

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Armadilhamento de Campos de Spin-0 em um Anel
imerso em (3,1) dimensões**

Fabiano de Carvalho Simas

ORIENTADOR: ADALTO RODRIGUES GOMES DOS SANTOS FILHO

SÃO LUÍS, AGOSTO DE 2011

Armadilhamento de Campos de Spin-0 em um Anel imerso em (3,1) dimensões

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

Orientador: Adalto Rodrigues Gomes dos Santos Filho
Doutor em Física - IFMA

SÃO LUÍS, AGOSTO DE 2011

Simas, Fabiano de Carvalho

Armadilhamento de Campos de Spin-0

em um Anel imerso em (3,1) dimensões/ Fabiano de Carvalho Simas - 2011

89.p

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós Graduação em Física

Universidade Federal do Maranhão.

Orientador: Adalto Rodrigues Gomes dos Santos Filho

1. Teoria Quântica de Campos 2. Física de Partículas. 3. Localização de Campos.

4. Defeitos Topológicos. I Título

CDU 530.145

FABIANO DE CARVALHO SIMAS

Armadilhamento de Campos de Spin-0 em um Anel imerso em (3,1) dimensões

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

BANCA EXAMINADORA

Adalto Rodrigues Gomes dos Santos Filhos (*ORIENTADOR*)
Doutor em Física - Instituto Federal do Maranhão (IFMA)

Roberto Menezes da Silva
Doutor em Física - Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Rodolfo Álvaro Casana Sifuentes
Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

À Deus

Aos meus pais, Jairo e Maurilene

Aos meus irmãos, Gustavo e Kristiano

Aos eternos amigos

À Ana Karoline Sousa Mendes

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelas bênçãos que tens dado. Agradeço ao meu orientador Prof. Adalto Rodrigues Gomes dos Santos Filho pela paciência, pelas discussões, por sua seriedade que me faz querer trabalhar mais a cada dia e pelos seus conselhos. À CAPES pelo suporte financeiro, que possibilitou a realização deste trabalho. Aos profs. do Departamento da Pós UFMA, em especial os profs. Manoel Messias e Casana. Ao Prof. Roberto Menezes por inúmeras colaborações. Não poderia deixar de agradecer também aos amigos do mestrado: Eduardo Carvalho, Kleber Anderson, Westney, Mauro, Diego Barbosa, Roemir, Célio, Girlane, João Elias, Alysson, Guilherme e Carlisson. Também agradeço aos amigos que estão comigo desde a graduação no IFMA: André Hadad, Raoni, Genilson, Walisson.

Não esquecendo dos amigos que me acompanham desde a infância, são eles: Thales, Érico, Beto, Wendel, William, Júnior e Bruno. Aos eternos amigos Thiago Sousa, Jama, Isabela, Renato e Gabriela que sempre confiaram na minha capacidade e sempre compartilham momentos inesquecíveis, também a Dona Marília, Seu José Sebastião e Dona Concita por inúmeros conselhos.

Agradeço a Dona Zilda por sua torcida e pensamento positivo. Ao meu cunhado George Amilcar por se orgulhar do que eu faço. A Aline e Junior Abas pelas conversas.

A todos os familiares, em especial aos meus tios Paulo Henrique e Carlos César que me ajudaram na construção da minha educação. A minha avó Marli Bezerra e a minha tia Maura pelo apoio. Agradeço ao meu pai Jairo Simas pelo exemplo, por sua dedicação, pela construção do meu caráter e seus ensinamentos, a minha mãe Maurilene Simas pela compreensão, pela sensibilidade e por me acolher nos momentos mais difíceis. Aos meus irmãos Gustavo Simas e Kristiano Simas, pela união e por acreditarem em mim.

À Ana Karoline Sousa Mendes por seu amor, confiança, respeito, por me fazer crescer, acreditar e por não me deixar desistir nunca, permanecendo ao meu lado sempre.

