UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

MAKE BRUNO SILVA BENIGNO

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM ANÁLISE COMBINATÓRIA: uma abordagem no Ensino Básico

São Luís
2017

MAKE BRUNO SILVA BENIGNO

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM ANÁLISE COMBINATÓRIA: uma abordagem no Ensino Básico

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Valdiane Sales Araújo

São Luís

2017

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Benigno, Make Bruno Silva.
Resolução de Problemas em Análise Combinatória / Make Bruno Silva Benigno. - 2017.
54 p.

Orientador(a): Valdiane Sales Araújo.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2017.

1. Análise Combinatória. 2. Ensino. 3. Matemática.
I. Araújo, Valdiane Sales. II. Título.

MAKE BRUNO SILVA BENIGNO

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM ANÁLISE COMBINATÓRIA: uma abordagem no Ensino Básico

Dissertação apresentada ao PROFMAT/ Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 06/03/2017

BANCA EXAMINADORA

Profa. Valdiane Sales Araújo (Orientadora)
Doutora em Matemática
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Sandra Imaculada Moreira Neto
Doutora em Matemática
Universidade Estadual do Maranhão

Prof. Renata Limeira Carvalho
Doutora em Matemática
Universidade Federal do Maranhão

Aos meus pais; aos meus irmãos e aos meus professores e amigos que me apoiaram nesta jornada.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente ao Supremo Deus Criador por ter me guiado nessa caminhada e por ter sempre me iluminado em todos os momentos, principalmente nos mais difíceis.

À minha orientadora Profa. Dra. Valdiane Sales Araújo pela singular orientação e dedicação neste trabalho.

Aos professores do PROFMAT pela oportunidade que me deram de adquirir mais conhecimentos em minha profissão.

Ao PROFMAT, um programa de suma importância na qualificação de docentes do nosso País.

À minha família por sempre acreditar na capacidade do meu trabalho e nunca me deixar desistir desse sonho, que sempre me mantiveram na linha da busca do conhecimento, onde acreditavam que o caminho da Educação seria o melhor e o mais honesto para uma vida mais digna.

Aos meus colegas de turma, os quais passamos por grandes dificuldades, mas que seguem com insistência e perseverança em busca de mais conhecimentos para poder retransmiti-los aos alunos.

"Com a sabedoria se edifica a casa, e com o entendimento ela se estabelece; e pelo conhecimento se encherão as câmaras com todos os bens preciosos e agradáveis. O homem sábio é forte e o homem de conhecimento consolida a força".

Provérbios 24: 3-5

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar a importância da análise combinatória, tanto no Ensino Médio como no Ensino Fundamental. Listaremos vários exemplos de problemas envolvendo análise combinatória e veremos como esse assunto é cobrado no ENEM e em olimpíadas de matemática. Além disso, apresentamos algumas das principais dificuldades dos alunos em combinatória, e como o professor poderá ensinar por meio da resolução de problemas, além disso apresentaremos a situação da educação matemática no Brasil e seus impactos no ensino básico.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Matemática. Ensino. Contagem.

ABSTRACT

This work will present the importance of combinatorial analysis, both in middle school and elementary school. We will list several exemples of problems involving combinatorial analysis and we will see how the subject and matter is charged in Enem and mathematics Olympics. Basic, we present some of the main difficulties of some students and combinatoy, shows how the teacher can teach through the solution of the problems, basic that we will present the situation of mathematical education in Brazil and its packaging of basic education.

Keyword: Combinatorial Analysis, Mathematics, Teaching, Counting.

SUMÁRIO

Lista de Figuras

1 Introdução

Nos últimos anos houve um aprimoramento muito significativo no ensino da análise combinatória e probabilidades. Muitas tecnologias dependem do estudo dessas disciplinas como a ciência da computação, engenharia e a estatística. Segundo Vazquez e Noguti [17]:

> A Análise Combinatória é um conteúdo matemático que apresenta grande dificuldade em relação à formulação, interpretação dos seus enunciados. É um ramo da matemática que permite que se escolha, arrume e conte o número de elementos de determinado conjunto, sem que haja necessidade de enumerá-los.
> Cada um desses problemas é um desafio para os alunos, pois exige flexibilidade de pensamento: é necessário parar, concentrar, discutir e pensar para poder resolvê-los. As operações combinatórias são essenciais para o desenvolvimento cognitivo, por isso seria de extrema importância que o aluno tivesse contato com esse tópico desde os primeiros anos da escola básica, para familiarizar-se com problemas de contagem, descrevendo os casos possíveis e contando-os através de uma representação por ele escolhida, sem regras em princípio, de modo que ele adquirisse um método sistemático e gradativo para a resolução dos problemas, visando uma posterior formalização no ensino médio.(VAZQUES,NOGUTI,2004,p.5 e 6)

No Brasil, o ensino e aprendizagem de matemática está muito distante do ideal, como mostram as avaliações oficiais nacionais e internacionais de Matemática como (PROVA BRASIL e PISA). Mas aqui trataremos apenas do ensino de análise combinatória, pois, além de ser um tema clássico na Matemática tem sua importância e utilidade estendidas a outras áreas do conhecimento. Daí a necessidade de investigar aspectos como: as dificuldades no entendimento e uso de ferramentas como o Princípio Fundamental da Contagem; a dificuldade em identificar a estratégia adequada para resolver determinados problemas que envolvem combinatória; a falta de habilidade e discernimento dos alunos ao tentarem redigir soluções de problemas que envolvem o pensamento combinatório.

O Professor Augusto Cesár Morgado (1944-2006), uma das referências em combinatória no Brasil, afirmava que combinatória é a parte mais difícil de ensinar aos alunos do Ensino Médio, pois em um determinado problema o aluno poderia recorrer a uma fórmula e uma interpretação errada. Segundo ele, não só os alunos do Ensino Médio como também os professores do Ensino Básico têm dificuldade quando o assunto é combinatória.

Este trabalho trata da importância de se trabalhar conceitos de combinatória através de problemas, não somente no Ensino Médio, mas também no Ensino Fundamental e mostra como é abordado esse assunto no ENEM e olimpíadas de matemática como OBM e OBMEP.

Procurou-se evidenciar a importância da resolução de problemas envolvendo combinatória; explicitar que é possível o aluno aprender através da solução de variados problemas começando por problemas de contagem bem simples e evoluindo o grau; de dificuldade, mostrar que a resolução de problemas utilizando fórmulas prontas não estimula o aprendizado, ao contrário, faz com que o aluno tenha mais dificuldades em interpretar e resolver problemas de combinatória.

O Princípio Fundamental da Adição e o Princípio Fundamental da Contagem podem ser introduzidos no Ensino Fundamental quando o aluno já souber somar e multiplicar. Nesta fase o professor pode lançar mão de artifícios como árvore de possibilidades, pares ordenados e outras técnicas que são de domínio do aluno nessa fase do aprendizado. Os conceitos devem ser ampliados no Ensino Médio, à medida que o aluno desenvolve a capacidade de generalizar conceitos utilizando fórmulas e entender que as fórmulas são apenas instrumentos que ajudam a resolver os problemas mais complexos, mas não substituem o raciocínio. Este trabalho está organizado em quatro capítulos. No segundo capítulo exploraremos considerações à cerca do ensino e aprendizagem da matemática no Brasil ao longo dos anos e na atualidade. No quarto capítulo mostraremos que análise combinatória pode e deve ser trabalhado já no Ensino Fundamental e no último capítulo faremos uma análise das principais dificuldades enfrentadas pelos alunos ao resolverem problemas envolvendo combinatória e por fim, apresentaremos como esse assunto é abordado no ENEM e olimpíadas de matemática como OBM e OBMEP.

2 Situação do Ensino e Aprendizagem no Brasil

Segundo Parâmetros Curriculares Nacionais [3] o ensino de matemática deve ser necessário à formação do cidadão, pois a necessidade de qualificação aumenta à proporção que a população se torna maior, ou seja, as habilidades adquiridas pelos alunos devem satisfazer as exigências do mercado de trabalho para que a sociedade tenha mão de obra qualificada. Sabemos da importância da matemática na ciência, como as novas tecnologias utilizam a matemática. O ensino da matemática deve está relacionado com problemas do cotidiano para que o aluno entenda a importância da matemática.

A educação no Brasil tem muitos resquícios da sua história. Tudo que vemos hoje na educação tem muito dos costumes adquiridos ao longo dos anos. Segundo Lima [10] o Brasil ainda é um país colônia em vários quesitos, e na educação não é diferente. Devido as mudanças que ocorrem nos países de primeiro mundo, e que são adotadas aqui no Brasil sem questionamentos e sem estudos, o autor ver o Brasil como um país que não questiona nada, pois enquanto os outros países discutem essas mudanças e tem muitas críticas e soluções para determinados temas, nosso país as aceita sem questionar os impactos no país. Um dos exemplos é a onda da matemática moderna que se alastrou nos anos 60 e 70, que tinha como base a matemática abstrata sem considerar o concreto e a contextualização dos problemas.

Segundo Lima [10] o Brasil teve duas fases do desenvolvimento matemático: Desde 1500 até a vinda da corte portuguesa para o Rio de Janeiro, em 1808, era proibida a impressão de livros ou jornais e extremamente difícil qualquer contato com outros países da Europa. Não havia universidades no Brasil, nem sequer uma escola de nível superior. Com a vinda de D.joão VI foram criadas a Imprensa Régia, a Biblioteca Pública e em 1810, a academia Real Militar. Nesta havia uma certa formação de matemática para os oficiais e engenheiros.

Somente em 1874, teve uma separação do curso Civil do Militar e foi criada a Escola Politécnica, a primeira escola de engenharia do Brasil. Até 1939, o Brasil já contava com as Faculdades de Ciências e Letras, primeiro em São Paulo, depois no Rio de Janeiro foi criada a escola Politécnica e em Minas Gerais foi criada a Escola de Minas de Ouro Preto. As duas fases foram bem distintas, uma sem ter acesso nenhum ao conhecimento matemático que é desde a descoberta do Brasil até a primeira escola de engenharia de 1810, outra já obteve várias conquistas como o advento de várias escolas politécnicas e o surgimento de vários matemáticos importantes como Joaquim de Sousa Gomes. A seguir, trataremos como a educação em matemática é abordada e seus principais desafios tanto no nível médio quanto fundamental.

2.1 Ensino Fundamental

O aluno passa a maior parte do ensino básico no Ensino Fundamental, com isso, é de se esperar que ele tenha noção das principais ferramentas da matemática. Ainda de acordo com o autor, a matemática se ocupa de dois tipos de objetos: Números e Espaço. Para ele, o aluno do Ensino Fundamental deve ter as principais noções desses elementos.

O autor ainda aborda que muitas mudanças ocorreram no ensino ao longo dos anos. Mas o tipo de aula, a forma como o conteúdo é abordado e a formação dos professores tem sido um dos pontos negativos no aprendizado dos alunos. Segundo Lima [10], as professoras que ensinam nos primeiros anos escolares não tem a formação adequada e a maioria sem formação até do ensino médio, se preocupa com muitas disciplinas para ministrar e muitas abordam a matemática da forma inadequada. Mas para que tenha uma mudança significativa, várias variáveis devem ser consideradas como estruturas das escolas, plano de governo para melhoria de salários, visto que os professores com boa formação estão em escolas particulares ou com renomes no setor público. Assim, a maioria das escolas públicas que não oferece o mínimo para que atraíam esses professores ficam as vezes sem aula, ou sem mão de obra qualificada na área exigida.

Já os professores de 5° à 8° séries, ou conhecidos hoje como sexto e nono ano, tem formação em matemática, mas sua formação foi precária, e os assuntos que eles trabalham no Ensino Fundamental não foram vistos na universidade por não ser assuntos de nível universitário. Lima [10] ainda enfatiza que, quando esses professores ingressam no trabalho eles ficam subordinados a ministrar suas aulas por livros didáticos que não apresentam problemas interessantes para serem trabalhados em sala de aula, apresentam conceitos errados, problemas desprovidos de contextualização e sem atrativos para os alunos.

Para Lima [10], da 5° à 8° séries ou sexto e nono anos, os alunos deveriam está familiarizados com o uso de letras para representar variáveis ou incógnitas e ter habilidades com técnicas de demonstração.

2.2 Ensino Médio

No Ensino Médio diferentemente do Fundamental, temos um público com características distintas, os anseios são outros, as preocupações aumentam, e a exigência por parte da família começa ser cobrada, pois já é exigido que contribua de alguma forma na base financeira da família aqueles que não têm uma renda satisfatória.

De acordo com o autor, as escolas têm o mesmo currículo escolar para dar o mesmo ensino com alunos de diferentes aptidões. O currículo de matemática do Ensino Médio é baseado nos vestibulares, com isso o professor fica mais preocupado em dar o conteúdo do vestibular do que atender as necessidades primordiais dos alunos no momento. Pois como já foi dito, no Ensino fundamental eles geralmente não tiveram a base necessária. Assim a matemática para esses alunos fica sem sentido, pois eles precisam da base elementar da matemática.

