência de atividades para o ensino de probabilidade, baseada na genética, através de análise de cruzamentos e das características dos descendentes.

Segundo o autor, a escolha do tema partiu da concepção de que o estudo desta temática traria vantagens para o aluno e para a sociedade como um todo. Além disso, justificou a escolha também pela existência de certa dificuldade dos alunos no processo ensino-aprendizagem da probabilidade e da genética.

O trabalho supracitado apresenta a seguinte estrutura:

> No capítulo 1, apresenta-se algumas definições e exemplos dos conteúdos de probabilidade contextualizados, visando tornar o trabalho autossuficiente.

> No capítulo 2, mostra como Mendel realizou seus estudos e são dados os conceitos fundamentais de Genética.
> No capitulo 3, são feitas considerações sobre livros didáticos que abordam o conteúdo de probabilidade e também os de genética, a nível de ensino médio, segundo e terceiro anos.
> No capitulo 4, apresenta-se a proposta de abordagem dos conteúdos de maneira que ele esteja mais ligado com o cotidiano do aluno, porém sem desconsiderar a importância teórica do assunto (ARAÚJO, 2016, p. 05).

Após realizar uma revisão bibliográfica a cerca da Probabilidade e da Genética, apontando suas definições e principais aplicações, o autor realiza uma pequena análise de alguns livros de Matemática e Biologia. Os livros de Matemática analisados foram: Ciência e Aplicações Volume 2 de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida, Matemática: Volume 2 de Manoel Paiva e Contexto e Aplicações Volume 2 de Luiz Roberto Dante. Na análise dos livros de Biologia, foram escolhidos os livros: Biologia Hoje Volume 3 de Linhares e Gewandsznajder, Biologia 3 - 10a ed. de César, Sezar e Caldini e Bio: volume 2 de Sônia Lopes e Sergio Rosso.

A análise dessas obras alicerçou sua proposta de ensino, estabelecida na ideia de que

> [...] conteúdos que envolvem fenômenos aleatórios, por meio de testes, observações, fatos, coletas e análise de dados de modo interdisciplinar, podem possibilitar aos estudantes o melhor desenvolvimento do seu senso crítico (ARAÚJO, 2016, p. 37).

Na sua proposta, estabelece uma série de 12 problemas que mostram a interdisciplinaridade entre a probabilidade e a genética, sugerindo aos docentes a utilização da Sequência Fedathi, que é uma metodologia de ensino que contribui para a melhoria da prática pedagógica, objetivando o estabelecimento da postura adequada do professor em sala de aula.

Ao sugerir a utilização da Sequência Fedathi como ferramenta de ensino, Araújo (2016) apresenta, didaticamente, em seu trabalho a composição desta Sequência, a qual é formada pelas quatro fases a seguir:

> Tomada de posição - consiste na apresentação de uma situação desafiadora que pode ser na forma escrita, verbal, por meio de jogos, ou de outro modo, podendo ser realizado em grupo ou individualmente;
> Maturação - representa o momento em que o estudante busca identificar e compreender as variáveis envolvidas na situação problema. Nessa ocasião, o professor pode intervir pedagogicamente levantando algumas questões que ajudarão o aprendiz no levantamento das hipóteses e entendimento do problema: o que é pedido na questão? Quais os dados fornecidos? O que o problema solicita?;

> Solução - sinaliza a fase em que o aprendiz representa e organiza esquemas para encontrar a solução. Diante das soluções apresentadas, o professor deve apresentar contraexemplos promovendo desequilíbrios cognitivos no estudante com o intuito de promover conhecimentos e esclarecimentos das hipóteses;
> Prova - delineia a etapa em que o estudante faz a verificação da solução encontrada confrontando o resultado com os dados apresentados. Na ocasião, o professor deve fazer uma analogia com os modelos científicos preexistentes, formaliza o conhecimento construído e formaliza matematicamente o modelo apresentado (ARAUJO, 2016, p. 39).

O autor conclui seu trabalho, afirmando que a apresentação dos conteúdos em questão, deve ser reavaliada, pois os professores de Matemática abordam o estudo de probabilidade apenas com apresentações de problemas relacionados a jogos de azar. Desta forma, propõe que o estudo de probabilidade "inicie com um texto que contenha alguma aplicação, curiosidade, ou até fatos históricos que incentivem o aluno a aprender esta teoria" (ARAÚJO, 2016, p. 49).

Assim, observa-se que atualmente há tentativas de estudos que oferecem métodos aplicáveis para melhor desempenho de alunos e professores no processo de ensino e aprendizagem a cerca do conteúdo de probabilidade, além disso, há uma preocupação por parte dos pesquisadores sobre o tema, dada a sua relevância ao ensino da Matemática e à sociedade.

3.2 O ensino da probabilidade e os documentos oficiais

Os documentos analisados nesta pesquisa, norteadores para ensino da Matemática e, consequentemente, para ensino da probabilidade, são os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2002), as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), as Diretrizes Curriculares do Estado do Maranhão (2014) e a Matriz de Referência para o ENEM (2009).

3.2.1 Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM)

Os conteúdos matemáticos, de modo geral, não podem ser tratados de maneira isolada, sendo necessária uma relação entre eles, além da interação com as demais áreas de conhecimento. Conforme os PCNEM (BRASIL, 2002), os objetivos para o Ensino Médio em cada área de conhecimento devem favorecer o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados e abstratos.

A Matemática, como componente curricular, está inserida na área de conhecimento “Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias”. O uso do termo “Tecnologia” na denominação da área indica que se pretende promover competências e habilidades que auxiliem no exercício de intervenções e julgamentos práticos.

Os PCNEM (BRASIL, 2002) destacam a importância do estudo dos temas matemáticos atrelados ao cotidiano do aluno, dando significado ao aprendizado. Apontando que

> [...] um dos pontos de partida para esse processo é tratar, como conteúdo do aprendizado matemático, científico e tecnológico, elementos do domínio vivencial dos educandos, da escola e de sua comunidade imediata” (BRASIL, 2002, p. 7).

Em relação às competências e habilidades gerais exigidas para a área de conhecimento em questão, duas são direcionadas, de maneira mais íntima, ao estudo da estatística e da probabilidade. Sendo estas:

> Identificar, analisar e aplicar conhecimentos sobre valores de variáveis, representados em gráficos, diagramas ou expressões algébricas, realizando previsão de tendências, extrapolações e interpolações e interpretações; Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculo de probabilidades (BRASIL, 2002, p. 12).

Desta forma, o caráter instrumental da Matemática é evidenciado, devendo o aluno compreender que esta disciplina é também, “um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional” (BRASIL, 2002, p. 40).

A probabilidade, assim como os números, a álgebra, a geometria e a estatística, é vista como uma subárea da Matemática ligada diretamente às aplicações, dando ênfase à importância do estudo deste conteúdo e ao raciocínio probabilístico.

> [...] as habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas.

> Os conceitos matemáticos que dizem respeito a conjuntos finitos de dados ganham também papel de destaque para as Ciências Humanas e para o cidadão comum, que se vê imerso numa enorme quantidade de informações de natureza estatística ou probabilística. No tratamento desses temas, a mídia, as calculadoras e os computadores adquirem importância natural como recursos que permitem a abordagem de problemas com dados reais e requerem habilidades de seleção e análise de informações (BRASIL, 2002, p. 44).

Desta forma, o ensino de probabilidade deve ser marcado por um modelo não apenas "conteudista", mas reflexivo, contribuindo para que o aluno possa ser capaz de encarar os problemas do seu cotidiano, realizar inferências, tomar decisões, além de aplicar seus conhecimentos nas demais ciências.

3.2.2 Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM)

As OCEM (BRASIL, 2006) tratam de três aspectos a respeito do ensino da Matemática: a escolha dos conteúdos; a forma de trabalhar os conteúdos e o projeto pedagógico; organização curricular.

As propostas para a escolha dos conteúdos levam em consideração os objetivos pretendidos pelo ensino da Matemática na educação básica, acreditando que ao fim do ensino médio o aluno seja capaz de resolver problemas do cotidiano e utilizar o conhecimento matemático em outras áreas. A forma de trabalhar estes conteúdos deve valorizar o raciocínio matemático, tornando o aluno um sujeito ativo na construção do seu conhecimento.

Nas OCEM (BRASIL, 2006), os conteúdos básicos estão divididos em quatro blocos distintos: Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade. Sendo que "os conteúdos do bloco Análise de dados e probabilidade têm sido recomendados para todos os níveis da educação básica, em especial para o ensino médio" (BRASIL, 2006, p. 78).

Os motivos apontados por este documento para o estudo das probabilidades são:

> Importância das ideias de incerteza e de probabilidade, associadas aos chamados fenômenos aleatórios, presentes de forma essencial nos mundos natural e social.
> Possibilita aos alunos ampliarem e formalizarem seus conhecimentos sobre o raciocínio combinatório, probabilístico e estatístico.
> Dar aos alunos uma visão apropriada da importância dos modelos probabilísticos no mundo de hoje (BRASIL, 2006, p. 78).

Portanto, corroborando com as ideias contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, as Orientações Curriculares apontam a importância do ensino da

Probabilidade para a compreensão da chamada aleatoriedade presente no cotidiano da sociedade como um todo, ratificando a relevância do trabalho contextualizado com a temática, bem como com a disciplina de maneira geral.

3.2.3 Diretrizes Curriculares do Estado do Maranhão (DCEM)

Para a construção do conhecimento, as DCEM (2014, p. 22) afirmam que "o método dialético possibilita que o professor, consciente dos limites e potencialidades dos alunos, estabeleça mediações entre o conhecimento científico e o conhecimento oriundo das práticas sociais".

Observa-se que, assim como nos demais documentos oficiais analisados, estas diretrizes reafirmam a necessidade do ensino dos conteúdos matemáticos, em especial o da Probabilidade, está condicionado ao mundo que rodeia os alunos, ou seja, deve está diretamente ligado ao seu cotidiano.

A organização dos conteúdos nas Diretrizes Curriculares do Estado do Maranhão é dada por áreas de conhecimento. Desta forma,

> [...] a organização dos conteúdos escolares em áreas do conhecimento indica a intencionalidade em promover a construção de determinadas competências na formação dos alunos, de acordo com o objeto específico. Isto significa dizer que o conjunto de aprendizagens consolidadas é responsável pelo desenvolvimento das competências da área (DCEM, 2014, p. 30).

Os DCEM (2014), em concordância com os PCNEM, direcionam suas ideias para um ensino com ênfase na contextualização e na interdisciplinaridade e para outras formas de estabelecer uma estreita relação entre os diversos campos do saber.

As Diretrizes Curriculares da rede Estadual de Ensino no estado do Maranhão organizam o trabalho pedagógico, desmembrando as disciplinas em quatro áreas do conhecimento, obedecendo a orientações nacionais. Estas áreas estão divididas em: Linguagem, Código e Suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências Naturais e suas Tecnologias; Ciências Humanas e suas Tecnologias.

Para a área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias, as diretrizes apontam capacidades e competências a serem desenvolvidas durante toda a educação básica. Dentre estas, destaca-se:

> Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação e soluções de problemas;
> Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade avaliando propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade;

> Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação, com vistas à solução de situações-problema;
> Interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística utilizando instrumentos adequados para medidas determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística (DCEM, 2014, p. 57).

Estas competências e capacidades aqui destacadas remetem ao estudo da Probabilidade, que deve ser construído durante toda a trajetória do aluno na Educação Básica, iniciando nas séries iniciais do Ensino Fundamental, perpassando pelas séries finais do Ensino Fundamental e finalizando no Ensino Médio. Observa-se que as competências exigidas sobre a Probabilidade, de modo geral, estão atreladas ao estudo da Estatística, devido ao fato de existir uma relação íntima entre esses dois conteúdos, principalmente no que envolve tomadas de decisões. Além disso, é de fácil percepção, a salutar preocupação que existe em enfatizar a necessidade do estudo da Probabilidade inserida no cotidiano do aluno.

3.2.4 Matriz de Referência para o ENEM

Este documento inicia a sua abordagem elencando os eixos cognitivos comuns a todas as áreas de conhecimento, sendo estes: dominar linguagem, compreender fenômenos, enfrentar situações-problemas, construir argumentação e elaborar propostas.

De acordo com Brasil (2009), tais eixos estão apresentados da seguinte maneira:

> I. Dominar linguagens (DL): dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.
> II. Compreender fenômenos (CF): construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.
> III. Enfrentar situações-problema (SP): selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
> IV. Construir argumentação (CA): relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.
> V. Elaborar propostas (EP): recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural (BRASIL, 2009, p.1).

Em seguida, apresenta a matriz de referência das áreas de conhecimento, e aqui dar-se-á destaque para a área Matemática e suas Tecnologias.

São sete áreas de competências estabelecidas para a área de conhecimento em questão: construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais; utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela; construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano; construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano; modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas; interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação; compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Dentre estas sete áreas de competências, destaca-se a última, pois traz em si as competências que estão relacionadas ao estudo da probabilidade, a saber:

> H28 – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de Estatística e Probabilidade;
> H29 – Utilizar conhecimentos de Estatística e Probabilidade como recurso para a construção de argumentação;
> H30 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de Estatística e Probabilidade (BRASIL, 2009, p. 7).

Assim como nos demais documentos consultados, percebe-se que as competências voltadas para a Probabilidade estão relacionadas ao enfrentamento de situações-problema, bem como na construção de argumentação e intervenção sobre a realidade.

Por fim, no anexo contido nesta matriz de referência, entre os objetos de conhecimento para a área Matemática e suas Tecnologias, encontra-se a presença das noções de probabilidade, no entanto, não aponta para uma abordagem mais aprofundada do conteúdo.

3.3 A Probabilidade e a resolução de problemas matemáticos

Os alunos se deparam, todo momento, com situações-problema no seu cotidiano escolar ou extraescolar, de forma que devem estar preparados para resolvê-las. Tendo em vista que, “desde os primórdios da humanidade, bem antes da invenção dos números, o problema de localizar-se no tempo e no espaço, por exemplo, já fazia parte do cotidiano do homem” (COSTA, 2013, p. 47).

Ainda segundo Costa (2013), o enfrentamento de problemas desenvolve capacidades nos alunos, tais como: a de gerenciar informações explícitas ou implícitas, a de enfrentar o novo e, principalmente, a de desenvolver habilidade de formular estratégias.

No entanto, resolver um problema requer além de conhecimentos prévios, uma estratégia eficiente para se obter sucesso na resolução. Polya (1995) afirma que na procura da solução de um problema, deve-se flexibilizar o ponto de vista adotado e encarar o problema de formas variadas. Possivelmente, a concepção inicial do problema será incompleta, porém, após realizar progressos em direção à solução, a perspectiva se torna outra.

Ao proceder desta forma, o aluno terá maior chance de ter êxito na resolução de uma situação-problema e "se o aluno conseguir resolver o problema que lhe é apresentado terá acrescentado alguma coisa à sua capacidade de resolver problemas" (POLYA, 1995, p. 03).

Para resolver problemas matemáticos, Polya (1995) indica quatro fases a serem desenvolvidas durante a resolução, sendo estas: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto.

Na primeira etapa, compressão do problema, espera-se que seja feita uma boa leitura do enunciado e que as partes importantes sejam evidenciadas. A familiarização com o problema é extremamente necessária para que sejam escolhidas as melhores estratégias.

Após compreendido o que se deseja alcançar, é a hora de escolher a estratégia a ser utilizada. Na segunda etapa, estabelecimento de um plano, o autor sugere que seja estabelecida, se possível, uma relação do problema com algum problema previamente conhecido, de modo a ajudar na decisão de qual plano deve ser seguido. Traçado o plano, deve-se executá-lo.

Na terceira etapa, execução do plano, o aluno deve está convicto das suas escolhas. Segundo Polya (1995),

> o plano proporciona apenas um roteiro geral. Precisamos ficar convictos de que os detalhes inserem-se nesse roteiro e, temos de examiná-lo, um após outro, pacientemente, até que tudo fique perfeitamente claro e que não reste nenhum recanto obscuro no qual possa ocultar-se um erro (POLYA, 1995, p. 09).

Na última etapa, retrospecto, o aluno deve examinar a solução completa, para que haja consolidação e aperfeiçoamento na sua capacidade de resolver problemas.

Para Fideles (2014),

> [...] o método descrito por Polya se baseia em uma lista de indagações que aparecem na ordem que é mais provável ocorrer. Possui como característica a generalidade que permite que seja aproveitado em quase todos os tipos de

> problemas. Aplicando o método, o professor não dará respostas a seus alunos, pois quase sempre a resposta é de pouca importância, mas ajudará a achar o caminho ao lhe mostrar as perguntas corretas que ele deve fazer a si mesmo quando procura a solução do problema. Mais do que isso, por imitação e prática, o aluno poderá adquirir autonomia e aprender a fazer as indagações corretas na hora correta processando as operações mentais necessárias para resolver sozinho outros problemas, mesmo sendo bem diferentes (FIDELES, 2014, p.21).

Tao (2013) utiliza como referência as etapas estabelecidas por Polya, propondo as seguintes estratégias na resolução dos problemas: perceber o problema, entender os dados, entender o objetivo, escolher uma boa notação, modificar o problema, estabelecer resultados, simplificar, explorar os dados, atingir metas parciais e verificar a solução obtida.

Inicialmente, é necessário o conhecimento do tipo de problema que será resolvido. Os três principais tipos de problemas são:

> - questões do tipo mostre que... ou calcule..., em que se deve provar que uma certa afirmação é verdadeira, ou manipular uma expressão para obter um certo resultado;
> - questões do tipo encontre... ou encontre todos..., em que se pede para determinar algum objeto (ou todos os objetos) satisfazendo certas condições;
> - questões do tipo existe ou não..., em que se tem que provar uma afirmação ou fornecer um contra-exemplo (e portanto cai num dos dois tipos anteriores) (TAO, 2013, p. 02).

Após identificar o tipo de problema, é necessário identificar os dados do problema, para que sejam pensadas quais técnicas serão utilizadas. Em seguida, deve-se entender o objetivo a ser alcançado e escolher uma boa notação para a resolução, e, assim, formular possíveis estratégias a partir da exploração dos dados e analisar a que melhor se ajusta ao objetivo do problema.

O sucesso na solução dos problemas perpassa também por sua modificação e simplificação, sempre que necessário, a fim de atingir metas parciais até chegar ao resultado desejado. Enfim, de posse da solução, deve-se verificá-la.

Ao concordar com as ideias de Polya e Tao, Pozo e Encheverría (1998 apud COSTA, 2013, p. 55) afirmam que

> o aluno deve primeiramente compreender o problema, e em seguida elaborar um plano que permita a sua resolução. A resolução do plano elaborado, seguindo-o passo a passo, constitui a terceira etapa do processo. A familiarização então se constitui de um retrospecto, em que o objetivo é rever todo o caminho percorrido para se chegar à solução, detectando, se existirem, possíveis erros.

Mediante a importância de uma boa estratégia para a resolução de problemas, é importante salientar que o desenvolvimento da Teoria das Probabilidades foi impulsionado pelos problemas propostos e resolvidos na troca de correspondências entre Fermat e alguns estudiosos de Matemática, tais como: Torricelli, Roberval, Huygens e, principalmente, Pascal.

Para Paulo,

> [...] as cartas escritas por Fermat para a troca de ideias com outros pesquisadores foram tão importantes que não é por acaso a inclusão delas nos estudos sobre, por exemplo, teoria dos números, principalmente através do "Pequeno Teorema de Fermat" - o qual é um dos alicerces mais importantes no desenvolvimento desta teoria. (PAULO, 2013, p. 03).

Um exemplo desses problemas contidos nessas correspondências é:

> Numa determinada partida, dois jogadores apostam 32 moedas cada um deles. O total será ganho por aquele que primeiro obtiver três vezes, seguidas ou não, o número em que apostou de uma das 6 faces do dado. O jogo foi interrompido quando um jogador já tinha duas saídas do seu número e o outro apenas uma. Como dividir as 64 moedas que estavam em jogo? (PAULO, 2013, p. 03).

Problemas, como o citado, pertencem ao bojo dos questionamentos levantados pelos estudiosos, os quais estabeleciam entre suas formulações consonâncias e divergências, assim, Paulo (2013) aponta, ainda, que por volta de 1654, o escritor Chevalier de Méré, não confiante com resultados encontrados para certos jogos de azar, procurou Pascal em busca de respostas. Este, por sua vez, não encontrou resultados satisfatórios e começou a trocar correspondências com Fermat.

Já de acordo com Sá (2015), o problema fundamental para a origem da Teoria das Probabilidades foi o Problema dos pontos, também conhecido por problema da divisão das apostas. Este problema apresenta-se da seguinte maneira:

> Dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse 6 pontos no jogo da balla. Quando o primeiro jogador tinha 5 pontos e o segundo 3 pontos, Foi preciso interromper o jogo. Como dividir o prêmio? (SÁ, 2015, p.18).

À medida que os problemas eram propostos e as soluções eram determinadas através das correspondências, vários conceitos matemáticos novos foram criados, assim Fermat descreve com maior precisão a lei do acaso e, juntamente com Pascal, estabelece as regras essenciais da probabilidade.

Portanto, a resolução de problemas está essencialmente ligada ao desenvolvimento da probabilidade, de forma que seu ensino e sua aprendizagem requerem o enfrentamento de tais problemas.

3.4 A abordagem da Probabilidade em alguns livros didáticos

Neste item, será realizada uma análise de livros didáticos do Ensino Médio, que fazem parte da lista do PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) do ano de 2015, permanecendo até o ano corrente. Estes livros são distribuídos às escolas públicas do estado do Maranhão, assim como em todo território nacional, sendo a seleção feita pelos professores de cada escola.

No PNLD 2015, foram aprovadas e indicadas seis coleções pelo Governo Federal através do MEC (Ministério da Educação), das quais, nesta pesquisa, foram examinadas apenas duas obras.

O critério utilizado para a escolha dos livros a serem analisados foi o de facilidade ao acesso a essas duas bibliografias, visto que estas foram adotadas nas escolas onde o autor desta pesquisa exerce a função de docente. É importante ressaltar que esta análise tem por objetivo mostrar como é a abordagem do tema Probabilidade em alguns livros didáticos distribuídos pelo governo federal às escolas públicas do estado do Maranhão.

Em relação aos livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio, e em especial os dedicados à segunda série, pois é nesta série que os alunos aprofundam o estudo iniciado no ensino fundamental a cerca do conteúdo Probabilidade, Brito (2015) afirma que

> [...] a maioria dos livros do Ensino Médio que abordam o conteúdo de probabilidade, focam mais as questões voltadas para os jogos de azar, não que isso seja negativo quando se procura dar o entendimento do assunto, no entanto é preciso fazer um elo com outros conhecimentos que envolvem tais ideias e, nesse caso, só alguns livros fazem esse elo, em especial, livros que tem a probabilidade como único tópico abordado, realidade muito diferente dos livros didáticos que, por uma série de fatores, tem que ser concisos e que consigam abordar tais ideias.[...], poucos livros falam do valor histórico deste estudo, uma vez que esta teoria surgiu a partir dos jogos ditos de azar. Estes trabalham muito com exercícios que praticamente só exigem que o aluno decore uma fórmula e aplique, ou seja, exercícios meramente mecânicos (BRITO, 2015, p. 21).

Atentando-se para a realidade descrita acima, e tendo como base a abordagem da probabilidade nos livros didáticos, as obras a serem analisadas são: DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações** – Ensino Médio. São Paulo: Ática, 2013. v. 2, 320 p. e PAIVA, M. R. **Matemática – Paiva**: Ensino Médio. São Paulo: Moderna, 2013. v. 2, 320 p.

A amostragem escolhida para a análise atende satisfatoriamente às pretensões desta pesquisa, haja vista que o exame detalhado e aprofundado sobre a abordagem do conteúdo

Probabilidade nos livros didáticos do Ensino Médio fornecido às escolas públicas do estado do Maranhão através do PNLD, não se constitui como objetivo deste estudo.

3.4.1 Análise do livro de Matemática, Contexto e Aplicações – Volume 2

Neste livro, o conteúdo de Probabilidade é apresentado no capítulo 12 da unidade 4 que é dedicada ao estudo da Análise combinatória e do conteúdo em questão. São quarenta (40) páginas dedicadas ao estudo, apresentando os seguintes tópicos: Fenômenos aleatórios; Espaço amostral e evento; Eventos certo, impossível e mutuamente exclusivos (União de eventos, interseção de eventos e complementar de um evento); Cálculo de probabilidades (Certeza e impossibilidade); Definição teórica de probabilidade e consequências (Consequência da definição, Probabilidade condicional e Eventos independentes); O método binomial e Aplicações de probabilidade à Genética.

Para Costa (2013), a forma como o conteúdo é introduzido é fundamental para a construção dos conceitos. Desse modo, observou-se que o conteúdo foi posto através de um retrospecto histórico, situando o aluno no espaço e no tempo, e enfatizando que o objeto de estudo era a Teoria das Probabilidades e suas aplicações. Em relação à introdução de cada item, acima citado, em alguns, o autor do livro em questão, parte de uma situação concreta e apresenta a definição, já em outros apenas apresenta a definição direta. De maneira geral, a obra apresenta uma boa relação entre os campos da própria Matemática e desta disciplina com outras áreas do conhecimento, articulando os conhecimentos novos com os já abordados (NEVES, 2015).

É interessante observar que o autor deste livro, dedica um item para as aplicações de probabilidade à Genética, pontuando que este ramo da Biologia é o que mais usa conceitos matemáticos envolvidos na Teoria das Probabilidades, pois esta teoria trabalha com eventos chamados aleatórios. A importância da existência deste item está na desmistificação de uma Matemática sem utilidade, mostrando para o aluno que o estudo deste conteúdo, sobretudo da disciplina, vai além de meros cálculos descontextualizados, remetendo o ensino da Matemática a um processo de ensino interdisciplinar, da aplicação dos conteúdos abordados, em especial a probabilidade, em outros campos do saber, revelando a importância deste conhecimento.

Após cada item, são apresentados exercícios e situações-problema resolvidos, que servem de apoio para a resolução dos exercícios e situações-problema propostos. Notou-se que existe uma variedade significante de exercícios de aplicação direta de fórmulas e situações-problema que requer um raciocínio mais apurado a cerca dos conceitos estudados.

Verifica-se também, que a disposição dos exercícios propostos e agrupados por tema não atende satisfatoriamente ao desenvolvimento do raciocínio, visto que o aluno percebe que naquele bloco aparecerão apenas problemas envolvendo os conceitos que acabaram de ser estudados, podendo prejudicar o desenvolvimento do raciocínio, pois os alunos são induzidos a aplicar apenas de forma isolada o conteúdo estudado, não estabelecendo, assim, um elo com outros assuntos.

Já no fim do capítulo, são propostas diversas questões pertencentes ao ENEM e a outros vestibulares do Brasil, sendo essas questões: problemas de aplicação direta de fórmulas ou problemas que requerem um raciocínio bem desenvolvido.

Pontua-se, ainda, que as questões propostas possuem um nível elevadíssimo e distante da realidade dos alunos da rede estadual de ensino do estado do Maranhão, principalmente nas questões contextualizadas, pois nem todos os alunos possuem a mesma experiência daqueles da região sul e sudeste (NEVES, 2015). Na obra, a probabilidade é definida da seguinte forma:

> Quando em um fenômeno (ou experimento) aleatório, com espaço amostral finito, consideramos que todo evento elementar tem a mesma "chance" de ocorrer (o espaço é equiprovável), a probabilidade de ocorrer um evento A, indicada por $p(A)$, é um número que mede essa chance e é dada por: $p(A) = \frac{numerodeelementosdeA}{numerodeelementosde\mho} = \frac{n(A)}{n(\mho)}$ ou $p(A) = \frac{numeroderesultadosfavoraveis}{numerototalderesultadospossiveis}$ (DANTE, 2013, p. 183).

Verifica-se que o conceito de probabilidade é dado através da apresentação de definições prévias e da fórmula que permite calcular a chance de ocorrer um determinado evento, porém, tal conceito não é apresentado a partir de análise de uma situação-problema, não permitindo ao aluno utilizar seu conhecimento de mundo para a construção de tal conceito, já que "a apresentação dos conceitos no início, sem antes propor problemas onde o aluno tenha a oportunidade analisar [...], dificultam a compreensão da questão [..]" (COSTA, 2013. P. 64).

Quanto à abordagem acerca da história da Teoria das Probabilidades, observou-se que vai além da descrição na introdução do capítulo, sendo apresentados mais dois textos complementares: "A Matemática da sorte" e "Um pouco mais de probabilidade", o que de certa forma contribui para o aprofundamento sobre o conteúdo, destacando desse modo, a importância do aluno conhecer o contexto situacional e histórico do assunto o qual estudará. Neves (2015), em suas considerações sobre esta obra, aponta que

> Mesmo a obra de Luiz Roberto Dante sendo bem detalhada e tendo sido apresentada de forma quase completa, ficou faltando as definições de experimentos determinísticos e aleatórios. Mas ainda assim cita experimento aleatório em vários momentos deixando a cargo do aluno a compreensão

> intuitiva do conceito. Esta obra possui vários exercícios de fixação de alto grau de complexidade para o alunado, não por culpa do livro mas sim das dificuldades que os alunos carregam consigo desde as séries iniciais. As definições dos conteúdos são simples e diretas com poucos exemplos e estes sempre voltados aos jogos de azar. O único apelo histórico ocorreu no início do capítulo (NEVES, 2015, p. 39).

De modo geral, a obra atende a contento no que se refere à abordagem do conteúdo, no entanto fica ainda um pouco distante da realidade local do Maranhão, considerando as disparidades entre as realidades das regiões, bem como o déficit do ensino da rede estadual de ensino do Maranhão.

3.4.2 Análise do livro de Matemática de Manoel Paiva – Volume 2

Nesta obra, o conteúdo de Probabilidade é apresentado no capítulo 11 e de forma distinta do livro Matemática, Contexto e Aplicações – Volume 2 do autor Dante, o livro analisado não possui seus capítulos divididos por unidades. São vinte e uma (21) páginas dedicadas ao estudo do conteúdo em questão, apresentando os seguintes tópicos: A origem da teoria das probabilidades; O conceito de probabilidade; Definição de probabilidade; Adição de probabilidades; Probabilidade condicional e Multiplicação de probabilidades.

Além dos tópicos citados, o livro apresenta um roteiro de estudo, exercícios complementares, análise de resolução, texto de contextualização do conteúdo e uma proposta de trabalho em equipe.

Algo bem salutar na referida obra é a presença de análise de uma resolução, elevando a importância da identificação dos erros cometidos na solução de um problema. Desta forma, os alunos perceberão a necessidade de rever suas soluções a fim de identificar possíveis erros cometidos.

O conteúdo é iniciado com uma breve apresentação sobre a história da origem da Teoria das Probabilidades, levando o aluno a compreender que a construção do conhecimento requer um desenvolvimento de descobertas ao longo do tempo. Em seguida, mostra-se que no nosso cotidiano existe uma presença significativa de situações que demandam certo conhecimento a cerca da probabilidade.

Antes de apresentar a definição formal acerca da probabilidade, são apresentados os conceitos de experimentos aleatórios, espaço amostral e evento. Neste ponto, chama a atenção que a apresentação de alguns desses conceitos está enunciada antes das situações concretas, passando ao aluno uma definição acabada, sem oportunizá-lo a um momento de construção do conhecimento a partir das situações reais, que são apresentadas no livro.

Quanto aos conceitos apresentados, Brito (2015) destaca:

> Nesse tópico, o autor simula o lançamento de um dado 1000 vezes e conta a quantidade de vezes que cada face, após os lançamentos, ficam voltadas para cima. Partindo desse exemplo, ele também induz o aluno a ver, que se aumentar a quantidade de lançamentos, a tendência é a estabilidade. O número de vezes que cada face fica voltada para cima tende a se igualar quando o número de lançamentos tende ao infinito (BRITO, 2015, p. 23).

Além disso, o livro apresenta as demais definições e conceitos de forma bem tradicional, e que a partir deste ponto, "o autor passa a explicar a teoria e a exemplificá-la, baseando-se em exemplos referentes a jogos de azar e as propriedades aparecem de forma simples e clara" (BRITO, 2015, p. 23). No livro de Paiva (2013), a probabilidade é assim definida:

> Seja E um espaço a amostral equiprovável, finito e não vazio, e A um evento de E. A probabilidade de ocorrer algum elemento de A é indicado por $P(A)$ e definida por: $P(A) = \frac{n(A)}{n(E)}$, em que $n(A)$ e $n(E)$ indicam, respectivamente, o número de elementos de A e de E (PAIVA, 2013, p. 183).

Após a definição, são apresentados exercícios resolvidos, fazendo com que os alunos os tomem como modelos para a resolução dos exercícios propostos, podendo inibir o desenvolvimento da criatividade e do raciocínio dos alunos.

Além dos exercícios de aplicação direta da definição, também são propostos situações-problema que exigem a aplicação da definição a partir do desenvolvimento de uma linha de raciocínio. Em sua maioria, tais situações estão ligadas ao lançamento de dado ou retirada de bolas de uma urna.

Na introdução de cada item, acima citado, o autor demonstra a preocupação em apresentar uma situação real para que o aluno seja conduzido na construção da definição a ser estudada.

Neste livro, não se encontrou um item dedicado à aplicação do estudo da probabilidade, ficando a cargo dos exercícios e do texto sobre expectativa de vida, localizado na seção Matemática sem fronteiras, a apresentação de aplicações sobre o conteúdo.