*Nunca desista...nunca desista dos seus sonhos, mesmo
quando o nunca parecer ser a certeza.*

Fabiano Simas

Resumo

Neste trabalho nós consideramos anéis construídos com um campo escalar ϕ com simetria radial imerso no espaço-tempo de Minkowski-(3, 1). Tais defeitos topológicos têm raio e espessura relacionados com a densidade de energia e podem ser obtidos a partir de uma densidade lagrangeana explicitamente dependente da distância, o que pode ser interpretada como uma teoria efetiva a partir de um modelo mais fundamental. Negligenciando a backreaction em um campo escalar fraco Φ acoplado com o campo forte ϕ , um modo padrão de decomposição leva à uma ação padrão para os campos de Klein-Gordon 1-dimensional vivendo ao longo do eixo do anel e uma equação do tipo Schrödinger 2-dimensional, descrevendo partículas massivas de spin-0. Uma escolha específica do acoplamento entre os campos escalares Φ e ϕ é capaz de transformar a equação do tipo Schrödinger em uma forma 1-dimensional dependendo da distância radial. A interação é compatível com um caráter repulsivo do núcleo do anel e com a presença de ressonâncias ao redor do raio do anel. A presença taquiônica e modos físicos são descritos em um diagrama de espaço de fase, que é confrontado com a análise numérica dos modos massivos. Verifica-se que, para a escala de anéis considerados, raios maiores favorecem o processo de localização e quanto aos anéis de raios menores, o vazamento dos modos massivos é compatível com uma interação repulsiva agindo entre as paredes do anel e as partículas massivas de spin-0.

Palavras Chaves: Teoria de campos e Física de Partículas, Localização de Campos, Defeitos Topológicos.

Abstract

In this work we consider rings constructed with a scalar field ϕ with radial symmetry embedded in the $(3, 1)$ Minkowski spacetime. Such topological defects have radius and thickness related to the energy density and can be attained from a lagrangian density explicitly dependent with the distance, which can be interpreted as an effective theory from a more fundamental model. Neglecting the backreaction on a weak scalar field Φ coupled with the strong field ϕ , a standard mode decomposition leads to a standard action for one-dimensional Klein-Gordon fields living along the ring axis and a two-dimensional Schrödinger-like equation, describing massive spin-0 particles. A specific choice of the coupling between the scalar fields Φ and ϕ is able to transform the Schrödinger-like equation in a one-dimensional form depending on the radial distance. The interaction is compatible with a repulsive character of the core of the ring and with the presence of resonances around the ring radius. The presence of tachyonic and physical modes are described in a phase space diagram, which is confronted with the numerical analysis of the massive modes. It is found that, for the scale of rings considered, larger radius favor the localization process, and for small radius the leaking of the massive modes is compatible with a repulsive interaction acting between the rings walls and the massive spin-0 particles.

Keywords: Fields Theory and Particles Physics, Fields Localization, Topological Defects.

Sumário

Introdução	1
1 Introdução	1
2 Teoria da Homotopia	6
2.1 Homotopia	7
2.2 Grupos de Homotopia	10
2.3 Grupo Fundamental	10
2.4 Grupos Superiores	13
2.5 Grupo de Homotopia associado ao mapeamento $S^n \rightarrow S^n$	16
3 Defeitos Topológicos	22
3.1 Formação dos Defeitos Topológicos	22
3.2 Quebra Espontânea de Simetria	23
3.3 Defeitos Topológicos	29
3.3.1 Kink	31
3.3.2 Considerações Topológicas	33
4 Teorema de Derrick	37
4.1 O modelo $O(3)$ não-linear	39
4.2 Branais com um Campo Escalar	40
4.3 Sólitons BPS em Teoria de Lifshitz	43
4.4 Dependência explícita com a distância na Lagrangeana	45
5 Armadilhamento de campos de spin-0 em um anel em $(3,1)$-dimensões	50
5.1 Anel com um Campo Escalar	51

5.2	Localização de Spin-0	54
6	Conclusão	64
7	Apêndice	66
7.1	Construção das curvas limitando as regiões física, taquiônica e não física	66
7.2	Soluções Numéricas	69
	Referências Bibliográficas	72

Capítulo 1

Introdução

Em Física, é comum novos desafios surgirem com o aparecimento de novas teorias. O início do século passado marcou a humanidade com o surgimento de importantes teorias físicas, tais como a Relatividade Especial [15] e a Mecânica Quântica. A busca de equações que descrevessem sistemas quânticos relativisticamente levaram à equação de Klein-Gordon e à equação de Dirac. Posteriormente, como resultado do esforço de físicos importantes como Born, Jordan, Heisenberg e outros, a questão da criação e aniquilação de partículas foi inserida na formulação mais geral da Teoria Quântica de Campos. Uma teoria quântica de campos com enorme sucesso é a eletrodinâmica quântica, considerada a teoria física de maior poder de previsibilidade, quando comparada com resultados experimentais. Incluindo-se as interações forte e fraca, chega-se ao Modelo Padrão, a teoria quântica de campos que descreve as partículas elementares e suas interações.