Muitos alunos já tem uma certa ideia do curso que pretendem fazer, da área que querem atuar, e muitos desses alunos não percebem a relevância da matemática nas aplicações, acabam menosprezando a matemática e as demais ciências que dela dependem. De certa forma estamos colhendo os frutos do que foi passado nos anos anteriores, como a má formação dos professores, a falta de aplicação da matemática que não estimula a criatividade, o pensamento e o desvirtuamento da matemática em relação as outras áreas.

Lima [10] afirma que alguns livros dedicam capítulos inteiros ao uso dos logaritmos como instrumento de cálculo ou a inumeráveis fórmulas trigonométricas, quando poderiam estar explorando as múltiplas utilizações da função exponencial e das funções trigonométricas em problemas de economia, saúde, e política.

A mesma situação acontece em análise combinatória, muitas vezes é dado as fórmulas sem ter explicado o significado de arranjo, combinação e permutação.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental[2]:

> Integrarão este bloco estudos relativos a noções de estatística, de probabilidades e de combinatória. Evidentemente, o que se pretende não é o desenvolvimento de um trabalho baseado na definição de termos ou fórmulas envolvendo tais assuntos.
> Relativamente à combinatória, o objetivo é levar o aluno a lidar com

> situações-problemas que envolva combinações, arranjos,permutações e especialmente o princípio multiplicativo da contagem.(PCN,1997,p.40)

Análise combinatória trata de números envolvendo possibilidades, contagem e agrupamentos, para que o aluno possa ter domínio desses processos de contagem, é necessário ter familiaridade com os números. Se tratando de análise combinatória, é possível trabalhar os processos de contagem que envolvem os princípios Aditivo e Multiplicativo.

Em estudo realizado por Borba [1], com 718 estudantes em idade escolar regular e jovens e adultos (EJA), com o objetivo de verificar o desempenho desses estudantes, com distintas experiências escolares, ao resolverem as mesmas situações combinatórias (produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação) observaram que: mesmo antes do estudo formal da Combinatória, estudantes são capazes de compreender problemas combinatórios, mas a maioria não é capaz de sistematicamente listar todas as possibilidades requeridas ou de utilizar procedimentos de contagem indireta de todos os casos possíveis e válidos.

O estudo mostrou um efeito da escolarização no desempenho, tanto no ensino regular (entre crianças e adolescentes), quanto na Educação de Jovens e Adultos. O desempenho foi melhor entre os que possuíam maior tempo de estudo formal. Entretanto, esperava-se um desempenho melhor entre os estudantes do Ensino Médio que já haviam estudado Combinatória na escola, tanto os do ensino regular quanto os da EJA .

O estudo realizado evidenciou ainda que, um maior período de escolarização possibilita um melhor desempenho em Combinatória, mas o estudo formal em Combinatória não garante um desempenho significativamente superior. Segundo as autoras, o pensamento combinatório se faz presente em situações de combinação, análise e categorização de elementos, sendo, assim, uma forma de pensamento mais elaborada. Elas defendem, no estudo realizado, que embora seja uma forma de pensamento mais complexa, o raciocínio combinatório pode iniciar-se na infância e desenvolver-se por um longo período de tempo e argumentam que o estudo da Combinatória pode ser um meio de avanço no raciocínio lógico, em geral, e auxiliar no desenvolvimento matemático de crianças, adolescentes, jovens e adultos.

Defende-se, portanto, a necessidade de se considerar os quatro tipos de problemas no ensino de Combinatória desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até ao final do Ensino Médio, tanto na escolarização regular de crianças e adolescentes quanto na Educação de Jovens e Adultos.

2.3 Resolução de Problemas

A aprendizagem através da Resolução de Problemas é objeto de estudo de vários matemáticos. E cresce cada dia a ideia de que a forma de aprender um conteúdo, não só de matemática, mas de outras áreas da ciência, pode ser dado através desse método.

Para Dante[5], os objetivos da resolução de problemas são:

- Fazer o aluno pensar produtivamente
- Desenvolver o raciocínio do aluno;
- Ensinar o aluno a enfrentar situações novas;
- Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da matemática;
- Tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras;
- Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas;
- Dar uma boa base matemática às pessoas.

Para Polya [14] resolver problemas é como aprender a nadar, o aluno exercita todas as suas habilidades e talentos em um determinado problema, assim como o nadador treina seus músculos na natação. Afirma ainda que o docente deve participar do processo de aprendizagem do aluno mas não deve dá as soluções prontas. O conteúdo deve ser dado de maneira que o aluno entenda o assunto e se sinta motivado, saiba diferenciar os elementos, a ordem e como deve ser interpretada a questão. Depois o aluno pode traçar um plano colocá-lo em prática e em seguida comprovar os resultados. Ainda segundo o autor, ao procurarmos resolver um problema, podemos variar continuamente a nossa maneira de encarar o problema. Vários questionamentos surgirão e para agrupar convenientemente essas indagações, o autor destaca as quatro fases listadas a seguir:

- **Compreender o problema**:

> É uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja. Estas coisas tolas e tristes fazem-se muitas vezes, mas cabe ao professor evitar que elas ocorram nas suas aulas. O aluno precisa

> compreender o problema, mas não só isto: deve também desejar resolvê-lo. Se lhe faltar compreensão e interesse, isto nem sempre será culpa sua. O problema deve ser bem escolhido, nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante, e um certo tempo deve ser dedicado à sua apresentação natural e interessante.
> Primeiro que tudo, o enunciado verbal do problema precisa ficar bem entendido. O aluno deve também estar em condições de identificar as partes principais do problema, a incógnita, os dados, a condicionante. Daí porque, raramente, pode o professor dispensar as indagações: *Qual é a incógnita ? Quais são os dados? Qual é a condicionante?*
> O estudante deve considerar as partes principais do problema, atenta e repetidamente, sob vários pontos de vista. Se houver uma figura relacionada ao problema, deverá traçar uma figura e nela indicar a incógnita e os dados. Se for necessário designar estes elementos, deverá adotar uma notação adequada,pois, dedicando alguma atenção à escolha dos signos apropriados, será obrigado a considerar os elementos para os quais esses signos têm de ser escolhidos.(POLYA,2006, p.5)

- **Estabelecer um plano**:

> Temos um plano quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita. O caminho que vai desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano, pode ser longo e tortuoso. Realmente, o principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano. Esta ideia pode surgir gradualmente ou, então, após tentativas infrutíferas e um período de hesitação, aparecer repentinamente, num lampejo, como uma "ideia brilhante". A melhor coisa que pode um professor fazer por seu aluno é propiciar-lhe, discretamente, uma ideia luminosa. As indagações e sugestões que passamos a discutir tendem a provocar tal ideia.
> Para sentir a posição do estudante, o professor deve pensar na sua própria experiência, nas dificuldades e sucessos que ele mesmo encontrou ao resolver problemas.
> Sabemos, naturalmente, que é difícil ter uma boa ideia se pouco conhecemos do assunto e que é impossível tê-la se dele nada soubermos. As boas ideias são baseadas na experiência passada e em conhecimentos previamente adquiridos. Para uma boa ideia, não basta a simples recordação, mas não podemos ter nenhuma ideia boa sem relembrar alguns fatos pertinentes.(POLYA,2006, p.7)

- **Executar o nosso plano**:

> Conceber um plano, a ideia da resolução, não é fácil. Para conseguir isto é preciso, além de conhecimentos anteriores, de bons hábitos mentais e de concentração no objetivo, mais uma coisa: boa sorte. Executar o plano é muito mais fácil; paciência é o de que mais se precisa.
> O plano proporciona apenas um roteiro geral. Precisamos ficar convictos de que os detalhes inserem-se nesse roteiro e, para isto, temos de examiná-los, um após outro, pacientemente, até que tudo

> fique perfeitamente claro e que não reste nenhum recanto obscuro no qual possa ocultar-se um erro.
> Se o aluno houver realmente concebido um plano, o professor terá então um período de relativa tranquilidade. O maior risco é o de que o estudante esqueça o seu plano, o que pode facilmente ocorrer se ele recebeu o plano de fora e o aceitou por influência do professor. Mas se ele próprio houver preparado o plano, mesmo com alguma ajuda, e concebido com satisfação a ideia final, não perderá facilmente essa ideia. De qualquer maneira, o professor deve insistir para que o aluno *verifique cada passo.*(POLYA,2006, p.10 e 11)

- **Retrospecto**:

> Até mesmo alunos razoavelmente bons, uma vez chegados à solução do problema e escrita a demonstração,fecham os livros e passam a outro assunto. Assim fazendo, eles perdem uma fase importante e instrutiva do trabalho da resolução. Se fizerem um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas. (POLYA,2006, p.12)

Polya ainda afirma que um bom professor precisa compreender e transmitir a seus alunos o conceito de que problema nenhum fica completamente esgotado. Sempre sobra alguma coisa para fazer. Com estudo e aprofundamento, podemos melhorar qualquer resolução e, seja como for, é sempre possível aperfeiçoar a nossa compreensão da resolução.

Neste momento, o estudante cumpriu o seu plano. Ele escreveu a resolução, verificando cada passo. Assim, tem boas razões para acreditar que resolveu de maneira correta o seu problema. Todavia, é sempre possível haver erros, principalmente se o argumento for longo e trabalhoso.Por isso tem a necessidade de verificações. Em particular, se tiver algum plano rápido e intuitivo para verificar, quer o resultado, quer o argumento, ele não deverá ser negligenciado.

3 Análise Combinatória no Ensino Fundamental

Na pré-escola a criança aprende a contar, embora não seja necessário frequentar a sala de aula para tal aprendizado, pois essa habilidade é desenvolvida pelo homem, independentemente de frequentar a escola, por necessidade. Essa é a primeira técnica matemática aprendida por uma criança, antes mesmo de virar uma necessidade. As operações aritméticas são aprendidas pelas crianças através da aplicação em problemas de contagem, sem que isso seja mencionado pelos livros ou mesmo pelo professor. A operação de adição, por exemplo, é introduzida como resultado de uma contagem. Como mostra o exemplo abaixo.

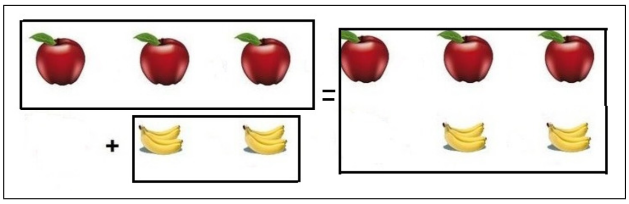


Figura 3.1: Exemplo Princípio Aditivo

A figura acima ilustra um dos principais princípios da combinatória: o Princípio Aditivo.

Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então a união destes dois conjuntos possui p+q elementos. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais [2] recomenda o ensino de contagem desde os anos iniciais do Ensino Fundamental com problemas envolvendo situações simples de contagem. Para o Ensino Médio os PCNs orientam que sejam trabalhados problemas que envolvam números maiores do que aqueles trabalhados nas séries iniciais. Isso levará os alunos a perceberem a necessidade de utilizar o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e sua importância. É preciso uma mudança gradativa na abordagem de problemas envolvendo o raciocínio combinatório, para isso faz-se necessário a valorização do pensamento e estratégias utilizadas pelo aluno ao tentar resolver tais problemas. A partir de operações aritméticas, desenhos, listagens, diagramas; o aluno, gradativamente, construirá procedimentos mais formais para resolução desses problemas.

3.1 Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Uma das primeiras ferramentas no estudo de análise combinatória é o princípio fundamental da contagem (PFC), no qual estuda todas as possibilidades de ordenação dos elementos de um determinado conjunto. Seu estudo é muito amplo dependendo do conjunto e os elementos considerados. Veremos que o PFC pode ser utilizado na solução de problemas envolvendo: arranjos, permutações, combinações. Essencialmente, o Princípio Fundamental da Contagem ou PFC, é dividido por dois princípios básicos: O Princípio Aditivo e o Princípio Multiplicativo.

Princípio Aditivo

Definição 1. Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.

Princípio Multiplicativo

Definição 2. O princípio multiplicativo da contagem diz que, se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é xy.

Para introduzir problemas de contagem no Ensino Fundamental o ideal seria começar fazendo problemas bem básicos utilizando a árvore de possibilidades. Assim o aluno perceberá que em determinados problemas vai precisar generalizar e partir diretamente para o Princípio Multiplicativo. Segue um exemplo básico envolvendo a árvore de possibilidades.

Exemplo 3.1. Aproveitando a liquidação de uma loja de roupas e calçados, João pretende comprar uma camisa, uma calça e um tênis. Se a loja dispõe somente de dois tipos de camisas, dois tipos de calças e dois tipos de tênis, de quantas maneiras João poderá fazer essa compra?

Solução 3.1. Na figura 3.2[1] Foi feito o diagrama da árvore de possibilidades e identificamos cada item com uma numeração, chamamos as camisas de 1 e 2, calças 1 e 2, e tênis 1 e 2, depois fez-se a combinação de todas as maneiras que João poderia comprar.