Em relação aos exercícios propostos, são apresentados após o estudo de cada item. Inicialmente, têm-se os exercícios resolvidos e depois os exercícios propostos.

No fim do capítulo sobre a probabilidade, é proposto um trabalho em equipe, com o objetivo de estudar as características da população brasileira quanto à distribuição etária.

Segundo Brito (2015, p. 22), "nesta obra, as explanações teóricas são acompanhadas de exemplos e de exercícios, resolvidos ou propostos", além do que:

> a maioria das atividades propostas é de aplicação do que é exposto no livro e baseado na repetição da ideia aplicada no exemplo ou no exercício resolvido, fazendo com que a autonomia do aluno na construção do seu conhecimento seja limitada. Nesse modelo, o pensamento crítico deixa de ser incentivado, há

> pouco espaço para a formulação de hipóteses e para uma aprendizagem mais significativa, ou seja, tudo ocorre de forma muito mecânica (BRITO, 2013, p. 22).

Ao concluir a análise do livro de Paiva, percebe-se que possui poucos problemas, mas, infelizmente, falta incentivar de maneira mais significativa o aluno à pesquisa. Conforme Brito (2015),

> [...]nota-se que em poucos momentos o autor tenta instigar o aluno à pesquisa, à experiência, ao estudo reflexivo e crítico do que está aprendendo. O livro não abre muito espaço para exercícios que permitam ao aluno respondê-los com suas próprias palavras, limitando-o a mera repetição mecânica e utilização de fórmulas. A cada tópico são dados alguns exercícios resolvidos de forma bem clara e direta [...] (BRITO, 2015, p. 24).

3.4.3 Aspectos comparativos das obras analisadas: convergências e divergências

Inicialmente, observou-se que a diferença entre a quantidade de páginas dedicadas ao tema nas duas obras é bem diferente, sendo que o livro de Dante apresenta 40 páginas dedicadas ao estudo, enquanto no livro de Paiva foram dedicadas apenas 21 páginas. Devido a esta diferença de quantitativo de páginas, a primeira obra citada apresenta uma abordagem mais aprofundada do tema, apresentando, por exemplo, o método binomial e aplicações da probabilidade à genética, itens que não constam na obra do segundo autor.

Na análise realizada, foram apontados nas duas coleções, aspectos relacionados à introdução do conteúdo, ao conceito de Probabilidade e suas concepções, aos exercícios resolvidos e propostos, à contextualização e ao uso da história da Matemática na abordagem do tema.

Quanto à introdução do conteúdo Probabilidade, as duas obras supracitadas apresentam um breve retrospecto histórico da origem da Teoria das Probabilidades, porém com maior ênfase no livro de Dante, enquanto Paiva inicia com um breve apanhado histórico e preocupando-se mais com a introdução contextualizada, apresentando exemplos da presença da Probabilidade no cotidiano. Desta forma, o livro de Dante apresenta uma abordagem mais interdisciplinar, enquanto o livro de Paiva apresenta o conteúdo numa abordagem mais contextual. A partir dessas observações, acreditamos que o ideal para as obras citadas e as demais obras utilizadas no Ensino Médio devem apresentar em consonância as duas abordagens.

Quanto ao conceito de Probabilidade e suas concepções, as duas obras apresentam as definições de maneira semelhante, porém na definição de Probabilidade, a primeira obra utiliza os termos “resultados favoráveis” e “resultados possíveis” além dos utilizados na segunda, que são “evento” e “espaço amostral”.

Quanto aos exercícios resolvidos e propostos, as duas bibliografias apresentam uma boa variedade, mas apresentam os exercícios propostos divididos por tema, podendo prejudicar o desenvolvimento do raciocínio dos alunos, pois estes já sabem antecipadamente que conceito terá que usar nas resoluções de tais exercícios. O livro de Dante apresenta um bloco dedicado a questões do ENEM e de outros vestibulares.

Quanto à contextualização do tema, as duas obras apresentaram situações do cotidiano que necessitam do conhecimento de Probabilidade. Neste aspecto, o livro de Paiva apresenta textos no fim do capítulo dedicado ao tema e em relação a interdisciplinaridade, Dante dedica em sua obra um item específico à aplicação do conteúdo, ao apresentar uma aplicação da Probabilidade na Genética.

Quanto ao uso da história da Matemática na abordagem do tema, os dois livros apresentam de forma breve, textos pertinentes ao desenvolvimento histórico da Teoria das Probabilidades.

Em relação a propostas metodológicas diferenciadas, as quais são interessantes constarem em bibliografias como as analisadas, destaca-se três no livro de Paiva: roteiro de estudo, análise de resolução de questão e proposta de trabalho em equipes. Tais propostas não foram encontradas no livro de Dante.

No roteiro de estudo, o autor auxilia o aluno no desenvolvimento do seu estudo, estimulando uma prática ativa e independente do aluno, e na proposta de trabalho em equipe, o autor mostra a preocupação em incentivar o trabalho coletivo e a cooperação entre os alunos. Sobreleva-se, aqui, o item da análise de resolução de questão, pois aponta na mesma direção do objetivo central desta pesquisa, que enfatiza a importância de perceber os erros, identificar suas causas e, assim, corrigi-los.

A comparação entre as obras e o apontamento dos aspectos convergentes e divergentes não foram realizados com o intuito de demonstrar ou classificar uma obra superior ou mais completa do que a outra, mas enfatizar a ideia de que todo material pedagógico é sempre passivo de complementação, assim, os docentes devem sempre buscar recursos e outras fontes que complementem o conteúdo disposto nos livros escolhidos, os quais não devem ser utilizados como ferramentas singulares e soberanas no processo de ensino e aprendizagem.

Capítulo 4

A análise de erros

O erro é inerente ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática e, desta forma, é cada vez mais importante e necessário voltar a nossa atenção para ele, pois este nos revela as falhas ocorridas no processo e nos oportuniza tomar decisões com a intenção de garantir uma aprendizagem significativa.

O objetivo deste capítulo é de destacar o erro no contexto do processo de ensino e aprendizagem da Matemática e apresentar o método de Análise de Erros proposto por Helena Noronha Cury (2009).

Neste capítulo, apresentar-se-á o erro no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, pontuando as formas como o erro é tratado por alunos e professores, ora como algo negativo ora como algo positivo. Também será apresentada a metodologia de Análise de Erro de Cury (2009), descrevendo cada etapa deste método.

Por fim, serão comentados dois trabalhos sobre a aplicação da Análise de Erros no ensino de Probabilidade.

4.1 O erro no processo de ensino e aprendizagem da Matemática

Historicamente, a Matemática é vista como a vilã das disciplinas da grade curricular da educação básica e do ensino superior. São comuns comentários do tipo: "a Matemática é um bicho de sete cabeças", "o professor de Matemática fala grego" e outros diversos comentários que tornam o ensino e a aprendizagem da Matemática em um processo amedrontador. O que confirma a ideia de que,

> [...] o ensino de matemática é considerado insatisfatório tanto para o professor, quanto para o aluno, logo já se percebe por parte dos educandos que a disciplina transmite medo e o resultado do desempenho dos alunos, quanto aos erros, faz

> com que os professores da disciplina deixem a desejar, transformando o ensino monótono, sem maiores interesses em progredir (SANTOS, 2016, p.19).

Um dos motivos de tal concepção em relação à disciplina está em como os alunos e professores de Matemática se comportam diante do erro, enxergando-o como um fracasso, e não como uma ferramenta de reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem.

No processo de ensino e aprendizagem da disciplina em questão, é frequente a presença do erro, principalmente nas resoluções de problemas apresentados aos alunos. O comportamento dos professores mediante os erros cometidos pelos alunos, podendo ser de repreensão ou de valorização, proporciona que o erro se torne peça fundamental no processo de ensino e aprendizagem, revelando as possíveis deficiências geradas no decorrer do processo, no caso da valorização, e como obstáculo à aprendizagem, no caso da repreensão.

Ao atentar-se para o que nos rodeia, percebe-se que o erro é algo rotineiro, algo que faz parte do ser humano. "Todos os dias, erros são cometidos no trabalho, com familiares, na escolha profissional, na vida sentimental. Alguns não são tão graves, outro são irreversíveis". (MONÇÃO, 2015, p. 15).

O erro é encarado de várias formas pelos pesquisadores, por uns de forma positiva e por outros de forma negativa e passível de punição. O comportamento desses estudiosos diante do erro do aluno é variado, alguns reforçam o erro, por meio de repetições dos conteúdos e outros utilizam o erro para correção em falhas na compreensão dos conceitos iniciais. De acordo com Santos (2016),

> [...] a análise de erros procura compreender os motivos das dificuldades e formas para usufruir os erros como ferramentas para a aprendizagem dos alunos, pois assim será possível auxiliá-los em dúvidas com aulas expositivas, desafiadoras e problematizadas (SANTOS, 2016, p. 19).

Ainda para Santos (2016), se nos voltarmos ao campo de ensino e aprendizagem da Matemática, observa-se que desde o final do século XIX, psicólogos e matemáticos realizam pesquisas educacionais sobre erros cometidos pelos alunos. Além disso, atualmente a análise de erros no ensino-aprendizagem transformou-se em uma das linhas de pesquisa mais interessantes em educação matemática.

A forma de encarar os erros cometidos pelos alunos é diversa nas diferentes tendências pedagógicas, cada qual indicando determinada atitude a ser tomada, e a forma como o erro deve ser tratado (positivo ou negativo). Dentre tais tendências, salientam-se aqui as visões da Pedagogia Tradicional, da Escola Nova, do Tecnicismo e do Construtivismo.

Em relação à visão Tradicional, a autora Souza (2006), afirma que:

> Os erros eram vistos como algo ruim, que devia ser banido da escola, e o importante era copiar certo, mecanicamente; a criatividade estava fora da escola; priorizavam-se os modelos prontos, desde os desenhos até a escrita e a leitura partia da memorização, não da análise e compreensão. Os erros eram vistos pela maioria dos professores como sinônimos de fracasso do aluno, simbolizando algum problema de aprendizagem; não se buscavam suas origens e causas e a preocupação pautava-se no uso intensivo da cartilha e do caderno, corrigindo-se a escrita do aluno com a "famosa" caneta vermelha e ordenando-o a repetir a escrita muitas vezes, no caderno de caligrafia (SOUZA, 2006, p. 25).

Nota-se que esta concepção traz o erro como algo negativo, sinônimo de fracasso e de classificação, rotulando os alunos bons (os que acertam) e alunos ruins (os que erram). Tais comportamentos, diante dos erros dos alunos, geram o medo de errar, prejudicando a aprendizagem.

Santos (2016) reitera que o conhecimento matemático remete o erro ao último plano, transformando-o em incompetência dos alunos diante da disciplina de Matemática. O comportamento Tradicional do professor é observado quando este não se preocupa em verificar se os erros dos alunos "são equívocos de informação, deficiência de interpretação do vocabulário dos enunciados ou mesmo falhas acontecidas em cálculos" (SANTOS, 2016, p. 20).

Em contrapartida, a Escola Nova questiona "a rigidez da escola, a autoridade do professor e a presença da passividade do aluno" (SOUZA, 2006, p. 29). Esta tendência destaca o aluno, tornando-o o elemento central do processo de ensino e aprendizagem, demonstrando agora um comportamento ativo, rompendo com a passividade demonstrada no ensino Tradicional.

O erro na Escola Nova começa a ganhar nova interpretação, visto como "uma hipótese inadequada, criada pelo aluno na busca da solução correta" (SOUZA, 2006, p. 32). Desse modo,

> [...] no movimento da Escola Nova, o princípio educativo oferece ao aluno um lugar de destaque, oportunizando-lhe realizar sua aprendizagem a partir de suas necessidades e priorizando a construção do conhecimento pelos seus interesses. Assim, os erros, quando surgiam, eram considerados propícios para a revisão das atividades, cabendo ao aluno encontrar a solução. Não podemos deixar de esclarecer que no momento de revisão acriança tinha a figura do professor como auxiliar, passando a assumir a função de facilitador da aprendizagem (SOUZA, 2006, p. 33).

Durante o século XX, os ideais da Escola Nova começaram a perder força, e, simultaneamente, com a esperança de melhorar o sistema educacional das classes sociais menos favorecidas, surge o tecnicismo. Segundo Souza (2006), esta tendência mantinha relação com o behaviorismo, baseada principalmente nas ideias de Skinner (1904 – 1990), que desenvolvia uma teoria partindo do conceito de comportamento operante, conceituando o desenvolvimento do estudante centrado nas influências que o ambiente proporciona.

Nesta perspectiva, o erro não era visto como um pressuposto para o acerto e também não deveria resultar em repreensão. Assim,

> [...] podemos perceber que o erro, nesta perspectiva, não era visto como na tendência tradicional, nem como na concepção da Escola Nova. O erro era um indicativo de que algo não estava de acordo com o padrão estabelecido, não impedindo o aluno de continuar sua tarefa, mas direcionando-o para a busca da resposta correta, ou seja, aplicando princípios que Skinner propôs, ou seja, reforçar a resposta correta e extinguir as incorretas (SOUZA, 2006, p. 40).

Um novo olhar em relação ao erro é encontrado na visão Construtivista, que tem como um de seus grandes colaboradores o biólogo e epistemólogo suíço Jean Piaget (1896 – 1980). Segundo Souza,

> Piaget não chegou a conceituar erro construtivo, mas deixou em seus escritos uma contribuição para a reflexão e análise do mesmo, mostrando-o não como algo a ser retirado do processo de ensino e de aprendizagem, mas interpretando-o como um caminho para sua compreensão em direção ao acerto, no processo inteligente da construção do conhecimento (SOUZA, 2006, p. 47).

Portanto, nesta perspectiva, o erro não é motivo de punição ou de exclusão, e sim motivo de reflexão, sobretudo a cerca de falhas cometidas no processo de ensino e aprendizagem, oportunizando tomadas de decisão em busca do caminho correto em direção ao acerto e construção do conhecimento.Os PCN's (BRASIL, 1998) apontam:

> [...] na aprendizagem escolar o erro é inevitável e, muitas vezes, pode ser interpretado como um caminho para buscar o acerto. Quando o aluno ainda não sabe acertar faz tentativas, à sua maneira, construindo uma lógica própria para encontrar a solução do problema (BRASIL, 1998, p. 55).

O que se percebe é que existe ao longo da história um grande conflito em relação ao posicionamento dos professores mediante o erro, de um lado encontram-se defensores do erro negativo, que precisa ser eliminado do processo de ensino e aprendizagem, e do outro lado, aqueles que defendem o erro positivo, que revela possíveis falhas cometidas na construção do conhecimento, possibilitando um redirecionamento ao acerto. À vista disso, Souza (2009) afirma que:

> [...] a maneira com que cada pesquisador lida com o erro é diferente de pesquisador para pesquisador. Alguns reforçam o erro para que o aluno não o reproduza novamente, enquanto outros partem do erro buscando restaurar o conceito inicial. O papel do erro como construtor do conhecimento passou a ser aceito por muitos pesquisadores (SOUZA, 2009, p. 5).

A visão negativa do erro traz consigo obstáculos para a aprendizagem e gera o medo de errar, tornando cada vez mais o aluno numa figura passiva, que não expressa sua criatividade e nem desenvolve seu raciocínio.

De tal modo que, volta-se para a retrógada visão: professores enxergam o erro como algo mau, ruim e passível de punição, sem se preocupar em investigar a origem do erro. Sendo assim, "o erro acaba esquecido, não trabalhado e o aluno comete o mesmo erro nas séries seguintes sem, na maioria das vezes, perceber onde ele está errando" (SOUZA, 2009, p. 05).

É necessário perceber que determinados erros surgem não por falta de conhecimento, e sim por não ser realizada às vezes uma correta adequação de tal conhecimento para a solução de um problema, sendo o erro algo natural na aprendizagem. Daí, "professores devem estar interessados nos erros cometidos pelos estudantes com fim de compreender sua natureza e buscar formas de conduzí-los ao aprendizado" (FIDELES, 2014, p. 38).

Portanto, compreender a origem do erro é algo necessário. Como destaca Fideles (2014):

> [...] reconhecendo a origem e constituição de um erro, podemos superá-lo, com benefícios significativos para o crescimento. Por exemplo, quando atribuímos uma atividade a um aluno e observamos que este não conseguiu chegar ao resultado esperado, conversamos com ele, reorientamos seu entendimento e sua prática. E, então, muitas vezes ouvimos o aluno dizer: "Poxa, só agora compreendi o que era para fazer!". Ou seja, foi o erro, conscientemente elaborado, que possibilitou a oportunidade de revisão e avanço. Todavia, se nossa conduta fosse a de castigar, não teríamos a oportunidade de reorientar, e o aluno não teria a chance de crescer (FIDELES, 2014, p. 38).

Sendo assim, valorizar o erro e enxergá-lo como objeto de reflexão na construção do conhecimento torna o processo de ensino e aprendizagem mais dinâmico e satisfatório, no qual o erro nos aponta caminhos para determinar a origem do fracasso na construção significativa do conhecimento. Em vista disso, investigar a origem do erro cometido pelos alunos, é "importante para uma melhor avaliação de aprendizagem, já que proporciona uma melhor mensuração não apenas quantitativa, mas, sobretudo, qualitativa diante do progresso apresentado" (FIDELES, 2014, p. 41).

Para alguns professores, ainda falta disposição para verificar se os erros cometidos pelos discentes, no cotidiano escolar, "são equívocos de informação, deficiência de interpretação do vocabulário dos enunciados ou mesmo falhas acontecidas em cálculos" (SANTOS, 2016, p. 20).

O professor comprometido com o sucesso da aprendizagem do aluno deve preocupar-se em estudar o erro, identificando as dificuldades encontradas, de forma que o acerto nem sempre nos revela que houve uma aprendizagem significativa, pois é sabido que existem falhas em determinados instrumentos utilizados em avaliações, podendo haver "chutes" e "colas".

Porém, o erro, de fato, revela falha na construção do conhecimento e direciona ao caminho do acerto. "Nessa ótica, os erros também não evidenciam apenas o que os alunos não sabem, pelo contrário, eles fornecem pistas sobre como os alunos aprendem e compreendem determinado conteúdo" (NASCIMENTO; MORELATTI, 2011, p.01).

Além da importância que os docentes devem dar à análise dos erros, os alunos precisam aprender a refletir sobre os seus próprios erros, entendendo-os. A atitude de apenas revelar ao aluno a resposta correta e ignorar o erro cometido, faz com que o aluno não compreenda o que errou. Fideles (2014) aponta que:

> [...] é necessário que o estudante entenda o que errou. Muitas vezes, nas aulas de Matemática, ao corrigir uma atividade, explicamos o procedimento correto de resolução de um problema. Em algumas situações o aluno compreende a resolução apresentada pelo professor e verifica que sua resposta está errada, mas não compreende o que errou. Tornar o erro "um observável" é mais produtivo para um aprendizado significativo do que apenas desconsiderar os argumentos desenvolvidos pelo estudante e apresentar-lhe os nossos argumentos corretos e inquestionáveis (FIDELES, 2014, p. 41).

Com base em Monção (2015), infelizmente nota-se que no ensino da Matemática, mesmo com a evolução dos estudos a respeito da importância da análise de erros, o erro ainda é apontado como incompetência do aluno, pois os erros existentes nas resoluções de exercícios e problemas são encarados como falha, e não como indicadores de novos caminhos ou norteadores para uma reflexão do processo de ensino e aprendizagem.

Ainda para Monção (2015), tem-se que:

> [...] frequentemente, os erros no processo de ensino aprendizagem em Matemática possuem um aspecto negativo e punitivo para os alunos. Erros simples de cálculos, erros da não compreensão e da não interpretação dos enunciados de problemas geram inseguranças e dificuldades de aprendizagem que, aliados aos problemas emocionais levam os aprendizes a não se sentirem capazes de resolver exercícios ou problemas matemáticos (MONÇÂO, 2015, p. 18).

Logo, os professores devem assumir a responsabilidade de refletir sobre o erro e utilizá-lo como estratégia de mudança e aprendizagem. Assim, o erro é observado sob aspectos positivos, tornando-se "o centro das reflexões teóricas, evitando o medo de errar, deixando de ser o fracasso do aluno para ser um fator decisivo para a sua aprendizagem" (SILVA, 2016, p.07).

4.2 Análise de erros no ensino da Probabilidade

O processo de construção do conhecimento requer uma avaliação sobre o caminho percorrido e o que de fato foi aprendido pelos alunos. No processo de ensino e aprendizagem existem alguns tipos de instrumentos avaliativos que o professor pode usar, por exemplo, as produções escritas, tais como provas, trabalhos, listas de exercícios e outros.

Todas as produções escritas realizadas pelos alunos devem ser analisadas, e tal análise não pode ser confundida com a própria avaliação. Segundo Cury et al. (2008, p.1-2),

> [...] ainda que possamos encontrar pontos em comum entre essas ações, a análise do que foi produzido pelo aluno não tem como objetivo atribuir-lhe um conceito ou nota. Ao analisar a resolução de um exercício ou problema, pode-se usar os erros cometidos pelos estudantes como subsídio para a avaliação, mas também se pode empregar essa análise no decorrer de uma investigação ou mesmo no planejamento de estratégias de ensino.

De fato, analisar as produções dos alunos com o objetivo único de mensurar o conhecimento através de um conceito, não evidencia possíveis falhas ocorridas no processo de aprendizagem, de forma que é essencial a análise, principalmente dos erros , pois estes nos revelam problemas ocorridos no processo.

Ainda segundo a autora, a análise de erros é uma metodologia de pesquisa e ensino que auxilia professores e alunos a reverem os conteúdos em que surgem dificuldades, além disso, afirma que a metodologia de análise de erros de produções escritas é baseada na análise de conteúdo, sendo utilizada para analisar respostas de questionários, experiências, testes e perfeitamente aplicável às questões de matemática nas respostas escritas dos estudantes.

Segundo Souza (2009),

> [...] a análise de erros leva o profissional da Educação Matemática a investigar erros, observar como os alunos resolvem um determinado problema e a partir daí encontrar metodologias de ensino que vão favorecer o conhecimento do aluno (SOUZA, 2009, p.6).

Cury (2009) baseou-se nas etapas determinadas no método de análise de erros de Bardin (1987): pré-análise, exploração do material e tratamento de resultados. Para elaborar a metodologia de análise de erros voltada para as respostas dos alunos em suas produções escritas, a autora estabeleceu as seguintes etapas: leitura flutuante de todo material, unitarização e categorização das respostas e tratamento dos resultados.

Na primeira etapa, é realizada uma leitura flutuante de todo o material, avaliando as respostas e separando-as em totalmente corretas, parcialmente corretas e incorretas, contabilizando cada tipo de erro.

Na segunda etapa, é realizada a unitarização e categorização das respostas, iniciando a interpretação dos dados a partir dos critérios criados conforme as categorias.

Por fim, realiza-se a etapa do tratamento dos dados, na qual são apresentadas tabelas de frequência, porcentagem ou descrição através de texto sobre cada uma das categorias.

Após a realização de uma análise de erros, o professor deve, segundo Cury et al. (2008), assumir uma postura de

> [...] explorar os erros, juntamente com os estudantes, para fazer descobertas sobre os conteúdos em questão ou apenas tentar remediá-los, criando estratégias de ensino para retomar os conteúdos nos quais os alunos mostram mais dificuldades (CURY et al, 2008, p. 3).

O professor, ao analisar o erro, identifica a origem das falhas cometidas pelos alunos na disciplina, podendo, assim, buscar maneiras diversificadas de conduzir o aluno à construção significativa do conhecimento. "Quando o aluno comete erros, ele expressa de uma forma o que sabe e o que não sabe. Dessa forma, o professor poderá agir de maneira eficaz, diretamente no problema detectado" (SANTOS, 2016, p. 18).

Para Souza (2009), a análise do erro é uma alternativa para compreender falhas cometidas no processo de ensino e aprendizagem, tornando o professor capaz de compreender qual foi o motivo do erro cometido pelo aluno, facilitando o trabalho e tornando possível superar os obstáculos que impedem o avanço no processo da aprendizagem; apontando ainda, que:

> [...] o estudante geralmente tem medo de mostrar ao professor que não sabe resolver uma questão, porque ele mesmo considera sua dificuldade "boba" e, o próprio professor usando esta metodologia pode detectar essa dificuldade, afinal é mais fácil para o professor trabalhar o déficit do aluno, porque, em geral, o estudante sabe alguma coisa (SOUZA, 2009, p. 4).

De modo geral, a análise dos erros aponta caminhos para uma reflexão sobre a prática pedagógica, possibilitando a correção de erros e a manifestação de um comportamento mais ativo do aluno. "O aluno que corrige um erro e o entende pode mudar sua aprendizagem" (SOUZA, 2009, p. 06). Além disso, possibilita valorizar os processos realizados antes das respostas, e não apenas ter a resposta como um produto. Tornando assim, o erro como algo positivo.

Ao concordar com as ideias de Souza (2009), Santos (2016) afirma que

> [...] a análise de erros procura compreender os motivos das dificuldades e formas para usufruir os erros como ferramentas para a aprendizagem dos alunos, pois assim será possível auxiliá-los em dúvidas com aulas expositivas, desafiadoras e problematizadas (SANTOS, 2016, p. 19).

Assim, esta metodologia torna-se uma ferramenta importante para o processo de ensino e aprendizagem, contribuindo para que o professor repense suas práticas pedagógicas e planeje suas intervenções didáticas, permitindo ao aluno refletir sobre seus erros.

Em sua pesquisa sobre trabalhos que abordam o tema "Análise de Erros", Cury (2010) cita que para Borasi (1996), existem três objetivos para o uso dos erros: remediação, descoberta e pesquisa. Na remediação, o professor reforça o conteúdo que não foi compreendido, lançando mão da repetição do conteúdo. Com a descoberta, pretende-se identificar os erros, conduzindo o aluno à sua correção; e para fins de pesquisa, o uso do erro é tido como ponto de partida para buscar soluções para as falhas cometidas no processo de ensino e aprendizagem.

Dentre estes, a autora destaca a remediação, pois existe a crença de que ao perceber o erro, basta a repetição do conteúdo não aprendido para que o aluno entenda. Porém, se apenas remediar fosse suficiente, bastaria uma nova explicação e o aluno compreenderia. No entanto, "é necessário encontrar outras maneiras de chegar às possíveis causas de um determinado erro e discuti-las com os professores, em especial" (CURY, 2010, p. 08).

É importante evidenciar que existem diversos tipos de erro, de forma que erros de naturezas diferentes não podem ser tratados da mesma forma, principalmente quando para superá-los forem necessárias condutas distintas.

Sobre os diferentes erros cometidos pelos alunos, principalmente na disciplina de Matemática, pode-se apontar os erros cometidos em cálculos simples, erros de compreensão e interpretação do enunciado dos problemas. Tais erros, "geram inseguranças e dificuldades de aprendizagem que, aliados aos problemas emocionais, levam os aprendizes a não se sentirem capazes de resolver exercícios ou problemas matemáticos" (SILVA, 2016, p. 18).

O supracitado autor indica em seu trabalho diversos tipos de erros: erro de execução, erro como incorreção por falta de conhecimento ou clareza, erro por dificuldade na obtenção de informações, erro pela aprendizagem deficiente de fatos, erro causado por problemas emocionais e erro na restauração de um esquema anterior.

Este tipo de categorização de erros, seguindo a metodologia citada anteriormente, proposta por Helena Cury, deve ser antecedida por uma leitura flutuante das respostas dos alunos e da separação das respostas corretas, incorretas e parcialmente corretas.

Nota-se, portanto, que a metodologia de análise de erros vem sendo aplicada em diversos trabalhos na área da Matemática, porém no ensino da probabilidade, tal metodologia ainda é pouco utilizada.

Neste trabalho, serão expostos dois estudos realizados, utilizando o método no estudo da Teoria das Probabilidades: Dificuldades encontradas pelos alunos em resolver questões de probabilidade (CONTESSA et al, 2014) e Análise de erros em probabilidade: uma pesquisa com professores em formação continuada (VIALI; CURY, 2009).

O trabalho apresentado palas autoras Contessa, Trindade, Pereira e Flores (2014) no XX Encontro Regional de Estudantes de Matemática na Região Sul, realizado na Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), foi um relato de experiência que apresentou resultados parciais de um projeto de análise das resoluções dos alunos do terceiro ano do ensino médio a cerca de questões de probabilidade.

Para o desenvolvimento da pesquisa, as autoras utilizaram a metodologia de análise de erros, fundamentada nos trabalhos de Azevedo (2009), Cury e Viali (2009) que tratam da aplicação desta metodologia voltada à disciplina de Matemática.

Na primeira etapa da pesquisa, os participantes resolveram três questões de Matemática das provas do ENEM que envolviam o conteúdo de probabilidade. Foi pedido aos alunos que detalhassem da melhor forma possível os caminhos percorridos para chegar à resposta.

Na segunda etapa, as autoras analisaram as respostas dadas pelos alunos às questões propostas e categorizaram os principais erros encontrados. Realizadas as análises, foi comunicado aos estudantes os resultados encontrados, e em grupos de discussão os próprios alunos foram incentivados a buscar a melhor forma de solucionar os erros cometidos.

Para a análise dos erros, foram estabelecidas as seguintes categorias:

> Erro 1 – enumeração não sistemática, que permite encontrar algumas soluções do problema, mas não todas, ou soluções repetidas já encontradas anteriormente;
> Erro 2 –resposta intuitiva errada, sem justificativa;
> Erro 3 –interpretação incorreta da questão;
> Erro 4 –aplicação incorreta de conteúdos de matemática já estudados (CONTESSA et al. 2014, p. 541).

Ao concluir a análise dos erros cometidos pelos alunos e as discussões em grupos, as autoras concluíram que:

> [...] podemos perceber um percentual considerável de erros cometidos. Estes se dão, principalmente, em conteúdos de séries anteriores e não especificamente nos conceitos da probabilidade, o que nos remete a uma reflexão no sentido de sempre estar fazendo ligações do conteúdo que está sendo estudado no momento com conteúdos anteriores (CONTESSA et al. 2014, p. 544).

Em relação à utilização do método de análise de erro, afirmaram ser de grande contribuição para a formação dos estudantes e dos professores, "pois ambos refletem sobre os erros cometidos, transformando os obstáculos em fonte de aprendizagem e crescimento" (CONTESSA et al. 2014, p. 544).

No artigo sobre a análise de erros em probabilidade, Viali e Cury (2009) apresentam resultados parciais de uma pesquisa desenvolvida com recursos do CNPq, cujo objetivo era analisar soluções dadas por professores em formação continuada sobre Álgebra, Análise, Geometria e Probabilidade. Os participantes da pesquisa foram vinte e um (21) professores de Matemática.

Os participantes da pesquisa eram alunos de Especialização em Educação Matemática e Mestrado em Ensino de Matemática, num total de quarenta e três (43) participantes. Sendo aplicado um teste de cinco questões, em que apenas a quarta questão abordava o conteúdo de probabilidade.

A questão analisada possui o seguinte enunciado:

> Em uma urna existem quatro moedas de 10 centavos, quatro de 20 centavos e duas de 50 centavos. Retirando duas moedas ao acaso e sem reposição, determine a probabilidade de se obter exatamente 70 centavos. Se a retirada for com reposição, isto é, você retira a primeira moeda, observa, devolve e então retira a segunda, qual seria essa probabilidade? (VIALI; CURY, 2009, p. 377).

Segundo as autoras, o objeto de interesse são as respostas incorretas dadas pelos participantes da pesquisa, com o objetivo de compreender as dificuldades que os professores possuem ao lidar com problemas de probabilidade. Os conceitos exigidos pela questão são:

> [...] a ideia de experiência aleatória, eventos simples e compostos, espaço amostra, definição clássica e axiomática de probabilidade, bem como regras de cálculo da soma de eventos mutuamente excludentes e do teorema da multiplicação para o cálculo do produto de eventos dependentes e independentes (VIALI; CURY, 2009, p. 377).

Foram apresentadas soluções esperadas para a questão proposta em três abordagens diferentes, duas com representação visual e outra sem, a fim de comparar com as resoluções apresentadas pelos professores no teste.

As categorias utilizadas para a análise das respostas foram: "(Classe A) cálculo de probabilidade de eventos compostos, derivação da definição axiomática (Classe B) e os que buscaram empregar a análise combinatória (Classe C)" (VIALI; CURY, 2009, p. 383).

Na conclusão desta pesquisa, Viali e Cury (2009) afirmaram que boa parte dos professores nem tentaram responder a questão ou não registraram os caminhos percorridos em busca da solução. Além disso, destacaram que a amostra utilizada não foi suficiente para que tenha sido identificado o tipo de concepção errônea que os professores possuem em relação à probabilidade.

Diante do exposto, percebe-se que a utilização da metodologia de análise erros voltada para as produções escritas realizadas na disciplina de Matemática, e, em especial, no estudo da probabilidade, é muito importante, pois este revela as possíveis falhas cometidas no processo de ensino e aprendizagem, e, além disso, torna o aluno figura ativa no processo, tornando-o capaz de identificar seus erros e corrigi-los.

Capítulo 5

Procedimentos Metodológicos

A pesquisa é um procedimento reflexivo, o qual, segundo Silva e Meneses (2001), constitui-se como um conjunto de ações, propostas para encontrar a solução de um problema, que têm por base procedimentos racionais e sistemáticos; realizada quando se tem um problema e não se tem informações para solucioná-lo.