Em física fundamental, há um número considerável de trabalhos envolvendo sistemas físicos com dimensões diferentes das $(3, 1)$ dimensões usuais do espaço-tempo.

No que se refere a um número de dimensões maiores que o usual, a proposta de mundo-brana (*braneworld*) [59] consiste em considerar o nosso Universo 4-dimensional imerso em um espaço de mais dimensões espaciais, chamado de *bulk*. A origem dessa formulação se situa em parte no sucesso do modelo padrão.

O modelo padrão das partículas elementares é resultado do esforço teórico e experimental de várias gerações de físicos, e descreve de forma magnífica as partículas básicas e como elas interagem. Contudo, questões importantes ainda desafiam a comunidade; uma delas é a descrição unificada das quatro forças fundamentais. Uma abordagem fundamental na procura da unificação das forças fundamentais é a teoria das cordas. Além de incorporar naturalmente a gravidade, esta teoria já foi capaz de obter resultados surpreendentes. Aqui é importante lembrar que a teoria das cordas prevê a existência

de mais dimensões $(10, 1)$ do que aquelas que nós conseguimos por hora detectar. Uma saída para esse conflito é considerar as 7 dimensões extras compactificadas de uma maneira que não pudéssemos detectá-las experimentalmente. Nessa perspectiva, nossa visão de um Universo 4-dimensional seria muito restrita, pois estaríamos imersos em um espaço-tempo com mais dimensões. Uma importante característica relacionado ao cenário das dimensões extras é que todos os campos do modelo padrão são localizados na brana e apenas a gravidade é livre para propagar em todas as dimensões. Assim, em teoria das cordas [60], as branas tomam forma e fornecem modelos de discussão tanto para questões fenomenológicas quanto para questões cosmológicas relacionadas a dimensões extras. Este cenário, fornece novos elementos para a abordagem de problemas fundamentais, tais como problema da hierarquia da massa, constante cosmológica, a natureza da matéria escura e a energia escura.

No que se refere à física de mais baixa dimensionalidade, há investigações interessantes envolvendo a construção de defeitos topológicos com campos escalares contornando o teorema de Derrick [13, 37, 39, 40], a influência de possíveis quebras da invariância de Lorentz para sistemas obedecendo a eletrodinâmica planar [61, 64]. Além disso, podemos citar as notáveis propriedades do grafeno, tais como o efeito Hall anômalo [65], a ausência de localização [66], e a relação de dispersão linear. No grafeno os elétrons comportam-se como partículas relativísticas não-massivas, o que requer a eletrodinâmica quântica planar [67] para um entendimento mais profundo desse sistema encontrado em física da matéria condensada.

Nesta dissertação estamos particularmente interessados em soluções das equações de movimento soluções estáveis e de energia finita em que a configuração de campo interpola entre um mínimo e outro do potencial. Em uma teoria de campo escalar em $(1, 1)$ -dimensões tais soluções são ditas do tipo kink (e antikink). Assim, um kink propagante é uma onda solitônica, a qual é caracterizada por uma densidade de energia localizada, a qual tem classicamente o caráter de partícula. Aqui, como em geral é feito na literatura física, caracterizamos sólitons em Teoria de Campos de uma forma mais geral. A rigor, soluções tipo ondas solitônicas seriam caracterizadas por um processo onde a não-linearidade compensasse a perda de coerência (dispersão) da onda. Nesse processo, uma colisão kink-antikink teria como consequência, no máximo, um atraso de fase em cada uma das ondas em colisão. Isso é o que ocorre no modelo Sine-Gordon. No caso geral, as não-linearidades podem tornar a interação kink-antikink extremamente complexa, o que torna muito interessante o estudo desses sistemas. Em geral, tais soluções estáveis são relacionadas às condições de contorno que os campos obedecem. Tais condições servem de mapeamento entre o espaço de coordenadas e o espaço de configuração dos campos, levando a uma classificação topológica das soluções. Daí o nome de soluções topológicas e de

defeitos topológicos a tais soluções.

No que diz respeito à classificação citada acima, fizemos no capítulo 2 uma breve revisão sobre Teoria da Homotopia, discutindo seu principal conceito onde dois mapeamentos são ditos ser homotópicos quando um pode ser deformado continuamente sobre o outro. Um exemplo prático que descreve essa deformação pode ser visto quando tomamos um disco e há a possibilidade de encolhê-lo a um ponto. Nesse exemplo o disco é homotópico a um ponto, pois o disco foi deformado continuamente. Um dos pontos importantes no estudo da homotopia, está em definir os grupos de homotopia. A ideia principal dos grupos homotópicos se resume em introduzir um espaço padrão e estudar todos os mapas em outro espaço para podermos perceber como esses mapas são classificados quanto a equivalência homotópica. É essa classificação que dá origem à estruturas de domínio, tais como paredes de domínio, cordas, monopólos e texturas.