[1]Disponível em: *pibiduspsc.blogspot.com.br/2013/03/sequência − de − aulas − princípio.html* Acesso em: 13 de fevereiro de 2017.

Agora pelo Princípio Multiplicativo teríamos; duas possibilidade para camisa, duas para calças e duas para os tênis, assim: $2 \times 2 \times 2 = 8$. Como foi dito anteriormente por Polya [14], o professor deve deixar o aluno ser independente, deve exercitar suas habilidades, compreender o problema, e ter um plano, depois executar, e a seguir fazer um retrospecto. A utilidade dos pequenos problemas envolvendo contagem é que o aluno não terá dificuldades no início, pois são problemas simples que podem ser feitos através de um simples diagrama. $\square$

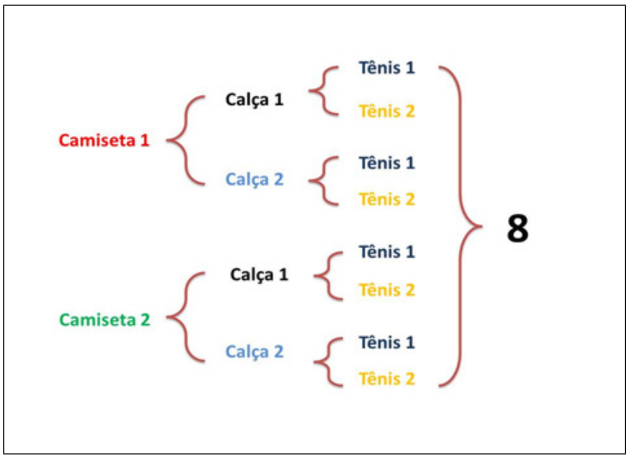


Figura 3.2: Árvore de possibilidades

A seguir apresentaremos alguns problemas simples que utilizam o Princípio Multiplicativo, ou o Princípio Fundamental da Contagem. O leitor poderá perceber que não há necessidade de conhecimentos avançados de matemática para se chegar à solução desses problemas. Portanto um aluno do Ensino Fundamental com noções básicas das quatro operações poderia resolvê-los.

Exemplo 3.2. (Obmep-2005) O campeonato 2005 é disputado por 22 times. Cada time enfrenta um dos outros duas vezes, uma vez em seu campo e outra no campo do adversário. Quantas partidas serão disputadas por cada time?

Solução 3.2. Tem-se 22 times, se pegarmos um time e fizermos por ele toda a análise da questão teremos que um time vai enfrentar todos os outros 21 times na sua casa. Tem-se 21 jogos, e os outros jogos serão na casa do adversário. Veja que a pergunta é "quantas partidas serão disputadas por cada time"e não quantos jogos serão realizados no torneio.

Então tem-se 21 jogos na casa do time e 21 jogos ele joga na casa do adversário. Tem-se: $21 + 21 = 42$ jogos.□

Exemplo 3.3. (Obmep-2007) Manuela quer pintar as quatro paredes de seu quarto usando as cores azul, rosa, verde e branco, cada parede de uma cor diferente. Ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para outra. De quantas maneiras diferentes ela pode pintar seu quarto?

Solução 3.3. Manuela pode começar pintando uma das 4 paredes de azul, depois disso sobram 2 escolhas de cor para a parede oposta (verde ou branco), por fim, ela poderá pintar a última parede com a cor que falta. O número de maneiras diferentes de efetuar esse procedimento é $4 \times 2 \times 2 = 16$. □

Exemplo 3.4. (Obmep-2008) Fábio tem cinco camisas: uma preta de mangas curtas, uma preta de mangas compridas, uma azul, uma cinza e uma branca, e quatro calças: uma preta, uma azul, uma verde e uma marrom. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir com uma camisa e uma calça de cores distintas?

Solução 3.4. São cinco possibilidades de escolha de camisas e quatro a de calças, logo, sem levar em conta as cores, há $5 \times 4 = 20$ modos de vestir. Destes, devemos descontar os casos em que se repetem as cores de calça e camisa que são apenas três: camisa preta de mangas compridas com calça preta, camisa preta de mangas curtas com calça preta e camisa azul com calça azul, logo, são $20 - 3 = 17$ maneiras diferentes de se vestir com uma camisa e uma calça de cores distintas. □

Na resolução de problemas combinatórios devemos sempre ter em mente as restrições, se uma determinada solução deve ou não começar por determinada ordem, pois combinatória tem vários caminhos para iniciar uma resolução, mas tem vários momentos na resolução de certos problemas que percebemos que é mais conveniente começar por outra maneira. Segundo Morgado [11], temos que adotar os seguintes critérios quando tratar-se de problemas de contagem:

1) **Postura** Devemos sempre nos colocar no lugar da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema, e ver o que deve ser feito e quais decisões tomar.

2) **Divisão**

Nesse critério Morgado fala que podemos complicar mais ainda o problema quando não dividimos a questão em etapas. Para ele devemos tomar as decisões mais simples. Na questão (4.1) foram escolhidas as peças por etapas, foi analisado cada conjunto que poderia ser formado.

3) **Não adiar Dificuldades**

As pequenas dificuldades adiadas podem se transformar em grandes dificuldades. Se uma das decisões a ser tomadas for mais restrita que as outras, essa deve ser a decisão a ser tomada primeiro. Essas três recomendações de Morgado [11] devem ser seguidas tanto por professores quanto alunos.

Exemplo 3.5. (Obmep-2009) Um torneio de futebol com 57 times será disputado com as seguintes regras:

- Nenhum jogo pode terminar empatado.
- O time que perder duas partidas será eliminado.
- O torneio termina quando sobrar um time, que será o campeão.

Se o time campeão perder uma vez, quantas partidas serão disputadas no torneio?

Solução 3.5. São 57 times. Tirando o time que foi campeão sobram 56 times. Para esses times saírem do torneio eles precisam perder duas vezes, então tem-se duas partidas garantidas para cada um dos 56 times. Haverá então 112 partidas. Como o campeão perdeu uma vez tem-se $112 + 1 = 113$ derrotas, como o torneio acaba quando sobra um, tem-se que o número de partidas é igual ao de derrotas.□

Exemplo 3.6. (Obmep-2010)De quantas maneiras é possível escolher três números inteiros de 1 a 19, de modo que o maior e o menor sejam ímpares e o outro seja par?

Solução 3.6. O número central pode ser qualquer dos pares de 2 a 18. Se o número central é 2, há um único ímpar de 1 a 19 menor que ele e 9 ímpares maiores que ele, logo há $1 \times 9 = 9$ triplas nesse caso. Se o número central é 4, há 2 ímpares menores e 8 ímpares maiores que ele, nesse caso temos $2 \times 8 = 16$ triplas. Continuando esse processo, vemos que o número total de triplas é: $1 \times 9 + 2 \times 8 + 3 \times 7 + 4 \times 6 + 5 \times 5 + 6 \times 4 + 7 \times 3 + 8 \times 2 + 9 = 165$.□

Segundo Fomin e Genkin [8] o principal objetivo do professor durante a discussão desses problemas deve ser fazer com que os estudantes compreendam quando os números devem ser somados e quando eles devem ser multiplicados. Devem ser apresentados muitos problemas como compras, mapas de trânsito, e outros modelos para que o aluno saiba diferenciar.

Exemplo 3.7. (UFMG) Observe o diagrama. O número de ligações distintas entre X e Z é:

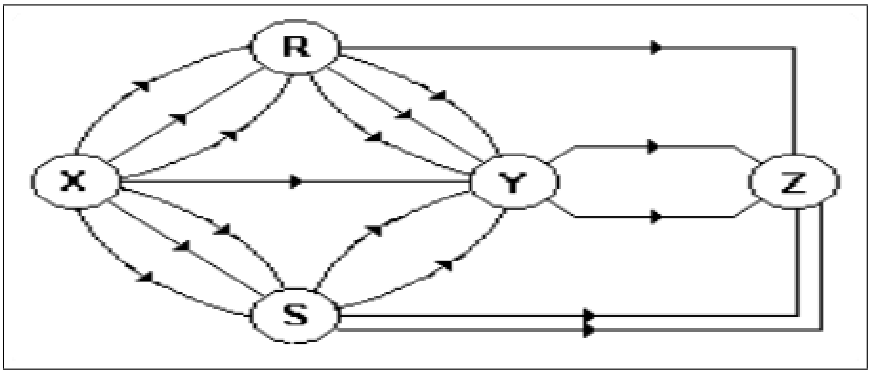


Figura 3.3: Estradas

Solução 3.7. Na figura 3.3[2], esse tipo de questão é muito comum nos exames vestibulares e bastante didático na aplicação dos princípios aditivo e multiplicativo. Vamos fazer primeiro os possíveis percursos. Os percursos são: XRYZ, XRZ, XYZ, XSZ e XSYZ. De uma ligação para outra no mesmo trajeto iremos multiplicar e as possibilidades diferentes iremos somar.

- $XRYZ = 3 \times 3 \times 2 = 18$

[2]Disponível em: $www.google.com.br/search?q = figuras+de+ligacões+distintas+x+e+z$ Acesso em: 20 de julho de 2017.

- XRZ= $3 \times 1 = 3$

- XYZ= $1 \times 2 = 2$

- XSZ=$3 \times 2 = 6$

- XSYZ=$3 \times 2 \times 2 = 12$

Agora pelo princípio aditivo temos: 18+3+2+6+12=41.□

Observe que nestes problemas não há nenhuma fórmula envolvida ou conceitos mais avançados em combinatória. O professor ao ensinar o aluno o princípio da contagem, deve deixá-lo produzir, ajudar a se tornar independente, segundo Polya [14]:

> Um dos mais importantes deveres do professor é o de auxiliar os seus alunos, o que não é fácil, pois exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes. O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma *parcela razoável do trabalho.* Se o aluno não for capaz de fazer muita coisa, o mestre deverá deixar-lhe pelo menos alguma ilusão de trabalho independente. Para isto, deve auxiliá-lo discretamente, *sem dar na vista.*(POLYA, 2006,p.1)

Ainda de acordo com Polya[14], o melhor é ajudar o estudante com naturalidade. O professor deve colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste, procurar compreender o que se passa em sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que poderia ter ocorrido ao próprio estudante.

4 Análise Combinatória no Ensino Médio

São inúmeras as aplicações de análise combinatória no Ensino Médio e é a base de estudo para probabilidades. Neste capítulo aborda-se as principais dificuldades dos alunos no assunto de Combinatória, os erros mais comuns, os principais equívocos nas interpretações. Veremos ainda como análise combinatória é abordada nos principais vestibulares, olimpíadas de matemática e Enem.

4.1 Principais Dificuldades

No estudo de análise combinatória não é recomendado ao professor apresentar as fórmulas no início e começar a fazer questões sem antes apresentar os fundamentos teóricos necessários, porque isso poderá levar o aluno a fazer contas e tentar resolver questões mecanicamente. O aluno poderá confundir arranjo com combinação; poderá confundir permutação com combinação ou elementos repetidos com contagem como se costuma ver em sala de aula.

O presente trabalho aborda o assunto de análise combinatória começando através de problemas propostos em sala de aula. Neste capítulo resolveremos variados tipos de problemas. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio[4], os problemas de contagem devem ser tratados da seguinte maneira:

> "As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida,tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isso mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da matemática e das demais ciências exatas.(PCNEM,2000,p.44)

O professor poderá começar por pequenos problemas e usará simples contagem; logo a seguir vai aumentando gradativamente o número de elementos nas questões posteriores. Depois os alunos perceberão que fica cada vez mais complicado fazer cálculos por contagem simples sem usar algum artifício ou fórmula. Por último é necessário a definição de cada conceito e a dedução das fórmulas. Mas em muitos casos, em sala de aula o professor começa por fatorial fazendo manipulações algébricas e isso acaba desestimulando os alunos. Outro erro bem comum é achar que fazer os alunos decorarem as fórmulas vai possibilitar a compreensão do assunto. Mas é perceptível em uma atividade em sala por exemplo que os alunos leem a questão e escolhem a fórmula para aquela questão, depois olham no final do livro e se a resposta estiver errada tentam outra fórmula.

O aluno deve ser levado a perceber sozinho por meio de problemas qual técnica será mais apropriada para a resolução de cada problema de arranjo, permutação, ou combinação. Assim o aprendizado será bem melhor do que simplesmente jogando as fórmulas e fazendo questões. Isso não significa que as fórmulas não sejam importantes, mas para que o aluno saiba os conceitos de arranjos, combinações e permutações, é necessário começar pelos problemas e depois formalizar os conceitos. Depois que o aluno souber sem nenhuma dificuldade os conceitos, então pode-se trabalhar várias questões dentro do assunto.

Veremos a seguir uma forma de introduzir, por exemplo, o conceito de arranjo, combinação e permutação através de problemas.

Exemplo 4.1. Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 5 e 8?