Em vista disso, este trabalho ao pretender alcançar o objetivo geral de: identificar as dificuldades dos alunos do Ensino Médio na resolução de problemas de Probabilidade, mediante análise e classificação de erros nas provas da segunda fase da OBMEP – Nível 3 nos anos 2015 e 2016 no estado do Maranhão, e os seguintes objetivos específicos: apresentar um breve histórico sobre o desenvolvimento dos estudos a cerca da probabilidade, bem como do seu ensino, estabelecer os critérios de classificação de erros a serem analisados nas resoluções dos problemas de probabilidade nas provas da OBMEP – Nível 3 nos anos 2015 e 2016 no estado do Maranhão e analisar os tipos de erros mais frequentes nas resoluções de questões de probabilidade, fez uso dos seguintes procedimentos metodológicos descritos a seguir.

5.1 Delimitação do estudo

Para a realização desta pesquisa, foi inicialmente realizado um levantamento do referencial teórico bibliográfico, iniciado com uma investigação a respeito do ensino da Probabilidade no ensino médio, percorrendo os aspectos históricos da construção deste conhecimento, sua abordagem em livros didáticos propostos pelo PNLD 2015, assim como a indicação do seu estudo nos documentos oficiais, além de ressaltar a utilização de resolução de problemas para o estudo do mesmo. Em seguida, tratou-se da metodologia aplicada para este estudo.

Para a coleta dos dados, realizou-se a seleção de cinqüenta (50) provas da segunda fase do nível três da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), sendo vinte e cinco (25) provas do ano de 2015 e vinte e cinco (25) do ano de 2016. Em cada uma dessas provas foi analisada a sexta questão que exige conhecimento acerca da probabilidade.

A opção pelas provas da segunda fase foi realizada, pois se acredita que as resoluções apresentadas às questões subjetivas, nas quais o aluno expressa o raciocínio utilizado na resolução, diferente da primeira fase que são questões objetivas, revelará mais informações a respeito do processo de aprendizagem do aluno sobre o conteúdo probabilidade. Além disso, é possível identificar os motivos que levaram o aluno ao erro ou ao acerto.

Quanto ao método, ou seja, quanto ao conjunto das técnicas de investigação, foi utilizado o da análise de erros proposto por Helena Noronha Cury (2009), aplicada às resoluções das questões.

5.2 Modalidade da pesquisa

Esta pesquisa apresenta, segundo seus objetivos, características: exploratória e explicativa, pois se pretendeu proporcionar maior familiaridade com o problema com o intuito de torná-lo mais explícito ou de levantar hipóteses. Além disso, procurou-se identificar os fatores que contribuem para ocorrência do desenvolvimento de um determinado fenômeno.

Segundo Bortoloti (2015), a pesquisa exploratória,

> [...] oferece uma aproximação inicial do objeto de estudo,visando dar mais familiaridade diante de um fenômeno ou assunto a ser pesquisado ou, ainda, objetivando uma nova percepção dele ou a descoberta de novas ideias (BORTOLOTI, 2015, p.69).

Ainda segundo a autora, na pesquisa explicativa prevalece "a explicação da causa ou da razão de determinado fenômeno" (BORTOLOTI, 2015, p. 69).

Conforme os procedimentos de coleta e as fontes de informações, esta pesquisa está classificada como bibliográfica e documental. Inicialmente realizou-se uma pesquisa bibliográfica, visando fundamentar o estudo, tomando-se por base publicações de alguns autores sobre o tema e sobre os assuntos pertinentes a este, de modo que possibilitou delinear uma nova abordagem sobre a temática (BORTOLOTI, 2015). Em seguida, foram selecionadas provas da segunda fase da OBMEP dos anos 2015 e 2016, sendo estes os documentos constituintes da fonte documental para a análise realizada nesta pesquisa.

Quanto à natureza dos dados ou abordagem do problema, esta pesquisa apresenta perfil qualitativo e quantitativo, pois se realizou análise, interpretação e quantificação dos dados, de forma que a pesquisa quantitativa considera o que pode ser quantificado, e a qualitativa considera a relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito. Segundo Bertoloti (2015), a pesquisa quantitativa exige a quantificação na coleta e no tratamento dos dados, utilizando-se de técnicas estatísticas e a pesquisa qualitativa, é uma abordagem voltada à compreensão e interpretação dos dados coletados.

5.3 Instrumentos de coletas de dados

Foram utilizados na coleta de dados desta pesquisa, as resoluções de questões apresentadas pelos alunos à sexta questão das provas da segunda fase do nível três da OBMEP nos anos 2015 e 2016.

Para a seleção das provas, teve-se acesso às provas realizadas nos anos supracitados, com exceção das provas que foram enviadas para o Rio de Janeiro, para a realização da última correção. As provas foram requisitadas junto à professora coordenadora da OBMEP da região MA01 – São Luís, Valdiane Sales Araujo, com a responsabilidade de devolver as mesmas para futuros estudos.

Todas as provas arquivadas passaram por correção, constando em cada uma delas a pontuação que o aluno obteve em cada item, assim como a nota geral da prova. Esta correção foi utilizada para classificar as soluções dadas à sexta questão em totalmente correta, parcialmente correta e incorreta, salientando que o autor desta pesquisa não teve participação em tal correção.

Entre as provas consultadas, diversas não possuíam resolução referente à sexta questão, que aborda o conteúdo de probabilidade. Após identificar as provas em que havia a resolução para a questão a ser analisada, selecionou-se as provas de forma que fosse obtida a maior variedade possível de raciocínios utilizados para a resolução das questões.

Seguindo as etapas descritas por Cury (2009) na análise de erros, primeiramente realizou-se uma leitura flutuante para analisar as respostas, em seguida foram separadas as soluções em totalmente corretas, parcialmente corretas, incorretas e não respondeu. Para aprofundar a análise, foi realizada a unitarização e categorização das respostas. E por fim, foi feito o tratamento dos dados.

As questões analisadas nas provas da segunda fase da prova da OBMEP dos anos 2015 e 2016 estão apresentadas a seguir:

Questão 6 (OBMEP - 2015):

Para a primeira fase de um torneio internacional de futebol foram classificadas 3 equipes espanholas, 2 francesas, 1 alemã, 1 portuguesa e 1 italiana. Nessa fase, serão realizadas quatro partidas, com os confrontos definidos por sorteio. Em seguida, duas semifinais serão realizadas com as quatro equipes vencedoras da primeira fase, também com os

confrontos definidos por sorteio. As duas equipes vencedoras jogarão a partida final.
a) Qual é a probabilidade de que, na primeira fase, as duas equipes francesas se enfrentem?
b) Qual é a probabilidade de ocorrer, na primeira fase, um confronto entre duas equipes espanholas?
c) Admitindo que em cada confronto do torneio as equipes têm, todas, iguais probabilidades de ganhar, qual é a probabilidade de que a final seja realizada entre duas equipes de um mesmo país?

Questão 6 (OBMEP - 2016):
Seis bolas idênticas foram numeradas de 1 a 6 e colocadas em uma caixa. Joaquim retira, uma a uma, quatro bolas da caixa e observa seus números, sem recolocá-las na caixa.
a) Qual é a probabilidade de que o menor número observado seja 1?
b) Qual é a probabilidade de que o maior número observado seja 5?
c) Qual é a probabilidade de que o menor número observado seja 1 e o maior seja 5?
d) Qual é a probabilidade de que o menor número observado saia na primeira bola retirada e o maior, na última bola?

5.4 A organização, tratamento e análise dos dados

Durante a pesquisa documental, o objetivo principal consistiu na obtenção do material suficiente para alcançar o objetivo geral: identificar as dificuldades na resolução de problemas de probabilidade no Ensino Médio, mediante análise e classificação dos erros cometidos nas provas da segunda fase da OBMEP – Nível 3 nos anos 2015 e 2016 no estado do Maranhão.

Inicialmente, foi realizada a seleção das provas a serem analisadas, tendo em vista que o foco era apenas as resoluções apresentadas na sexta questão, já que esta exige conhecimento a cerca da probabilidade.

No processo de correção das provas da OBMEP, após a correção local (feita no estado de aplicação, de acordo com a pauta nacional de correção), as provas que possuem notas com valor maior ou igual à nota de corte são encaminhadas para o Rio de Janeiro, onde passarão por outra correção; as demais provas permanecem no território local. Tais provas são arquivadas para consultas e estudos posteriores.

Desse modo, teve-se acesso às provas que não foram enviadas ao Rio de Janeiro, através da Coordenação da OBMEP no Maranhão da região MA01 – São Luís (região que compreende 102 municípios do Maranhão), dentre as quais foram selecionadas cinquenta (50) provas, sendo vinte e cinco provas aplicadas no ano de 2015 e vinte e cinco no ano de 2016. Para a escolha destas provas, buscou-se identificar as que possuíam resolução para a sexta questão e, além disso, optou-se por obter um maior número possível de raciocínios diferentes utilizados para responder a questão, utilizando-se da leitura flutuante para identificar os procedimentos diversos utilizados para a obtenção da solução e para realizar a seleção das provas.

Após a seleção das cinqüenta (50) provas, aplicou-se o método de análise de erros, descrito por Cury (2009), a partir do qual, como já foi mencionado, realizou-se uma leitura flutuante com o intuito de avaliar as respostas dos alunos, e em seguida, as respostas dadas aos itens foram separadas em quatro blocos: respostas totalmente corretas, parcialmente corretas, incorretas e não respondeu. É importante ressaltar que as provas, as quais a questão seis estava completamente sem resposta, foram excluídas já na primeira seleção realizada.

De posse das resoluções separadas nos blocos das questões totalmente corretas, parcialmente corretas e incorretas, aprofundou-se a análise, estabelecendo a unitarização e categorização das respostas. A partir da categorização das respostas, foi realizada a última etapa do método aplicado nesta pesquisa, o tratamento dos dados.

No tratamento dos dados, buscou-se quantificar as informações, além de realizar uma análise qualitativa das respostas. O foco deste trabalho foram as respostas incorretas, a fim de alcançar o objetivo proposto. De acordo com as categorias estabelecidas, os erros foram quantificados e analisados, a fim de identificar as dificuldades encontradas pelos alunos na resolução das questões e no processo de aprendizagem do conteúdo probabilidade.

Para a análise dos dados, as provas foram nomeadas da seguinte forma: Aluno 1 (A1), Aluno 2 (A2), Aluno 3 (A3) e assim sucessivamente até o Aluno 50 (A50), com a intenção de preservar as identidades dos alunos que responderam as provas.

5.5 A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) teve sua primeira edição realizada em 2005.

> [...] o Brasil foi surpreendido por uma proposta de inscrição em uma Olimpíada de Matemática que contemplava somente as escolas públicas de Educação Básica. Este foi o ponto de partida para a criação da OBMEP, cujo lema era "Somando Novos Talentos" (COSTA, 2015, p. 36).

O público alvo inicial da realização da OBMEP foi os alunos das escolas públicas, com a intenção de verificar o desempenho e o interesse desse público em relação à Matemática, além de ser uma motivação para o estudo dessa área de conhecimento. Nesta primeira edição, as inscrições ocorreram no período de 03 de março a 31 de maio, a aplicação das provas da primeira fase aconteceu no dia 16 de agosto, e no dia 08 de outubro foram realizadas as provas da segunda fase. Nota-se, ainda, nesta primeira edição um trabalho efetivo no que diz respeito à divulgação do evento, o que resultou numa considerável participação dos alunos, já que houve cerca 10.520.831 inscritos, envolvendo cerca de 93,5% dos municípios brasileiros na Olimpíada Brasileira de Matemática. "Essa adesão, colocou o Brasil como recordista mundial em número de participantes em competições de Matemática" (COSTA, 2015, p. 37). A Tabela 1 lista o número de participantes da primeira e segunda fase da OBMEP, assim como o número de premiados ao longo dos últimos 12 anos.

Ano	Primeira Fase	Segunda Fase	Premiados
2005	10.520.831	457.725	31.109
2006	14.181.705	630.864	34.743
2007	17.341.732	780.333	33.003
2008	18.326.029	789.998	33.017
2009	19.198.710	841.139	33.011
2010	19.665.928	863.000	33.256
2011	18.720.068	818.566	33.202
2012	19.166.371	823.871	45.434
2013	18.762.859	954.926	44.835
2014	18.192.526	907.446	45.664
2015	17.972.333	889.018	48.784
2016	17.839.424	913.889	48.984

Tabela 5.1: Número de inscrito na OBMEP na primeira e segunda fase e premiados

A OBMEP é uma competição dedicada a alunos que estão matriculados nas séries finais do ensino fundamental (6º ao 9º ano) e no ensino médio. De 2005 até 2016, esta olimpíada foi dedicada exclusivamente a alunos de escolas públicas, já em 2017 foi incluída a participação dos alunos de escolas privadas, preservando os mesmos níveis de ensino. Desta forma, estão incluídos os alunos das escolas municipais, estaduais, federais e privadas, todos concorrendo a prêmios conforme a sua classificação.

Segundo o regulamento da OBMEP 2017, os objetivos desta competição são:

> 3.1.1. Estimular e promover o estudo da Matemática no Brasil.
> 3.1.2. Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que o maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade.
> 3.1.3. Promover a difusão da cultura matemática.
> 3.1.4. Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades nas áreas científicas e tecnológicas.
> 3.1.5. Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas,

> contribuindo para a sua valorização profissional.
> 3.1.6. Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, com os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas.
> 3.1.7. Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento (IMPA; SBM, 2017).

Observou-se que durante as doze primeiras edições da olimpíada e na sua atual edição, 13º OBMEP, os organizadores demonstram um grande empenho em estimular os estudos em Matemática por todo o Brasil, identificando talentos, integrandos as escolas brasileiras, assim como em contribuir para o aperfeiçoamento dos professores e para a promoção da inclusão social por meio do conhecimento.

A OBMEP é realizada em duas etapas, sendo a primeira, uma aplicação de prova objetiva a todos os alunos inscritos pelas escolas. Após a classificação dos alunos, segundo os critérios estabelecidos no regulamento, é realizada a segunda fase, constituída por aplicação de prova discursiva aos alunos classificados na primeira fase.

Na primeira fase, as provas são objetivas e possuem caráter eliminatório, apresentando vinte (20) questões e totalizando vinte (20) pontos, sendo diferenciadas para cada um dos três níveis. Estas provas são aplicadas na própria escola, com duração de 2h30min, e apresentam questões que abordam conteúdos previstos nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Na segunda fase, as provas também são diferenciadas por níveis, porém possuem caráter classificatório e são discursivas, compostas por seis questões valendo vinte (20) pontos cada, totalizando cento e vinte (120) pontos. A duração destas provas é de três horas, e são aplicas por fiscais selecionados pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).

Os alunos participantes são divididos em três níveis, de acordo com seu grau de escolaridade:

> I. Nível 1 – alunos matriculados em 2017 no 6º ou 7º ano do Ensino Fundamental.
> II. Nível 2 – alunos matriculados em 2017 no 8º ou 9º ano do Ensino Fundamental.
> III. Nível 3 – alunos matriculados em 2017 em qualquer ano do Ensino Médio (IMPA; SBM, 2017).

Em cada um desses três níveis, as escolas participantes são divididas em cinco grupos, levando em consideração o número de inscritos para participarem da primeira fase. Os níveis são divididos da seguinte forma:

> a) Nível 1:
> 1. Compõem o Grupo 1A as escolas que inscreverem na Primeira Fase da

> OBMEP de 1 (um) a 40 (quarenta) alunos no Nível 1.
> 2. Compõem o Grupo 1B as escolas que inscreverem na Primeira Fase da OBMEP de 41 (quarenta e um) a 80 (oitenta) alunos no Nível 1.
> 3. Compõem o Grupo 1C as escolas que inscreverem na Primeira Fase da OBMEP de 81 (oitenta e um) a 140 (cento e quarenta) alunos no Nível 1.
> 4. Compõem o Grupo 1D as escolas que inscreverem na Primeira Fase da OBMEP de 141 (cento e quarenta e um) a 240 (duzentos e quarenta) alunos no Nível 1.
> 5. Compõem o Grupo 1E as escolas que inscreverem na Primeira Fase da OBMEP 241 (duzentos e quarenta e um) alunos ou mais no Nível 1.
> b) Nível 2:
> 1. Compõem o Grupo 2A as escolas que inscreveram na Primeira Fase da OBMEP de 1 (um) a 40 (quarenta) alunos no Nível 2.
> 2. Compõem o Grupo 2B as escolas que inscreverem na Primeira Fase da OBMEP de 41 (quarenta e um) a 80 (oitenta) alunos no Nível 2.
> 3. Compõem o Grupo 2C as escolas que inscreverem na Primeira Fase da OBMEP de 81 (oitenta e um) a 140 (cento e quarenta) alunos no Nível 2.
> 4. Compõem o Grupo 2D as escolas que inscreverem na Primeira Fase da OBMEP de 141 (cento e quarenta e um) a 240 (duzentos e quarenta) alunos no Nível 2.
> 5. Compõem o Grupo 2E as escolas que inscreverem na Primeira Fase da OBMEP 241 (duzentos e quarenta e um) alunos ou mais no Nível 2.
> c) Nível 3:
> 1. Compõem o Grupo 3A as escolas que inscreverem na Primeira Fase da OBMEP de 1 (um) a 120 (cento e vinte) alunos no Nível 3.
> 2. Compõem o Grupo 3B as escolas que inscreverem na Primeira Fase da OBMEP de 121 (cento e vinte e um) a 240 (duzentos e quarenta) alunos no Nível 3.
> 3. Compõem o Grupo 3C as escolas que inscreverem na Primeira Fase da OBMEP de 241 (duzentos e quarenta e um) a 380 (trezentos e oitenta) alunos no Nível 3.
> 4. Compõem o Grupo 3D as escolas que inscreverem na Primeira Fase da OBMEP de 381 (trezentos e oitenta e um) a 620 (seiscentos e vinte) alunos no Nível 3.
> 5. Compõem o Grupo 3E as escolas que inscreverem na Primeira Fase da OBMEP 621 (seiscentos e vinte e um) alunos ou mais no Nível 3.(IMPA; SBM, 2017).

Para que as escolas participem da OBMEP, é necessário que realizem suas inscrições através do preenchimento da ficha de inscrição disponível exclusivamente na página www.obmep.com.br. Ao realizar sua inscrição, a escola concorda com todas as condições e regras impostas pela organização da olimpíada.

Poderão inscreve-se as escolas municipais, estaduais, federais, que atuem nas séries finais do ensino fundamental e no ensino médio, e a partir do ano de 2017, também foram incluídas na competição as escolas privadas que atuem nos mesmos níveis de ensino citados. Para as escolas públicas as inscrições são gratuitas e para as escolas privadas é cobrada uma taxa mínima de R$ 100,00 (cem reais) que corresponde à inscrição de até vinte e cinco (25) alunos, e para inscrições adicionais, deverá ser pago R$ 4,00 (quatro reais) por aluno.

Em relação às premiações, a OBMEP premia alunos, professores, escolas e secretarias municipais de educação pelos melhores desempenhos na competição. Com a inclusão das escolas privadas, a premiação será distribuída separadamente entre as Escolas Públicas e as Escolas Privadas.

A premiação para os alunos das escolas públicas está dividida da seguinte forma:

a) quinhentas medalhas de ouro;

b) mil e quinhentas medalhas de prata;

c) quatro mil e quinhentas medalhas de bronze;

d) quarenta e seis mil e duzentos certificados de Menção Honrosa;

e) seis mil e quinhentas oportunidades de participar do Programa de Iniciação Científica Jr (PIC Jr – OBMEP);

A premiação para os alunos das escolas privadas está dividida da seguinte forma:

a) setenta e cinco medalhas de ouro;

b) duzentas e vinte e cinco medalhas de prata;

c) seiscentas e setenta e cinco medalhas de bronze;

d) cinco mil e setecentos certificados de Menção
Honrosa;

e) novecentos e setenta e cinco oportunidades de participar do Programa de Iniciação Científica Jr (PIC Jr – OBMEP);

Aos professores dos alunos das escolas públicas e escolas privadas na OBMEP, serão dedicados novecentos e sessenta e nove (960) prêmios. Esta premiação está vinculada à quantidade de alunos medalhistas e que receberam menção honrosa.

Para as escolas serão dedicados quinhentos e quarenta (540) prêmios, a partir da pontuação dos seus alunos, e para as secretarias municipais de educação serão dedicados cinquenta e dois (52) prêmios de acordo com o desempenho dos alunos das suas escolas públicas municipais inscritas na Segunda Fase da OBMEP 2017.

Para a realização da OBMEP, o IMPA possui as seguintes atribuições:

> a) Planejamento e organização do projeto.
>
> b) Elaboração de material didático, das provas e dos gabaritos.
>
> c) Disponibilizar os gabaritos das provas da Primeira Fase e material didático às escolas.
>
> d) Processamento das informações enviadas pelas escolas com os resultados da Primeira Fase.
>
> e) Aplicação das provas da Segunda Fase.

> f) Correção das provas da Segunda Fase e indicação de todas as premiações.
> g) Conservação das provas da Segunda Fase por um período de 4 (quatro) meses a contar da data da divulgação dos resultados. Após esse período, a Divisão competente poderá autorizar a reciclagem do papel das provas.
> h) Manutenção da página atualizada com informações sobre a OBMEP 2017.
> i) Elaboração do Relatório Final dos resultados da OBMEP 2017 (IMPA; SBM, 2017).

Assim, observa-se a relevância do objeto escolhido (provas da OBMEP 2015 e 2016) desta pesquisa, já que se configura como uma indispensável ferramenta, principalmente para as escolas públicas brasileiras, para o processo de ensino aprendizagem de Matemática, bem como da formação cidadã dos educandos, já que, dentre suas contribuições, pode-se destacar: o atendimento pelo Programa de Iniciação Científica (PIC); a disponibilidade de material didático gratuito para estudo; o atendimento pelo Programa de Iniciação Científica e de Mestrado (PICME); a preparação dos medalhistas de ouro para participação em outras olimpíadas; a preparação de competidores através dos Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI); a preparação de docentes e o Portal da Matemática.

Capítulo 6

A pesquisa

O objetivo deste capítulo é apresentar a análise das resoluções apresentadas pelos alunos à sexta questão das porvas da OBMEP nos anos de 2015 e 2016. Deste modo, serão apresentadas as questões, bem como as soluções propostas pela OBMEP. Além disso, serão apresentadas as categorias utilizadas na análise de erros, segundo as orientações da autora Cury (2009).

6.1 Apresentação das questões envolvidas na pesquisa e as suas respectivas soluções disponibilizadas no site da OBMEP

Como já explicitado, foram selecionadas para esta pesquisa duas questões pertencentes às provas da segunda fase da OBMEP dos anos de 2015 e 2016, nas quais foi escolhida a sexta (6ª) questão, haja vista que estas questões exigem conhecimento sobre a definição de probabilidade, além dos conhecimentos básicos, tais como operações aritméticas, princípio multiplicativo, e outros necessários para a solução das mesmas.

6.1.1 Questão 6 da segunda fase no ano de 2015

Conforme a Figura 1, apresentada a seguir, depreende-se que a questão 6 da segunda fase da OBMEP 2015, teve como objetivo central: avaliar a capacidade de compreensão dos alunos em relação: ao Princípio multiplicativo; ao Espaço amostral e evento e à Definição clássica de probabilidade (Probabilidade de Laplace).

6. Para a primeira fase de um torneio internacional de futebol foram classificadas 3 equipes espanholas, 2 francesas, 1 alemã, 1 portuguesa e 1 italiana. Nessa fase, serão realizadas quatro partidas, com os confrontos definidos por sorteio. Em seguida, duas semifinais serão realizadas com as quatro equipes vencedoras da primeira fase, também com os confrontos definidos por sorteio. As duas equipes vencedoras jogarão a partida final.

a) Qual é a probabilidade de que, na primeira fase, as duas equipes francesas se enfrentem?

Correção Regional | Correção Nacional

b) Qual é a probabilidade de ocorrer, na primeira fase, um confronto entre duas equipes espanholas?

Correção Regional | Correção Nacional

c) Admitindo que em cada confronto do torneio as equipes têm, todas, iguais probabilidades de ganhar, qual é a probabilidade de que a final seja realizada entre duas equipes de um mesmo país?

Correção Regional | Correção Nacional

TOTAL Correção Regional | Correção Nacional

Figura 6.1: Questão 6 da segunda fase da OBMEP 2015

Nesta questão, é apresentada uma situação usual, de determinação de confrontos em um torneio de futebol, no qual existem várias possibilidades diferentes das oito equipes se enfrentarem. A forma como foram definidos os confrontos, com o auxílio de sorteio, é chamado comumente, na gíria do futebol, de mata-mata, a qual pressupõe que o vencedor de uma partida avança no torneio e enfrente um vencedor de outra partida.

Percebe-se que o ponto de partida para resolver os itens da questão, através da aplicação direta da definição clássica de Probabilidade, é a determinação do número de casos possíveis de confrontos entre as equipes, para os itens (a) e (b), a determinação do número de casos possíveis para o par de equipes que se enfrentarão na final para o item (c), a determinação do número de casos favoráveis, que são o número de confrontos entre as equipes francesas para o item (a), o número de confrontos entre as equipes espanholas para o item (b) e o número de confrontos entre duas equipes de um mesmo país para o item (c).

No entanto, o enunciado não determina que o aluno deva aplicar de maneira formal a definição clássica de Probabilidade, podendo usar seu raciocínio e criatividade para elaborar sua solução. Desta forma, a comissão organizadora da OBMEP disponibiliza no site: www.obmep.com possíveis soluções esperadas para cada item da questão.

Conforme é mostrado a seguir:

Item(a)

Solução 1:

Fixada uma equipe, todas as demais sete equipes têm a mesma probabilidade (igual a $\frac{1}{7}$) de ser sua adversária na próxima fase. Logo, a probabilidade de que uma equipe francesa enfrente a outra na primeira fase é: $\frac{1}{7}$.

Solução 2:

Um modo de definir os confrontos consiste em ordenar, por sorteio, as oito equipes e determinar os quatro jogos: Equipe 1 x Equipe 2, Equipe 3 x Equipe 4, Equipe 5 x Equipe 6 e Equipe 7 x Equipe 8. Procedendo deste modo, há 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 sorteios possíveis para as equipes. Para produzir um caso favorável, deve-se:

- Escolher a partida em que as equipes francesas vão se enfrentar (4 possibilidades);
- Escolher a ordem dessas equipes no sorteio (2 possibilidades);
- Definir a posição das demais equipes (6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 possibilidades).

Assim, o número de casos favoráveis é: 4 x 2 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 e a probabilidade de que duas equipes francesas se enfrentem na primeira fase é:

$$\frac{4 \times 2 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{7}$$

Solução 3:

O número de emparelhamentos possíveis entre duas equipes é: $\dfrac{8 \times 7}{2} = 28$ (seleciona-se a primeira equipe dentre 8, depois a segunda dentre 7 e divide-se o resultado do produto por 2, devido à simetria dentro de cada par, pois a ordem das equipes em uma partida não deve ser levada em conta na contagem). Desses vinte e oito emparelhamentos, haverá um só, entre equipes francesas, mas isto pode ocorrer em qualquer dos quatro jogos da primeira fase. Logo, a probabilidade de duas equipes francesas se enfrentarem é:$\dfrac{1}{28} \times 4 = \dfrac{1}{7}$.

Item (b):

Solução 1:

Há três confrontos possíveis entre equipes espanholas. A probabilidade de cada confronto na primeira fase é: $\dfrac{1}{7}$. Como esses confrontos são mutuamente excludentes, isto é, no máximo um dos confrontos pode ocorrer, a probabilidade de que duas equipes espanholas se enfrentem na primeira fase é: $\dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{7} = \dfrac{3}{7}$.

Solução 2:

Como na segunda solução do item (a), há $8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$ sorteios possíveis, para que se possa produzir um caso favorável, deve-se:

- Escolher duas das três equipes espanholas para se enfrentarem (3 possibilidades);
- Escolher a partida em que essas equipes vão se enfrentar (4 possibilidades);
- Escolher a ordem dessas equipes no sorteio (2 possibilidades);
- Definir a posição das demais equipes ($6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ possibilidades).

Logo, o número de casos favoráveis é: $3\times4\times2\times6\times5\times4\times3\times2\times\times1$ e a probabilidade de que duas equipes espanholas se enfrentem na primeira fase é:

$$\frac{3\times4\times2\times6\times5\times4\times3\times2\times\times1}{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}=\frac{3}{7}$$

Solução 3:

O número de emparelhamentos entre as três equipes espanholas é igual a 3. Qualquer um desses emparelhamentos pode ocorrer em qualquer um dos quatro jogos da primeira fase e, assim, a probabilidade de duas equipes espanholas se enfrentarem nessa fase é: $\frac{3}{28}\times4=\frac{3}{7}$.

Item (c):

Solução 1:

Há $\frac{8\times7}{2}=28$ possibilidades para o par de equipes que se enfrentarão na final. Como as chances de vitória são iguais em cada confronto, todos estes 28 possíveis encontros são equiprováveis. Deles, um é entre duas equipes francesas e três são entre equipes espanholas. Logo, a probabilidade de que a final seja entre equipes do mesmo país é: $\frac{4}{28}=\frac{1}{7}$.

Solução 2:

A final será entre duas equipes: Equipe A x Equipe B. Como todas as equipes têm a mesma probabilidade de chegar à final, a probabilidade da Equipe A ser espanhola é: $\frac{3}{8}$, pois são três equipes espanholas dentre oito equipes participantes do torneio. Se a Equipe A for espanhola, a probabilidade da Equipe B ser também espanhola é: $\frac{2}{7}$. Logo a probabilidade de uma final entre duas equipes espanholas é: $\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{3}{28}$. De forma análoga, a probabilidade de uma final francesa é: $\frac{2}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{28}$. Logo, a probabilidade de uma final entre duas equipes de um mesmo país é:$\frac{3}{28}+\frac{1}{28}=\frac{4}{28}=\frac{1}{7}$.

Solução 3:

Para que haja dois times franceses na final, é necessário que eles estejam presentes na 2º fase, que não disputem jogos entre si e que vençam seus jogos da 2º fase. Para que estejam na 2º fase, é preciso que não disputem partidas entre si e que vençam seus jogos da 1º fase. A probabilidade de dois times franceses disputarem a final é, portanto:

$$\frac{6}{7}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{28}$$

Analogamente, há três possibilidades da final ser realizada com dois times espanhóis e, como caso dos times franceses descrito acima, cada uma das duplas de times espanhóis tem probabilidade igual a $\frac{1}{28}$ de disputar a final. Logo, a probabilidade de dois times do mesmo país disputarem a final é $4\times\frac{1}{28}=\frac{1}{7}$.

Solução 4:

Como observado acima, a probabilidade dos dois times franceses disputarem a final é: $\frac{1}{28}$. A fim de calcular a probabilidade de uma dupla de times espanhóis disputar a final, deve-se dividir as possibilidades em casos mutuamente excludentes:

(1) Três times espanhóis disputam a 2º fase;

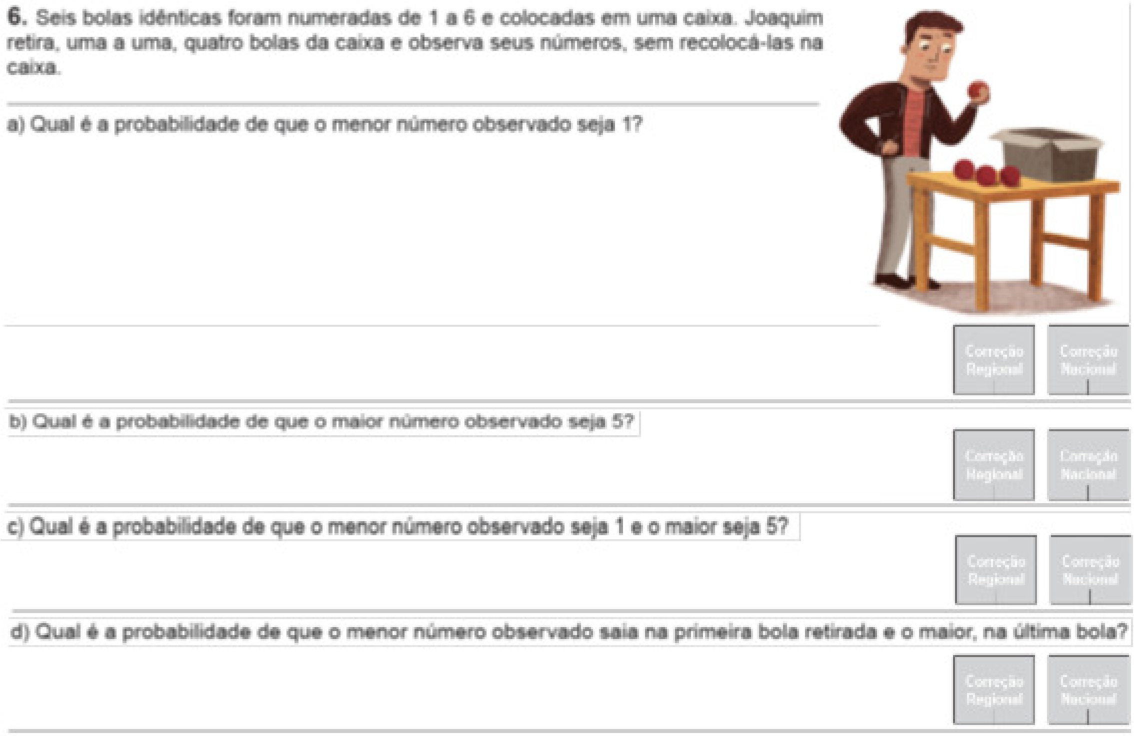
(2a) Dois times espanhóis disputam a 2º fase e não há dois times espanhóis que se enfrentam na 1º fase;

(2b) Dois times espanhóis disputam a 2º fase e dois times espanhóis se enfrentam na 1º fase.