O estudo de defeitos topológicos em teoria de campos cobre uma vasta área da física, desde a aplicação em física da matéria condensada, como ocorre com paredes de domínio em materiais ferromagnéticos, à cosmologia, como no estudo da formação de tais defeitos decorrentes de transições de fases em um Universo primordial. Nesse contexto, à medida que o Universo foi se resfriando, as sucessivas transições de fase são manifestações de quebras de simetria na teoria subjacente. A quebra espontânea de simetria é o principal mecanismo teórico que explica a origem dos defeitos topológicos. Portanto, no capítulo 3 verificamos a formação desses defeitos.

Existem vários exemplos que ilustram o conceito de quebra de simetria. Podemos considerar um estacionamento, onde em uma extremidade os carros estacionam de modo a ficarem inclinados para esquerda, então todos os carros ao lado do primeiro irão estacionar da mesma forma. Já na outra extremidade, podemos supor que o motorista não observasse como estão dispostos os outros carros do estacionamento e colocasse o carro inclinado para à direita. Como consequência, quando o estacionamento ficar cheio, iríamos verificar que houve uma quebra na simetria, pois uns estarão voltados para a esquerda e outros para direita. Outro bom exemplo, é o de uma vareta na posição vertical sobre uma mesa; ao aplicamos uma força sobre a vareta, a mesma irá se deformar para qualquer um dos lados, ou seja, de forma aleatória, quebrando assim a simetria. De forma parecida, idealizamos um lápis na vertical com a ponta voltada para uma mesa sendo segurado por uma pessoa, quando o soltarmos, este irá cair de qualquer maneira sob a mesa e em qualquer posição, nesse momento a simetria que existia em torno do eixo do lápis deixa de existir.

Não só em exemplos do cotidiano encontramos exemplos de quebras espontâneas de simetria. Em sistemas ferromagnéticos os vetores de magnetização podem ficar alinhados em uma única direção até

uma certa área de transição marcada pela mudança na direção desses vetores; assim cria-se um defeito chamado parede de domínio magnética, mantendo desconectadas duas regiões com mesma energia. Os vários tipos de defeitos que são formados a partir da quebra de simetria dependem exclusivamente do tipo de simetria que é quebrada e da natureza da transição de fase. Assim, por exemplo, uma parede de domínio surge quando uma simetria discreta é quebrada; ao contrário, as cordas cósmicas necessitam de quebra de simetrias axiais; por fim os monopólos, que possuem dimensão zero e surgem a partir de uma quebra esférica.

O capítulo 4 trata do teorema de Derrick e de algumas formas de contorná-lo. A discussão se baseia na tentativa de encontrar soluções independentes do tempo tanto para mais campos escalares quanto para mais dimensões espaciais. É certo que modelos em $(1, 1)$ -dimensões, apesar de mais simples, sofrem de uma grande restrição no que tange à descrição de sistemas mais realísticos. Seria interessante encontrarmos, para mais dimensões espaciais, soluções do tipo sólton, ou seja, soluções estáticas, estáveis, não-triviais e com energia finita diferente de zero. Ocorre que o Teorema de Derrick restringe a existência de soluções tipo ondas solitônicas quando a dimensionalidade do espaço é maior ou igual a 3.

A premissa do teorema assume uma estrutura padrão da Lagrangeana com potencial que é não-negativo. Iremos mostrar que soluções com $D \geq 2$ colapsam e são portanto instáveis. No entanto, esta dificuldade pode ser evitada por meio de alternativas às premissas do Teorema de Derrick.