Em primeiro lugar devemos explicar ao aluno se a ordem em que os elementos nas centenas, dezenas e unidades vai alterar o conjunto solução, ou seja, se a ordem vai importar. Se colocar o 1 nas unidades, 5 nas dezenas e 8 nas centenas, vai formar o número 851, mas se for 1 nas centenas 5 nas dezenas, e 8 nas unidades vai formar o número 158, logo percebe-se que a ordem vai importar com a mudança dos elementos, então se trata de arranjo.

Solução 4.1. É importante analisar as questões simples sem usar fórmulas, fazendo o aluno listar todas as possibilidades. Na questão anterior o aluno poderia listar todos os números que começam com o número 1 nas centenas, que seria dois números, o 158 e o 185, depois com o 5 nas centenas, obtendo 518 e 581. Finalmente os que começam com 8, que irá formar 815 e 851, no total seis números.□

Como seria feita a questão se os algarismos fossem de 1 á 9? O aluno perceberia que seria bem trabalhoso listar todos os números que poderia formar com tantos algarismos, daí seria levado a pensar em outras alternativas para fazer o problema, mas como ele pode resolver o problema anterior com apenas três algarismos e generalizar uma forma para resolver com números com mais algarismos?

O professor poderá sugerir ao aluno a divisão em três passos:

- Primeiro ver se os algarismos devem ser distintos ou não.
- Desenhar no quadro a quantidade de casas.
- Começar a contagem partindo da primeira casa da esquerda para a direita.

No primeiro exemplo com algarismos 1, 5 e 8, tínhamos três possibilidades para primeira casa, duas possibilidades para segunda e uma para última, que seria $3 \times 2 \times 1$ que seria igual 6.

Agora, voltando a pergunta anterior, se fossem os algarismos de 1 à 9?

Usando o método anterior seriam nove possibilidades para a primeira casa, oito possibilidades para a segunda, e sete possibilidades para terceira, assim o cálculo seria $9 \times 8 \times 7 = 504$.

4.1.1 Arranjo Simples

Falaremos de arranjo simples, um tipo de agrupamento em que a ordem dos elementos importa, gerando novos subconjuntos. Demonstraremos sua fórmula logo a seguir, é importante porque veremos que sua fórmula depende exclusivamente do princípio fundamental da contagem quando os elementos são distintos.

Veremos a importância da sua fórmula para problemas que envolvem uma grande quantidade de elementos, e quando necessita-se apenas simplificar. Abordamos a importância de apresentar os conceitos através de problemas, mas isso não substitui a conceituação formal da Matemática, pois cairemos no erro de não considerar as manipulações, demonstrações e generalizações que a definição requer do assunto. Segundo Lima[10]:

> A conceituação compreende vários aspectos, entre os quais destacaremos os seguintes:

> A) A formulação correta e objetiva das definições matemáticas. Isto inclui a nítida compreensão de que definir significa dar um nome a um conceito, a uma situação ou a uma condição, substituindo uma frase por uma palavra ou um pequeno número de palavras, contribuindo assim para maior clareza do discurso, maior precisão das afirmações, maior concentração nos pontos essenciais da argumentação e mais destreza nos raciocínios.
> Por exemplo, nos "Elementos" de Euclides encontramos as seguintes definições: (a) linha é um comprimento sem largura;(b) ângulo é a figura formada por duas semi-retas que têm a mesma origem. Faz parte da boa obediência à componente "Conceituação" deixar claro que (a) é apenas uma motivação intuitiva e (b) é uma verdadeira definição.
> Muitas vezes o mesmo conceito pode ser definido de maneiras diferentes em forma porém equivalentes em significado. Dependendo das circunstâncias, uma ou outra forma da definição pode ser a mais conveniente. Nestes casos, manda a coerência, até mesmo a ética, que o professor ou autor advirta sua audiência e, sempre que possível,demonstre explicitamente que se trata apenas de descrever a mesma ideia com diferentes termos.
> B) O emprego bem dosado do raciocínio dedutivo, deixando clara a distinção entre o que supõe (hipótese) e o que se quer provar (tese), diferenciando uma proposição de sua recíproca e enfatizando que toda conclusão necessariamente advém de uma premissa.
> C) O entendimento e a percepção de que algumas noções e certas proposições podem ser reformuladas ou interpretadas de diferentes formas ou em diferentes termos, reconhecendo assim situações equivalentes ou mesmo idênticas em essência porém apresentadas de maneiras várias, aparentemente descrevendo casos diversos.(LIMA,2007, p.199 e 201)

Definição 3. *Arranjos simples de n elementos p a p, onde $n \geq 1$, e p é um número natural tal que $p \leq n$, são todos os grupos de p elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos p elementos que compõem cada grupo. A notação de arranjo é A_n^p.*

De acordo com Santos [16], caracteriza-se uma expressão matemática de arranjo usando o princípio multiplicativo. Temos n elementos dos quais vamos tomar p. É equivalente a termos n objetos para preencher p lugares.

Sendo o primeiro lugar preenchido de n maneiras diferentes, o lugar L_1 foi preenchido, restando $(n-1)$ objetos e, portanto, o segundo será preenchido de $(n-1)$ maneiras diferentes. Após o preenchimento de L_2, há $(n-2)$ maneiras de se preencher L_3 e, assim sucessivamente, preenchendo as posições de forma que L_p terá $(n-(p-1))$ maneiras diferentes de ser preenchido. Pelo princípio multiplicativo, podemos preencher as p posições sucessivamente de: $n(n-1)(n-2)(n-3). \dots .(n-(p-1))$ maneiras diferentes.

Portanto, $A_n^p = n(n-1)(n-2). \dots .(n-(p-1))$. Sabemos que uma igualdade não se altera se a multiplicarmos e dividirmos pelo mesmo valor, teremos então que:

$$A_n^p = \frac{[n(n-1)(n-2). \ldots .(n-(p-1))][(n-p)(n-p-1). \ldots .2.1]}{(n-p)(n-p-1). \ldots .2.1}$$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

É importante salientar que todos os problemas de arranjos podem ser resolvidos através do Princípio Fundamental da Contagem.

Agora que vimos uma definição de arranjo, vamos ver algumas aplicações em exercícios.

Exemplo 4.2. Quantos números inteiros entre 1000 e 9999 têm dígitos distintos e:

a) São números pares?

b) Múltiplos de cinco?

Solução 4.2. Os números procurados são de quatro dígitos, ou, de forma semelhante, podemos pensar em quatro casas para preencher. $P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4$

Para resolver o item a devemos explicar ao aluno primeiramente quando que o número é par, para ser par precisa terminar em número par ou zero, daí deve-se separar esse problema em dois casos:

- Quando o número termina em zero.
- Quando o número termina em dois, quatro, seis ou oito.

Faremos o primeiro item. Fixando o zero na casa das unidades, sobram os algarismos de 1 a 9, e ficam faltando três casas para serem preenchidas. Podemos fazer pelo princípio multiplicativo ou ir para a fórmula do arranjo.

Usando-se a fórmula do arranjo temos:

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

Agora o zero não pode ir para a última casa pois já foi considerado na solução anterior, e não pode ir para a primeira casa, pois seria um número com três algarismos, na última casa há 4 possibilidades, que são os quatros algarismos pares, e para a primeira casa temos 8 possibilidades, pois foi desconsiderado o zero e o algarismo que foi para a última casa, para a segunda casa temos 8 possibilidades ainda, pois o zero volta a ser considerado, e na terceira casa temos 7 possibilidades, então tem-se: $8 \times 8 \times 7 \times 3 = 1344$.

Pelo princípio da adição teremos a soma das duas possibilidades: $504 + 1344 = 1548$

Para o item b temos que separar também em dois casos: o número é múltiplo de cinco quando termina em zero ou em cinco, como o zero é um caso particular para ser analisado é sempre indicado fazê-lo separado dos outros casos, é o que vamos fazer nesse item. Primeiro faremos com o zero na casa das unidades e depois com o cinco na casa das unidades.

- Fixando o zero na casa das unidades temos os algarismos de 1 á 9 pra escolher três números, isso pode ser feito por $A_9^3 = \dfrac{9!}{(9-3)!} = \dfrac{9!}{6!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 9 \times 8 \times 7 = 504$.

- Agora fixando o cinco na casa das unidades temos nove algarismos, mas o zero não pode ir para a primeira casa ou teríamos um número de três algarismos, então dos nove algarismos que restam, podemos usar apenas oito. Tirando o zero, agora sobraram oito algarismos incluindo o zero agora, pois ele só não poderia ir para a primeira casa, mas nas demais casas ele poderá ir, assim temos: Oito possibilidades para a primeira casa, agora que temos duas casas para serem preenchidas e podemos contar com o zero, teremos A_8^2. Assim o cálculo é: $8 \times A_8^2 \times 1 = 8 \times \dfrac{8!}{(8-2)!} = 8 \times \dfrac{8!}{6!} = 8 \times \dfrac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 8 \times 8 \times 7 = 448$

  Somando-se agora pelo princípio da adição os dois resultados temos: $504 + 448 = 952$.$\square$

Nota-se nesse exemplo, a importância de separar esse tipo de questão em casos particulares, pois dos dez algarismos do sistema decimal não pode-se fazer simplesmente o arranjo de 10 tomado 4 a 4, pois como o zero é um dos algarismos, pode cair na primeira casa, mas se isso acontecer o número fica sendo de três algarismos e não com quatro algarismos como a questão requer.

Nesse tipo de problema é muito recomendado ao docente refletir sobre o que o aluno poderia pensar. Sugerimos aos docentes fazer algumas questões erradas, ou seja, como NÃO fazer a questão. A seguir, listaremos alguns possíveis erros que os alunos poderiam cometer nesse tipo de questão:

- Um dos equívocos que poderia ser cometido seria o aluno fazer o arranjo de 10 tomado 4 a 4, o professor explicaria que não poderia fazer porque corre o risco do zero ir para a primeira casa, e que para ser par o último algarismo deve ser par, e na letra b para ser múltiplo de cinco precisa terminar em zero ou cinco, então ele iria entender que não se pode fazer em um único cálculo quando a questão vem com certas restrições como na questão anterior.

- Outro equívoco seria confundir a natureza dos elementos e pensar que a ordem não importaria, e com isso fazer através de combinação. Outro equívoco seria fazer apenas uma parte, na letra (b) o aluno poderia fazer apenas com os números que terminam em cinco, e esquecer que os que terminam em zero também são múltiplos de cinco. Ou seja, ele pode acertar partes da questão.

4.1.2 Combinação Simples

Definição 4. *Combinação simples de n elementos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e p é um número natural tal que $p \leq n$, são todas as escolhas não ordenadas de p desses elementos.*

A notação para a combinação é C_n^p e uma relação entre combinação e arranjo é exatamente $C_n^p p! = A_n^p$. Se multiplicar o número de combinações pela quantidade de ordens que poderemos ter em relação à quantidade de conjuntos que serão formados, vai dar exatamente a quantidade de arranjos do conjunto.

Um exemplo que podemos usar no conceito de combinação seria escolher uma determinada quantidade de pessoas dentre um conjunto para formar uma comissão, ou para formar um time. Por exemplo, se temos 5 pessoas em grupo, em que Ana, Beatriz e Carol participam e se as três forem escolhidas a ordem não irá importar, pois o conjunto (Ana, Beatriz e Carol) e (Carol, Ana e Beatriz) são as mesmas pessoas no conjunto, não importando a ordem em que foram escolhidas.

Na outra seção vamos resolver vários outros problemas que exigem uma compreensão mais aprofundada do assunto. Por enquanto vamos introduzir exemplos para o aluno entender o conceito de combinação.

Exemplo 4.3. Em um grupo de seis estudantes, em que João participa, escolhem-se três estudantes para fazer uma viagem para uma feira de ciências. Com base nos dados, calcule as seguintes possibilidades:

a) De quantas maneiras podem escolher os três alunos ?

b) De quantas maneiras podem escolher os três alunos se João necessariamente deve ir na viagem?

c) De quantas maneiras podem escolher os três alunos se João não vai na viagem?

Solução 4.3. No item a) Temos seis pessoas e dentre elas vamos escolher três. Para o aluno deve ficar claro que não se trata de arranjo porque a ordem não importa. Nessa primeira pergunta basta usar a fórmula da combinação C_n^p em que n é 6 e p é 3:

Utilizando a fórmula $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, temos $C_6^3 = \dfrac{6!}{3!(6-3)!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!3!}$ cancelando o 3! e sabendo que $3! = 6$ temos: $\dfrac{6 \times 5 \times 4}{6} = 20$, temos 20 possibilidades.

Na letra b) João participa do grupo de estudantes e necessariamente precisa está entre os três que forem viajar. Como João precisa ir, basta escolher mais dois alunos para obter os três que irão para a viagem. Então o cálculo se resume em calcular a combinação de 5 tomado 2 a 2, substituindo na fórmula temos:

$C_5^2 = \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = \dfrac{5 \times 4 \times 3!}{2!3!} = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$ possibilidades de escolher os dois alunos que irão viajar com João.

Perceba que neste exercício, o cálculo se assemelha com o anterior, mas com uma restrição, joão deve participar. Segundo Polya [14], o professor deve deixar claro a relação com questões anteriores que o aluno já teve contato. A primeira questão já deve levar o aluno ter ideias das questões a seguir, não pode isolar os problemas dos demais.