No caso (1), nenhum dos times espanhóis disputou com outro espanhol os jogos da 1º fase, todos eles venceram seus jogos e, na segunda fase, o time espanhol, que não disputou com outro time de seu país, venceu o jogo. A probabilidade, neste caso, é: $\frac{6}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{28}$. No caso (2a): $\frac{6}{7}\times\frac{4}{6}\times(\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{8})\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{28}$. E no caso (2b): $\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{28}$. De modo que a probabilidade de dois times do mesmo país disputarem a final é: $\frac{1}{28}+3\times\frac{1}{28}=\frac{1}{7}$.

6.1.2 Questão 6 da segunda fase no ano de 2016

Na segunda fase da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) 2016, foi proposta a questão 6, conforme a Figura 2, que também exigiu dos alunos conhecimentos acerca da Probabilidade.


6. Seis bolas idênticas foram numeradas de 1 a 6 e colocadas em uma caixa. Joaquim retira, uma a uma, quatro bolas da caixa e observa seus números, sem recolocá-las na caixa.

a) Qual é a probabilidade de que o menor número observado seja 1?

Correção Regional | Correção Nacional

b) Qual é a probabilidade de que o maior número observado seja 5?

Correção Regional | Correção Nacional

c) Qual é a probabilidade de que o menor número observado seja 1 e o maior seja 5?

Correção Regional | Correção Nacional

d) Qual é a probabilidade de que o menor número observado saia na primeira bola retirada e o maior, na última bola?

Correção Regional | Correção Nacional

Figura 6.2: Questão 6 da segunda fase da OBMEP 2016

Nesta outra questão, é observada uma situação muito comum em livros didáticos, que abordam o conteúdo Probabilidade, trata-se da retirada de bolas numeradas de uma caixa, sem reposição.

Nota-se que o ponto de partida para resolver os itens da questão, através da aplicação direta da definição clássica de Probabilidade, é também pela determinação do número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, podendo ser utilizado o princípio multiplicativo, combinações ou outra forma em que o aluno encontre para determinar o que se pede.

No entanto, da mesma forma que na questão 6 do ano de 2015, o enunciado não determina que o aluno deva aplicar de maneira formal a definição clássica de Probabilidade, podendo usar seu raciocínio e criatividade para elaborar sua solução. Desta forma, a comissão organizadora da OBMEP disponibiliza no site: www.obmep.com possíveis soluções esperadas para cada item da questão, elencadas a seguir:

Item(a):

Solução 1:

O número de retiradas possíveis é: $6 \times 5 \times 4 \times 3$. Para que 1 seja o menor número observado, basta que ele saia. Isso pode ocorrer em qualquer das quatro bolas retiradas (quatro possibilidades). Nas demais posições, podem ocorrer quaisquer uma das bolas restantes, para um total de $5 \times 4 \times 3$ possibilidades. Logo, a probabilidade de que 1 seja o menor número observado é:

$$\frac{4 \times 5 \times 4 \times 3}{6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{2}{3}$$

Solução 2:

Como argumentado acima, para que 1 seja o menor número observado, basta que ele saia. Em cada bola retirada, a probabilidade de que saia 1 é: $\frac{1}{6}$. Logo, a probabilidade de que saia 1 em alguma bola é: $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

Solução 3:

É irrelevante se as bolas são retiradas uma a uma ou todas de uma vez. Considerando que as bolas são retiradas simultaneamente, o número de retiradas possíveis é: C_6^4. O número de retiradas em que aparece o 1 é: C_5^3. Logo, a probabilidade de que 1 seja o menor número observado é:

$$\frac{C_5^3}{C_6^4} = \frac{C_5^2}{C_6^2} = \frac{\frac{5 \times 4}{2}}{\frac{6 \times 5}{2}} = \frac{2}{3}$$

Item (b):

Solução 1:

O número de retiradas possíveis é, como no item anterior, $6 \times 5 \times 4 \times 3$. Para que 5 seja o maior número observado, é preciso que ele saia e que o 6 não saia. A posição em que o 5 ocorre pode ser escolhida de 4 modos. Nas demais 3 posições, podem sair quaisquer dos números de 1 a 4; há, assim, $4 \times 3 \times 2$ para essas escolhas. Logo, a probabilidade de que 5 seja o maior número observado é:

$$\frac{4 \times 4 \times 3 \times 2}{6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{4}{15}$$

Solução 2:

Como no item anterior, é irrelevante se as bolas são retiradas uma a uma ou todas de uma vez. Considerando que as bolas são retiradas simultaneamente, o número de retiradas possíveis é:C_6^4. O número de retiradas em que aparece o 5 mas que não aparece o 6 é C_4^3. Logo, a probabilidade de que 5 seja o menor número observado é:

$$\frac{C_4^3}{C_6^4} = \frac{C_4^1}{C_6^2} = \frac{4}{\frac{6 \times 5}{2}} = \frac{4}{15}$$

Item (c):

Solução 1:

O número de retiradas possíveis é, como nos itens anteriores, $6 \times 5 \times 4 \times 3$. Para que o 1 seja o menor número observado e 5 seja o maior, é preciso que ambos saiam e que o 6 não saia. A posição em que o 1 ocorre pode ser escolhida de 4 modos; àquela em que o 5 ocorre, de 3 modos. Nas duas demais posições podem sair quaisquer dos números de 2 a 4; há, assim, 3×2 possibilidades para essas escolhas. Logo, a probabilidade de que 1 seja o menor e 5 seja o maior número observado é:

$$\frac{4 \times 3 \times 3 \times 2}{6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{1}{5}$$

Solução 2:

Como nos itens anteriores, é irrelevante se as bolas são retiradas uma a uma ou todas de uma vez. Considerando que as bolas são retiradas simultaneamente, o número de retiradas possíveis é:C_6^4. O número de retiradas, em que aparece o 1 e o 5, mas não aparece o 6, é: C_3^2. De fato, precisa-se escolher dois dentre os três números: 2, 3 e 4. Logo, a probabilidade de que 1 seja o menor número observado e de que 5 seja o maior número observado é:

$$\frac{C_3^2}{C_6^4} = \frac{C_3^1}{C_6^2} = \frac{3}{\frac{6 \times 5}{2}} = \frac{1}{5}$$

Item (d):

Solução 1:

O número de retiradas possíveis é, como nos itens anteriores, $6 \times 5 \times 4 \times 3$. As possibilidades para o menor e o maior número retirado e para o número de retiradas em que eles ocorrem na primeira e última posição, respectivamente, são listados na tabela abaixo:

Menor	Maior	Número de retiradas em que aparecem na primeira e na ultima posição respectivamente.	Possibilidades em cada caso
1	4	2	(1234) e (1324)
1	5	3 x 2 = 6	(1235), (1325), (1245), (1425), (1345) e (1435)
1	6	4 x 3 = 12	(1236), (1326), (1246), (1426), (1256), (1526), (1346), (1436), (1356), (1536), (1456) e (1546)
2	5	2	(2345) e (2435)
2	6	3 x 2 = 6	(2346), (2436), (2356), (2526), (2456) e (2546)
3	6	2	(3456) e (3546)

Logo, a probabilidade de que o menor número saia na primeira posição e o maior na última é:

$$\frac{2+6+12+2+6+2}{6\times 5\times 4\times 3} = \frac{30}{6\times 5\times 4\times 3} = \frac{1}{12}$$

Solução 2:

Quaisquer que tenham sido as 4 bolas retiradas, todas as diversas ordenações dos números das bolas têm a mesma chance de ocorrer. O número de ordenações possíveis é: $4 \times 3 \times 2 \times 1$. As ordenações, em que o menor número aparece na primeira posição e o maior na última, são apenas duas, correspondentes às duas possíveis ordenações dos números do meio. Logo, a probabilidade de que o menor número saia na primeira posição e o maior na última é:

$$\frac{2}{4\times 3\times 2\times 1} = \frac{1}{12}$$

6.2 Classificação de erros adotada para a análise dos dados

As classificações definidas para serem utilizadas na análise de erros dos alunos nas resoluções das questões selecionadas tiveram como pressuposto teórico Cury (2009) que instaurou a construção de três classes e seis subclasses, que serão expostas a seguir.

a) Classe A - alunos que tentaram solucionar a questão utilizando a definição clássica de probabilidade.

Nesta classe, foram agrupados os alunos que demonstraram conhecer a definição clássica de Probabilidade, a qual estabelece a probabilidade de ocorrer um evento em um espaço amostral, dado pela divisão do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis. Tal definição consta nas duas obras analisadas nesta pesquisa, conforme o exposto no capítulo 3.

b) **Classe B** - alunos que tentaram solucionar a questão utilizando regra de três simples.

Nesta classe, foram agrupados os alunos que utilizaram regra de três simples, porém apresentaram possuir a noção intuitiva de Probabilidade, pois, de certa forma, determinaram, mesmo que de maneira errada, o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

c) **Classe C** - alunos que não se encaixam em nenhuma das duas classes anteriores, por que não houve explicação sobre o raciocínio adotado e não foi possível determinar a abordagem da solução ou por que não houve menção à definição clássica de probabilidade ou, ainda, por que não foi possível entender a resposta.

Nesta classe, foram agrupados os alunos que buscaram resolver as questões de maneira alternativa, mas que não apresentaram conhecimento a respeito de probabilidade e, de modo geral, justificaram suas respostas apenas por texto, não apresentando nenhum cálculo ou não o justificando, ou, ainda, os que não tiveram sua linha de raciocínio compreendida, com base na análise da solução apresentada.

Para a Classe A, foram criadas subclasses para identificar, de modo mais específico, o erro cometido pelos alunos na resolução das questões analisadas. Desta forma, foram estabelecidas as seguintes subclasses:

a) **Subclasse 1** - alunos que cometeram erro de interpretação na leitura do enunciado;

b) **Subclasse 2** - alunos que cometeram erro na definição dos casos favoráveis;

c) **Subclasse 3** - alunos que cometeram erro na definição do espaço amostral;

d) **Subclasse 4** - alunos que cometeram erro no uso de alguma definição auxiliar à solução;

e) **Subclasse 5** - alunos que cometeram erro na redação da solução;

f) **Subclasse 6** - alunos que cometeram erro em operações aritméticas.

6.3 Análise das soluções apresentadas pelos alunos no ano de 2015

Nas vinte e cinco provas selecionadas da segunda fase da OBMEP 2015, nas quais foi averiguada apenas a sexta questão, agrupou-se as respostas dos alunos, a partir de categorizações de desempenho, em: Totalmente correto; Parcialmente correto; Incorreto e Não respondeu. Conforme mostra a Tabela 6.1.

Desempenho	Itens					
	A		B		C	
	nº	%	nº	%	nº	%
Totalmente correto	0	0	0	0	0	0
Parcialmente correto	10	40	3	12	0	0
Incorreto	15	60	22	88	20	80
Não respondeu	0	0	0	0	5	20
Total	25	100	25	100	25	100

Tabela 6.1: Desempenho dos alunos na sexta questão da prova da segunda fase da OBMEP 2015

De acordo com os resultados expostos na Tabela 6.1, verifica-se que em nenhuma das 25 provas analisadas de 2015, houve solução considerada totalmente correta demonstrando, de modo geral, que os alunos apresentam dificuldade em resolver esta questão de probabilidade. Portanto, 100% dos alunos apresentaram em suas soluções erros que se enquadram em uma das classes apresentadas anteriormente.

Essa sexta questão apresentou três itens para os alunos responderem, sendo que os itens A e B são semelhantes, diferenciando-se apenas na nacionalidade das equipes e no quantitativo delas, pois no item A pedia-se para calcular a probabilidade das duas equipes francesas se enfrentarem na primeira fase do torneio e no item B pedia-se para que fosse calculada a probabilidade de duas das três equipes espanholas se enfrentarem na primeira fase do torneio, enquanto que no item C solicitava-se que fosse determinada a probabilidade de duas equipes de mesma nacionalidade se enfrentar na final do torneio. Mesmo com as particularidades de cada item, todos os três poderiam ser resolvidos, por meio da aplicação da definição clássica de Probabilidade.

De acordo com a tabela 6.1, para as resoluções apresentadas ao item A, tem-se que apenas 10 alunos, o que representa 40% dos pesquisados, tiveram suas respostas consideradas parcialmente corretas, sendo que em sua maioria, as respostas tiveram esta classificação por não apresentarem de forma coerente os argumentos, além de 60% dos alunos apresentaram respostas consideradas incorretas.

Ressalta-se que para o item A, 100% dos alunos apresentaram alguma resolução, porém, como se constata a seguir, todos os alunos apresentaram dificuldade em resolver corretamente este item, pois foram apresentados diversos erros, todos constantes nas classes e subclasses criadas para a análise realizada nesta pesquisa.

No item B, apenas 3 alunos, o que corresponde a 12% da amostra, tiveram suas respostas consideradas parcialmente corretas, enquanto 88% dos alunos apresentaram respostas incorretas. É importante chamar atenção para o fato de que mesmo com a semelhança entre os itens A e B, o número de respostas parcialmente corretas foi significativamente menor que o apresentado para o item A. Assim como no item anterior, todos os alunos apresentaram resposta para este item.

Acredita-se que tal discrepância entre os dados do item A e do Item B se deu devido ao equívoco dos pesquisados na determinação do número de casos possíveis e do número de casos favoráveis, pois entre as duas equipes francesas, existia apenas uma possibilidade de confronto e entre as três equipes espanholas existiam três possibilidades diferentes de confronto. Além do equívoco citado, acredita-se também que a má interpretação do enunciado desses itens, levou os alunos a cometerem tal erro no cálculo dos números citados.

Em relação ao item C, julgado por esta pesquisa, como sendo um item de nível de dificuldade mais elevado que os itens A e B, foram apresentados dados bem diferentes dos demais itens. Conforme a tabela 6.1, além de não ter sido registrado respostas totalmente corretas neste item, assim como nos demais, também não foram encontradas respostas classificadas como parcialmente corretas, ou seja, os alunos apresentaram respostas incorretas ou simplesmente não apresentaram resposta, confirmando o julgamento dado pela pesquisa a este item.

Desta forma, 20 alunos, o que corresponde a 80% da amostra, apresentaram resposta incorreta, e 5 alunos, o equivalente a 20% dos pesquisados, não apresentaram solução, deixando este item em branco.

Observa-se, que no item C, foram apresentados os piores resultados. Acredita-se que tal resultado se deu novamente por equívoco na interpretação do item e também pelo erro na determinação do número de casos possíveis e do número de casos favoráveis. Ao analisar as soluções, percebe-se que grande parte dos alunos, os quais apresentaram alguma solução, somaram as probabilidades encontradas nos itens A e B, revelando, de fato, que estes alunos interpretaram de forma incorreta o enunciado do item.

Analisar-se-á a seguir, de forma detalhada, os erros cometidos em cada um dos itens da questão supracitada.

6.3.1 Item A

Neste item, deseja-se que o aluno determine qual é a probabilidade de que, na primeira fase do torneio, duas equipes francesas se enfrentem. Desta forma, espera-se que sejam determinados os números de casos favoráveis e de casos possíveis para que seja utilizada a definição clássica de probabilidade, podendo as soluções dos alunos serem semelhantes às propostas pela OBMEP ou não, desde que o aluno lance mão de uma forma correta de solucionar o item em questão.

Nas vinte e cinco (25) provas analisadas foram constatados erros nas três classes e nas seis subclasses da classe A, conforme as Tabelas 6.2 e 6.3 apresentadas a seguir.

Classe	Subclasse	Item A	
		nº	%
A	1	5	20
	2	8	32
	3	6	24
	4	1	4
	5	5	20
	6	1	4

Tabela 6.2: Erros cometidos nas subclasses da Classe A para o item A(OBMEP 2015)

A Tabela 6.2 apresenta o quantitativo de erros registrados nas subclasses da classe A, sendo que em todas as subclasses houve registro de erro. Nesta classe, constam erros de 15 alunos, o que corresponde a um total de 60%, demonstrando que a maioria dos alunos buscou resolver este item utilizando a definição clássica de probabilidade, mas cometeu erros pertencentes a alguma das seis subclasses.

Na classe A, têm-se os alunos A3, A4, A6, A10, A11, A14, A15, A16, A18, A19, A21, A22, A23, A24 e A25, os quais representam os 15 alunos que cometeram erros classificados para esta classe.

Em relação aos resultados indicados na Tabela 6.2, destaca-se as subclasses 2, 3, 4 e 6, sendo observado que nas subclasses 2 e 3, o percentual de 32% e 24% foram os maiores, o que revela que a maior dificuldade dos alunos em resolver o item supracitado está em determinar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis; e que nas subclasses 4 e 6 foi obtido o menor percentual (4%), reforçando que os erros se deram, em sua maioria, por deficiência na construção do conhecimento acerca da probabilidade, e não por falhas de erros em operações aritméticas ou em utilização de definições auxiliares na resolução.

Na subclasse 1, foram incluídos os alunos A3, A4, A11, A21 e A22, o que corresponde a 20% da amostra. Estes alunos interpretaram de forma errada o enunciado deste item. Observe na Figura 6.3, a resposta apresentada pelo aluno A22.

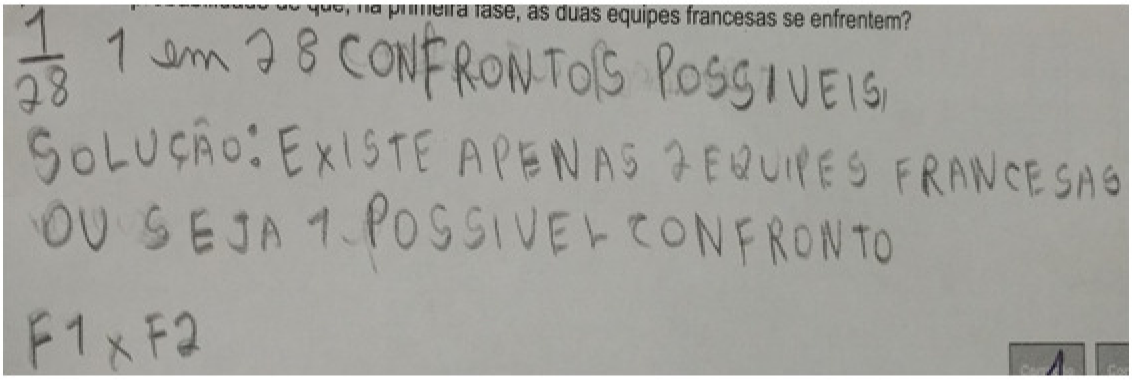

... que, na primeira fase, as duas equipes francesas se enfrentem?
$\frac{1}{28}$ 1 em 28 CONFRONTOS POSSIVEIS
SOLUÇÃO: EXISTE APENAS 2 EQUIPES FRANCESAS
OU SEJA 1 POSSIVEL CONFRONTO
F1 x F2

Figura 6.3: Resolução apresentada pelo aluno A22 ao item A (OBMEP 2015)

O aluno A22 determinou corretamente o número de confrontos possíveis entre as duas equipes francesas e o número de confrontos possíveis entre todas as equipes participantes do torneio em uma das quatro partidas da primeira fase.

Infere-se que um erro de interpretação do enunciado da questão e do enunciado do item, fez com que este aluno não observasse que existiam quatro possíveis partidas diferentes para a primeira fase do torneio e que, além disso, o confronto entre as duas equipes francesas poderia acontecer em qualquer uma delas, desta forma seria necessário multiplicar por quatro a probabilidade que o aluno A22 encontrou. Se tal procedimento fosse utilizado, esta solução seria semelhante à apresentada na solução 3 proposta pela OBMEP.

O aluno A3, conforme a Figura 6.4 a seguir, também cometeu erro de interpretação do enunciado deste item, no entanto demonstrou através da solução apresentada, ter conhecimento sobre a definição clássica de probabilidade, apresentando os conjuntos espaço amostral e evento, além de utilizar a fórmula da probabilidade.

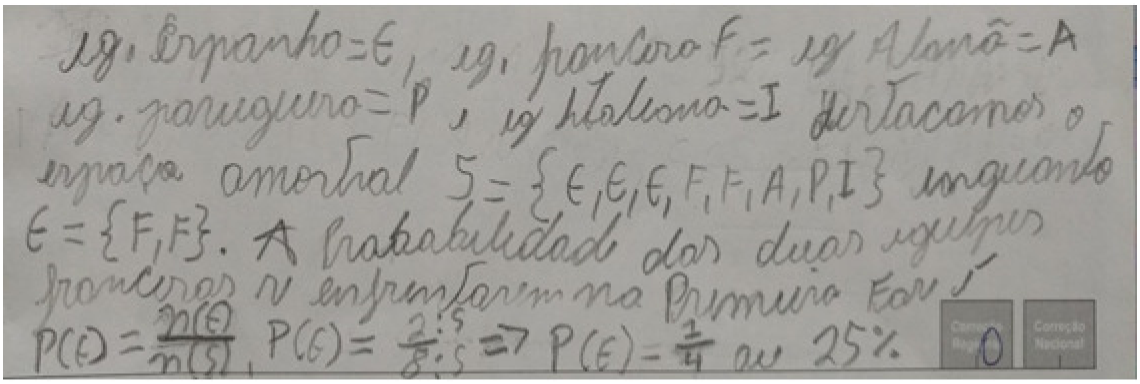

eq. espanha = E, eq. francesa F = eq alemã = A
eq. portuguesa = P, eq italiana = I destacamos o
espaço amostral S = {E,E,E,F,F,A,P,I} enquanto
E = {F,F}. A probabilidade das duas equipes
francesas se enfrentarem na Primeira Fase é
$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$, $P(E) = \frac{2:5}{8:5} \Rightarrow P(E) = \frac{1}{4}$ ou 25%

Figura 6.4: Resolução apresentada pelo Aluno 3 ao item A (OBMEP 2015)

Em sua solução, o aluno 3 inicia definindo o espaço amostral como sendo o conjunto formado por todas as equipes participantes do torneio e o evento como sendo o conjunto formado pelas duas equipes francesas. Porém comete o mesmo erro cometido pelo aluno 22, ao utilizar a quantidade de equipes francesas na determinação do número de casos favoráveis e a quantidade total de equipes para o número de casos possíveis, quando deveria utilizar a quantidade de confrontos entre as equipes para tais determinações.

Daí, acredita-se que os erros de interpretação cometidos pela maioria dos alunos registrados na subclasse 1, se deu pelo fato de ao lerem o enunciado do item, entenderem que era pedido que se calculasse a probabilidade de se escolher uma equipe francesa entre as 8 equipes do torneio, se assim o fosse, alguns destes alunos teriam acertado o item, porém o enunciado foi bem claro ao perguntar qual era a probabilidade de duas equipes francesas se enfrentarem na primeira fase do torneio, ou seja, desejava a probabilidade do confronto entre elas e no sorteio de uma delas.

Nas subclasses 2 e 3, as de maiores percentuais de alunos, conforme comentado anteriormente, 32% dos alunos cometeram o erro referente a subclasse 2 e 24%, cometeram o erro referente à subclasse 3. Em relação às resoluções apontadas pelos alunos 3 e 22, de acordo com as figuras 6.3 e 6.4, identifica-se que o erro na interpretação do enunciado, levou os alunos a errarem o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, apontados por eles como sendo 2 e 8, respectivamente. Como já citado, estes alunos cometeram estes erros, pois consideraram o número de equipes, no entanto era necessário determinar o número de confrontos possíveis entre todas as equipes e o número de confrontos entre as equipes francesas.

Na subclasse 2, foram incluídos os alunos A3, A4, A10, A11, A14, A18, A21 e A22 e na subclasse 3, os mesmos alunos da subclasse 2 com exceção dos alunos A21 e A22.

As duas exceções citadas se deram pelo fato de que tais alunos determinaram corretamente o número de casos possíveis, de forma que estes alunos tiveram suas respostas classificadas como parcialmente corretas, devido a este acerto, conforme mostra a Figura 6.5.

Em relação à subclasse 2, apresenta-se a solução do aluno A21 na Figura 6.5.

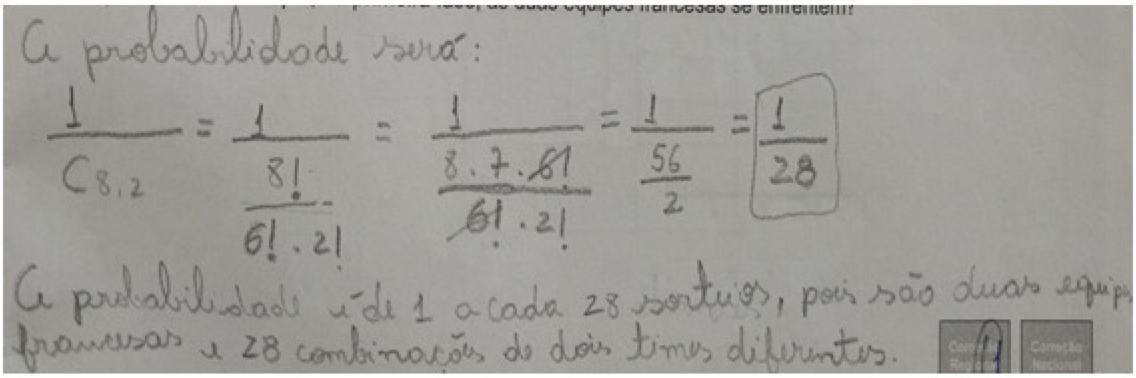


Figura 6.5: Resolução apresentada pelo Aluno A21 ao item A (OBMEP 2015)

Nota-se que este aluno demonstrou, além do conhecimento da definição clássica de probabilidade, que possui conhecimento sobre análise combinatória, pois utilizou a definição de combinação para determinar corretamente o número de casos possíveis. Realizando a combinação das 8 equipes tomadas duas a duas, determinou que são 28 confrontos possíveis entre as equipes. No entanto, ao determinar o número de casos favoráveis, o aluno não observou que o confronto entre as equipes francesas poderia acontecer em qualquer uma das quatro partidas da primeira fase, apontando erroneamente que o número de casos favoráveis era igual a 1.

O aluno A14, de acordo com a Figura 6.6, cometeu o erro da subclasse 3, além de ter cometido também o erro da subclasse 2.

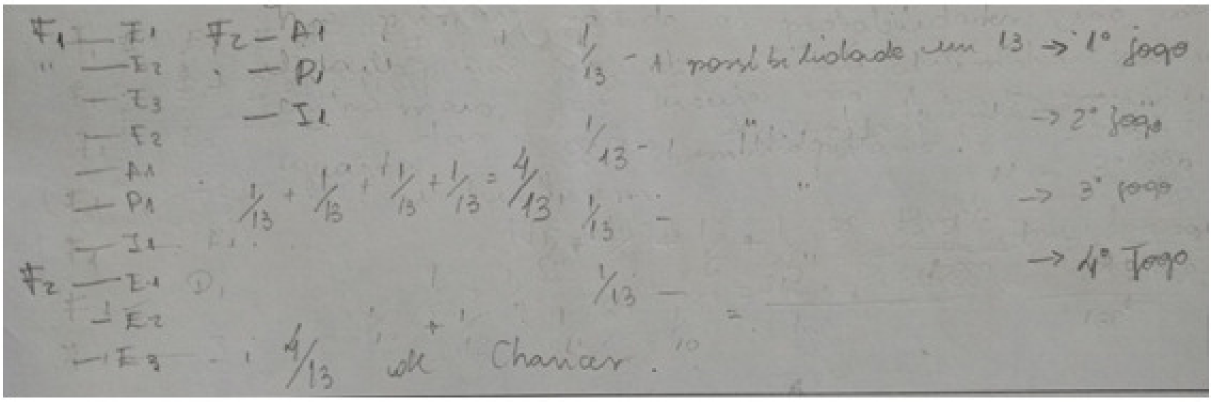


Figura 6.6: Resolução apresentada pelo Aluno A14 ao item A (OBMEP 2015)

Este aluno, incialmente, nomeou as equipes em E1, E2, E3, F1, F2, A1, P1 e I1, e utilizou um esquema semelhante a uma árvore de possibilidades para registrar os possíveis confrontos das equipes. Desta forma, afirmou que eram 13 possíveis confrontos, envolvendo pelo menos uma equipe francesa, considerando o confronto entre F1 e F2, desconsiderando o confronto entre F2 e F1, por julgar serem confrontos idênticos, e que apenas em um dos 13 confrontos, poderia ser entre as equipes francesas.

A solução apresentada por este aluno, assemelha-se à solução 1 apresentada pela OBMEP, pois ele fixou uma equipe francesa e determinou os confrontos desta equipe com as demais, porém ele cometeu um erro ao fixar a equipe F1 e, em seguida, fixar a F2, daí surgiram as 13 possibilidades de confrontos, ao invés dos 7 possíveis, pois fixada uma equipe francesa, a chance dela enfrentar a outra equipe francesa seria de: $\frac{1}{7}$.

Ainda sobre a solução do aluno A14, tem-se um exemplo de aluno que cometeu o erro na determinação do número de casos favoráveis e do número de casos possíveis, porém não cometeu erro de interpretação, pois mesmo calculando os números errados, ele compreendeu que os casos possíveis e favoráveis estavam relacionados ao número de confrontos entres as equipes.

Em relação aos erros apontados nas subclasses 2 e 3, cometidos pelos alunos supracitados, Brito (2015) em sua pesquisa sobre o ensino de probabilidade através de experimentação, propôs um problema que exigia dos alunos a determinação do espaço amostral e do evento. Sobre este problema o autor pontua que

> [...] esta questão proposta, foi colocada como sendo a primeira pois entendemos que é a mais simples e direta dentre todas as questões propostas mas, infelizmente, apenas 15 acertos foram contabilizados para o espaço amostral e 18 acertos para o evento, ou seja, 8;33% e 10;00% de acertos, aproximadamente, respectivamente, e o mais curioso, é que pelo menos,um dos alunos que julgou [...] esses conhecimentos como muito fáceis, não acertoua questão. (BRITO, 2015, p. 32).

Os resultados obtidos por Brito (2015) apontam na mesma direção dos resultados encontrados nesta pesquisa, de forma que mesmo tais conhecimentos sendo julgados por alunos e professores como fáceis, grande partes dos alunos apresentam dificuldade na determinação do número de casos possíveis e de casos favoráveis; sendo que um dos prováveis motivos de tais erros, segundo o autor, é a falta de compreensão ou interpretação do que foi solicitado no problema, conformese pontuou na análise dos erros incluídos na subclasse 1 e em outras subclasses.

Na subclasse 4, incluiu-se apenas o aluno A6, o que corresponde a 4% da amostra selecionada, este baixo quantitativo se deu pelo fato de que poucos alunos utilizaram definições auxiliares em suas soluções, e que apenas este aluno cometeu este erro. Na Figura 6.7, consta a resolução do aluno A6, que utilizou a definição de permutação para determinar o número de casos possíveis de confrontos entre as equipes.

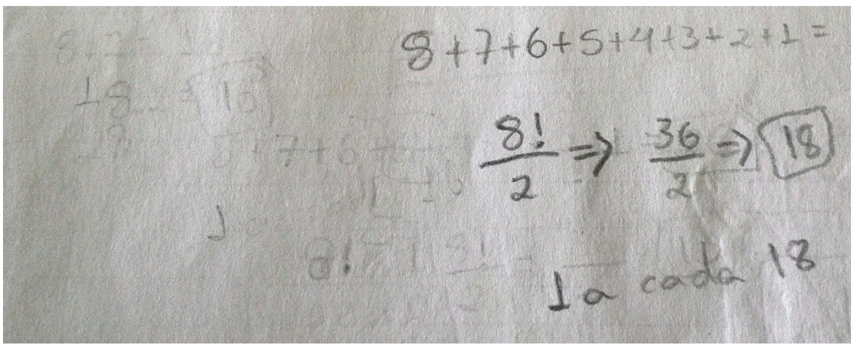


Figura 6.7: Resolução apresentada pelo Aluno A6 ao item A (OBMEP 2015)

Nesta solução, não ficou clara a utilização da definição clássica de probabilidade, mas pela indicação de “1 a cada 18” como resposta final, infere-se que o aluno ao efetuar os cálculos e encontrar o resultado 18, pretendia determinar o número de casos possíveis, no entanto, resolveu de forma errada o 8!, afirmando que $8! = 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$, demonstrando conhecimento insatisfatório sobre o conceito de fatorial durante o estudo deste conteúdo. Além disso, desconsiderou a possibilidade das equipes francesas se enfrentarem em uma das quatro partidas da primeira fase, e não calculou o número de casos favoráveis.

Para a subclasse 5, foram incluídos os alunos A16, A19, A23, A24 e A25. Entre esses alunos, destaca-se a solução apresentada pelo aluno A25, conforme a Figura 6.8.