Dentre elas podemos considerar i) a inclusão de termos de derivadas de ordem superior na lagrangeana; ii) a adição de campos de gauge construindo defeitos em $(3, 1)$ -dimensões (modelo de Yang-Mills); iii) introdução da dependência temporal, resultando em soluções não-dissipativas, iv) inclusão de vínculos os campos, como no caso do modelo $O(3)$ não-linear; v) sistemas com divergência na energia total, contornada por um cutoff na distância devido à existência de um outro defeito ; vi) dependência explícita com a distância no potencial. No Capítulo 5 consideraremos uma dependência explícita com a distância na densidade lagrangeana. Defeitos construídos com apenas um campo escalar em $(2, 1)$ -dimensional são obtidos, os quais têm a forma de anéis estáveis com raios e espessuras característicos. Nesse capítulo, o qual é a contribuição original dessa dissertação, trabalharemos com os anéis imersos em um espaço tempo usual de Minkowski- $(3, 1)$. Os defeitos assim formados serão estudados em função da capacidade de armadilhar campos de matéria; por simplicidade consideraremos neste trabalho campos de spin-0. A Seção 5.1 é responsável por descrever a imersão do anel escalar. Na seção seguinte, trabalha-se com a questão dos estados ressonantes, obtendo uma equação do tipo Schrödinger para os modos massivos e por fim implementa-se um método numérico que descreve os

estados ressonantes, resultados esses confrontados em um diagrama. A nossa conclusão é apresentada no Capítulo 6.

Capítulo 2

Teoria da Homotopia

O objetivo desse capítulo de revisão é introduzir alguns conceitos de geometria e construções em Topologia Algébrica. Um conceito importante em topologia é o de homeomorfismo, que é a equivalência entre dois espaços distintos. Um exemplo interessante pode ser observado a partir da Fig. 2.1.

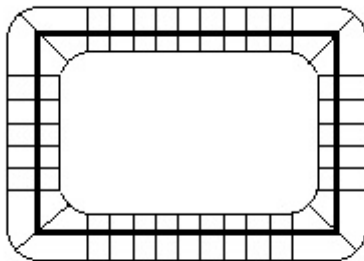


Figura 2.1: Encolhimento de um quadrado externo em um interno.

A figura geométrica pode ser escrita na forma espessa, como podemos ver nas curvas fechadas que a delimita, mas também é possível visualizar que esse contorno é compactado por uma linha no seu interior, podendo ser chamado de sub-superfície do contorno espesso. Cada linha no interior do quadrado é um sub-espaço do quadrado mais grosso, dessa forma, o espaço espesso pode ser encolhido continuamente ou deformado em um espaço interno fino. Agora, como outro exemplo encontrado em Nakahara [1], vamos considerar dois discos D_1 e D_2 dentro de dois espaços topológicos diferentes

X e Y , onde $D1$ possui um buraco em seu centro no espaço X , enquanto que no espaço Y não há buracos nos discos. No espaço topológico Y , podemos encolher os dois discos a um ponto, o mesmo caso apenas acontece no disco $D2$ do espaço X , pois a existência do buraco no disco $D1$ impossibilita o encolhimento do disco a um ponto. Portanto, dizer que o disco $D1$ é homotópico ao disco $D2$ significa que $D1$ pode ser obtido a partir de uma deformação contínua do disco $D2$. Percebemos também que no espaço Y , os discos $D1$ e $D2$ são homotópicos a um ponto, a medida que sofrem um encolhimento, ou seja, uma deformação. Voltando ao exemplo da Fig. 2.1, observamos que a figura mais espessa sofre uma deformação tornando-se o quadrado interno, sem borda, portanto, fica claro que houve uma deformação na figura, concluí-se que o quadrado externo é homotópico em relação ao interno. Então, podemos pensar que esse processo de encolhimento depende do tempo ($0 \leq t \leq 1$), sendo definido por uma família de funções $f(t) : \mathbf{A} \rightarrow A$ (onde a letra \mathbf{A} representa o quadrado espesso da Fig. 2.1 e a letra A expressa a figura interna) parametrizada por $t \in I = [0, 1]$, onde $f(t)$ é o ponto cujo ponto x se move com velocidade constante chegando a um ponto imagem em um tempo $t = 1$, originando uma deformação de retração de um espaço X em um subespaço A que caracteriza uma família de mapas $f(t) : \mathbf{A} \rightarrow A$. Essa deformação de retração é um caso especial em homotopia, a qual descreve que qualquer família de mapas $f(t)$ parametrizado por um intervalo de tempo t associado a um mapa $F : X \times I \rightarrow Y$ dado por $F(x, t) = f(t)$ é contínuo. Dois mapas, $f(0) : X \rightarrow Y$ e $f(1) : X \rightarrow Y$ podem ser chamados de homotópicos, notação $f(0) \simeq f(1)$ quando existe uma homotopia $f(t)$ conectando-os [1, 2]. Outro conceito de grande destaque é o de homotopia equivalente. Diz-se que um mapa $f : X \rightarrow Y$ é uma homotopia equivalente ou homotopia do mesmo tipo, notação $X \simeq Y$ se existe um mapa $g : Y \rightarrow X$ tal que fg e gf correspondem a uma matriz identidade, denotada por $\mathbf{1}$. Dois espaços topológicos são equivalentes se eles podem ser deformados continuamente um no outro. Assim, podemos olhar para deformações especiais preservando a parte das características topológicas. Dessa forma, homotopia são funções de deformações reguladas por um parâmetro contínuo. Um uso importante da homotopia fica por definir os grupos de homotopia, invariantes importantes na topologia algébrica [3].