Na letra c) Tirando o João podemos contar com apenas 5 alunos, dos quais vamos escolher 3, então o cálculo é:

$C_n^p = C_5^3 = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = \dfrac{5 \times 4 \times 3!}{3!2!} = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$ possibilidades de escolher três alunos entre os cinco restantes.$\square$

Exemplo 4.4. Em uma empresa com 3 gerentes e 4 administradores, será formada uma comissão com 3 pessoas sendo pelo menos um gerente, de quantas maneiras pode ser formada essa comissão?

Devemos estar com os princípios aditivo e multiplicativo sempre em mente para saber quando se aplica. No problema é dito que pelo menos um gerente precisa compor a comissão que será escolhida, vamos chamar de A os administradores e de G os gerentes, como o problema disse que precisa ter pelo menos um gerente, as configurações possíveis são: (A, A, G),(A, G, G),(G, G, G), essas são as configurações das comissões.

Na primeira configuração escolhemos um gerente e dois administradores, na escolha das duas profissões uma não interfere na escolha da outra, então usamos o princípio multiplicativo, como temos 3 gerentes e 4 administradores, faz-se combinação de 3 tomado 1 a 1 e combinação de 4 tomado 2 a 2, seguindo o mesmo raciocínio para as outras configurações temos entre os administradores 4 e escolhe-se 1 e entre os gerentes, temos 3 e escolhemos 2, então fica combinação de 4 tomado 1 a 1 e combinação de 3, tomado 2 a 2, na última temos combinação de 3 tomado 3 a 3. Depois que terminamos de fazer cada cálculo o que resta fazer é somar cada possibilidade de cada configuração, pois podemos ter a primeira, segunda ou terceira configuração, que tem no mínimo um gerente, então veremos as possibilidades:

Solução 4.4. No primeiro cálculo temos: $C_3^1 = \dfrac{3!}{1!(3-1)!} = \dfrac{3 \times 2!}{1! \times 2!} = 3$ possibilidades. Agora faremos com os administradores: $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = \dfrac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \dfrac{4 \times 3}{2} = 6$. Assim, pelo princípio multiplicativo temos: $3 \times 6 = 18$.

Na segunda configuração temos que escolher dois gerentes e um administrador que fica:

$C_3^2 = \dfrac{3!}{2!(3-2)!} = \dfrac{3 \times 2!}{1! \times 2!} = 3$. Agora dos administradores tem-se: $C_4^1 = \dfrac{4!}{1!(4-1)!} = \dfrac{4!}{1! \times 3!} = \dfrac{4 \times 3!}{1! \times 3!} = 4$. Multiplicando as possibilidades de cada temos: $3 \times 4 = 12$.

Na terceira configuração escolhemos os três gerentes que fica: $C_3^3 = \dfrac{3!}{0!3!} = 1$. A resposta total é a soma das possibilidades de cada configuração que podemos formar, é essencial enfatizar ao aluno a importância de saber usar bem os princípios aditivos e multiplicativos, a resposta é: $18 + 12 + 1 = 31$ possibilidades.

Uma outra solução bem mais simples é calcular todas as possibilidades possíveis e diminuir das possibilidades que não podem acontecer. No total temos 3 gerentes e 4 administradores que somam 7, fazendo agora combinação de 7 tomados 3 a 3 e diminuindo da possibilidade que não pode acontecer, ou seja, de ter somente administrador que é combinação de 4 tomados 3 a 3 chegamos no resultado desejado. Segue o cálculo:

$C_7^3 = \dfrac{7!}{3!(7-3)!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 4!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5)}{6} = 35$ possibilidades para formar uma comissão com 3 pessoas contendo gerentes ou não. O quê não pode acontecer é de ter os três na comissão sendo somente administrador que é:

$C_4^3 = \dfrac{4!}{3! \times 1!} = \dfrac{4 \times 3!}{1! \times 3!} = 4$ possibilidades que não podem acontecer, e a resposta é $35 - 4 = 31$.□

Exemplo 4.5. Seja a reta AB com 7 pontos, e outra reta CD com 9 pontos, que é paralela a AB, calcule o número de maneiras de se formar:

a) Um triângulo;

b) Um quadrilátero;

c) Uma reta com um ponto em AB e outra em CD.

Nessa questão o professor precisa recordar conceitos de geometria, explicar a colinearidade dos pontos e quando é que dar para formar a figura pedida, e explicar o paralelismo entre as retas. Como a questão envolve geometria, é fundamental o professor deixar claro a ligação entre os ramos da matemática e entre outros problemas resolvidos, segundo Polya [14]:

> Um dos primeiros deveres do professor é não dar aos seus alunos a impressão de que os problemas matemáticos têm pouca relação uns com os outros, de que nenhuma relação têm com qualquer outra coisa. Surge uma oportunidade natural de investigar as relações de um problema quando fazemos o retrospecto de sua resolução. Os estudantes acharão realmente interessante o retrospecto se eles houverem feito um esforço honesto e ficarem conscientes de terem resolvido bem o problema.(POLYA, 2006,p.13)

- Os pontos são colineares quando estão na mesma reta;

- Retas paralelas são retas que são equidistantes em toda sua extensão não tendo nenhum ponto em comum;

- Para formar o triângulo os três pontos não pode está na mesma reta, precisa que dois pontos estejam em uma reta, e outro ponto esteja em outra reta, pode-se selecionar dois pontos na reta AB e um ponto na reta CD, ou dois pontos na reta CD e um ponto na reta AB.

Solução 4.5. No item a) Com dois pontos em AB e um ponto em CD, vamos escolher 2 pontos entre os 7 de AB, e um ponto entre os 9 de CD, agora o que devemos utilizar para escolher esses pontos, arranjo ou combinação e por quê? Iremos usar combinação pois a ordem dos pontos não vai importar, pois em uma reta XY por exemplo, não importa se é escolhido primeiro X ou Y, sempre vai se tratar da mesma reta. Então temos:

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{2 \times 5!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21.$$

Esse cálculo foi para calcular os dois pontos que serão escolhidos primeiro, agora vamos escolher o ponto da outra reta para formar um triângulo com os outros dois pontos.

Isso pode ser feito da seguinte maneira: $C_9^1 = \dfrac{9!}{1!(9-1)!} = \dfrac{9!}{1!8!} = \dfrac{9 \times 8!}{8!} = 9.$

Assim a quantidade de triângulos com dois pontos em AB e um ponto em CD é: $9 \times 21 = 189$.

Faremos a primeira parte da questão com dois pontos na reta AB e um ponto na reta CD, agora vamos inverter com dois pontos em CD e um ponto em AB seguindo o mesmo raciocínio da parte anterior.

$$C_7^1 = \frac{7!}{1!(7-1)!} = \frac{7 \times 6!}{6!} = 7.$$

$$C_9^2 = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9!}{2!7!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{2 \times 7!} = 36.$$

Agora multiplicando as possibilidades de escolha em cada reta temos: $7 \times 36 = 252$.

A resposta é a soma das duas possibilidades, pois podemos ter dois pontos na reta AB ou CD e um ponto em uma dessas retas para formar o triângulo. Assim temos: $189 + 252 = 441$ triângulos.

Temos uma segunda solução, até mais prática, a primeira é melhor para o aluno entender o sentido da questão e como proceder, mas depois é importante mostrar que tem outros meios para que o aluno possa ver como a matemática é interessante e tem vários caminhos para chegar em uma solução.

Outra solução do item a seria pegar todos os pontos que é 7 pontos da reta AB, os 9 pontos da reta CD, que no total é 16 pontos e fazer todas as combinações possíveis de encontrar os triângulos e diminuir das possibilidades que não pode acontecer, ou seja, ter os três pontos na reta AB, ou os três pontos na reta CD, assim:

$$C_{16}^{3} = \frac{16!}{3!(16-3)!} = \frac{16!}{3!13!} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13!}{3!13!} = \frac{16 \times 15 \times 14}{6} = 560.$$

$$C_{7}^{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35$$

$$C_{9}^{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3!6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{6} = 84.$$

Agora diminuímos a quantidade total de escolhas pelas quantidades que não formam triângulos: $560-(35+84) = 560-119 = 441$ triângulos que podem ser formados.

Na letra b) - O raciocínio dessa questão é semelhante a anterior, para formar o quadrilátero devemos ter dois pontos em cada reta, ou podemos fazer conforme a segunda solução da questão anterior, pegar todas as possibilidades de escolher os quatro pontos e diminuir do total do que não pode ser feito, faz-se as duas maneiras:

Vamos fazer a combinação de cada reta e depois usaremos o princípio multiplicativo para determinar a quantidade de quadriláteros:

$$C_{7}^{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{2!5!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21.$$

$$C_{9}^{2} = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{2!7!} = \frac{9 \times 8}{2} = 36.$$

Pelo princípio multiplicativo temos: $21 \times 36 = 756$ quadriláteros que podem ser formados.

Uma segunda solução da letra b) seria pegar a quantidade total de pontos que é 16 e quantas combinações possíveis podem ser, depois fazemos a combinação da quantidade total de pontos de cada reta tomado 4 a 4, que é as possibilidades que não formam quadriláteros e também a possibilidade de ter três pontos em uma reta e um ponto em outra. Daí fez-se a diferença de tudo que pode acontecer das possibilidades que não formam os quadriláteros.

Todas as possibilidades possíveis que temos, se escolhermos 4 pontos quaisquer é: $C_{16}^{4} = \dfrac{16!}{4!12!} = \dfrac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12!}{4!12!} = \dfrac{16 \times 15 \times 14 \times 13}{24} = 1820$ possibilidades.

Agora faremos as possibilidades que não formam quadriláteros. A primeira é escolher somente 4 pontos em uma única reta, podemos escolher na reta AB ou CD. Pelo princípio da adição somando as duas possibilidades, pois ou acontece com uma reta ou outra. Assim: $C_7^4 = \dfrac{7!}{4!(7-4)!} = \dfrac{7!}{4!3!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!3!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35$ possibilidades que não pode acontecer na reta AB.

Agora na reta CD temos: $C_9^4 = \dfrac{9!}{4!(9-4)!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{4!5!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{24} =$ 126 possibilidades que não pode acontecer.

Agora o aluno poderia se perguntar o porquê de não dar certo a mesma resposta agora que fizemos a quantidade total e pegamos as possibilidades que não formam os quadriláteros, isso aconteceu porque não fizemos todas as possibilidades, pois diferentemente do triângulo podemos ter mais configurações com esses quatro pontos que não formam quadriláteros. E essas configurações é somente se tiver 3 pontos em uma reta e um ponto em outra, assim:

Podemos ter 3 pontos em AB e 1 ponto em CD ou 1 ponto em AB e 3 pontos em CD.

No primeiro caso temos: $C_7^3 = \dfrac{7!}{3!(7-3)!} = \dfrac{7!}{3!4!} = 35$ possibilidades de escolher os três pontos em AB.

$C_9^1 = 9$ possibilidades de escolher o ponto em CD. Pelo princípio multiplicativo tem-se: $35 \times 9 = 315$ possibilidades que tem de não formar quadrilátero com três pontos em AB e um ponto em CD.

No segundo caso : $C_9^3 = \dfrac{9!}{3!(9-3)!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3!6!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7}{6} = 84$ possibilidades de escolher 3 pontos na reta CD.

$C_7^1 = 7$ possibilidades de escolher uma reta em AB.

Agora pelo princípio multiplicativo : $84 \times 7 = 588$ Quadriláteros que não pode-se formar com 3 pontos na reta CD e 1 ponto na reta AB.

Agora somando todas as possibilidades que não formam quadriláteros com 4 pontos: $35 + 126 + 315 + 588 = 1064$ quadriláteros que não podem formar com 4 pontos. Então a resposta é: $1820 - 1064 = 756$ quadriláteros.

Na letra c) podemos fazer pela contagem simples pelo princípio multiplicativo, mas não é conveniente dizer isso ao aluno devido ao fato dele fazer em outras perguntas que envolva combinação e fazer por contagem. Pois essa questão se trata de combinação, não importa a ordem de onde começa a reta, pois AB e BA se trata da mesma reta.

Vamos aos cálculos: $C_9^1 = \dfrac{9!}{1!(9-1)!} = \dfrac{9 \times 8!}{1!8!} = 9.$

$C_7^1 = \dfrac{7!}{1!(7-1)!} = \dfrac{7!}{1!6!} = \dfrac{7 \times 6!}{1!6!} = 7.$

Agora pelo princípio multiplicativo: $9 \times 7 = 63$ retas que pode-se formar.$\square$

Exemplo 4.6. Em uma escola com quatro professores de matemática, três de física, e dois de química, será formada uma comissão com três professores sendo no máximo um de química, e pelo menos um de matemática, quantas comissões poderão ser formadas?

Verificaremos as possíveis configurações que poderemos formar. Chamaremos os professores de matemática de M, os de física de F e os de química de Q:

Podemos ter: $(M, F, Q), (M, M, Q), (M, M, M), (M, F, F) e (M, M, F)$.