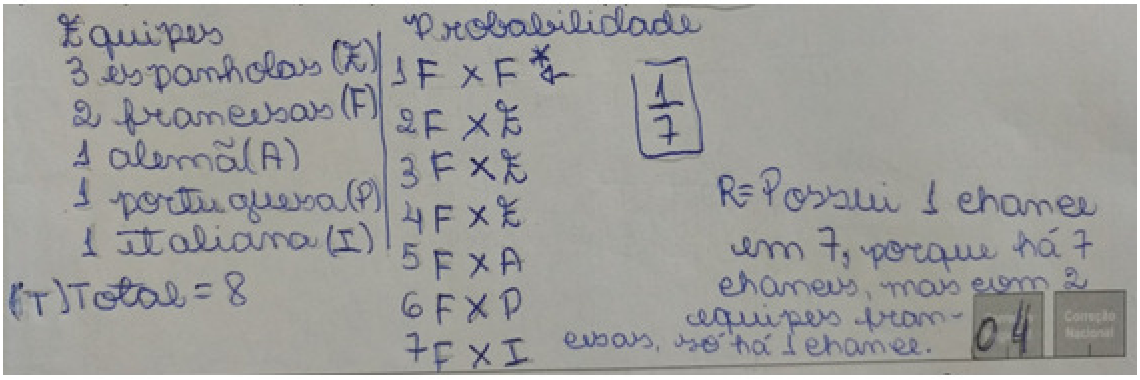


Figura 6.8: Resolução apresentada pelo Aluno A25 ao item A (OBMEP 2015)

Esta resolução foi apontada pelos corretores locais, corretores do estado do Maranhão, como parcialmente correta. Acredita-se que tal julgamento se deu pelo aluno apresentar a resposta correta, porém a redação da sua solução não está adequada, causando confusão no entendimento do leitor. Observe que a resolução deste aluno se assemelha à solução 1 indicada pela OBMEP, mas não foram apresentados argumentos suficientes e coerentes para que tivesse sido considerada como totalmente correta.

Ao se comparar a solução proposta pelo aluno e a da OBMEP, notou-se algumas falhas que o aluno cometeu. Ao pontuar que “possui 1 chance em 7, por que há 7 chances, mas com 2 equipes francesas, só há 1 chance”, o aluno não sustenta de forma coerente a sua resposta, não permitindo ao corretor compreender claramente a sua solução. Mas é importante salientar que, mesmo não conseguindo sustentar com argumentos plausíveis a sua solução, o aluno foi capaz de determinar os possíveis confrontos, porém não diferenciou as equipes francesas e as equipes espanholas, o que poderia ter causado o erro na contagem dos casos favoráveis e casos possíveis e, além disso, o aluno errou ao não deixar claro que fixou uma das equipes francesas, e que a probabilidade desta equipe enfrentar a outra equipe francesa era de 1 em 7, como sugere a solução 1, apresentada pela OBMEP. De acordo com o exposto, acredita-se que este aluno cometeu o erro da subclasse 5, ou seja, erro na redação da solução do item.

Durante a análise das soluções deste item e dos demais, praticamente não se identificou erros em relação a alguma operação aritmética, o que surpreendeu a pesquisa, pois mediante a realidade do alunado da rede estadual de ensino do estado do Maranhão, esperava-se que fossem encontrados diversos erros em relação às operações aritméticas, no entanto, encontrou-se apenas um caso, em adição de frações. Estes tipo de erro foi registrado na subclasse 6, onde incluiu-se apenas o aluno A15, correspondendo a 4% da amostra.

Na figura 6.9, percebe-se que o aluno A15 buscou determinar a probabilidade de duas equipes francesas se enfrentarem em cada uma das quatro partidas e, em seguida, adicionou tais probabilidades, afirmando que a probabilidade das equipes francesas se enfrentarem era de 22 em 35, mas ao fazer isto, cometeu erros na determinação do número de casos favoráveis e do número de casos possíveis. No entanto, além do erro no cálculo da probabilidade pedida, este aluno cometeu um erro ao determinar um resultado errado para a soma das probabilidades que ele encontrou. Conclui-se que o erro tenha acontecido por falhas ocorridas no processo de aprendizagem do aluno em relação às operações com fração, em especial a adição, ou pelo fato dele ter simplificado a fração de maneira incorreta, utilizando arredondamento.

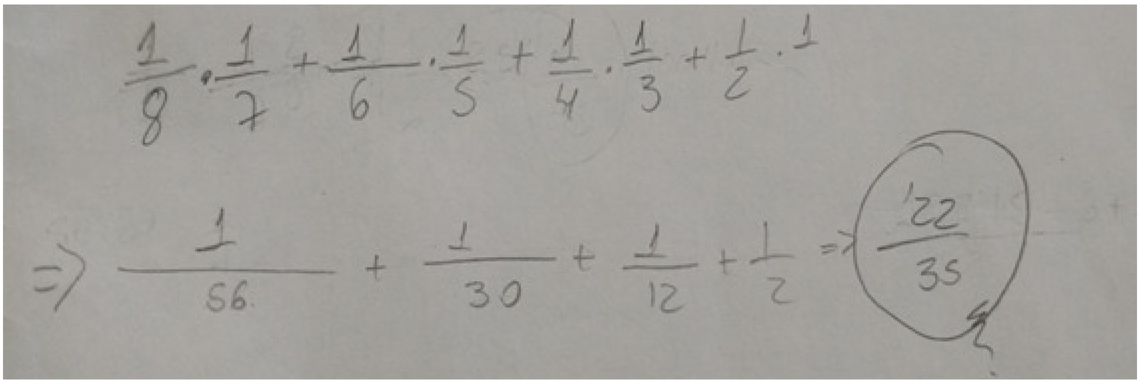


Figura 6.9: Resolução apresentada pelo Aluno A15 ao item A (OBMEP 2015)

Em relação às três classes analisadas, a Tabela 6.3 mostra o resultado da contagem de erros para cada uma delas.

Classe	Item	
	A	
	nº	%
A	15	60
B	6	24
C	4	16
Total	25	100

Tabela 6.3: Números das três classes de erros para o item A (OBMEP 2015)

Observe que a classe A foi a que obteve o maior quantitativo de alunos, o que leva a crer que os alunos, em sua maioria, compreenderam, mesmo que com falhas na aprendizagem, o conceito de probabilidade. Porém, a falta de conhecimentos prévios, erro na leitura e interpretação do enunciado de uma questão e outros erros cometidos levaram os alunos a não terem sucesso na resolução do item.

Em relação aos erros incluídos na classe A, erros cometidos por alunos que buscaram aplicar a definição clássica de probabilidade, Brito (2015) em um outro problema proposto em sua pesquisa, encontrou resultados semelhantes aos aqui pontuados. Neste problema, esperava-se que o aluno demonstrasse conhecimento sobre: definição de evento, definição de espaço amostral e definições clássicas de probabilidade. Assim, para os resultados, o autor afirmou que:

> [...] para este problema, houve 39 alunos, ou seja, aproximadamente 22%, que acertaram, ou seja, ainda estamos bem aquém do esperado, pois a questão não necessitava de cálculo mais elaborado ou refinado, mesmo assim teve aluno que resolveu, ou aparentemente o fez em algum rascunho ou borrão, e colocou a resposta 24/56 de tal forma que representa uma fração equivalente aquela da resposta correta, porém, o que representa 24 e o 56 ficamos sem o devido esclarecimento. (BRITO, 2015, p. 36).

Nas classes B e C, foi revelado que alguns alunos não possuem o conhecimento ou possuem apenas uma noção intuitiva a cerca do cálculo de probabilidade. Conforme a Tabela 6.3, 6 alunos, o referente a 12% da amostra,fazem parte da classe B, ou seja, utilizaram regra de três simples na solução do item em questão.

Já na classe B, incluiu-se os alunos A1, A2, A5, A9, A12 e A13. Estes alunos, constantes nesta classe, mesmo não aplicando a definição clássica de probabilidade, demonstraram que possuíam, mesmo que de forma intuitiva, uma noção de probabilidade. Isto foi observado, pois os valores do número de casos favoráveis e do número de casos possíveis, determinados intuitivamente por estes alunos, coincidiram com os determinados por alunos que utilizaram a definição clássica de probabilidade, porém com os mesmos erros de interpretação.

O erro em utilizar regra de três simples na solução pode ter sido causado por alguns motivos. Possivelmente, o aluno poderia estar, no período da prova da OBMEP 2015, cursando o 1º ou 2º ano do ensino médio, e ainda não tinha estudado o conteúdo probabilidade, de modo que não conseguiu desenvolver a sua solução com o conhecimento adquirido no ensino fundamental; ou o aluno não teve uma aprendizagem satisfatória do conteúdo necessário; ou, ainda, cometeu um erro de interpretação na leitura da questão. Observe a seguir a solução apresentada pelo aluno A13, na Figura 6.10.

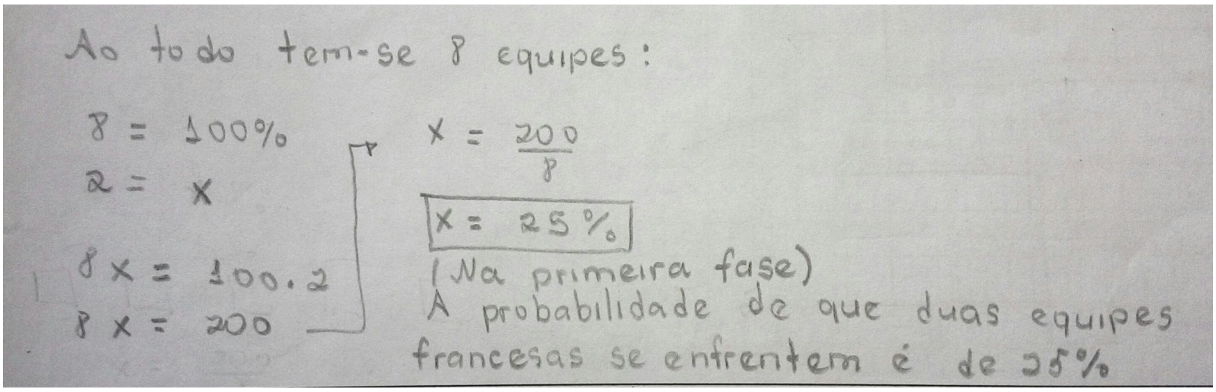


Figura 6.10: Resolução apresentada pelo aluno A13 ao item A (OBMEP 2015)

Inicialmente, conforme a Figura 6.10, o aluno A13 registrou que o total de equipes participantes no torneio é igual a 8, conforme o enunciado da questão. Em seguida, apontou que as 8 equipes equivalem a 100% do total e que as 2 equipes francesas equivalem a x%. Aplicando uma regra de três simples, determinou x = 25% e concluiu que a probabilidade de duas equipes francesas se enfrentarem é de 25%.

Observe que o aluno não utiliza a definição clássica de probabilidade, porém, intuitivamente, afirma que o número de casos favoráveis é igual a 2 e o número de caso possíveis é igual a 8. Pontua-se, assim, que este aluno cometeu um erro de interpretação, além do erro do uso de regra de três na solução. Ao afirmar tais valores para os casos possíveis e para os casos favoráveis, o aluno cometeu um erro, ao utilizar a quantidade total e a quantidade de equipes francesas, em face da clareza do enunciado do item, que pede que seja determinada a probabilidade de que duas equipes francesas possam se enfrentar. Logo, o aluno deveria levar em consideração a quantidade de confrontos e não a quantidade de equipes.

Os erros cometidos pelo aluno A13 levam às seguintes indagações: o aluno estava cursando o 1º ou 2º ano do ensino médio até o momento da realização das provas e ainda não havia aprofundado os conhecimentos adquiridos no ensino fundamental a respeito das probabilidades, não estudou o conteúdo exigido no ensino fundamental ou no ensino médio ou não compreendeu a definição clássica de probabilidade, apresentando dificuldade na determinação do número de casos possíveis e do número de casos favoráveis.

Observe na Figura 6.11 que o aluno A9, também utilizou em sua solução a regra de três simples.

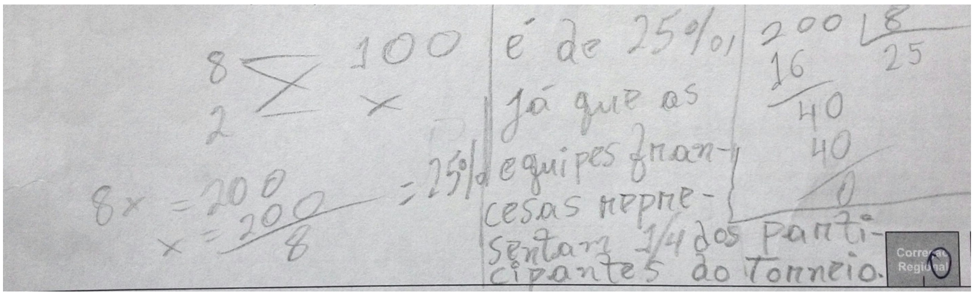


Figura 6.11: Resolução apresentada pelo Aluno A9 ao item A (OBMEP 2015)

Nesta solução apresentada pelo aluno A9, verificou-se que este aluno não utilizou a definição clássica de probabilidade por algum dos motivos já citados. No entanto, chamou atenção o fato de que mesmo não utilizando a definição de probabilidade, ele encontrou a mesma solução que outros alunos que utilizaram a definição correta encontraram. No entanto, todos eles cometeram o mesmo equívoco na leitura do enunciado, pois consideraram o número de casos possíveis igual a 8 (número total de equipes) e o número de casos favoráveis igual a 2 (número de equipes francesas); procedendo desta forma, estes alunos calcularam a probabilidade de sortear uma das duas equipes francesas entre as oito equipes participantes, não respondendo a pergunta do item, o qual interrogou sobre a probabilidade das duas equipes francesas se enfrentarem na primeira fase do torneio.

Na classe C, incluiu-se os alunos A7, A8, A17 e A20. Analisando a solução apresentada pelo aluno A8, conforme a Figura 6.12, percebeu-se que este não demonstrou possuir conhecimento sobre probabilidade, apenas realizou alguns cálculos aleatórios, apresentando desorganização na redação da sua solução.

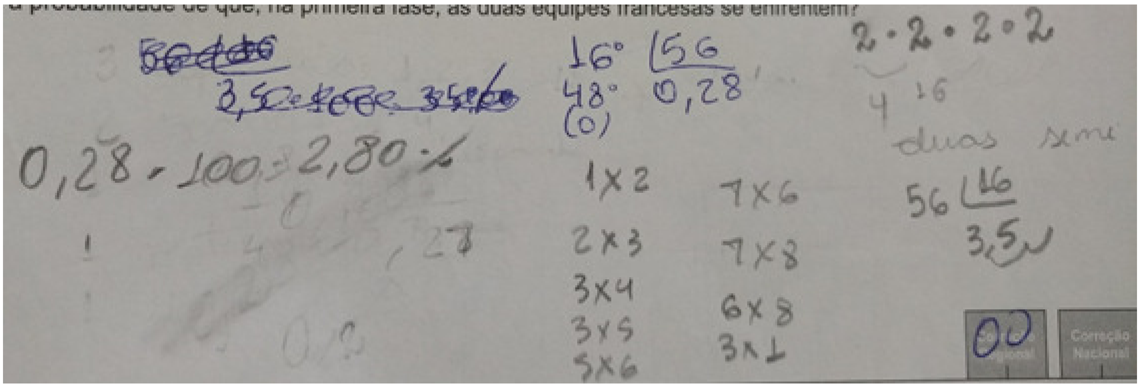


Figura 6.12: Resolução apresentada pelo Aluno A8 ao item A (OBMEP 2015)

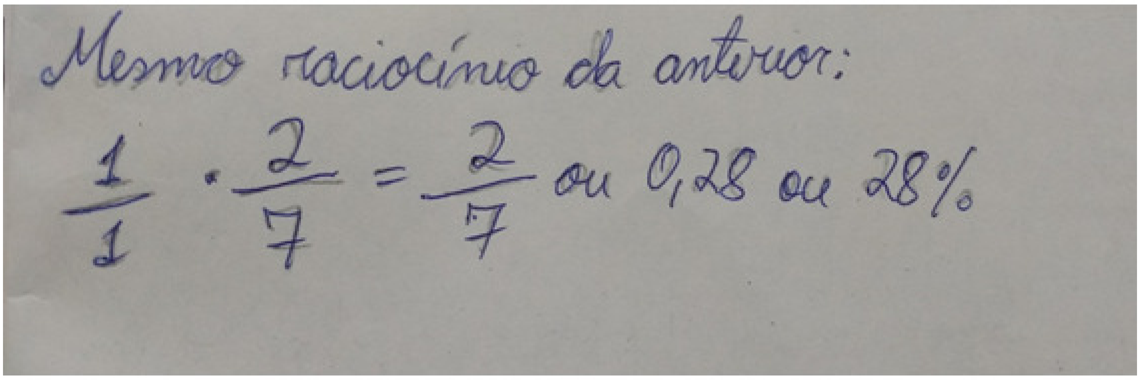
O quantitativo de alunos apresentados na classe C revela que um percentual de 20% dos alunos, aqui julgado como um percentual significativo, não compreendeu a definição clássica de probabilidade durante seus estudos, ou que, ainda, não aprofundou o conhecimento introdutório, adquirido no ensino fundamental acerca da probabilidade, pelos mesmos motivos que levaram os alunos a utilizarem a regra de três simples em suas soluções.

6.3.2 Item B

O enunciado deste item é semelhante ao do item A, sendo que as diferenças entre os dois, é a mudança da nacionalidade da equipe e o quantitativo das mesmas. No item A, foi perguntado sobre a probabilidade de duas equipes francesas se enfrentarem na primeira fase, enquanto no item B, foi perguntado sobre a probabilidade de duas das três equipes espanholas se enfrentarem na primeira fase. A diferença no resultado entre os itens está na quantidade das equipes, pois para as duas equipes francesas existe uma possibilidade de confronto e para as três equipes espanholas, três possibilidades de confrontos.

Em relação às soluções apresentadas para este item, esperava-se que os alunos utilizassem o mesmo raciocínio utilizado no item A, na busca pela solução, o quede fato se confirmou, a maioria dos 25 alunos apresentou soluções semelhantes para os itens A e B, consequentemente, cometeram os mesmos erros cometidos e comentados no item anterior. As exceções a este fato foram as dos alunos A16, A19 e A25, que mesmo tendo usado raciocínio semelhante ao empregado no item A, cometeram erro que não haviam cometido no item anterior.

Na Figura 6.13 a seguir, tem-se a solução apresentada pelo aluno A16, exemplificando o caso dos alunos terem utilizado o mesmo raciocínio no item A e no B.


Mesmo raciocínio da anterior:

$\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$ ou 0,28 ou 28%

Figura 6.13: Resolução apresentada pelo aluno A16 ao item B (OBMEP 2015)

Este aluno utilizou a expressão “mesmo raciocínio da anterior”, enfatizando que fez uso da mesma estratégia adotada na resolução do item A, pois percebeu a semelhança existente entre os itens. Porém, ele não se atentou para fato de que entre as três equipes espanholas existem 3 possibilidades de confrontos, e que esses confrontos são mutuamente excludentes, pois, no máximo um deles acontece, diferente do caso do item anterior, que existia apenas uma possibilidade de confronto entre as equipes francesas.

A Tabela 6.4 a seguir, mostra o quantitativo de alunos que cometeram erros em cada uma das subclasses da classe A. Observe que os dados constantes nesta tabela reafirmam o que fora constatado na análise do item A, o maior índice de erros cometidos pelos alunos está relacionado à determinação do número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Sendo apontado para a subclasse 2 um quantitativo de 11 alunos e para a subclasse 3 um quantitativo de 8 alunos.

Classe	Subclasse	Item B	
		nº	%
A	1	5	20
	2	11	44
	3	8	32
	4	1	4
	5	3	12
	6	1	4

Tabela 6.4: Erros cometidos nas subclasses da Classe A para o item B(OBMEP 2015)

Para a subclasse 2, foram incluídos os alunos A3, A4, A10, A11, A14, A16, A18, A19, A21, A22 e A25, o que representa 44% da amostra e para a subclasse 3, incluiu-se os alunos A3, A4, A10, A11, A14, A16, A18 e A19, o que representa 32% da amostra.

A Figura 6.14 mostra o registro da solução do aluno A11 que se enquadra nas duas subclasses anteriormente citadas.

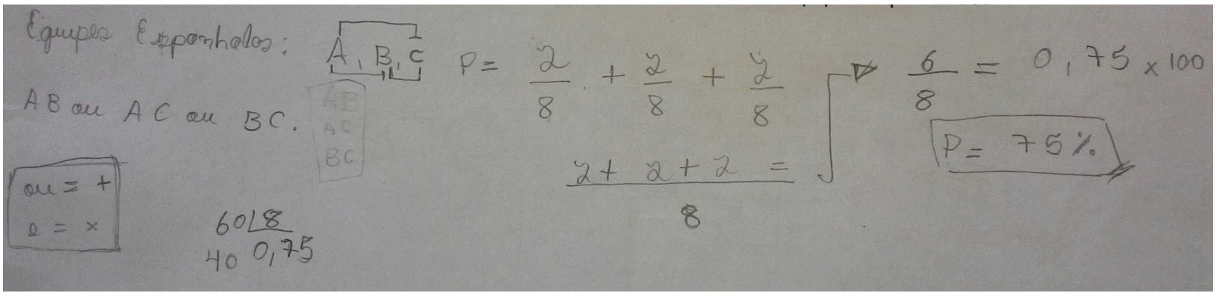


Figura 6.14: Resolução apresentada pelo aluno A11 ao item B (OBMEP 2015)

Este aluno identificou as três equipes espanholas em A, B e C e determinou corretamente os três confrontos possíveis como AB, AC e BC. No entanto, ao determinar a probabilidade desejada, ele não considerou a quantidade de confrontos entre as equipes espanholas e nem a quantidade de confrontos entre todas as equipes, e sim a quantidade de equipes envolvidas em cada confronto, o qual ele determinou, bem como a quantidade total de equipes.

Dessa forma, o aluno A11 determinou a probabilidade de sortear as equipes A e B, a probabilidade de sortear as equipes A e C e a probabilidade de sortear as equipes B e C. Por fim, realizou a soma das três probabilidades, as quais determinou, ou seja, além do erro ao determinar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, o aluno se equivocou ao utilizar tal procedimento no cálculo da probabilidade solicitada no enunciado.

Em relação às demais subclasses, nota-se que 20% da amostra, conforme a Tabela 6.4, pertence a subclasse 1, por apresentar a interpretação incorreta do enunciado da questão e do item, determinando a probabilidade de escolher uma das três equipes espanholas, entre as oito equipes participantes do torneio, erro também cometido no item A pelos mesmo alunos, pois, como já comentado, os alunos seguiram o mesmo raciocínio utilizado na solução do item anterior.

Para a subclasse 1, incluiu-se os alunos A3, A4, A11, A21 e A22, confirmando, desta maneira, que foram os mesmos alunos apontados na subclasse 1 da classe A para o item A.

Na subclasse 4, o mesmo aluno A6 que cometeu este erro no item A, também cometeu no item B, como já representado na Figura 6.7. O aluno cometeu um erro na utilização da definição de fatorial na solução do item A, recaindo ao erro no item B.

Em sua pesquisa sobre as dificuldades encontradas pelos alunos em resolver questões de probabilidade, Contessa (2014) aplica uma questão e identifica três tipos de erros cometidos: resposta intuitiva errada e sem explicação, interpretação incorreta e aplicação incorreta de conteúdos de Matemática já estudados. Este último, pertence a subclasse 4, e os resultados aqui obtidos e os obtidos na pesquisa da autora são semelhantes. Para tal questão, Contessa (2014) afirmou que

> [...] um fato que chama a atenção é um percentual de 100% de erro, e a maioria devido à aplicação incorreta dos conteúdos já estudados. O que, em geral, predominou nas respostas, foi a consideração do número de casos favoráveis ser 200, não havendo então a interpretação correta. Ainda encontramos 20% das respostas sem justificativa. (CONTESSA, 2014, p. 542).

Observe que Contessa (2014) também pontuou que os alunos cometeram erro ao utilizar conteúdos já estudados, que ora nesta pesquisa fora chamado de definição auxiliar à solução, provavelmente os alunos também tiveram problemas no processo de construção de tais conhecimentos. Além disso, a autora afirma que 20% dos alunos não justificaram suas respostas, quantitativo semelhante ao registrado na classe C, conforme a Tabela 6.5.

Na subclasse 5, estão os alunos que cometeram erro na redação da solução. Incorporou-se aqui, os alunos A23, A24 e A25, que correspondem a 12% da amostra, os quais, em suas soluções, apresentaram redações que prejudicaram o entendimento do leitor. Observe na Figura 6.15 um exemplo representativo do erro cometido pelo aluno A25.

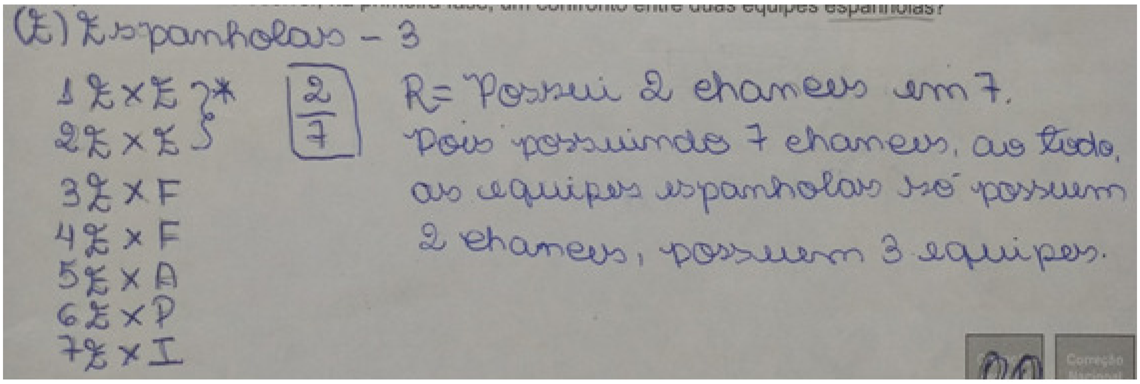


Figura 6.15: Resolução apresentada pelo aluno A25 ao item B (OBMEP 2015)

Neste item, o aluno A25 iniciou a sua solução apontando que constavam 3 equipes espanholas. Em seguida, fixou uma das equipes espanholas e determinou os possíveis confrontos desta com as outras equipes espanholas e com as demais equipes.

Após ter determinado os confrontos, o aluno afirmou que existiam dois confrontos entre equipes espanholas dos sete confrontos possíveis, ou seja, uma probabilidade de $\frac{2}{7}$.

Ao concluir sua solução, ele redigiu um texto, afim deconfirmar o seu raciocínio, porém o texto ficou muito confuso, prejudicando o entendimento do seu raciocínio.

Em relação aos erros cometidos pelo aluno 25, além do erro na redação da solução, acredita-se que o fato de não diferenciar as equipes espanholas fez com que ele concluísse que havia apenas dois confrontos possíveis. Se ele tivesse nomeado as equipes espanholas em E1, E2 e E3, provavelmente perceberia que ainda faltava conferir mais um confronto. Supondo que ele tivesse fixado a equipe E1, ele teria contabilizado os confrontos E1xE2 e E1xE3 e, provavelmente, perceberia a falta do confronto E2xE3. Tal raciocínio foi utilizado pelo aluno A11, ao nomear as equipes espanholas em A, B e C, conforme mostra a Figura 6.14.

Da mesma forma que no item A, conforme a Figura 6.9, apenas o aluno A15 cometeu erro no cálculo das somas das frações que ele estabeleceu, novamente acredita-se que o erro se deu pela falha na aprendizagem das operações com fração, especificamente na adição, ou no uso indevido da simplificação da fração obtida no resultado, pois o aluno pode ter simplificado e ter encontrado no numerador um número decimal e, em seguida, ter feito o arredondamento. Portanto, este aluno foi o único registrado na subclasse 6, o que corresponde a 4% da amostra.

A Tabela 6.5, a seguir, mostra o quantitativo registrado para cada uma das classes. Verifica-se que assim como no item A, a classe A no item B obteve o maior número de registros, o que leva a concluir que a maioria predominante dos alunos possui conhecimento sobre probabilidade, porém com falhas na aprendizagem de conteúdos pré-requisitos e na interpretação do enunciado da questão.

Classe	Item	
	B	
	nº	%
A	15	60
B	6	24
C	4	16
Total	25	100

Tabela 6.5: Números das três classes de erros para o item B (OBMEP 2015)

Outro fato observado, é que o mesmo quantitativo registrado para as classes A, B e C no item A, foi registrado para o item B, confirmando mais uma vez, que os alunos buscaram seguir a mesma linha de raciocínio utilizada para responder o item A, na resolução do item B.

Nas classes B, incluiu-se os alunos A1, A2, A5, A9, A12 e A13. Aqui salienta-se que estes alunos foram os mesmos inclusos para esta mesma subclasse no item A. Estes seis alunos, correspondente a 24% da amostra, também utilizaram regra de três simples na solução do item B. Observe na Figura 6.16 a resolução apresentada pelo aluno A2.

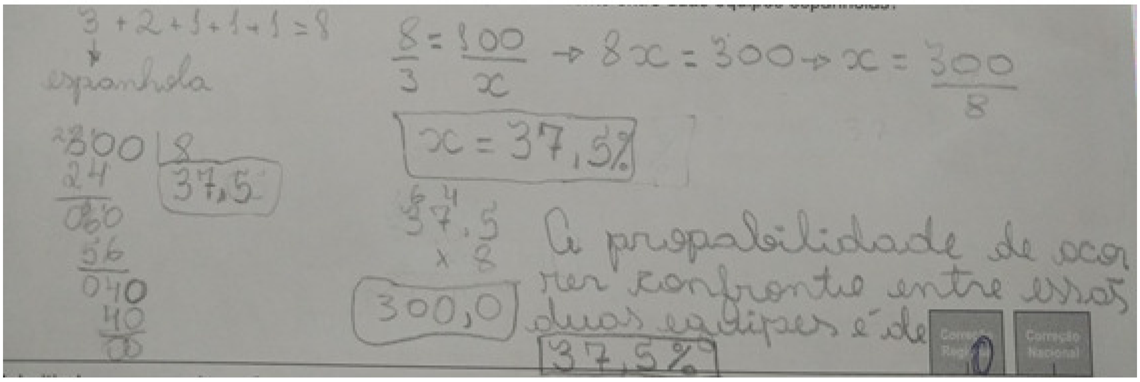


Figura 6.16: Resolução apresentada pelo aluno A2 ao item B (OBMEP 2015)

Este aluno, inicialmente calculou a quantidade total de equipes e, em seguida, destacou a quantidade de equipes espanholas. Esta solução faz partes das soluções que utilizaram a regra de três simples, e que, de forma, provavelmente, intuitiva, apresentou o mesmo número de casos favoráveis e de casos possíveis iguais aos apresentados pelos alunos que utilizaram a definição clássica de probabilidade, porém cometeram erro de interpretação do enunciado do item.

Na subclasse C, foram incluídos os alunos A7, A8, A17 e A20, os mesmos alunos registrados na mesma subclasse para o item A. As soluções apresentadas por estes alunos, que correspondem a 16% da amostra, não se enquadraram em nenhuma das outras classes, por não terem apresentado nenhuma explicação acerca do raciocínio utilizado, por não terem feito menção à definição clássica da probabilidade ou por não ter sido possível compreender as respostas dadas por eles.

6.3.3 Item C

Para este item, de acordo com a solução 1 apresentada pela OBMEP, esperava-se que o aluno inicialmente determinasse o número de casos possíveis, utilizando o princípio multiplicativo, em seguida, utilizando o mesmo princípio, determinasse o número de casos favoráveis, e, posteriormente, aplicasse a definição clássica de probabilidade para determinar a solução correta.

Os alunos de modo geral, persistiram no erro do cálculo do número de casos possíveis e do número de casos favoráveis, do mesmo modo que nos itens anteriores. Ao observar a Tabela 6.6, pode-se, através do quantitativo registrado nas subclasses 2 e 3, confirmar o que fora comentado.

Classe	Subclasse	Item C	
		nº	%
A	1	4	16
	2	4	16
	3	5	20
	4	1	4
	5	1	4
	6	0	0

Tabela 6.6: Erros cometidos nas subclasses da Classe A para o item C(OBMEP 2015)

Assim como nos outros itens, as subclasses 2 e 3 apontaram os maiores números, juntamente com a subclasse 1. Ao observar os resultados apresentados nesta tabela, nota-se que os valores apontados para cada uma das classes registrou uma queda, com exceção da classe 4, que permaneceu com 4%.

Além da queda registrada nos valores apontados na tabela, depreende-se que não foram incluídos alunos na subclasse 6. Esperava-se que o aluno A15 também cometesse, para este item, o erro em operações aritméticas, porém o item não foi respondido por ele.

Na subclasse 1, incluiu-se os alunos A3, A11, A19 e A22, que representam 16% da amostra. Dentre esses alunos, apenas o aluno A19 não cometeu o mesmo erro para os demais itens. Por isso, é importante demonstrar a resolução deste aluno para o item C, conforme apresentado na Figura 6.17.

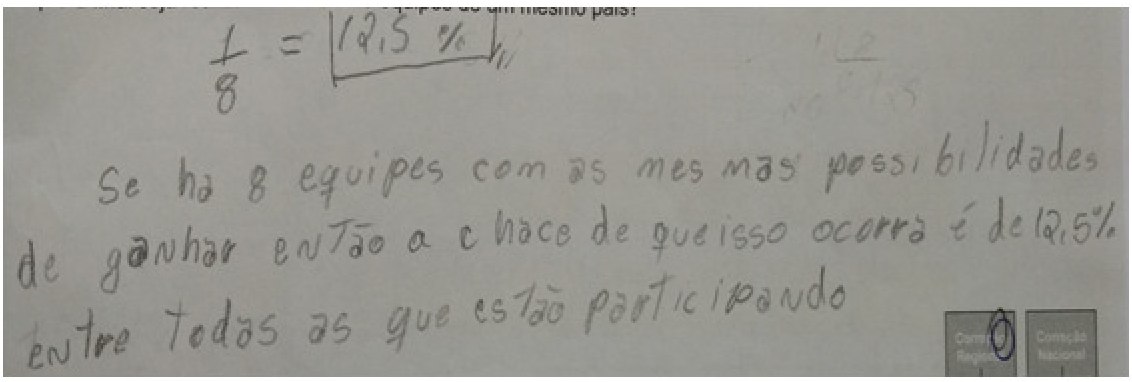


Figura 6.17: Resolução apresentada pelo Aluno 19 ao item C (OBMEP 2015)

Este aluno cometeu, além de outros erros, um erro de interpretação que se admite ter sido causado, devido ao excerto do enunciado do item: "as equipes têm, todas, iguais probabilidades de ganhar". Logo, possivelmente, o motivo dele ter colocado em sua explicação que: "se há 8 equipes com as mesmas possibilidades de ganhar, então a chance de que isso ocorra é de 12,5% entre todas as que estão participando", foi o erro na interpretação.