Essas são as possíveis configurações, tem configuração que não tem química porque a questão deixou claro que é no máximo um de química, já matemática tem configuração que tem três, pois a questão disse pelo menos. Então faremos os cálculos combinatórios de cada configuração e no final usaremos o princípio aditivo, ou seja, vamos somar os valores das quantidades de cada configuração e dentro de cada uma delas, o princípio multiplicativo.

Solução 4.6. Na configuração (M, F, Q) temos que escolher um de cada, temos 4 professores de matemática, 3 de física e 2 de química. Existem : $C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ possibilidades.

Na configuração (M, M, Q) temos: $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = \dfrac{4 \times 3 \times 2!}{2!2!} = 6.$

$C_2^1 = 2.$

Pelo princípio multiplicativo: $6 \times 2 = 12.$

Na configuração (M, M, M): $C_4^3 = \dfrac{4!}{3!(4-3)!} = \dfrac{4 \times 3!}{1!3!} = 4.$

Na configuração (M, F, F) $C_4^1 = 4$ e $C_3^2 = 3.$

Multiplicando: $4 \times 3 = 12.$

E por fim temos a configuração (M, M, F) que é:

$C_4^2 = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = \dfrac{4 \times 3 \times 2!}{2!2!} = 6$ e $C_3^1 = 3.$

Agora multiplicando: $6 \times 3 = 18$.

Utilizando o princípio aditivo: $24 + 12 + 4 + 12 + 18 = 70$ possibilidades de escolher 3 professores sendo pelo menos 1 de matemática e, no máximo, 1 de química.□

4.1.3 Permutação Simples

Abordaremos agora o conceito de permutação, um dos tópicos mais extensos da combinatória e também onde se trata as questões mais difíceis desse assunto, pois como veremos adiante, a permutação envolve os tópicos tratados anteriormente e em uma mesma pergunta pode envolver mais de um tipo de Permutação. Depois trataremos da permutação circular e com elementos repetidos. É um assunto que gera muitas dúvidas por parte dos alunos, pois como eles já acostumaram resolver problemas de arranjos e combinação, agora eles devem aprender a diferença de agrupamentos e como as questões podem ser abordadas nesse assunto.

Definição 5. *Uma permutação de n objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses objetos, de modo que, se denominarmos P_n o número das permutações simples dos n objetos, então*: $P_n = n(n-1)(n-2). \ldots .1 = n!$ e define-se $P_0 = 1$ ou seja $0! = 1$.

Se você possui n objetos e deseja colocar esses objetos em uma ordem qualquer, todas as possibilidades são chamadas de permutação dos n objetos, segundo Oliveira[12]. Por exemplo, seja os objetos (A, B, C e D) a ordem $BDAC$ é uma das permutações desses objetos. A permutação simples parte do princípio multiplicativo quando os elementos não podem se repetir. Mais adiante trataremos da permutação com elementos repetidos e usaremos muito a notação de fatorial como por exemplo 5!, 4!, $n!$ pois na maioria das vezes as respostas é simplificada, por exemplo, quantos números pode-se formar com os números 3, 5 e 9?

359 539 935 395 593 953

Como a quantidade de elementos não é grande, foi possível listar as configurações possíveis, mas não é possível sair listando todas as possibilidades quando o número de elementos é muito grande, se fosse os algarismos de 1 a 7 por exemplo, e perguntasse de quantas maneiras é possível formar números com 7 algarismos ? Seria possível listar, mas ninguém teria a disposição para encontrar a quantidade de números possíveis listando todos os números, seguindo o raciocínio da questão anterior temos três números, então a quantidade de números é: $3 \times 2 \times 1 = 6$ ou simplesmente 3!.

Então para essa questão com 7 algarismos tem-se: $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$ ou 7! A permutação usa vários tipos de objetos nas perguntas. Podem ser números, letras, pessoas, e outros. Segundo o portal da matemática OBMEP [1] os princípios aditivo e multiplicativo precisa sempre ser ressaltado nas aulas, e começar resolvendo questões simples que trata as operações básicas, pois depois possibilitará ao aluno em resolver questões mais complexas.

A seguir listamos exemplos que envolvem permutação:

Exemplo 4.7. Em um grupo de seis pessoas, com três homens e três mulheres. irão assistir um filme no cinema, se eles vão sentar sempre juntos responda cada item a seguir:
a) De quantas maneiras eles podem se distribuir nas cadeiras?
b) De quantas maneiras eles podem se distribuir, se os homens e mulheres devem se sentar intercalados?
c) De quantas maneiras eles podem se distribuir se os homens devem sentar sempre juntos e as mulheres também?

Solução 4.7. Nessa primeira questão não tem nenhuma restrição, apenas utilizaremos o princípio multiplicativo para obter a resposta, para a primeira posição temos 6 possibilidades, para a segunda 5, e assim por diante. Calculando, tem-se: $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ ou 6! possibilidades.

Na item b) não fala se a primeira cadeira deve ser ocupada por homem ou mulher, nesse caso vamos utilizar o princípio aditivo, e em cada item da questão resolver pelo princípio multiplicativo. Dividir em duas partes, quando começa com homem e quando é com mulher.

Parte 1: Designa-se H por homem e M por mulher, nessa primeira parte trabalha-se quando começa com homem e termina com mulher, a configuração é [H, M, H, M, H, M] mas temos 3 homens e 3 mulheres, para a primeira possibilidade temos 3, para a segunda 3 possibilidades também, para a terceira temos 2 possibilidades pois volta ser homem, e a quarta 2 também, e as duas últimas temos cada uma com 1 possibilidade cada. Assim tem-se: $3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 36$ possibilidades.

[1] Disponível em: *http : //matemática.obmep.org.br/* Acesso em: 10 de dezembro de 2016.

Parte 2: Seguindo o mesmo raciocínio da parte 1 mas considerando a configuração [M,H,M,H,M,H] temos o mesmo cálculo: $3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 36$ possibilidades.

Agora utilizando o princípio aditivo temos: $36 + 36 = 72$ maneiras.

Na letra c) Diferenciamos os homens entre si e as mulheres também, os homens devem ficar juntos e o mesmo com as mulheres, $[H_1, H_2, H_3]$ e $[M_1, M_2, M_3]$ são os grupos que formaremos. São dois grupos, mas no mesmo grupo podemos permutar as pessoas envolvidas, haverá dois grupos distintos e dentro de cada grupo três pessoas para permutar, então temos 2! possibilidades para permutar os grupos e dentro de cada um 3! possibilidades de mudar a posição das pessoas. Então: $2! \times 3! \times 3! = 2 \times 6 \times 6 = 72$ possibilidades.□

Exemplo 4.8. Considere os algarismos 1, 3, 4, 5 e 8, considerando todos os números de cinco algarismos distintos que podemos formar com esses números, qual a posição do número 43158:

Solução 4.8. Nessa questão iremos separar cada passo devido aos detalhes que a questão exige. Pois ela tem certos detalhes que se não forem bem claros, o aluno terá dificuldades no entendimento.

- Primeiro contamos quantos números podemos formar com os algarismos que constituem o número dado, temos cinco algarismos distintos, então podemos formar $5! = 120$ números.
- O número começa com o algarismo 4, mas devemos ver se não tem algarismos menores para calcular quantos começam por eles, o número dado começa com 4, e tem 1 e 3 como os algarismos menores que ele, então calcula-se quantos números tem com esses algarismos que comecem por 1 e depois por 3.
- Começando por 1, não podemos repetir esse número por se tratar de números distintos, sobram 4 algarismos, e permutando eles nas outras casas temos $4! = 24$ números.
- Os que começam por três também tem o mesmo procedimento, fixando o 3 na primeira casa, temos $4! = 24$ maneiras de permutar os outros.

- Agora devemos ter cuidado com os que começam com 4, pois não precisamos de todos, devemos parar no número no qual foi dado e somar com os anteriores para ver a posição deles. Começando por 4, devemos levar em conta os números que começam na segunda posição, na terceira, quarta e depois quinta, pois devemos considerar a ordem dos números do menor para o maior para saber a posição em que este ocupa. Começando com 4, vamos fixar o menor número que sobrou que é o 1, agora calcula-se quantos números temos começando com 4 e o 1 na segunda posição, como sobram 3 temos $3! = 6$.

- Mantendo o número 4 ainda na primeira posição, pegaremos o segundo menor que sobrou para ocupar a segunda posição que neste caso é o 3, mas 4 e 3 são justamente os primeiros números que ocupa as posições do número procurado, assim usaremos o menor número que sobrou para ocupar o terceiro lugar que neste caso é 1, mas o 1 é o terceiro algarismo do número procurado, então pegaremos o menor que sobrou para ocupar a quarta posição que é o 5, e assim sobra o 8 para a última posição, assim esses números ocupando essas posições chegamos no número procurado que é 43158.

- Agora para finalizar, temos que somar o total de números obtidos para ver a posição deste número: $24 + 24 + 6 + 1 = 55$ é posição do número, quinquagésimo quinto lugar.□

Este é um problema em que todos os passos sugeridos por Polya [14] se fazem necessários. O aluno precisa compreender o problema para depois ter um plano, logo a seguir executar, pois o problema não é tão simples. É o tipo de questão que necessita de paciência para seguir os passos que foram dados na solução. Depois se faz necessário o retrospecto sugerido por Polya [14], pois a questão além de difícil é trabalhosa.

4.1.4 Permutação com Elementos Repetidos

Abordaremos outro tipo de permutação. Envolve agora com elementos repetidos, tratamos no tópico anterior quando envolve elementos distintos, mas agora veremos outras formas de permutação.

Definição 6. Consideremos n elementos, entre os quais o elemento a_1 compareça n_1 vezes, o elemento a_2 compareça n_2 vezes, ..., o elemento a_k compareça n_k vezes:

$$a_1, a_1, ..., a_1, a_2, a_2, ..., a_k, a_k, a_k, ..., a_k.$$

n elementos.

n_1 elementos iguais a a_1.

n_2 elementos iguais a a_2.

n_k elementos iguais a a_k.

Sendo $a_1, a_2, ...$ e a_k distintos entre si e $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. O número de permutações desses n elementos, é dado por:

$$P_n^{(n_1,\ n_2,\ n_3,\ ...,\ n_r)} = \frac{n!}{(n_1)!(n_2)!(n_3)!\ ...\ (n_k)!}$$

Exemplo 4.9. Calcule quantos anagramas tem a palavra Bala.

Solução 4.9. Como tem 4 letras, devemos fazer 4!, mas tem duas que se repetem, então: $\frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 4 \times 3 = 12.\square$

Segundo Hazzan [9] aborda-se a definição de elementos repetidos em dois casos:

Primeiro caso, quando apenas um elemento se repete e o segundo caso quando dois elementos se repetem.

Exemplo 4.10. Um dado é lançado sete vezes sucessivamente. De quantas formas distintas pode ser obtida uma sequência com quatro faces iguais a 1 e as demais iguais a 2, 5 e 6?

Solução 4.10. Devemos escolher as posições (ordem dos resultados) que as faces 2, 3 e 6 podem ocupar. Para isso eles escolheram uma sequência de uma possível escolha e ver como os algarismos 1 vão se permutar.

$$\_\_\_ \ \_\_\_ \ 2 \ \_\_\_ \ 6 \ \_\_\_ \ 5$$

Fixando as posições das faces 2, 5 e 6, e as posições das faces iguais a 1 ficam determinadas de maneira única, uma vez que qualquer permutação de faces 1 gera a mesma sequência.

Trata-se, então, de escolher três entre sete posições. Isso pode ser feito de:
$C_7^3 = \dfrac{7!}{3!(7-3)!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 4!} = 35$ maneiras.

Para escolher de quantas maneiras as faces 2, 5 e 6 podem variar, tem-se: $P_3 = 3! = 6$.

E seguindo os passos anteriores temos que o número de sequências possíveis é: $C_7^3 \times P_3 = \dfrac{7!}{3!4!} \times 3! = \dfrac{7!}{4!} = 210$ possibilidades. Sendo 7 o número de faces, e 4 a quantidade de vezes que 1 se repete.□

Segundo caso.

Outro exemplo para embasar mais ainda a definição, utilizando um exemplo agora com outros elementos que se repetem.

Exemplo 4.11. De quantas formas distintas pode ser obtida uma sequência com quatro faces iguais a 1, duas iguais a 3 e as demais faces iguais 2, 5 e 6?