Na subclasse 2, incorporou-se os alunos A3, A11, A16 e A19, representando 16% da amostra analisada. Estes alunos cometeram erro na determinação dos casos favoráveis.

Já na subclasse 3, foram incluídos os alunos A3, A11, A16, A19 e A22, representando 20% da amostra analisada. Estes alunos cometeram erro na determinação dos casos possíveis.

Na Figura 6.17, apresentada anteriormente, consta a solução do aluno A19, que, além de ter sido incluído na subclasse 1, também foi incluído nas subclasses 2 e 3, haja vista que cometeu tanto o erro na interpretação do enunciado, quanto na determinação do número de casos favoráveis e do número de casos possíveis. Este aluno não determinou o número de confrontos possíveis entre duas equipes de mesma nacionalidade, e também não determinou o número de confrontos possíveis entre duas equipes quaisquer participantes do torneio.

Na subclasse 4, novamente incluiu-se apenas o aluno A6, pois este foi o único da amostra a registrar em suas soluções erro de aplicação de uma definição auxiliar na resolução dos itens e, novamente, assim como visto na Figura 6.7, o aluno utilizou a definição de permutação de forma incorreta.

O aluno A10 chamou atenção, pois não foi incluso na subclasse 5 para os itens A e B, porém cometeu o erro no item C. Portanto, na subclasse 5, incluiu-se o aluno 10, que representa 4% da amostra. A Figura 6.18 mostra a solução apresentada por ele.

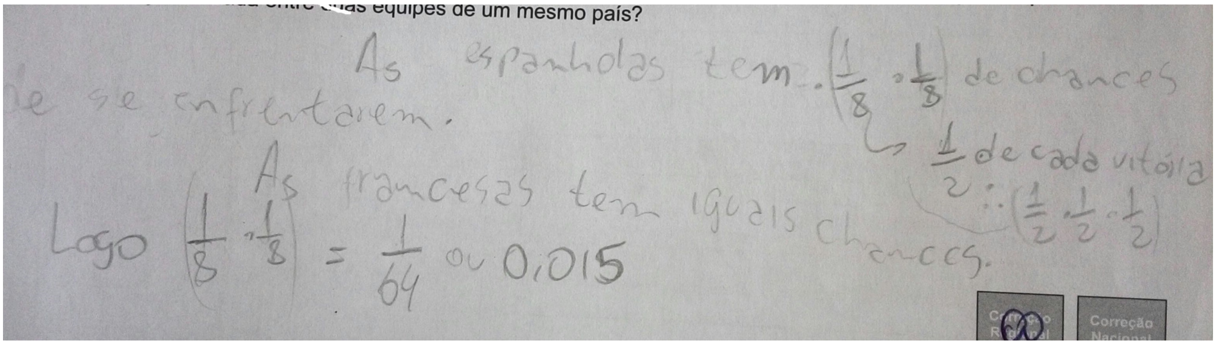


Figura 6.18: Resolução apresentada pelo aluno A10 ao item C (OBMEP 2015)

Ao observar esta resolução, nota-se que o aluno A10 não organizou o seu raciocínio, por isso julga-se que este aluno cometeu erro na redação da sua resposta, pois não é possível determinar com certeza o que de fato este aluno pretendeu fazer.

Em relação à subclasse 6, como já mencionado anteriormente, não houve aluno incluído nesta subclasse.

A tabela a seguir, aponta o quantitativo de alunos que foram inclusos em cada classe, sendo 8 alunos na classe A, 3 alunos na classe B e 9 alunos na classe C.

Classe	Item	
	C	
	nº	%
A	8	32
B	3	12
C	9	36
Total	20	80

Tabela 6.7: Números das três classes de erros para o item A (OBMEP 2015)

Observe na Tabela 6.7, que a parte dos alunos que tentaram resolver o item aplicando a definição clássica de probabilidade não foi a maioria, como registrado para os itens anteriores, pois para este item o maior quantitativo foi para a classe C.

Observando a Tabela 6.7, é possível explicar a queda ocorrida nos valores apresentados na tabela 8, pois apenas 8 alunos foram inclusos na classe A, além do fato dos 5 alunos, A12, A14, A15, A21 e A25 não terem apresentado solução para o item C.

Crer-se que as explicações para esses baixos números registrados na classe A e na classe B, são: o grau de dificuldade do item C, julgado como o de maior grau de dificuldade; a falta de tempo para os alunos desenvolverem seus raciocínios; ou a não compreensão do enunciado do item.

Na classe B, incluiu-se os alunos A2, A9 e A13, o que representa 12% da amostra. Estes alunos, da mesma forma que resolveram os itens A e B, também resolveram o item C, utilizando regra de três simples, semelhante ao apresentado nas Figuras 6.10, 6.11 e 6.16.

Na classe C, foram inclusos os alunos A1, A5, A7, A8, A17, A18, A20, A23 e A24. Estes alunos não se encaixam em nenhuma das duas classes anteriores, pois não houve explicação sobre o raciocínio adotado e não foi possível determinar a abordagem da solução ou porque não houve menção à definição clássica de probabilidade ou, ainda, por que não foi possível entender a resposta. Como exemplo para esta classe, tem-se a solução apresentada pelo aluno A24, que apenas afirmou que a probabilidade pedida era igual a

$\frac{4}{8}$, sem mostrar que procedimento utilizou.

6.4 Análise das soluções apresentadas pelos alunos no ano de 2016

Consoante à análise realizada na amostra da segunda fase da OBMEP 2015, examinou-se também as sextas questões, em igual amostra, das provas do ano de 2016. Assim, as respostas apresentadas pelos alunos foram igualmente agrupadas em: Totalmente corretas; Parcialmente corretas; Incorretas e Não respondeu, como demonstra a tabela 6.8.

Desempenho	Itens							
	A		B		C		D	
	nº	%	nº	%	nº	%	nº	%
Totalmente correto	0	0	0	0	0	0	0	0
Parcialmente correto	6	24	0	0	0	0	0	0
Incorreto	19	76	24	96	23	92	18	72
Não respondeu	0	0	1	4	2	8	7	28
Total	25	100	25	100	25	100	25	100

Tabela 6.8: Desempenho dos alunos na sexta questão da prova da segunda fase da OBMEP 2016

Nota-se que os resultados obtidos e apresentados na Tabela 6.8 são semelhantes aos da tabela 6.1, porém com algumas diferenças, as quais serão apresentadas e detalhadas neste item.

Inicialmente, foi observado que nas 25 provas analisadas do ano de 2016 não foram registradas soluções classificadas como totalmente corretas, fato que não destoa das expectativas da análise, haja vista que os alunos, em sua maioria, apresentam dificuldades em resolver questões de probabilidade, o que já fora constatado e reforçado também pelos resultados obtidos nas provas de 2015.

Em relação aos resultados obtidos nas provas de 2015, teve-se uma significativa queda no número de alunos que tiveram suas resoluções classificadas como parcialmente corretas, havendo, apenas para o item A, registro de reposta parcialmente correta, tendo como base o quantitativo de seis alunos, o que corresponde a 24% da amostra.

Um fato a ser observado é que mesmo os itens A e B possuindo soluções semelhantes, os alunos que conseguiram desenvolver um raciocínio para a solução do item A, não tiveram o mesmo êxito no item B. Ao averiguar as soluções destes alunos, pode-se inferir que o fato de ter que excluir a bola de número 6 no item B, pode ter sido a causa desses alunos não terem concluído a solução de maneira satisfatória.

Essa sexta questão da prova da OBMEP 2016, como já foi apontado, apresentou quatro itens diferentes para que os alunos aplicassem seus conhecimentos acerca da probabilidade. Julga-se que os itens A e B são semelhantes, porém apresentam diferenças bem sutis, já os itens C e D apresentam abordagem diferenciada dos demais itens. No entanto, quanto às soluções, o item C apresenta semelhança com os itens A e B, com diferença, apenas, em relação aos raciocínios utilizados. Além disso, o item D foi julgado ser o item de maior grau de dificuldade pela pesquisa, de forma que os dados apresentados na tabela acima confirmam tal julgamento.

De acordo com a Tabela 6.8, para as resoluções apresentadas ao item A, apenas 6 alunos, o que representa 24% dos pesquisados, tiveram suas respostas consideradas parcialmente corretas, sendo que, em sua maioria, as respostas foram assim classificadas por não apresentarem a contento argumentos coerentes à resolução. Os demais alunos (76%) apresentaram respostas consideradas incorretas.

Ressalta-se que para o item A, 100% dos alunos apresentou alguma resolução. Porém, como será observável a seguir, todos os alunos apresentaram dificuldades em resolver corretamente este item, já que foram constatados diversos erros, recorrentes nas classes e subclasses criadas para a análise realizada nesta pesquisa.

No item B, nenhum aluno teve sua solução classificada como totalmente correta ou parcialmente correta, de forma que, 24 alunos, o que corresponde a 96% da amostra, apresentaram respostas incorretas, e 1 aluno não apresentou nenhuma solução. É importante chamar atenção, que da mesma forma como foi comentado na análise das provas de 2015, o fato de que mesmo com a semelhança entre os itens A e B, o número de respostas parcialmente corretas foi diferente ao apresentado para o item A.

Acredita-se que tal discrepância entre os dados do item A e do Item B, ocorreu por conta do equívoco de raciocínio dos alunos em relação à determinação do número de casos possíveis. Já que, ao fixar a bola de número 1 no item A, ainda teriam 5 possíveis bolas a serem sorteadas; e no item B, ao fixar a bola de número 5, haveria apenas 4 possíveis bolas a serem sorteadas, pois a bola de número 6 deveria ser excluída, pois tem valor maior que a de número 5.

Já o item C apresenta um grau de dificuldade maior do que o do item A e B, pois leva em consideração duas bolas, a de número 1 e a de número 5, em que a primeira deveria ser a de menor valor, e a segunda a de maior valor. Desta forma, alguns alunos não conseguiram desenvolver uma linha de raciocínio coerente, demonstrando bastante dificuldade em determinar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis. Além de que, alguns desses alunos, simplesmente somaram as probabilidades encontradas para os itens A e B, ratificando não terem compreendido de maneira correta o que fora pedido.

Desta forma, nenhum dos alunos teve sua solução classificada como totalmente correta ou parcialmente correta para o item C. Vinte e três alunos, o correspondente a 92% da amostra, tiveram suas respostas consideradas incorretas e dois alunos, o correspondente a 8%, não apresentaram solução para este item.

Com relação ao item D, julgado pela pesquisa como o de nível de dificuldade mais elevado, foram apresentados dados bem diferentes dos demais itens. Conforme a Tabela 6.8, além de não terem sido registradas respostas totalmente corretas neste item, assim como nos demais, também não foram encontradas respostas classificadas como parcialmente corretas, ou seja, os alunos apresentaram respostas incorretas ou simplesmente não apresentaram resposta, confirmando o julgamento dado a este item.

Desta forma, dezoito alunos, o que corresponde a 72% da amostra, apresentaram resposta incorreta e sete alunos, o equivalente a 28% dos pesquisados, não apresentaram solução, deixando este item em branco.

Observa-se que no item D, foram apresentados os piores resultados, e acredita-se que tal resultado se deu novamente por equívoco na interpretação do item, bem como pelo erro na determinação do número de casos possíveis e do número de casos favoráveis.

Apresentar-se-á a seguir, de forma detalhada, os erros cometidos em cada um dos itens da questão analisada.

6.4.1 Item A

Neste item, espera-se que o aluno determine a probabilidade de que o menor número observado em uma das quatro bolas retiradas seja o 1. Desta forma, o aluno deverá determinar o número de casos possíveis, ou seja, quantas formas diferentes têm-se para retirar quatro bolas das seis existentes na caixa, utilizando, para isto, a análise combinatória ou simplesmente o princípio multiplicativo.

Em seguida, espera-se que o aluno determine o número de casos favoráveis, podendo utilizar as mesmas ferramentas utilizadas no cálculo do número de casos possíveis. Por fim, o aluno deverá aplicar a definição clássica de probabilidade e determinar o resultado desejado, conforme as soluções 1 e 3 propostas pela OBMEP, porém o aluno pode usar outras linhas de raciocínio desde que esteja correta.

Nas vinte e cinco provas analisadas foram constatados erros nas três classes e em cinco subclasses da classe A, conforme mostram as Tabelas 6.9 e 6.10 a seguir.

Classe	Subclasse	Item A	
		nº	%
A	1	7	28
	2	11	44
	3	11	44
	4	1	4
	5	1	4
	6	0	0

Tabela 6.9: Erros cometidos nas subclasses da Classe A para o item A(OBMEP 2016)

A Tabela 6.9 apresenta o quantitativo de erros registrados nas subclasses da classe A, sendo que nas cinco primeiras subclasses houve registro de erro. No entanto, na subclasse 6 não houve nenhum registro de erro, o que indica que em nenhuma das provas analisadas, os alunos cometeram erros em opções aritméticas.

Nesta classe, constam erros de 18 alunos, o que corresponde a um total de 72%, demonstrando que a maioria dos alunos buscou resolver este item utilizando a definição clássica de probabilidade, mas cometeu erros pertencentes a alguma das subclasses.

Na classe A, foram inclusos os alunos A26, A28, A30, A31, A32, A33, A34, A36, A37, A38, A40, A42, A43, A45, A47, A48, A49 e A50, os quais representam o número total dos dezoito alunos que cometeram erros classificados para esta classe.

Ao observar os resultados indicados na tabela acima, destaca-se as subclasses 2, 3, 4 e 5. Sendo registrado nas subclasses 2 e 3, os maiores percentuais de erro, o que revela que a maior dificuldade dos alunos em resolver o item está em determinar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis.

Já nas subclasses 4 e 5, observou-se o menor percentual de erro, reforçando, deste modo, que os erros se deram, em sua maioria, por deficiência na construção do conhecimento acerca da probabilidade, e não por falhas na redação das soluções ou na utilização de definições auxiliares à resolução.

Na subclasse 1, foram inclusos os sete alunos: A30, A31, A32, A33, A34, A40 e A50, o correspondente a 20% da amostra. Os referidos alunos não souberam interpretar o enunciado deste item. Observe na Figura 6.19, a ilustração deste erro, a partir da solução apresentada pelo aluno A32.

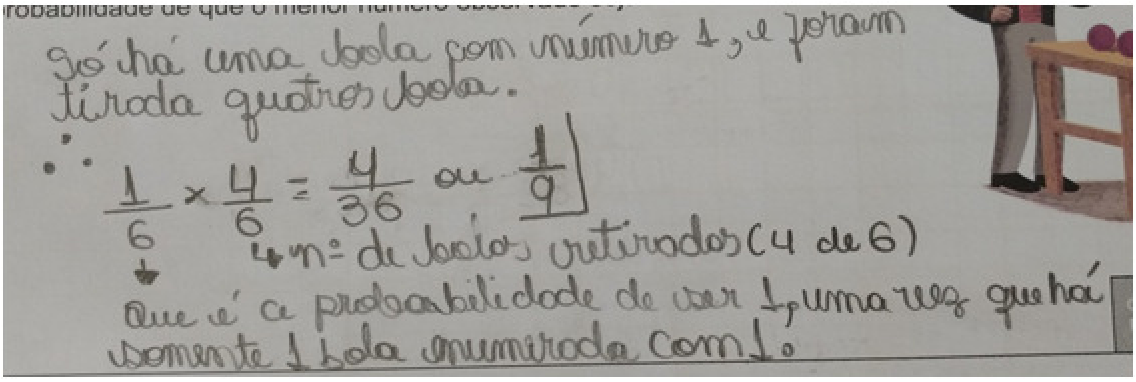


Figura 6.19: Resolução apresentada pelo aluno A32 ao item A (OBMEP 2016)

O aluno A32, acertadamente, verificou que só havia uma bola de número 1 e, além disso, que foram retiradas quatro bolas da caixa. Porém, ao multiplicar as probabilidades por ele determinadas, não conseguiu lograr êxito na resolução, pois não soube interpretar e utilizar adequadamente os dados fornecidos no enunciado.

Infere-se, portanto, que seu erro foi o de não levar em consideração as outras bolas a serem retiradas e, além disso, por ter utilizado a fração $\frac{4}{6}$, em vez de ter multiplicado apenas por 4. Assim, entende-se que o aluno demonstrou saber que a bola de número 1 poderia sair em qualquer uma das quatro retiradas. De tal modo, que mesmo cometendo o erro na resolução, o aluno A32, assim como os demais incluídos na subclasse1, demonstrou ter conhecimento sobre a definição clássica de probabilidade, o que é importante destacar para fins desta pesquisa.

Nas subclasses 2 e 3, de forma semelhante ao ocorrido na análise dos itens da questão seis da OBMEP 2015, teve-se os maiores quantitativos de erros registrados, sendo que nessas duas subclasses, onze alunos foram inclusos, o referente a 44% dos alunos.

Foram inclusos na subclasse 2 e 3, os mesmos onze alunos: A26, A28, A36, A37, A38, A40, A43, A45, A47, A48 e A49, essa inclusão ratifica a ideia de que as maiores dificuldades encontradas pelos alunos estão em determinar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis.

Para a subclasse 2, será analisada a solução apresentada pelo aluno A28, conforme demonstra a Figura 6.20.

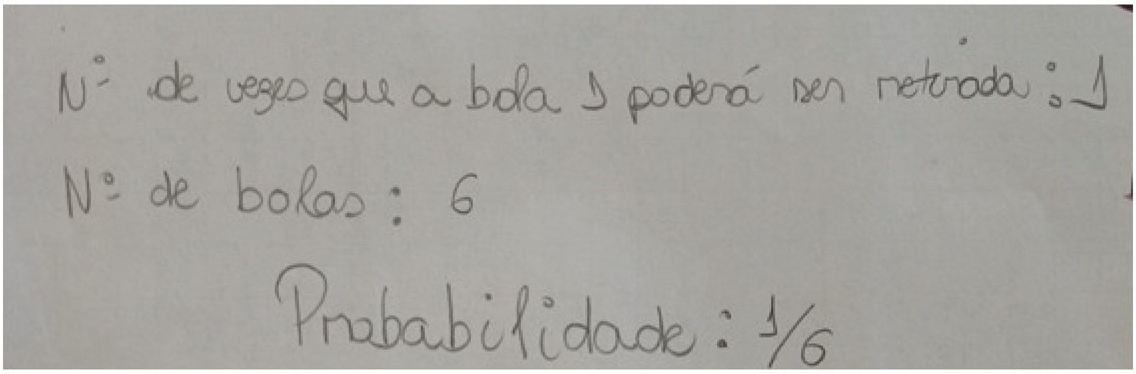


Figura 6.20: Resolução apresentada pelo aluno A28 ao item A (OBMEP 2016)

Observe que o aluno A28 afirmou que o número de casos favoráveis é igual a 1, afirmando ser este o número de vezes que esta bola poderia ser retirada, ou seja, cometeu um erro na determinação do número de casos possíveis, pois não considerou as quatro retiradas de bolas da caixa, e nem a possibilidade de que a bola de número 1 poderia sair em qualquer uma dessas retiradas. Segundo a solução 1, proposta pela OBMEP, o número de casos possíveis é dado por 4x5x4x3, de forma que, para o número ser observado, basta apenas que ele saia, e isso pode acontecer em uma das 4 retiradas, já nas demais retiradas, pode sair qualquer uma das bolas restantes.

Como exemplo para a subclasse 3, apresenta-se a resposta dada pelo aluno A26, segundo a Figura 6.21.

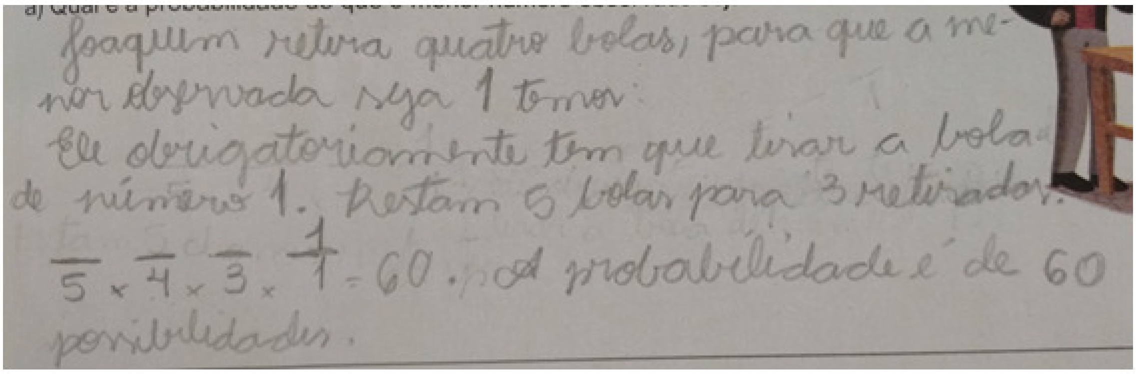


Figura 6.21: Resolução apresentada pelo aluno A26 ao item A (OBMEP 2016)

O aluno A26 narra, inicialmente, o que deve ser feito, e, em seguida, comenta a forma como desenvolveu seu raciocínio. Observe que o aluno aponta corretamente que a bola de número 1 precisa obrigatoriamente ser retirada, e que das cinco bolas restantes, são necessárias tirar mais três. Porém, ao apontar o número de casos possíveis como sendo $5 \times 4 \times 3 \times 1$, este aluno cometeu um erro, pois levou em consideração a quantidade de bolas com o número 1 e não o total de bola da caixa, em que o correto seria $6 \times 5 \times 4 \times 3$, o que resulta em 360 possibilidades possíveis de que sejam retiradas quatro bolas da caixa. Além de cometer este erro apontado, ele também cometeu o erro no cálculo dos casos favoráveis, pois não levou em consideração a possibilidade de a bola de número 1 ser observada em qualquer uma das quatro retiradas, além de que as outras três bolas retiradas poderiam ser qualquer uma das cinco que sobraram.

Na subclasse 4, fora incluso apenas o aluno A33, o que corresponde a 4% dos incluídos na classe A, este baixo quantitativo, apresentado para esta classe, se deu pelo fato de que poucos alunos utilizaram definições auxiliares em suas soluções, tendo apenas este aluno cometido tal erro. Na Figura 6.22, consta a resolução do aluno A33, que utilizou a definição de combinação na sua solução, observável na Figura 6.22.

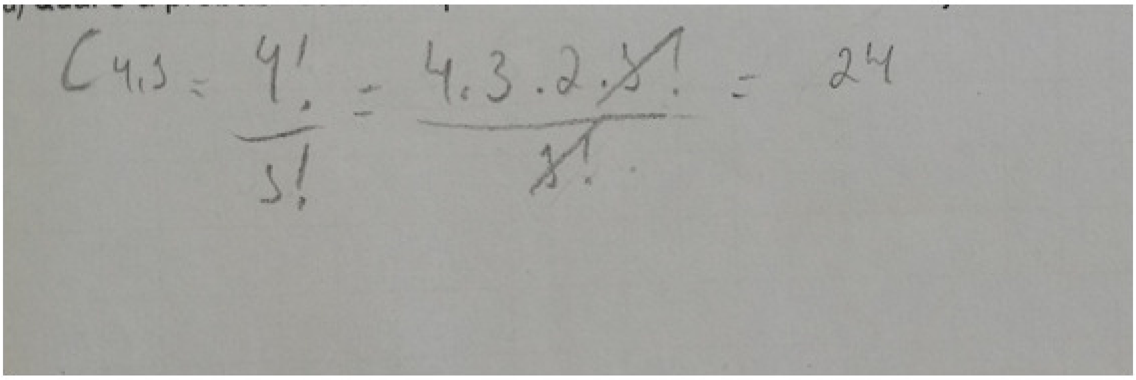
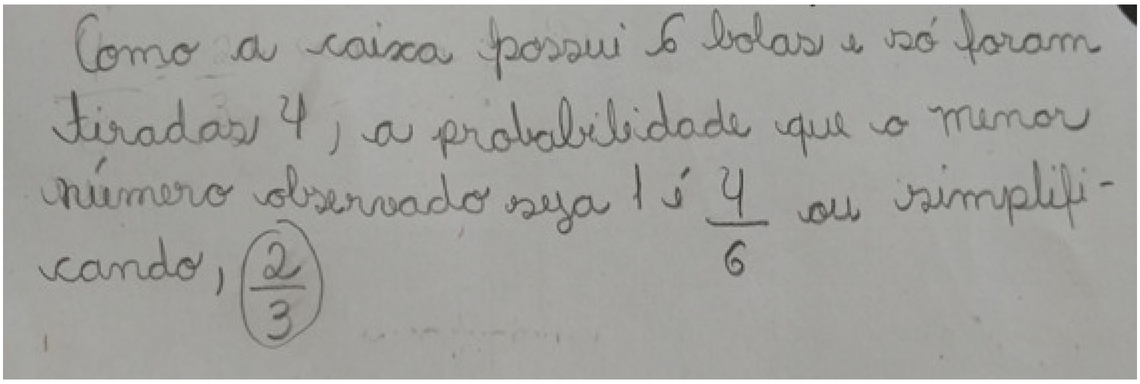


Figura 6.22: Resolução apresentada pelo aluno A33 ao item A (OBMEP 2016)

Não foi possível compreender claramente qual foi o raciocínio utilizado por este aluno, e nem se realmente ele possui conhecimento suficiente sobre a definição clássica de probabilidade, mas optou-se por incluir este aluno na classe A, já que ele se enquadra na subclasse 4, pois utilizou de forma inadequada a definição de combinação, não apresentando corretamente o resultado da combinação que ele resolveu, de forma que $C_{4,1} = 4$.

Na solução 3, proposta pela OBMEP, é utilizado a combinação para determinar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, porém este aluno cometeu erro na própria definição, revelando que tal conhecimento não foi construído por ele de maneira significativa.

Para a subclasse 5, incluiu-se apenas o aluno A43. A resposta deste aluno está exposta na Figura 6.23.



Como a caixa possui 6 bolas e só foram tiradas 4, a probabilidade que o menor número observado seja 1 é $\frac{4}{6}$ ou simplificando, $\frac{2}{3}$

Figura 6.23: Resolução apresentada pelo aluno A43 ao item A (OBMEP 2016)

Da mesma forma que na solução do aluno A25, analisada no item A da prova de 2015, o aluno A43 também teve sua solução apontada como parcialmente correta, pois sua resposta não está clara, apesar de ser semelhante à solução 2, proposta pela OBMEP.

Ainda que tenha deixado claro o porquê de ter considerado o número de casos favoráveis (4) e o número de casos possíveis (6), julga-se que este aluno cometeu erro na redação desta solução, pois sua resposta gerou dúvida a quem a lesse, pois se supõe que a probabilidade de $\frac{4}{6}$, não representa a soma das probabilidades de se tirar a bola de número 1 em cada uma das retiradas realizada, mas sim pelo fato de que era preciso tirar quatro bolas das seis, o que tornou a resposta errada.

Durante a análise das soluções para este item e para os demais, praticamente não foi identificados erros em relação a alguma operação aritmética, o que de fato, mais uma vez, causou surpresa, pois se confirmou o observado na análise das provas da OBMEP 2015. Este tipo de erro, registrado na subclasse 6, foi encontrado apenas na solução do aluno A39 para o item D, conforme será comentado a posteriori. Para os itens A, B e C não foram registrados erros em operações aritméticas.

Com relação às três classes analisadas, a Tabela 6.10 mostra o resultado da contagem de erros para cada uma delas.

Classe	Item A	
	nº	%
A	18	72
B	1	4
C	6	24
Total	25	100

Tabela 6.10: Números das três classes de erros para o item A (OBMEP 2016)

Observe que a classe A foi a que obteve o maior quantitativo de alunos, o que leva a crer, que os alunos, em sua maioria, compreenderam, mesmo que com falhas na aprendizagem, o conceito de probabilidade. No entanto, a falta de conhecimentos prévios, erro na leitura e interpretação do enunciado de uma questão e outros erros cometidos levaram os alunos a não terem sucesso na resolução do item supracitado.

O quantitativo registrado para as classes B e C, mais uma vez, revelou que alguns alunos não possuem o conhecimento, ou possuem apenas uma noção intuitiva acerca do cálculo de probabilidade. Conforme a Tabela 6.10, apenas um aluno, referente a 4% da amostra, fez parte da classe B, ou seja, utilizou regra de três simples na solução do item em questão.

Na classe B, incluiu-se apenas o aluno A35. Este aluno, presente na classe B, mesmo não aplicando a definição clássica de probabilidade, demonstrou que possuía, de forma intuitiva, uma noção de probabilidade. Isto foi observado, haja vista que, os valores do número de casos favoráveis e do número de casos possíveis, determinados intuitivamente por este aluno, estão diretamente ligados à quantidade de bolas de número 1 e a quantidade total de bolas da caixa, o que fora apontado como sendo o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis.

Novamente, reforça-se a convicção de que o erro em utilizar regra de três simples na solução, pode ter sido causado por alguns motivos, por exemplo: o aluno estava, no período da prova da OBMEP 2015, cursando o 1º ou 2º ano do ensino médio e ainda não tinha estudado o conteúdo probabilidade e não conseguiu desenvolver a sua solução com o conhecimento adquirido no ensino fundamental; o aluno não teve uma aprendizagem satisfatória do conteúdo necessário; ou cometeu um erro de interpretação na leitura da questão. Observe a seguir a solução apresentada pelo aluno A35 na Figura 6.24.

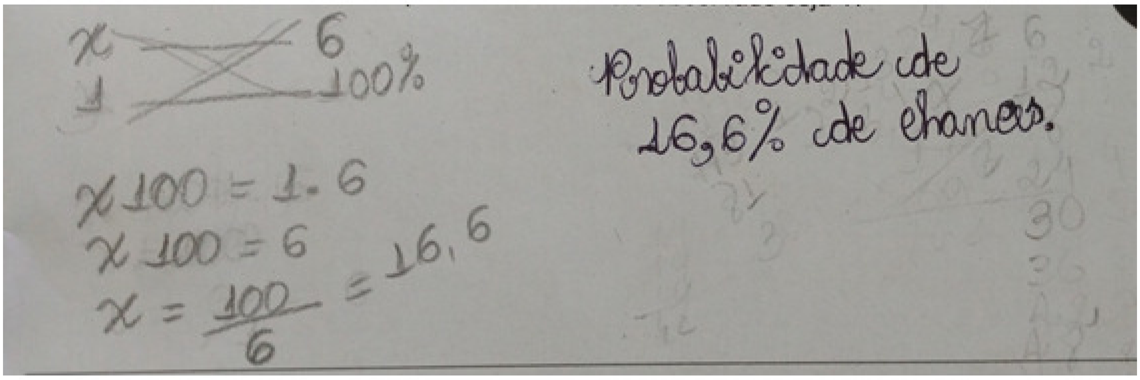


Figura 6.24: Resolução apresentada pelo aluno A35 ao item A (OBMEP 2016)

Ao observar a solução do aluno A35, nota-se que, diferentes das soluções apresentadas e incluídas na classe da OBMEP 2015, o aluno não teve a preocupação em comentar ou explicar o procedimento utilizado, apenas aplicou diretamente a regra de três, e como já comentado, acredita-se que os valores apontados sejam, intuitivamente, o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, porém com valores errados

Na classe C, incluiu-se os alunos A27, A29, A39, A41, A44 e A46. Ao analisar a solução apresentada pelo aluno A29, conforme a Figura 6.25, percebeu-se que este não demonstrou possuir conhecimento sobre probabilidade, apenas apresentou um texto explicando o porquê da sua resposta.

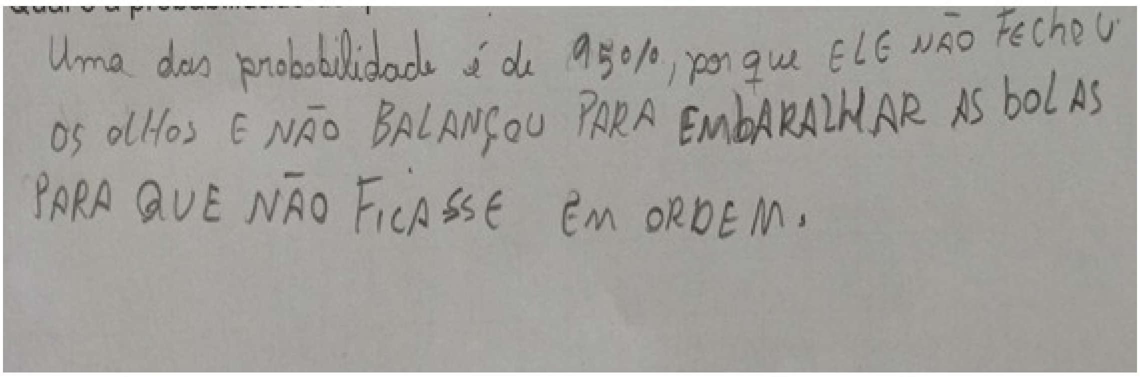


Figura 6.25: Resolução apresentada pelo aluno A29 ao item A (OBMEP 2016)

Observe que o aluno utiliza um argumento insustentável para referendar sua resposta, quando escreve que: “ele não fechou os olhos e não balançou para embaralhar as bolas”, revela o seu total desconhecimento sobre o conceito clássico da definição de probabilidade.

O quantitativo de alunos, apresentados na classe C, revela que um percentual de 24% dos alunos, julgado aqui como um percentual significativo, não compreendeu a definição clássica de probabilidade durantes seus estudos, ou ainda que não aprofundou o conhecimento introdutório adquirido no ensino fundamental acerca da probabilidade, pelos mesmos motivos que levaram os alunos a utilizarem a regra de três simples em suas soluções.

6.4.2 Item B

Este item é semelhante ao item A, possuindo algumas particularidades. No item A foi pedido que o aluno determinasse a probabilidade de que o menor número observado fosse o 1, sendo que neste caso todos os outros números são maiores que 1. Já no item B, foi solicitado que o aluno determinasse a probabilidade de que o maior número observado fosse o 5, neste caso, vale ressaltar que nem todos os números são menores que 5, que é o caso do número 6.

Essa diferença é que faz com que o número de casos favoráveis seja diferente para os dois itens, o que levou alguns alunos a cometerem erro no cálculo do número de casos favoráveis.

Esperava-se que os alunos adotassem alguma uma linha de raciocínio semelhante aos propostos pela OBMEP, utilizando o princípio multiplicativo ou a análise combinatória para determinar o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, para posteriormente aplicar a definição clássica de probabilidade. Porém, como já mencionado, em nenhuma das 25 provas selecionadas do ano de 2016 foram registradas soluções totalmente corretas ou parcialmente corretas, ou seja, nenhum dos alunos teve êxito ao resolver este item, cometendo algum dos erros constantes nas classes A, B ou C.

A Tabela 6.11 a seguir, mostra o quantitativo de alunos que cometeram erros em cada uma das subclasses da classe A. Observe que os dados constantes nesta tabela, reafirmam o constatado na análise do item A, o maior índice de erros cometidos pelos alunos está relacionado à determinação do número de casos favoráveis e ao número de casos possíveis, sendo apontado para a subclasse 2 um quantitativo de 11 alunos e para a subclasse 3 um quantitativo de 12 alunos, representando 44% e 48% respectivamente. No entanto, neste item não foi registrado erros nas subclasses 5 e 6, diferentemente do que aconteceu no item A, que registrou erro na subclasse 6.

Classe	Subclasse	Item B	
		nº	%
A	1	7	28
	2	11	44
	3	12	48
	4	1	4
	5	0	0
	6	0	0

Tabela 6.11: Erros cometidos nas subclasses da Classe A para o item B(OBMEP 2016)

Os números, apresentados nas Tabelas 6.9 e 6.11, são bastante semelhantes, o que revela que os alunos buscaram resolver os itens A e B, utilizando os mesmos procedimentos e cometendo praticamente os mesmos erros. Assim, é notório que os alunos não observaram as diferenças sutis entre os itens.

Na subclasse 1, incluiu-se os sete alunos: A30, A31, A32, A33, A34, A40 e A50, os mesmos alunos incluídos nesta subclasse para o item A. Dentre estes alunos, optou-se por destacar a solução apresentada pelo aluno A34, demonstrada na Figura 6.26 a seguir.

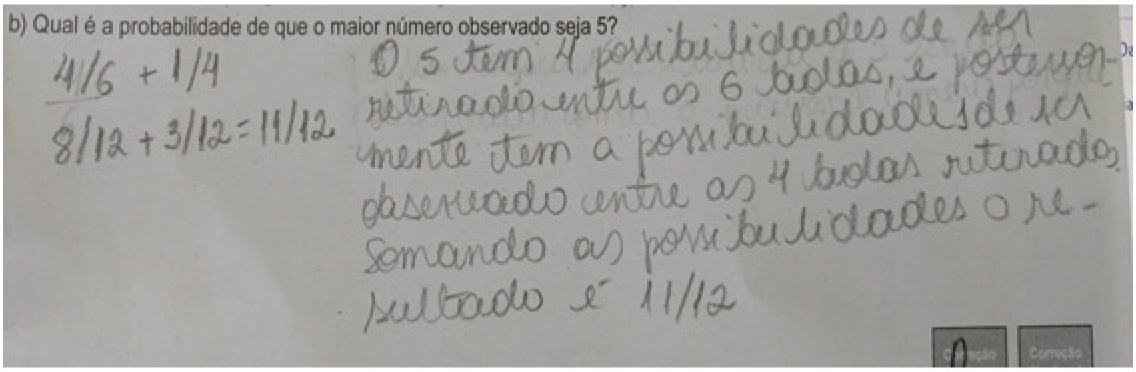


Figura 6.26: Resolução apresentada pelo aluno A34 ao item B (OBMEP 2016)

O aluno A34 demonstrou ao indicar que “o 5 tem 4 possibilidades de ser retirado entre as seis bolas” que a cada uma das quatro bolas retiradas, a probabilidade de aparecer o cinco é de $\frac{1}{6}$, sendo este o possível motivo de ter indicado a probabilidade $\frac{4}{6}$. Porém, apontou que a bola de número 5 tinha uma possibilidade de ser retirada entre as quatro bolas.

Deste modo, é possível afirmar que houve, por parte deste aluno, um erro de interpretação, pois se infere que este aluno julgou existir dois sorteios, um realizado entre as seis bolas e um realizado entre as quatro, possivelmente isso o tenha levado a somar as duas probabilidades encontradas.

Na subclasse 2, foram inclusos os onze alunos: A26, A36, A37, A38, A39, A40, A42, A45, A47, A48 e A49, que corresponde a 44% da amostra de 2016. Estes alunos cometeram erro na determinação do número de casos favoráveis, e para esta subclasse, escolheu-se a resolução apresentada pelo aluno A38, a fim de analisar de forma particular e servindo como uma amostra representativa desta subclasse, como mostra a Figura 6.27.

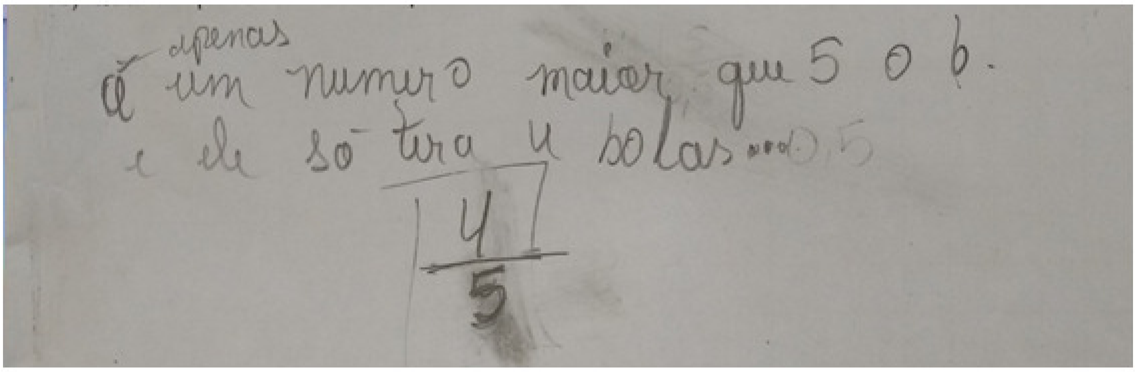


Figura 6.27: Resolução apresentada pelo aluno A38 ao item B (OBMEP 2016)

Na resposta do aluno A38, observa, inicialmente, que “existe um número maior que 5”, afirmando ser o 6 e, em seguida, ele pontua que será tirado apenas uma bola. Analisando a solução deste aluno, conclui-se que o mesmo exclui a bola de número seis, devido a sua justificativa, porém, ao determinar como resultado desejado $\frac{4}{5}$, comete um erro no cálculo do número de casos favoráveis, desconsiderando o caso de ao retirar quatro bolas, a de número 5 não está entre elas.

É importante ressaltar que este aluno também comete o erro da subclasse 3, revelando, neste caso, não compreender a definição de espaço amostral, pois desconsiderou vários eventos possíveis ao excluir a bola de número 6. Nesta subclasse, foram inclusos os alunos A26, A28, A36, A37, A38, A39, A40, A42, A45, A47, A48 e A49, o que representa 48% dos alunos inclusos na classe A. Estes alunos cometeram erro no cálculo do número de casos possíveis.

Na subclasse 4, novamente apenas o aluno A33 foi incluso, por cometer o mesmo erro cometido por ele no item A. Segundo mostra a Figura 6.28.

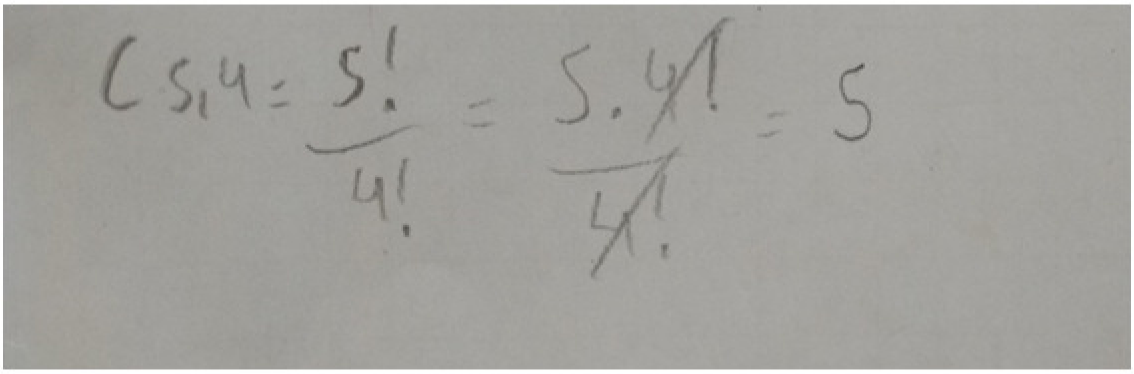


Figura 6.28: Resolução apresentada pelo aluno A33 ao item B (OBMEP 2016)

Observe que mesmo não ficando claro o que de fato este aluno tentou fazer nesta sua solução, ele foi incluso na subclasse 4, por utilizar a combinação para determinar a probabilidade desejada e não para calcular o número de casos favoráveis e casos possíveis como sugerido na solução 3 proposta pela OBMEP.

A Tabela 6.12 mostra o quantitativo de erros registrado para cada uma das classes. Verifica-se que assim como no item A, a classe A no item B, obteve o maior número de registros, o que leva a concluir novamente que a maioria dos alunos possui conhecimento sobre probabilidade, porém com falhas na aprendizagem de conteúdos pré-requisitos, na interpretação do enunciado da questão e na definição da própria probabilidade, mais especificamente no cálculo do número de casos favoráveis e de casos possíveis.

Classe	Item	
	B	
	nº	%
A	18	72
B	2	8
C	4	16
Total	24	96

Tabela 6.12: Erros cometidos nas subclasses da Classe A para o item B(OBMEP 2016)

Observando a tabela acima, constata-se que a soma do percentual de cada classe é igual a 96%, o que indica que algum aluno deixou este item sem resposta. Segundo o que foi apontado na Tabela 6.8, apenas um aluno (A43) não apresentou solução para este item.

Na classe A, foram inclusos os alunos A25, A26, A28, A30, A31, A32, A33, A34, A36, A37, A38, A39, A40, A42, A45, A47, A48, A49 e A50, pois cometeram algum dos erros apontados nas seis subclasses. Estes alunos correspondem a 72% da amostra analisada das provas de 2016.

Na classe B, além do aluno A35 que repetiu o erro cometido por ele no item A, foi acrescido o aluno A41, que também utilizou regra de três simples na sua solução, revelando não possuir conhecimento suficiente sobre probabilidade, portanto nesta classe foram inclusos os alunos A35 e A41, o que representa 8% da amostra. Observe a seguir a solução apresentada pelo aluno A41 na Figura 6.29.

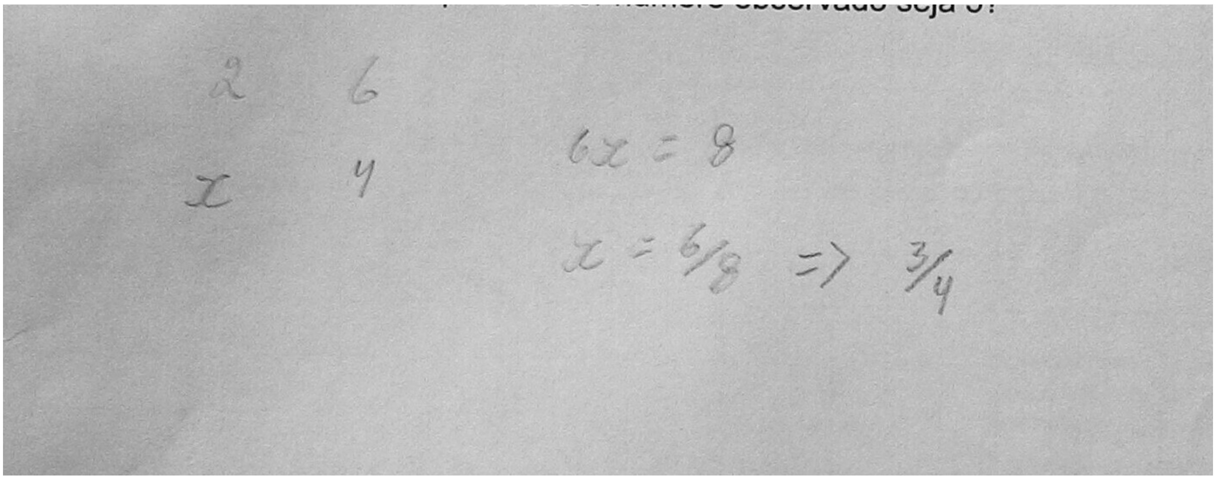


Figura 6.29: Resolução apresentada pelo aluno A41 ao item B (OBMEP 2016)

O aluno A41 estabelece uma regra de três simples, para determinar a probabilidade desejada. Diferente do que foi registrado na análise realizada nas provas de 2015, não se conseguiu identificar nenhuma relação, mesmo que intuitiva, com a definição clássica de probabilidade.

Na classe C, incluiu-se os alunos A27, A29, A44 e A46, que representa 16% da amostra analisada. Estes alunos buscaram resolver as questões de maneira alternativa, mas não apresentaram conhecimento a respeito de probabilidade e, de modo geral, justificaram suas respostas apenas por texto, não apresentando nenhum cálculo, ou não justificando ou, ainda, por que não foi possível compreender que raciocínio foi utilizado pelo aluno na solução apresentada.

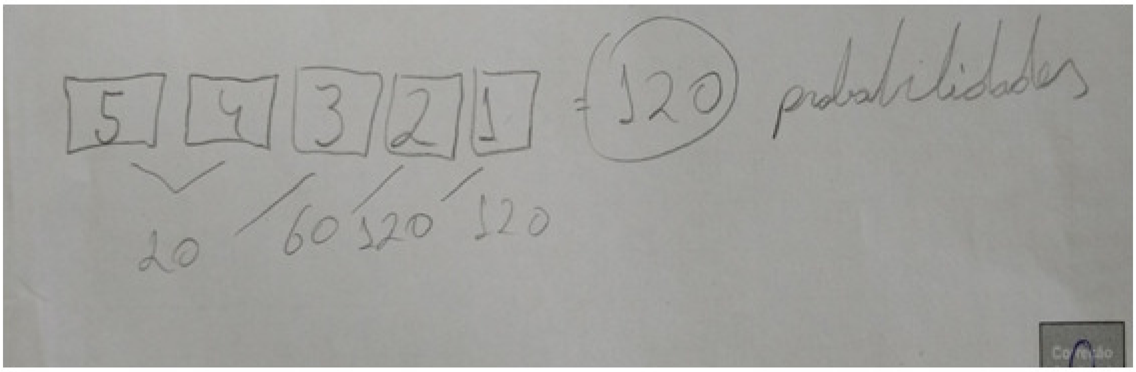


Figura 6.30: Resolução apresentada pelo aluno A27 ao item C (OBMEP 2016)

Nesta solução da Figura 6.30, apresentada pelo aluno A27, não foi possível identificar o raciocínio que o aluno buscou utilizar, é provável que ele tenha tentado utilizar o princípio multiplicativo, porém de forma desorganizada, além de ter apontado que o resultado “120” era a probabilidade desejada.

6.4.3 Item C

Neste item, foi solicitado que o aluno determinasse a probabilidade de que ao retirar as quatro bolas, o menor número observado fosse o 1 e o maior fosse o 5. Observe que, aparentemente, este item é a junção dos itens A e B, o que levou alguns alunos a somarem as probabilidades encontradas nos itens anteriores. Porém, estes alunos não perceberam que no cálculo da probabilidade do menor número observado ser o 1, inclui casos em que o número 6 foi observado, o que é um erro, já que o item C é claro ao pedir que o maior número observado seja o 5.

Para este item, esperava-se que os alunos utilizassem o princípio multiplicativo ou a análise combinatória para determinar os casos favoráveis e os casos possíveis, e, em seguida, aplicassem a definição clássica de probabilidade.

Os alunos de modo geral, persistiram no erro do cálculo do número de casos possíveis e do número de casos favoráveis, do mesmo modo que nos itens anteriores. Observando a Tabela 6.13, pode-se, através do quantitativo registrado nas subclasses 2 e 3, confirmar o que acabamos de comentar.

Classe	Subclasse	Item C nº	Item C %
A	1	7	28
	2	10	40
	3	9	36
	4	1	4
	5	0	0
	6	0	0

Tabela 6.13: Erros cometidos nas subclasses da Classe A para o item C(OBMEP 2016)

Os dados apresentados nesta tabela confirmam o que já foi observado na prova de 2015 e nos itens anteriores da prova de 2016, que a maioria dos alunos possui determinado conhecimento sobre probabilidade, porém apresentam dificuldades que levam estes alunos a cometerem vários erros.

Assim como no item B, não foi incluído nenhum aluno nas subclasses 5 e 6, pois para este item nenhum aluno cometeu erro em operações aritmética, ou erro na redação, que fizesse com que um resultado correto fosse considerado parcialmente correto como aconteceu no item A e B das provas de 2015.

Na subclasse 1, foram incluídos os alunos A30, A31, A32, A33, A34, A40 e A50, o que representa 28% da amostra.

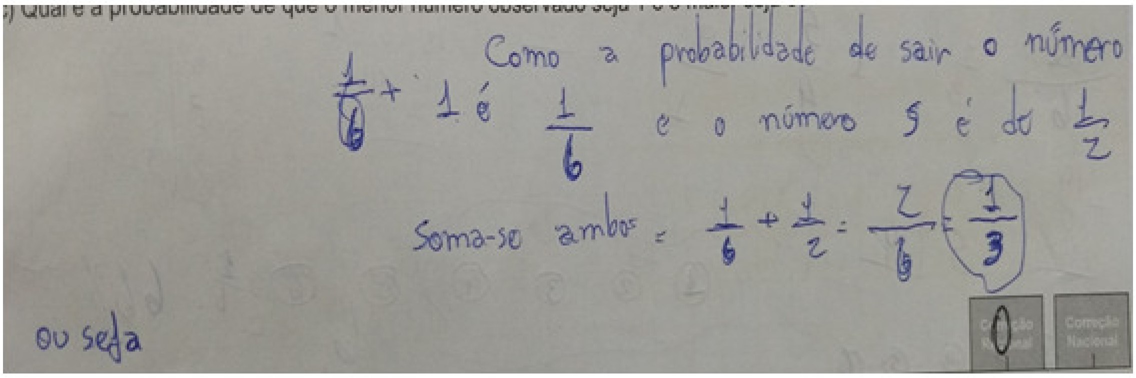


Figura 6.31: Resolução apresentada pelo aluno A31 ao item C (OBMEP 2016)

Analisando a solução apresentada pelo aluno A31, na Figura 6.31, observa-se que este aluno não interpretou corretamente o enunciado, realizando o que fora comentado acima, somando as probabilidades encontradas nos itens A e B.

Na subclasse 2, foram inclusos os alunos A26, A28, A36, A37, A39, A40, A42, A43, A45 e A47, o que corresponde a 40% da amostra. Estes alunos cometeram erros de interpretação do enunciado conforme mostra a Figura 6.32.

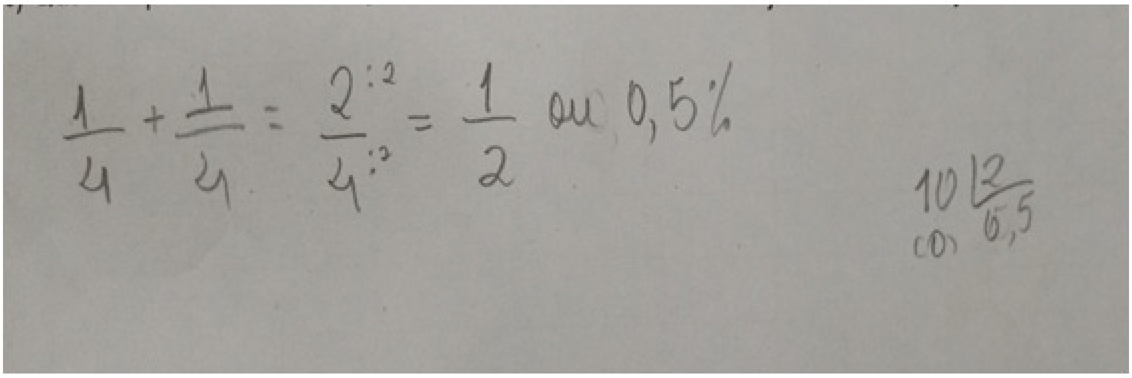


Figura 6.32: Resolução apresentada pelo aluno A45 ao item C (OBMEP 2016)

O aluno A45, ao responder o item C, somou as probabilidades $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$, que se acredita ter sido as probabilidades de se retirar o número 1 ou o número 5 entre as quatro bolas, o que representa uma falha de interpretação, pois estas duas bolas são retiradas entre as seis bolas existentes na caixa. Tal erro de interpretação fez com este aluno determinasse de forma equivocada o número de casos possíveis, o que permitiu incluí-lo nesta subclasse.

Na subclasse 3, incluiu-se os alunos A26, A28, A37, A39, A40, A42, A43, A45 e A47, o que corresponde a 36% da amostra.

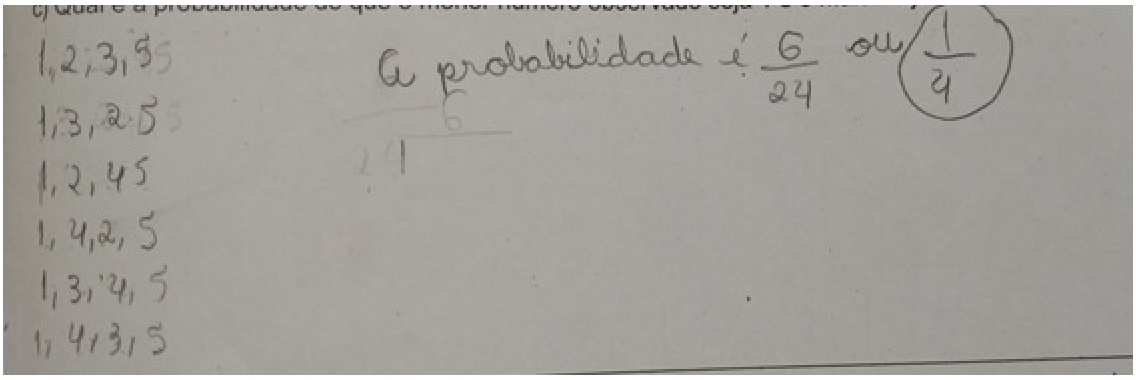


Figura 6.33: Resolução apresentada pelo aluno A43 ao item C (OBMEP 2016)

A Figura 6.33 mostra a solução do aluno A43, incluído na subclasse 3, pois apresenta erro no cálculo do número de casos possíveis. Este aluno realizou algumas combinações, registradas no canto esquerdo da figura, de forma que se preocupou em garantir que o número 1 e o 5 estivessem em cada uma das seis combinações por ele determinadas, mas desconsiderou vários outros casos, como por exemplo, os casos em que os números 1 e 5 estão em outras posições. Além disso, apontou que o número de casos possíveis são 24, quando o correto são 360.

Na subclasse 4. Novamente foi incluído apenas o aluno A33, que cometeu o mesmo erro cometido por ele nos demais itens, utilizando de forma inadequada o cálculo de combinações.

A Tabela 6.14 a seguir, aponta o quantitativo de alunos que foram inclusos em cada classe, sendo 15 alunos na classe A, 1 aluno na classe B e 7 alunos na classe C.

Classe	Item C	
	nº	%
A	15	60
B	1	4
C	7	28
Total	23	92

Tabela 6.14: Números das três classes de erros para o item C (OBMEP 2016)

Observe na tabela acima, que a soma do percentual de cada classe é igual a 92%, o que indica que algum aluno deixou este item sem resposta. Segundo o que já foi apontado na tabela 6.8, dois alunos não apresentaram solução para este item, sendo estes, os alunos A48 e A49.

Os resultados obtidos até agora, levam a perceber que os itens são dispostos em ordem crescente de grau de dificuldade, de forma que há uma variação no percentual de alunos incluídos na classe C, assim como no quantitativo de alunos que apresentaram resposta aos itens.

Na classe A, foram inclusos os alunos A25, A26, A28, A30, A31, A32, A33, A34, A37, A39, A40, A42, A43, A45, A47 e A50, pois cometeram algum dos erros apontados nas seis subclasses. Estes alunos correspondem a 64% da amostra analisada para 2016.

Na classe B, incluiu-se apenas o aluno A41. Este aluno semelhante à solução apresentada pelo aluno A35 para o item A, não demonstrou que possui, mesmo que de forma intuitiva, uma noção de probabilidade, pois em sua solução não foi apontada nenhuma relação evidente com a definição clássica de probabilidade.

Na classe C, foram inclusos os alunos A27, A29, A35, A38, A44 e A46. Estes alunos não se encaixam em nenhuma das duas classes anteriores, porque não houve explicação sobre o raciocínio adotado e não foi possível determinar a abordagem da solução ou por que não houve menção à definição clássica de probabilidade ou, ainda, não foi possível entender a resposta.

Para as classes B e C para este item, não se julgou necessário apresentar as soluções dos alunos citados, pois são semelhantes às apresentadas para estas classes nos itens anteriores.

6.4.4 Item D

Neste item, julgado pela pesquisa como o de grau mais elevado de dificuldade, foi pedido que o aluno calculasse a probabilidade de que o menor número observado fosse na primeira bola e o maior número observado fosse na última bola retirada. De forma que o aluno deveria buscar outra forma diferente das utilizadas nos itens A, B e C, a fim de calcular o número de casos possíveis.

Por conta do grau de dificuldade, os resultados obtidos foram bem mais díspares do que os obtidos nos itens anteriores, pois foi neste item que se obteve o maior registro de ausência de resposta. Os alunos A26, A32, A34, A42, A43, A46 e A48 não apresentaram solução para este item e representam 28% da amostra analisada. No entanto, a maior quantidade de alunos cometeu erros relativos ao cálculo do número de casos possíveis e número de casos favoráveis, sendo que mais uma vez a classe A foi a que apresentou maior quantitativo.

Classe	Subclasse	Item D	
		nº	%
A	1	4	16
	2	5	20
	3	5	20
	4	1	4
	5	0	0
	6	1	4

Tabela 6.15: Erros cometidos nas subclasses da Classe A para o item D (OBMEP 2016)

A Tabela 6.15 mostra valores mais baixos que os encontrados para os outros itens, este fato ocorreu devido ao grande número de alunos que não responderam a este item. Para a classe A, foram inclusos os alunos A30, A33, A36, A39, A40, A45, A47, A49 e o A50, o que corresponde a 36% da amostra referente a 2016. Este item foi o único a apresentar o percentual da classe A mais baixo que a soma dos percentuais das demais classes.

Na subclasse 1, foram incluídos os alunos A30, A33, A40, A50, o que representa 16% da amostra em questão. Dentre as soluções desses alunos, destaca-se a solução apresentada pelo aluno A30, ilustrada na Figura 6.34.

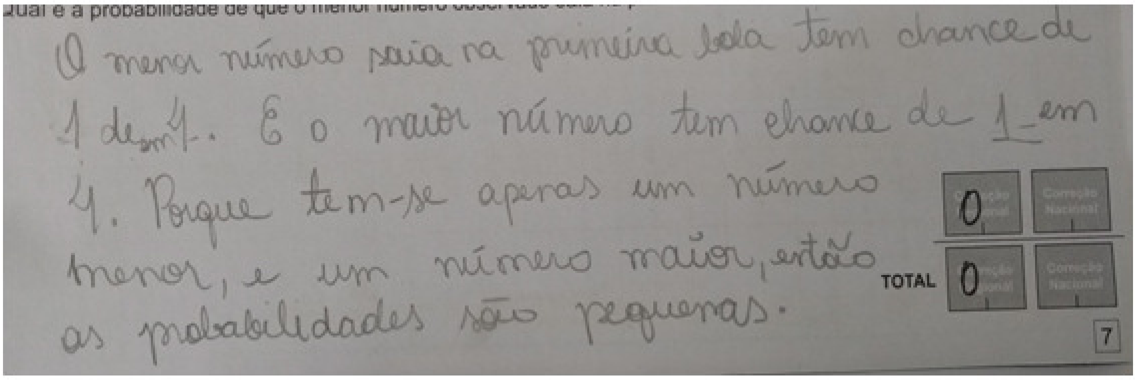


Figura 6.34: Resolução apresentada pelo aluno A30 ao item D (OBMEP 2016)

Este aluno, assim como o aluno A45 , também comete o erro em estabelecer a probabilidade pedida, observando apenas as quatro bolas retiradas, desconsiderando que qualquer uma das seis bolas poderia ser retirada. Além deste erro de interpretação, a solução apresentada é confusa e revela que este aluno não possui um entendimento claro sobre o cálculo de probabilidade.

Nas subclasses 2 e 3 foram inclusos os alunos A36, A40, A45, A47 e A49, o que representa um percentual de 20% da amostra em questão. Todos estes alunos cometeram erro tanto no cálculo do número de casos favoráveis, quanto no de casos possíveis. Observe a solução do aluno A49 na Figura 6.35.

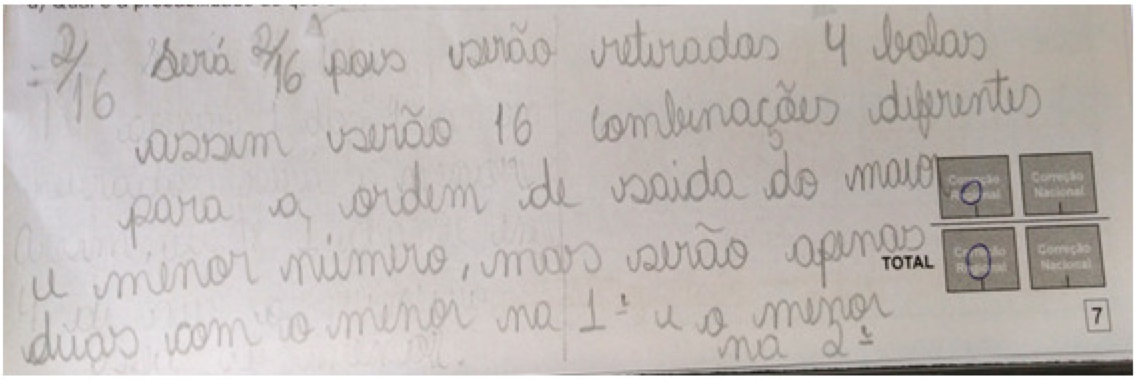


Figura 6.35: Resolução apresentada pelo aluno A49 ao item D (OBMEP 2016)

Este aluno, assim como vários outros, demonstra ter várias dificuldades ao apresentar uma solução como esta, desde a dificuldade em organizar suas ideias até a dificuldade no uso da definição clássica de probabilidade. Sendo que na sua resolução, foi determinado o número de casos favoráveis como 2 e o número de casos possíveis como 16, porém não se consegue precisar o motivo de tais valores serem apontados. Na subclasse 4, apenas o aluno A33 cometeu esse erro, julgando-se desnecessário apresentar a sua solução por ser idêntica às soluções apresentadas aos itens A e B, de forma que mais uma vez o aluno utilizou a definição de combinação inadequadamente.

Na subclasse 5 não houve registro de alunos que cometeram tal erro, assim como nos itens A e B, e na subclasse 6, apenas o aluno A39 foi incluído, de modo que, neste item, apenas um aluno cometeu erro em alguma operação aritmética.