Solução 4.11. - Para resolver este problema faremos logo a combinação das faces distintas de 1, como tem cinco, teremos: $C_9^5 = \dfrac{9!}{5!(9-5)!} = \dfrac{9!}{5!4!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 24} = 126.$

colocando em seguida uma possível configuração para os números, temos:

___ 3 ___ 2 3 ___ 5 ___ 6

Para tal escolha de lugares (2°, 4°, 7° e 9° lançamentos), as faces 2 (uma vez), 3 (duas vezes), 5(uma vez) e 6 (uma vez) podem trocar de lugar entre si. Agora utilizando o método anterior teremos: $\dfrac{5!}{2!}$, multiplicamos por C_9^5. Assim temos:
$\dfrac{9!}{5!4!} \times \dfrac{5!}{2!} = \dfrac{9!}{4!2!}$, em que 9 é o número de elementos, 4 a quantidades de algarismos 1, e 2 a quantidade de algarismos 3.□

Exemplo 4.12. Em relação aos anagramas da palavra LIVRARIA, responda:

a) Quantos começam com a letra L e termina com V?

b) Quantos começam e terminam com R?

c) Quantos tem as vogais sempre juntas?

d) Quantos tem as vogais sempre juntas e as consoantes sempre juntas?

Este modelo de questão poderá gerar certos questionamentos quanto à aplicação, mas o professor deve deixar claro a importância da manipulação algébrica, pois não basta compreender o problema, no percurso haverá a necessidade de fazer cálculos algébricos. De acordo com Lima [10] :

> Para analisar corretamente o papel da manipulação, o crítico deve policiar-se atentamente para não incorrer no erro de menosprezá-la. Durante séculos, e ainda hoje, a manipulação quase que monopolizou o ensino da Matemática. A tal ponto que, para a maioria das pessoas (e até mesmo de professores e autores de livros didáticos) a matemática é essencialmente manipulação. Houve, nos anos 60, uma forte reação contra isso, a qual chegou ao extremo de praticamente banir os cálculos e exacerbar o abstrato. Hoje prevalece uma posição mais sensata: a manipulação está para o ensino da Matemática assim como a prática de escalas musicais está para o aprendizado do piano ou como o treinamento dos chamados "fundamentos"está para a prática de certos esportes como o tênis ou o voleibol.
> A fluência no manuseio de equações, fórmulas e operações com símbolos e números, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas diante de cálculos algébricos ou construções geométricas, a criação de uma série de reflexos condicionados sadios em Matemática, os quais são adquiridos através da prática continuada de exercícios manipulativos bem escolhidos, permite que o aluno (mais tarde, o usuário da Matemática) concentre sua atenção consciente nos pontos realmente essenciais, salvando seu tempo e sua energia de serem desperdiçados com detalhes secundários.(LIMA,2007,p.204)

Solução 4.12. - Esse problema tem uma restrição, nesse caso o cuidado deve ser dobrado, primeiro sabemos que essas letras vão ficar fixas nos lugares indicados pela questão, as outras letras devem se permutar entre elas. Na letra a) as que sobram tem 3 letras que se repetem, que são as letras que se repetiram na questão anterior, mas agora não contamos com essas letras que irão ficar fixas, permutam-se apenas as que sobraram, como sobrou 6 letras temos:

$$\frac{6!}{2!2!2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2 \times 2 \times 2!} = 90 \text{ anagramas.}$$

Na letra b) R é uma das letras que se repetem, e agora a palavra escolhida vai começar e terminar por ela, e as letras restantes vão se permutar nos demais lugares, fixando a letra R no começo e no final temos apenas as letras A e I que se repetem:

$$\frac{6!}{2!2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2 \times 2} = 180 \text{ anagramas.}$$

Na letra c) As vogais são apenas A e I, e ambas se repetem, mas devem ficar todas juntas,mas a letra R que não deve ficar necessariamente junta com as vogais também se repete, aqui nesse tipo de questão devemos fazer duas observações: A primeira devemos fazer o cálculo de elementos repetidos de todas as letras, e a segunda devemos fazer elementos repetidos das letras que devem ficar juntas. A questão diz que as vogais devem ficar juntas, então como tem elementos repetidos, juntam-se essas vogais e considera-se no conjunto todo como se fosse uma única letra, então tem-se AAII, e depois faremos a permutação somente entre essas vogais, tirando as vogais sobrou L,R,V e R, mas o R se repete, considerando as vogais juntas como uma única letra temos o seguinte cálculo combinatório:

$$\frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60 \text{ anagramas.}$$

Agora faremos a combinação das vogais: $\dfrac{4!}{2!2!} = \dfrac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = 6.$

Agora multiplicando: $60 \times 6 = 360$ anagramas.

Na letra d) as vogais devem permanecer sempre juntas e as consoantes também, e em ambos os casos iremos considerar como uma única letra e fazer as permutações necessárias. As vogais devem ficar juntas, AAII e as consoantes LVRR, considerando as duas configurações como elementos únicos a permutação é 2!, Aproveitando o cálculo anterior das vogais teremos 6 possibilidades e faremos agora o cálculo das consoantes:

$$\frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12 \text{ anagramas.}$$

Multiplicando os resultados de cada um temos: $2 \times 6 \times 12 = 144.\square$

Exemplo 4.13. João sai com três moedas de 5 centavos, três moedas de 10 centavos, e uma de 25 centavos, se ele compra 40 centavos de chicletes, de quantas maneiras ele pode pagar estando com essas moedas?

Solução 4.13. Utilizando conhecimentos combinatórios de elementos repetidos podemos fazer essa questão, mas devemos antes fazer as configurações de quais moedas iremos trabalhar para dar o valor exato de 40 centavos. Para isso vamos chamar as moedas de cinco centavos de C, as de dez centavos de D, e a única de vinte e cinco de V, então para termos 40 centavos precisamos ter as seguintes configurações, logo a seguir faremos a permutação de cada uma:

$$\text{CDV} \longrightarrow 3!, \textit{pois não tem elementos repetidos, então são 6 possibilidades.}$$

$$\text{CCCV} \longrightarrow \frac{4!}{3!} = 4 \textit{ possibilidades} .$$

$$\text{CCDDD} \longrightarrow \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!} = 10 \ possibilidades.$$ Apenas essas possibilidades, usando o princípio aditivo temos que: $6 + 4 + 10 = 20.\square$

4.1.5 Permutação Circular

Em alguns livros didáticos aplicados no Ensino Médio o tópico permutação circular é deixado de lado pela maioria dos livros, principalmente nas publicações mais atuais. Ainda nos exemplares mais antigos é comum encontrar essa abordagem.Talvez pela pouca abordagem em vestibulares e Enem, não se fala tanto nesse tópico importante da análise combinatória.

Definição 7. Existem $n!$ permutações dos n elementos;

Existem x permutações circulares em que a cada uma correspondem n permutações. Logo: $n.x = n!$ e $x = \frac{n!}{n} = (n-1)!$ Que é o número de permutações circulares de n elementos.

Exemplo 4.14. De quantas formas 4 pessoas podem se sentar ao redor de uma mesa circular?

Segue um exemplo de uma das possíveis posições que essas pessoas podem ter na mesa. Segundo Hazzan [9], duas permutações são consideradas idênticas se, e somente se, quando percorremos a circunferência no sentido anti-horário a partir de um mesmo elemento das duas permutações, encontramos elementos que formam sequências iguais. Observe as disposições a seguir:

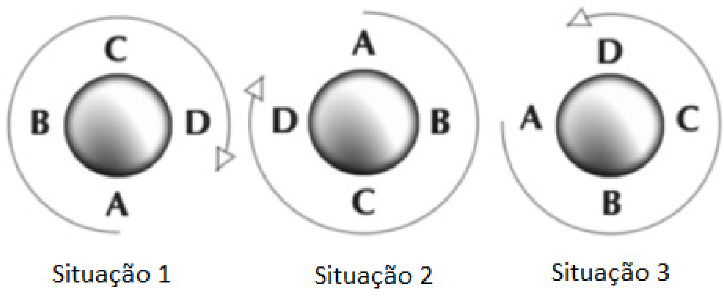


Figura 4.1: Quatro pessoas disposta em uma mesa.

De acordo com a (Figura 4.1) [2], temos as seguintes situações que ilustram as quatro pessoas dispostas em uma mesa:

situação 1) temos a sequência: A, B, C e D;

situação 2) temos a sequência: A, B, C e D;

situação 3) temos a sequência: A, B, C e D.

Solução 4.14. Em todas elas temos as mesmas sequências. Assim, partindo do ponto A e colocando este nas 4 posições possíveis teremos 4 posições idênticas. O mesmo vale para os outros pontos. Assim, partindo de qualquer ponto temos 4! para distribuir as pessoas, mas como tem 4 repetidas em cada sequência, teremos $P = \frac{4!}{4} = \frac{4 \times 3!}{4} = 3! = 6.\square$

Segundo Hazzan [9], a cada conjunto de permutação chamamos de CLASSE. Como temos x permutações circulares, teremos x classes.

Segundo Oliveira [12], autor que também aborda permutação circular, aborda uma situação semelhante ao problema anterior, como ilustra a (Figura 4.2) [3].

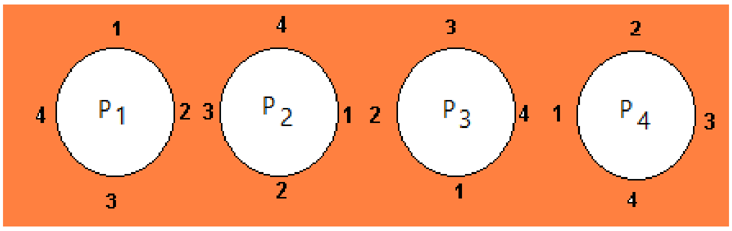


Figura 4.2: Posições das pessoas em volta das mesas: P_1, P_2, P_3 e P_4

Na mesa P_1, a pessoa 1 tem a impressão que a pessoa 2 está a sua esquerda, a pessoa 4 a sua direita e a pessoa 3 está a sua frente. Na mesa P_2, se fizer uma rotação de 90 graus no sentido horário, a pessoa 1 continua tendo a impressão de que a pessoa 2 está a sua esquerda, a pessoa 4 à sua direita e a 3 na sua frente, se fizer a rotação mais uma vez teremos a configuração da mesa P_3, e na mesa P_4 temos a mesma configuração se fizer a rotação novamente.

Teremos então quatro configurações que representam apenas uma situação, obteremos situações distintas se mudarmos as pessoas de lugar, mas se tiver no mesmo

[2]Disponível em: $https : //assccon1.wordpress.com/category/permutacão/permutacão - circular/$. Acesso em: 20 de dezembro de 2016.

[3]Disponível em: $https : //mscabral.pro.br/setemauro/aulas/combina.htm$. Acesso em: 20 de dezembro de 2016.

lugar e apenas fizer a rotação teremos a mesma configuração.

Hazzan[9] aborda que na permutação circular o que interessa é a ordem cíclica dos elementos. Assim, se uma permutação pode ser obtida a partir de outra por rotação dos elementos, então estas duas permutações são consideradas iguais. Então cada uma das $n!$ permutações simples distintas dos n elementos, analisando como se eles estivessem em linha, é contada n vezes, pois existem exatamente n possibilidades de rotacionar os elementos em torno do círculo até voltar a situação inicial. Desta forma , concluímos que o número de permutações circulares é $(PC)_n = \frac{n!}{n}$.

Exemplo 4.15. De quantos modos quatro casais podem sentar-se ao redor de uma mesa circular de tal forma que cada marido e mulher sente cada um do lado de seu cônjuge?

Solução 4.15. - Consideramos que cada casal como um único elemento e depois a permutação entre os casais. Como são 4 casais, a permutação de cada casal é: $\frac{4!}{4} = \frac{4\times 3!}{4} = 3! = 6$. Agora a permutação de cada casal separadamente, que é $2!$ para cada casal. Então temos que a quantidade de maneiras desses casais estarem juntos cada um com seu cônjuge é: $6 \times 2! \times 2! \times 2! \times 2! = 96$.□

4.2 Combinatória no Enem e Olimpíadas

Muitos alunos que estão no Ensino Médio já estão com o foco no vestibular, e na maioria das instituições o acesso é através do ENEM(*Exame Nacional do Ensino Médio*), então nesta seção vamos tratar como é abordado as questões de combinatória no Enem. Alguns dizem que as questões do Enem vêm mais contextualizadas e as questões dos tradicionais com mais objetividade e resumidos. Segundo Lima [10] a conceituação, manipulação e aplicação deve ser um trio inseparável, e o que vinha ocorrendo era que o enfoque do Enem estava sendo somente a aplicação . Abordaremos a seguir uma questão do Enem para ver como vem o assunto de análise combinatória, como é sua contextualização, quando se trata deste assunto, sabemos que gera dúvidas quando se trata de aplicação, essa questão traz o retrato do conteúdo no exame.