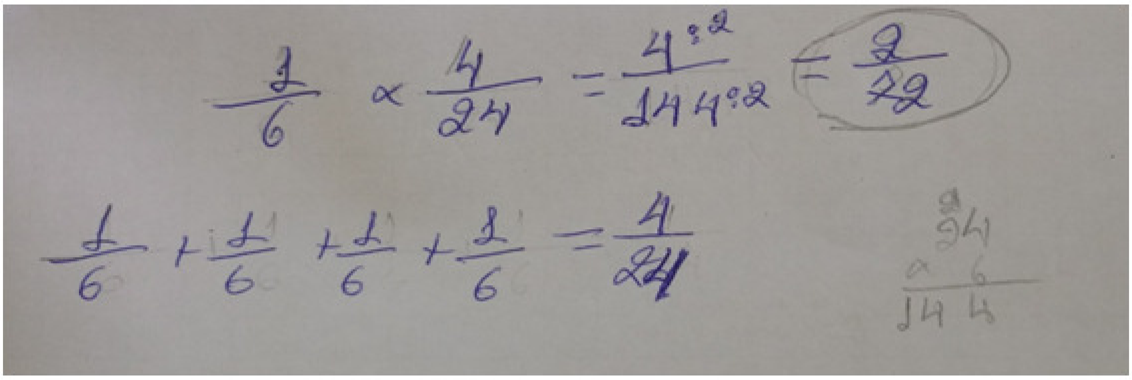


Figura 6.36: Resolução apresentada pelo aluno A39 ao item D (OBMEP 2016)

Com base na Figura 6.36, nota-se que o aluno desenvolve alguns cálculos sem identificar o que de fato representa, o que dificulta apontar com precisão qual foi sua linha de raciocínio. Mas, o que chamou à atenção foi o resultado por ele obtido ao efetuar as adições $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$ e afirmar que o resultado é $\frac{4}{24}$, cometendo um erro na operação de adição de frações o que não permitiria que esse aluno acertasse o item, se tivesse aplicado corretamente a definição clássica de probabilidade.

Classe	Item	
	D	
	nº	%
A	9	36
B	2	8
C	7	28
Total	18	72

Tabela 6.16: Números das três classes de erros para o item D (OBMEP 2016)

Na classe B, incluiu-se os alunos A35 e A41. Estes alunos não demonstraram que possuem, mesmo que de forma intuitiva, uma noção de probabilidade, pois em suas soluções não foram encontradas nenhuma relação evidente da presença da definição clássica de probabilidade.

Na classe C, foram inclusos os alunos A27, A28, A29, A31, A37, A38 e A44. Estes alunos não se encaixam em nenhuma das duas classes anteriores, por que não houve explicação sobre o raciocínio adotado e não foi possível determinar a abordagem da solução, ou por que não houve menção à definição clássica de probabilidade ou, ainda, por que não foi possível entender a resposta.

Para as classes B e C para este item, não julgamos necessário apresentar as soluções dos alunos citados, pois são semelhantes às apresentadas para estas classes nos itens anteriores.

6.5 Considerações sobre os erros apontados

Em síntese, a análise realizada das respostas apresentadas pelos 50 alunos à questão que exige conhecimento de probabilidade nas provas da segunda fase da OBMEP 2015 e 2016, direcionou a algumas conclusões, algumas já mencionadas durante toda a análise, descrita nos itens deste capítulo. Desta forma, podemos dizer que:

- A maioria dos alunos que compõem a amostra analisada compreende a definição clássica de probabilidade, porém apresentam dificuldade em aplicá-la na resolução de situações-problema;
- Os alunos que demonstraram compreender a definição clássica de probabilidade, em sua maioria, possuem dificuldade em determinar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis;
- Grande parte dos alunos demonstrou dificuldade em organizar e apresentar o raciocínio utilizado em suas soluções;
- A má interpretação do enunciado da questão e dos itens levou alguns alunos a cometerem erros em suas respostas;
- Um baixo número de alunos demonstrou ter dificuldade nas operações aritméticas simples;
- Um número considerável de alunos demonstrou não possuir conhecimento de probabilidade, além de apresentar dificuldade em identificar a ferramenta correta para a solução de uma questão de probabilidade;

- Existem problemas relacionados ao processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de probabilidade, pois no geral, os erros se deram por falha cometida na aplicação da definição ou por total desconhecimento da mesma e não por falta de pré-requisitos.

A seguir, apresentar-se-á os gráficos que sintetizam e confirmam as conclusões aqui pontuadas.

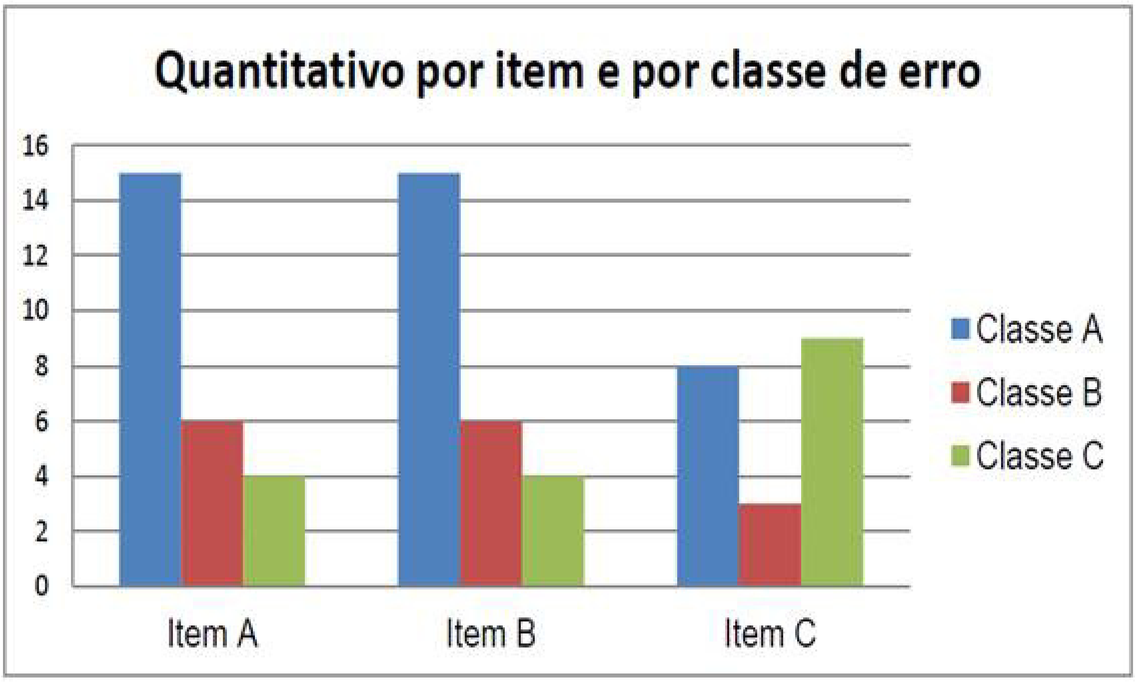


Figura 6.37: Gráfico do quantitativo de alunos por item e por classe de erro / OBMEP 2015

Na Figura 6.37, exibe o gráfico do quantitativo de alunos por item e por classe de erro na OBMEP 2015 e apresentou-se, em síntese, todos os dados obtidos para cada uma das classes de erro em cada um dos itens analisados.

Para os itens A e B, tem-se a coluna em azul, que representa o quantitativo de alunos que foram inclusos na classe A, os quais atingiram os maiores valores e, no item C, esta coluna atingiu o segundo maior quantitativo, confirmando que a maioria dos alunos compreende a definição clássica de probabilidade, porém com dificuldade. Quinze (15) alunos revelaram possuir conhecimento de probabilidade nos itens A e B e 8 alunos para o item C.

Outra observação importante, é que as outras duas colunas, mesmo não apresentando os maiores índices, tiveram valores significativos, revelando que esta parcela da amostra não compreendeu o conceito de probabilidade durante as aulas ou que não tiveram oportunidade de estudar tal conteúdo.

Na Figura 6.38, a seguir,tem-se o gráfico do quantitativo de alunos por item e por classe de erro na OBMEP 2016.

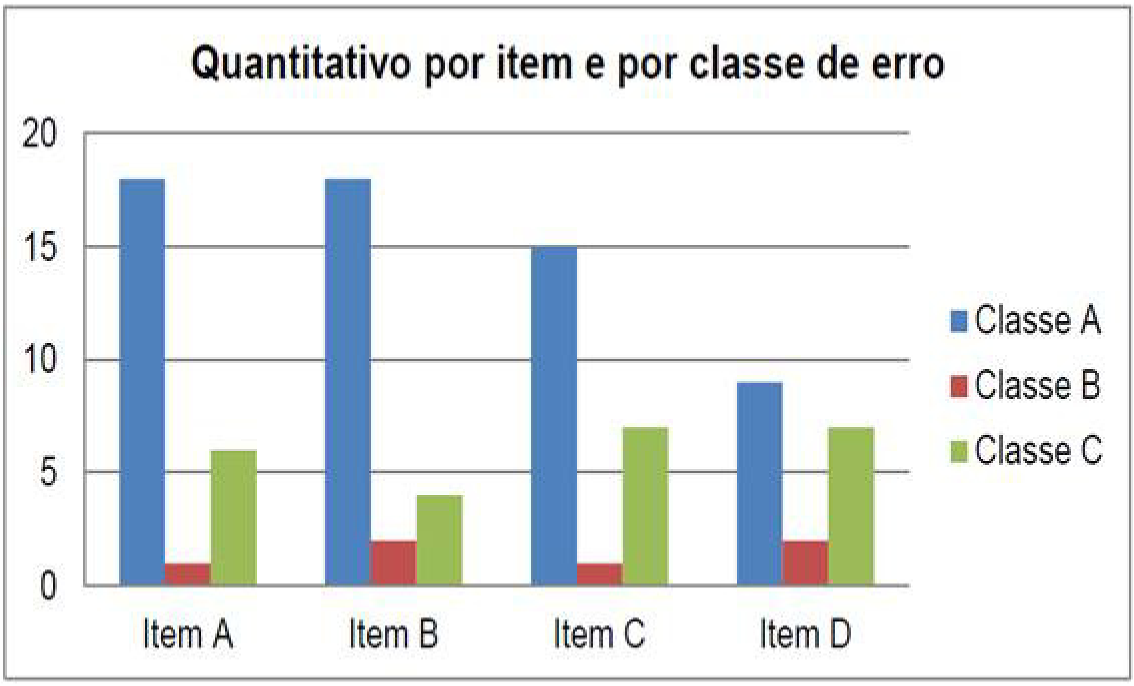


Figura 6.38: Gráfico do quantitativo de alunos por item e por classe de erro / OBMEP 2016

Ao observar a Figura 6.38 acima, percebe-se que foi mantido resultado semelhante ao obtido nas provas de 2015, de forma que a coluna em azul, que representa a classe A, novamente apontou os maiores valores, reafirmando que a maioria dos alunos possui conhecimento sobre probabilidade, porém as colunas que indicam as classes B e C demonstram que alguns alunos ainda não possuem tal conhecimento.

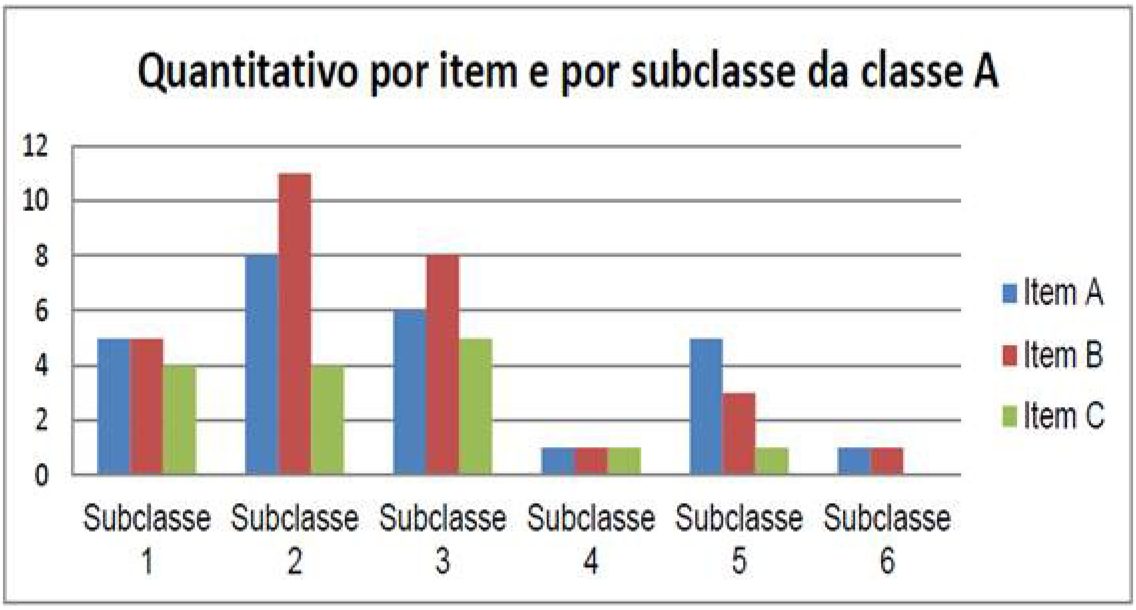


Figura 6.39: Gráfico do quantitativo de alunos por item e por subclasse da classe A / OBMEP 2015

O gráfico na Figura 6.39, aponta o quantitativo de alunos incluídos em cada uma das subclasses da classe A, e confirma as demais análises apresentadas acima. Os maiores índices apontados na tabela, apontam que aas principais dificuldades apresentadas pelos alunos que utilizaram a definição de probabilidade, estão na interpretação e no cálculo do número de casos possíveis e casos favoráveis.

O gráfico na Figura 6.40, mostra o quantitativos registrado para cada subclasse da classe A e da mesma forma que o observado nas soluções das provas de 2015, conforme apresentado no gráfico 3, tem-se que as principais dificuldades apresentadas pelos alunos também estão na interpretação e no cálculo do número de casos possíveis e casos favoráveis.

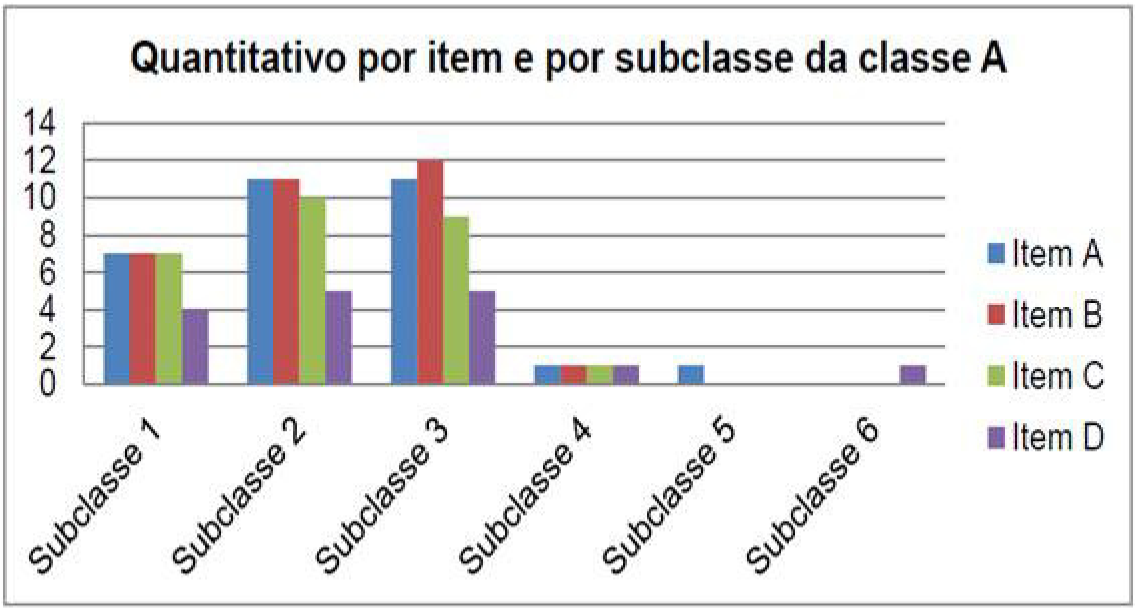


Figura 6.40: Gráfico do quantitativo de alunos por item e por subclasse da classe A / OBMEP 2016

A partir da análise realizada, observa-se que a compreensão dos alunos sobre a definição clássica de probabilidade, está muito distante daquilo que julgamos ser o ideal, desta forma, Brito (2015), afirma que:

> [...]o entendimento do que significa calcular a probabilidade de um evento está muito longe do que se espera, pois os alunos não conseguem expressar ideias básicas dos assuntos que já foram, pelo menos, apresentados pelo professor a esses estudantes. (BRITO, 2015, p. 38).

Capítulo 7

Considerações Finais

Ao longo da realização deste trabalho, procurou-se apresentar um estudo acerca das dificuldades demonstradas pelos alunos do Ensino Médio em resolver situações-problema que abordam o conteúdo de Probabilidade, de forma que foi realizada uma análise e classificação de erros das provas da segunda fase da OBMEP 2015 e 2016, no estado do Maranhão.

A fim de responder aos objetivos específicos desta pesquisa, apresentou-se um breve histórico sobre a origem e evolução da Teoria das Probabilidades e sobre o ensino da probabilidade, através de análise de pesquisas voltadas ao estudo deste conteúdo, de documentos oficiais e do tratamento que os livros didáticos, inseridos no PNLD, dão ao estudo da probabilidade.

Tal esboço ressalta que, ainda no contexto atual, os livros didáticos, bem como o processo de ensino dos docentes continuam, de certo modo, arraigados ao estudo da Probabilidade voltado aos jogos de azar e à resolução mecânica de problemas. No entanto, em especial, no âmbito acadêmico, já existem tentativas de mudanças dessa realidade, constatadas a partir dos trabalhos analisados, os quais demarcam novas abordagens ao estudo da probabilidade.

Com base no método de análise de erros da professora Helena Noronha Cury (2009), pôde-se constatar que os erros cometidos nos registros escritos dos alunos, aqui retratados por meio das provas da segunda fase da OBMEP (2015 e 2016), devem ser encarados de forma positiva, pois são eles que podem revelar as dificuldades que os alunos possuem em determinados conteúdos, ou seja, tanto o professor quanto o aluno devem encarar o erro como um instrumento de reflexão do conteúdo em si, retirando do erro a sua significação negativa e tornando-o um meio de alcance ao acerto.

De tal modo que, em relação aos interesses da utilização de tal método, depreendeu-se dos trabalhos de Cury, que as produções escritas podem ser analisadas a fim de investigar as dificuldades na aprendizagem de um determinado conteúdo, na remediação dos erros, através do emprego de alguma estratégia de ensino que retome os conteúdos que os alunos apresentaram maiores dificuldades, ou ainda, para que sejam realizadas descobertas sobre o conteúdo, juntamente com os alunos.

Tal método fora fundamental para a efetiva realização das análises constantes nesta pesquisa, de forma que foram apontados e classificados os erros cometidos nas questões de Probabilidade nas duas provas e identificadas as principais dificuldades apresentadas pelos indivíduos envolvidos neste trabalho.

Foi realizada uma leitura flutuante das soluções apresentadas pelos alunos às duas questões selecionadas, avaliando as respostas e separando-as em totalmente corretas, parcialmente corretas, incorretas ou não respondeu, contabilizando cada tipo de erro. Essa classificação fora realizada como forma de referendar o interesse pelas respostas parcialmente corretas e, principalmente, incorretas, as quais garantiram o exercício com o método da análise de erros.

De posse dos erros identificados na leitura, realizou-se a unitarização e categorização dos erros. Desta forma, foram criadas as classes A, B e C. Na classe A, foram inclusos os alunos que tentaram solucionar a questão utilizando a definição clássica de probabilidade, na classe B, alunos que tentaram solucionar a questão utilizando regra de três simples e na classe C, os alunos que não se encaixaram em nenhuma das duas classes anteriores, já que não houve explicação sobre o raciocínio adotado pelo aluno, não sendo possível determinar a abordagem da solução ou o porquê de não haver menção à definição clássica de probabilidade ou, ainda, devido à impossibilidade de se compreender a resposta dada pelo aluno à questão.

Para a classe A, julgou-se necessário a criação de subclasses, pois foram identificados seis tipos principais de erros dos alunos que tentaram utilizar a definição clássica de probabilidade. Tais erros foram: erro de interpretação na leitura do enunciado; erro na definição dos casos favoráveis; erro na definição do espaço amostral; erro no uso de alguma definição auxiliar à solução; erro na redação da solução; erro em operações aritméticas.

Com base no estudo dessa classe, obteve-se, também, como resultados salutares a novas formas de se repensar o processo de ensino e aprendizagem da Probabilidade, as constatações: do ano de 2015 para o ano de 2016, observou-se um retrocesso quanto ao uso de conceitos auxiliares e de operações aritméticas; já quanto à aplicação da definição clássica de probabilidade, não houve progresso de 2015 para 2016. Dessa maneira, inferiu-se que os erros apontados são resultados de uma soma de fatores, os quais estão relacionados tanto aos conhecimentos matemáticos prévios e básicos, quanto ao conteúdo específico: Probabilidade.

Os resultados obtidos, após as análises, indicaram, também, que a maioria dos alunos que compõem a amostra analisada nesta pesquisa, compreende a definição clássica de probabilidade, apresentando dificuldade em aplicá-la na resolução de situações-problema, porém, julgou-se que o quantitativo dos alunos que demonstraram não possuírem conhecimento do conteúdo, é significativo mediante o tamanho da amostra.

Os alunos que demonstraram compreender a definição clássica de probabilidade, em sua maioria, possuem dificuldade em determinar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis. Tais dificuldades podem ser dadas por falhas na construção de tais definições e, além disso, pela má interpretação do enunciado da questão e dos itens que levou alguns alunos a cometerem erros em suas respostas.

Além das dificuldades que os alunos demonstraram em relação à probabilidade, identificou-se que eles possuem muita dificuldade em organizar suas ideias e apresentar de forma escrita suas soluções, pois, durante as análises, em algumas respostas não foi possível identificar o raciocínio utilizado pelo aluno, devido a sua redação.

Desse modo, outro dado importante, inferido a partir dessa análise, é o de que a área do saber matemático, de modo geral, deve trilhar um caminho de ensino interdisciplinar, ou seja, compartilhar com outras áreas do saber a construção de sua base disciplinar, a fim de sanar alguns problemas, como por exemplo, as más interpretações das questões matemáticas, que são geradas, muitas vezes, por dificuldades na área do saber linguístico. Assim, esta pesquisa ratifica também a importância de se repensar o ensino da probabilidade, a partir de um processo dialógico e não isolado, tanto dos outros assuntos matemáticos, quanto dos conhecimentos advindos de outros campos do saber.

Ademais, pontua-se aqui que existem problemas relacionados ao processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de probabilidade, pois em geral, os erros se deram por falha cometida na aplicação da definição ou por total desconhecimento da mesma, e não por falta de pré-requisitos, pois um número desprezível de alunos cometeu erros em operações aritméticas ou em aplicação de alguma definição auxiliar.

Tais resultados apontados exigem uma reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem da Probabilidade, de forma que tais dificuldades identificadas, através dos erros cometidos pelos alunos, revelam que ainda há muito a melhorar no ensino deste conteúdo. Professores devem buscar metodologias e recursos diversificados, superando as barreiras do tradicionalismo. Os livros, por sua vez, devem buscar apresentar meios de auxiliar os alunos a construir seu conhecimento de forma mais significativa, rompendo com o estudo de probabilidade voltado apenas à resolução excessiva de exercícios repetitivos, permitindo que, em meio a situações adversas, tal conhecimento possa ser aplicado.

Além disso, acredita-se que a metodologia aplicada nesta pesquisa, pode ser usada no dia a dia das salas de aula pelos professores, pois permite tomada de decisões mais precisas, permitindo ao professor conhecer a real dificuldade dos alunos.

Desta forma, considera-se que os resultados obtidos sejam importantes para que os professores de Matemática do ensino básico tenham uma preocupação maior no que tange o processo de ensino e aprendizagem da Probabilidade, principalmente na construção da definição clássica, pois de acordo com o que fora apontado, as falhas cometidas na construção desta definição, levam os alunos a terem dificuldades em determinar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis.

O presente trabalho, desta maneira, contribui para o estudo da Teoria da Probabilidade no âmbito acadêmico e profissional, teórico e prático. Pois teve como norte o processo de ensino e aprendizagem, ou seja, sinalizou procedimentos metodológicos voltados à prática docente, levando em consideração o modo de aplicação dos discentes.

O estudo pautado na análise de erros, baseado nas provas da OBMEP mostrou o quanto é importante repensar a teoria com base nas suas aplicações, ou seja, com base no seu uso e na sua prática.

A abordagem desta pesquisa, em suma, comprova e demarca que é necessária maior preocupação com o processo de ensino e aprendizagem da Probabilidade, principalmente no que trata da construção da definição clássica, de forma que o aluno necessita compreender o que de fato são casos possíveis e casos favoráveis e, além disso, saber calcular o número desses casos. Em relação aos livros didáticos, devem-se buscar novas abordagens, indo além dos jogos de azar e da apresentação excessiva de exercícios, conforme o apresentado na análise dos livros que participaram deste estudo.

Compreendeu-se, com este trabalho, que a OBMEP é, atualmente, uma ferramenta indispensável para o incentivo e promoção do ensino e aprendizagem da Matemática, e deve ser cada vez mais utilizada como objeto de estudo, conforme utilizada nesta pesquisa. Seja na primeira etapa com suas questões objetivas ou na segunda etapa com suas questões subjetivas. Além disso, aliar a metodologia de análise de erros a uma prova como a OBMEP é buscar compreender o funcionamento do processo de ensino e aprendizagem da Matemática em nossas escolas da rede pública de ensino, permitindo, através dos erros apontados, buscar formas e métodos de corrigi-los, e isto deve ser realizado paralelamente ao ensino, não permitindo que as dificuldades apresentadas se tornem itransponíveis.

Logo, considera-se que o objetivo geral foi alcançado através da análise das resoluções apresentadas pelos alunos do ensino médio do estado do Maranhão às questões de probabilidade constantes nas provas da OBMEP de 2015 e 2016, através da aplicação da metodologia de análise de erros de Cury(2009), de forma que os registro realizados permitiram identificar os principais erros cometidos pelo alunos nestas questões, além de ter permitido apontar as principais dificuldades que eles possuem. E em relação aos objetivos específicos, que serviram de suporte para que fosse alcançado o objetivo central desta pesquisa, foram alcançados através da revisão bibliográfica, que abarcou o surgimento e desenvolvimento da Teoria das Probabilidades, seu ensino e a metodologia aplicada nesta pesquisa.

Portanto, a presente pesquisa pretendeu estabelecer-se como uma possível ferramenta para o ensino da matemática e, em especial, para o ensino da probabilidade. Atendendo, assim, às pretensões do programa no qual está inserida.

Referências Bibliográficas

[1] ARAUJO, J. H. F de. Probabilidade: Aplicação ao estudo de genética. 2016. 53 f. Dissertação (Mestre em Matemática) - Universidade Federal do Piauí, Parnaíba, 2016.

[2] SEDUC-MA. Diretrizes curriculares. Secretaria de Estado da Educação do Maranhão, SEDUC, 3. Ed. São Luis, 2014. Disponível em $http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/CURRICULOS/MaranhaoDiretrizesCurricularesdaRedeEstadualdeEnsinoFundamentaleMedio.pdf$. Acesso em 06 mar. 2017.

[3] BORTOLOTI, K. F. Metodologia da Pesquisa. Rio de Janeiro: Editora SESES, 2015.

[4] BARDIN, Laurence. Análise de Conteúdo. Lisboa: Edições 70, 1977. 225 p.

[5] BRAISL. Ministério da Educação. Secretaria de Edução Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio). Brasília: MEC, 2002.

[6] BRAISL. Ministério da Educação. Secretaria de Edução Média e Tecnológica. Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Brasília: MEC, 2006.

[7] BRAISL. Ministério da Educação. Secretaria de Edução Média e Tecnológica. Matriz de Referência do ENEM. Brasília: MEC, 2017.

[8] BRAISL. Ministério da Educação. Secretaria de Edução Média e Tecnológica. Guia de livros didáticos: PNLD 2015. Brasília: MEC, 2014.

[9] BRITO, B. S. Ensino de probabilidade: proposta de ensino através de experimentação. 2015. 96 f. Dissertação (Mestre em Matemática) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2015.

[10] CORREA, V. B. Ensino-Aprendizagem de probabilidade no ensino médio: uma experiência usando jogos de loteria. 2016. 71 f. Dissertação (Mestre em Matemática) - Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2016.

[11] COSTA, E. R. S. Uma proposta do ensino de análise combinatória para alunos do ensino médio. 2013. 107 f. Dissertação (Mestre em Matemática) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2013.

[12] COSTA, G. G. de C. Análise da prova da primeira fase da OBMEP como subsídio para orientar a prática docente. 2015. 201 f. Dissertação (Mestre em Matemática) - Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

[13] CURY, H. N. et. al. Análise de erro como metodologia de investigação. Disponível em: $http : //www.apm.pt/files/142359_CO_Cury_Bisognin_Bisognin_4a36c5d50a09a.pdf$. Acesso em: 13 jan. 2017.

[14] CURY, H. N. Análise de Erros. Disponível em: http://www.inifra.br/professores/13935/Palestra-Enem-2010.pdf. Acesso em: 13 jan. 2017.

[15] CURY, H. N.; VIALI, L. Análise de erros em probabilidade: uma pesquisa com professores em formação continuada. Revista Educação Matemática. n. 2, v. 11, p. 373-391. Out. 2009.

[16] CONTESSA, N. M. et. al. Dificuldades encontradas pelos alunos em resolver questões de probabilidade. Disponível em: $https : //eventos.unipampa.edu.br/eremat/files/2014/12/RE_Contessa_028439300-22.pdf$. Acesso em: 15 jan. 2017.

[17] DANTE, L. R. Matemática: Contexto e aplicações – Volume 2. São Paulo: Ática, 2013.

[18] FIDELES, E. C. A OBMEP sob uma perspectiva de resolução de problemas. 2014. 57 f. Dissertação (Mestre em Matemática) – Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

[19] GADELHA, A. Uma pequena história da probabilidade: Teoria de Probabilidade I. Março de 2004. 16f. Notas de aula.

[20] GONÇALVES, F. A. Desenvolvimento de um novo objeto de aprendizagem para o ensino de probabilidade no Ensino Médio. 2014. 48 f. Dissertação (Mestre em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014.

[21] GUIMARÃES, M. G. Motivando para aprender Matemática: uma experiência com o ensino de probabilidade. 2014. 63 f. Dissertação (Mestre em Matemática) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2014.

[22] JUNIOR, S. L. D. Problemas contra-intuitivos como motivadores do estudo de conceitos de probabilidade no ensino médio. 2016. 96 f. Dissertação (Mestre em Matemática) – Universidade de São Paulo, 2016.

[23] LOPES, J. M.; TEODORO, J. V.; REZENDE, J. de C. Uma proposta de estudo de probabilidade para o ensino médio. Zetetiké, Ilha Solteira, v. 19, n. 36, p. 75 - 93 , jul./dez. 2011.

[24] MOURA, C. S. R. de. Análise do processo de conceitualização de probabilidade por estudantes do Ensino Médio a partir da Teoria dos Campos Conceituais. 2014. 67 f. Dissertação (Mestre em Matemática) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, 2014.

[25] MONÇÂO, F. F. Uma leitura dos erros cometidos por estudantes na resolução de questões do cálculo diferencial e integral. 2015. 76 f. Dissertação (Mestre em Matemática) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2015

[26] NASCIMENTO, J. do.; MORELATTi, M. R. M. A análise de erros em Matemática: elementos para a formação docente. Disponível em: $http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/dezembro2013/matematica_{a}rtigos/ar$ Acesso em: 17 fev. 2017.

[27] NEVES, F. C. de. Ensino de Probabilidade: Tipos de eventos . 2015. 98 f. Dissertação (Mestre em Matemática) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2015.

[28] OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS (OBMEP). Regulamento. Rio de Janeiro, 2017. Disponível em: http://www.OBMEP.org.br/regulamento.html. Acesso em: 01 abr. 2017.

[29] PAIVA, M. Matemática: Paiva – Volume 2. São Paulo: Moderna, 2013.

[30] PAULO, F. F. de. Uma análise histórica do desenvolvimento da probabilidade e a utilização de materiais concretos para seu ensino. 2013. 75 f. Dissertação (Mestre em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

[31] POLYA, G. A arte de resolver problemas: um novo aspecto de método matemático; tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo – 2. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1995.

[32] SÁ, M. A. A. F. de. Análise e resolução de problemas clássicos de Probabilidade para o ensino médio. 2015. 114 f. Dissertação (Mestre em Matemática) – Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2015.

[33] SANTOS, M. A. dos. Aprendendo por meio da análise de erros dos nossos alunos: uma investigação sobre a resolução de problemas de matemática financeira. 2016. 40 f. Dissertação (Mestre em Matemática) – Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2016.

[34] SILVA, A. L. B. da. Probabilidade no ensino médio e as suas aplicações no cotidiano. 2016. 53 f. Dissertação (Mestre em Matemática) – Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2016.

[35] SILVA, Edna Lúcia da; MENEZES, Estera Muszkat. Metodologia da Pesquisa e Elaboração de Dissertação. 3. ed. rev. atual. Laboratório de Ensino a Distância da UFSC. Florianópolis, 2001.

[36] SILVA, F. M. N. da. Jogos no processo de ensino-aprendizagem em probabilidade. 2013. 71 f. Dissertação (Mestre em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

[37] SOUZA, N. T. de B. Análise de erros em funções matemáticas com alunos do 1º Ano do Ensino Médio de Escolas Públicas 2009. 15 f. Artigo (Licenciatura em Matemática) – Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2009.

[38] SOUZA, R. A. M. de. A mediação pedagógica da professora: o erro na sala de aula. 2006. 344 f. Tese (Doutor em Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006.

[39] TAO, T. Como resolver problemas matemáticos: Uma perspectiva pessoal. Tradução de Paulo Ventura. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[40] VIALI, L. Algumas considerações sobre a origem da Teoria das Probabilidades. Revista Brasileira de História da Matemática. n. 16, v. 8, p. 143-153. Out. 2008.