> É verdade que a Matemática é bela; que seu cultivo é uma das mais elevadas expressões da intelectualidade humana; que os problemas por

> ela propostos constituem desafios cuja solução fortalece a auto-estima, sublima o espírito e recompensa nobremente o esforço. Tudo isto é verdade, mas não é somente por isso que a Matemática é estudada na escola, em toda a parte. Não é apenas por isso que a Matemática é considerada cada dia mais imprescindível para a formação cultural e técnica do homem moderno.
> A Matemática é indispensável por tudo isso e, mais particularmente, porque serve ao homem. Porque tem aplicações. Porque permite responder, de modo claro, preciso e indiscutível, perguntas que, sem o auxílio dela, continuariam sendo perguntas ou se transformariam em palpites, opiniões ou conjecturas.
> As aplicações são a parte ancilar da Matemática. São a conexão entre a abstração e a realidade. Para um grande número de alunos, são o lado mais atraente das aulas, o despertador que os acorda, o estímulo que os incita a pensar.
> O professor deve considerar como parte integrante e essencial de sua tarefa o desafio, a preocupação de encontrar aplicações interessantes para a matemática que está apresentando. Como dissemos acima, nem sempre isso é fácil. Mas vale a pena indagar, pesquisar, pensar, incomodar os colegas, vasculhar livros. (LIMA,2007,p.205)

Diante disto, vemos que o trio Conceituação, Manipulação e Aplicação devem sempre está presente em uma aula, não podemos dissociar uma da outra, pois elas se complementam entre si. A abordagem para o aluno fica mais completa quando trabalhamos as três ao mesmo tempo.

Exemplo 4.16. (Enem - 2015) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por:

a) $9!/2!$

b) $9!/(7! \times 2!)$

c) $7!$

d) $5!/2! \times 4!$

e) $5!/4! \times 4!/3!$

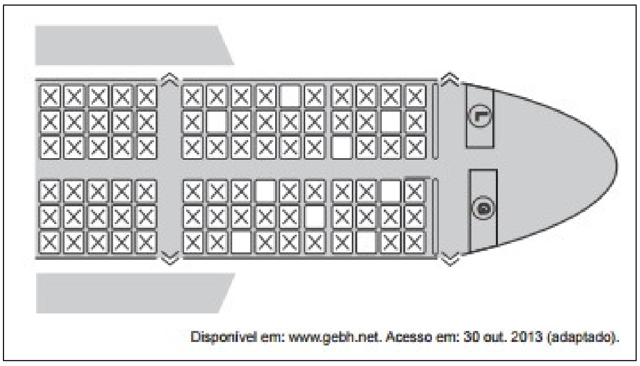


Figura 4.3: Questão do Enem 2015

Solução 4.16. Primeiro devemos fazer a combinação entre os bancos, devemos escolher sete entre os nove. E depois permutar as sete pessoas nos bancos escolhidos. E cada escolha dos bancos e das pessoas que serão permutadas independe da escolha da outra. Então: $C_9^7 \times 7! = 9!/2!.7! \times 7! = 9!/2!.\square$

No Brasil temos duas olimpíadas de matemática em nível nacional, OBMEP *(Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas)* e OBM *(Olimpíada Brasileira de Matemática)*, fora as olimpíadas regionais e estaduais realizadas em alguns estados. Então não é opcional falar de análise combinatória nas olimpíadas, temos muito que tratar desse assunto nessas competições, até porque qualquer assunto que seja abordado em olimpíadas é abordado de uma forma diferente em relação ao que é visto no Ensino Básico, não que não seja visto, mas a dificuldade é bem maior, a complexidade é outra e muitas vezes professores e alunos de licenciaturas têm muita dificuldade devido tanta lógica e complexidade nas questões.

Toda prova da OBMEP e OBM vêm com pelo menos uma questão de combinatória, não somente nas provas de Ensino Médio, mas do Ensino Fundamental também, já falamos sobre a importância de iniciar esse assunto no Ensino Fundamental, e neste capítulo vamos tratar de resolver algumas questões de combinatória. Antes de falar e tratar de questões, é importante que se fale do que vem acontecendo no Brasil e o impacto que as olimpíadas vêm causando na vida dos alunos, e o que poderá ser feito daqui em diante para melhorar o ensino de matemática no país.

Em muitos estados, como a OCM *(Olimpíada Cearense de Matemática)*, são realizadas as olimpíadas estaduais temos a do Pará, São Paulo, Rio de janeiro e outros estados. A OBMEP por ser uma olimpíada nacional vem ganhando destaque, e mudando a vida de cidades e escolas, é o caso da cidade no Piauí em Cocal dos Alves[4], uma cidade em que a renda das famílias vem da lavoura e a maioria dos pais dos alunos são analfabetos, cidade simples e humilde, mas que é destaque nacional nas olimpíadas, não somente em matemática, mas em outras áreas do saber como astronomia, português, física e demais áreas. Mas começou com a OBMEP essa sede por medalhas e conhecimento, a cidade tem uma única escola com Ensino Médio . Hoje por causa das olimpíadas, alunos que ganharam medalhas e foram influenciados pela OBMEP hoje são professores, outros estão em mestrados e doutorados em matemática, e outros partiram para outras áreas do saber.

A seguir abordaremos algumas questões de olimpíadas e como o aluno deve começar esses tipos de problemas.

Exemplo 4.17. (OBM-99) Um gafanhoto pula exatamente 1 metro. Ele está em um ponto A de uma reta, só pula sobre ela, e deseja atingir um ponto B dessa mesma reta que está a 5 metros de distância de A com exatamente 9 pulos. De quantas maneiras ele pode fazer isso?

Solução 4.17. Primeiro devemos retomar o que foi visto anteriormente, temos que o gafanhoto pula exatamente 1 metro e pretende atingir outro ponto que está a 5 metros de onde se encontra, mas quer fazer isso com 9 pulos. Logicamente não dar para fazer esse percurso apenas indo para frente, o aluno precisa logo ver isso, e como diz Polya [14], o aluno deve participar da questão, mas a questão não diz que ele não deve pular para trás, então devemos levar isso em conta, pois como não pode dar pulos somente para frente, pois assim ultrapassaria o ponto de chegada, devemos levar em conta que pode dar pulos para trás. Agora precisa ser exatamente no ponto B que deve parar. Considera-se x o número de passos para frente e y o número de passos para trás. O total de passos é 9, então a soma de todos os passos deve ser 9, e o número de passos para frente deve sobressair em 5 passos em relação ao número de passos para trás. Então a diferença entre x e y deve ser 5. Temos então:

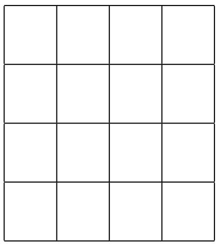
$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

[4]Disponível em: $jornalggn.com.br/blog/luisnassif/o-fenomeno-matematico-de-cocal-dos-alves-no-piaui$. Acesso em: 13 de janeiro de 2017.

Somando as duas equações temos: $2x = 14$ e $x = 7$ Substituindo o x na primeira equação temos $7 + y = 9$ e $y = 2$. Então para que o gafanhoto possa atingir o ponto B com 9 pulos, deve dar 7 pulos para frente e 2 para trás. Agora surge uma pergunta, onde exatamente ele deve dar os passos para trás e para frente? Temos x que significa os passos para frente, e y para trás, o x repete 7 vezes, e o y duas vezes, então devemos considerar a permutação com elementos repetidos com 9 elementos, sendo 7 iguais a x e 2 iguais a y.

$$P_9^{(7,\ 2)} = \frac{9!}{7! \times 2!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7! \times 2!} = \frac{9 \times 8}{2} = 36. \ \square$$

Exemplo 4.18. (OBM-2004) De quantos modos podemos sombrear quatro casas do tabuleiro 4 x 4 abaixo de modo que em cada linha e em cada coluna exista uma única casa sombreada?



Solução 4.18. A questão pode ser feita apenas olhando através das colunas ou linhas, será feita pelas colunas. Olhando para a primeira coluna temos 4 possibilidades para escolher uma casa, até ai nenhuma dificuldade, para a segunda não pode-se pintar a casa na mesma linha da casa anterior, então 3 possibilidades, a terceira casa não pode estar na mesma linha da primeira e da segunda casa, 2 possibilidades então, e a última o mesmo raciocínio temos 1 possibilidade. Usando o princípio multiplicativo: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.\square$

Exemplo 4.19. (OBMEP) Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados têm 2, 3 e 4 lugares, como na figura. De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa?

Solução 4.19. Escolhendo-se os lugares em que Alice e Bernardo devem ficar, sobram 7 lugares para os demais, fazendo arranjo de 7 tomado 4 a 4 temos:

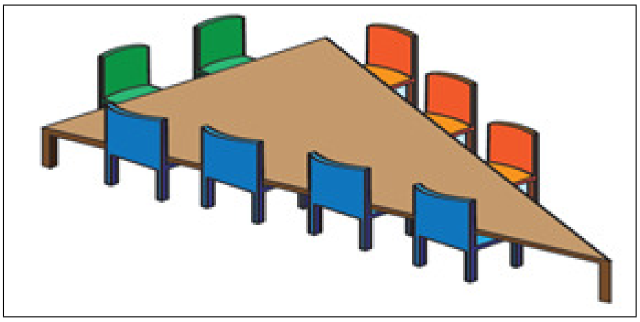


Figura 4.4: Questão da OBMEP 2012

$$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840.$$

Se Alice e Bernardo ir para o lado que tem duas cadeiras, eles podem ficar de 2 maneiras. Se eles irem para o lado que tem 3 cadeiras, eles podem se permutar de 4 maneiras. Se eles irem para o lado que tem 4 cadeiras, eles tem 6 maneiras de se permutar. Pelo princípio aditivo temos 12 maneiras de Alice e Bernardo se permutarem, e pelo PFC, tem-se: $12 \times 840 = 10080$.□

Exemplo 4.20. (OLIMPÍADA DA BÉLGICA) Cada lado de um cubo é pintado de uma cor (existem 6 disponíveis). De quantas maneiras é possível fazer isto? sabe-se que duas colorações são idênticas se podem ser obtidas por rotação do cubo.

Solução 4.20. Considera seis cores distintas, identificadas por A, B, C, D, E e F. Começando com o cubo sem nenhuma face pintada, escolhe-se uma face para ser pintada pela cor F. Percebemos que a escolha da face não interessa, pois o cubo com apenas uma face pintada pela cor F, pode ser obtida por rotação do cubo, e isso independe da face escolhida para ser pintada. Agora escolhemos a cor para pintar a face oposta à face pintada pela cor F. Então tem-se 5 possibilidades. Agora temos 4 cores para pintar as faces restantes. Colocamos as faces já pintadas como bases do cubo. Devido à simetria das faces laterais que não foram ainda pintadas e se duas colorações serem obtidas por rotação do cubo, então o que falta é permutar circularmente as 4 cores restantes nas faces laterais do cubo que é $(4-1)! = 3! = 6$ permutações. Como temos que pintar as bases e as faces laterais, então: $5 \times 6 = 30$ colorações diferentes.□

Referências Bibliográficas

[1] Borba, R., P. C., Barreto F., L. R.**Crianças, adolescentes, jovens e adultos e a resolução de situações combinatórias**. Horizontes, v. 31, n.1, p. 91-99, jan./jun.2013.

[2] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Fundamental**. Bases Legais, 1997.(pag.40). Disponível em
< *http : //portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf* > acesso em
12 de junho de 2016.

[3] **_______. PCN+ Ensino Médio Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, 2007. Disponível em ¡http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ Ciencias Natureza.pdf¿ acesso em 06 de junho de 2016.

[4] **_______. Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Secretaria de Educação Básica, 2000b. Disponível em < *http : //portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf* >. Acesso em: 18 jun. 2016.

[5] Dante, L,R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**: 1° a 5°série para estudantes do curso de magistério e professores do 1° grau. 10.ed. São Paulo: Ed. Ática, 1998.

[6] Dante, L. R. **Matemática**: contexto e aplicações, Ensino Médio, vol. 2. 4 ed. São Paulo: Ed. Ática, 2008.

[7] Domingues, H. **Cardano**: o intelectual jogador. In: HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar**. São Paulo: Editora Atual, 1993.

[8] Fomin, D. Genkin.S. **Círculos Matemáticos**. Tradução: Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro:IMPA, 2012.

[9] Hazzan, S. **Fundamentos de matemática elementar**: combinatória, probabilidade - vol. 5. 7. ed. São Paulo: Editora Atual, 2004.

[10] Lima, E. L. **Matemática e Ensino**.3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

[11] Morgado, A. C. O. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

[12] Oliveira, M. R. **Coleção elementos da matemática**. 2. ed. Belém, PA: GTR, 2009.

[13] Paiva, M. R. **Matemática**: Paiva. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

[14] Polya, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

[15] **Portal da matemática OBMEP**. Disponível em:*http : //matematica.obmep.org.br/*. acesso em 10 de novembro de 2016.

[16] Santos, J. P. O., MELLO, M. P.e MURARI ,I. T.C. et al. **Introdução à análise combinatória**. 4. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

[17] Vazquez, C. M. R.,NOGUTI, F. C. H. **ANÁLISE COMBINATÓRIA: ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS E UMA ABORDAGEM PEDAGÓGICA**:VIII Encontro Nacional de Educação Matemática ,15 a 18 de julho de 2004.

[18] **Figura(3.1)** Disponível em: *pibiduspsc.blogspot.com.br*/2013/03/*sequencia − de − aulas − principio.html*.acesso em 13 de fevereiro de 2017.

[19] **Figura(4.1)**
Disponível em: *https : //assccon1.wordpress.com/category/permutacao/permutacao−circular*.acesso em 18 de Dezembro de 2016.