2.1 Homotopia

Para formar o conceito de homotopia faz-se necessário a introdução de conceitos tais como homotopia de caminhos e também caminhos fechados, este último chamado de loop. O principal destaque em se tratando de caminho em uma superfície é a aplicação do intervalo $I = [0, 1]$ sobre essa su-

perfície [1]. Com o objetivo de deixar claro o entendimento sobre homotopia, vamos considerar um elástico que possui suas extremidades fixas em 0 e 1, associando a cada posição do elástico a aplicação $t \in I = [0, 1]$ correspondente a variação de t , essa interpretação nos permite pensar em deformações sofridas no elástico ao longo do tempo. Observando o elástico como um caminho com pontos inicial e final fixos sobre uma superfície, podemos esticá-lo ou arrastá-lo sobre a superfície, obtendo diversos caminhos diferentes, mas que possuem a capacidade de deformar um sobre o outro. Por meio do exemplo abordado, a ideia de esticar ou arrastar é ligada a definição de homotopia.

Uma maneira de interpretar o conceito de homotopia de caminho é pensarmos em um espaço onde seja possível viajar entre dois pontos extremos. Em um espaço topológico X a definição de caminhos exige que para quaisquer dois pontos x_0 e x_1 pertencentes ao espaço topológico X , existe uma função contínua $f : I \rightarrow X$ com $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$, onde $I = [0, 1]$ corresponde ao intervalo [3]. De forma geral, uma aplicação contínua $f : I \rightarrow X$ é chamada de homotopia de caminho em X , afirmando que a homotopia de caminho une os pontos fixos, ou seja, f é o caminho que liga a origem x_0 e o ponto final x_1 . Por outro lado, quando tratamos com caminhos fechados $(f, g : I \rightarrow X)$ são homotópicos quando existe uma função contínua $H : I \times I \rightarrow X$ com o valor comum dos pontos inicial e final $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = x_0$ [6], chamado de ponto base do loop, ou seja, o caminho começa no ponto x_0 completa uma volta e termina no mesmo ponto. Os caminhos fechados, denominados de loops podem ser classificados em classes. A primeira classificação é definida quando temos loops pertencendo à mesma classe resultando em uma deformação de um loop em outro. Como exemplo, podemos destacar um quadrado que pode ser deformado continuamente em um círculo. Quando os loops pertencem a diferentes classes, esses por sua vez não podem ser deformados um no outro. Outro importante conceito acoplado aos caminhos fechados são os de superfície simplesmente conexa e não-simplesmente conexa, aos quais o primeiro é caracterizado por qualquer loop ser reduzido continuamente a um ponto, enquanto a segunda nem todas as curvas fechadas podem ser distorcidas a um ponto. Um exemplo de fácil visualização em referência as superfícies simplesmente conexas e não-conexas, é representado por uma esfera e uma xícara, respectivamente, onde qualquer loop que fizermos sobre a esfera pode ser reduzido a um ponto, enquanto que na xícara, se fizermos um loop sobre a asa não conseguiremos distorcê-la a um ponto [4, 11]. Por meio dos conceitos apresentados, podemos focar no principal interesse, o qual é classificar os caminhos e loops de acordo com a relação de equivalência de modo que classes equivalentes formam um grupo [5, 6, 7], ou seja, identificando os caminhos e loops que podem deformar continuamente um no outro, as classes de equivalência irão originar uma estrutura de grupo.

Considerando os seguintes espaços topológicos X e Y e também os mapeamentos contínuos $f, g : X \rightarrow Y$, uma homotopia será considerada de f para g ($f \simeq g$) se um mapa contínuo $H : X \times I \rightarrow Y$ (uma função contínua de um produto cartesiano de X e I para Y) existir [1, 2, 4], sendo que:

$$H(x, 0) = f(x), \tag{2.1}$$

$$H(x, 1) = g(x) \tag{2.2}$$

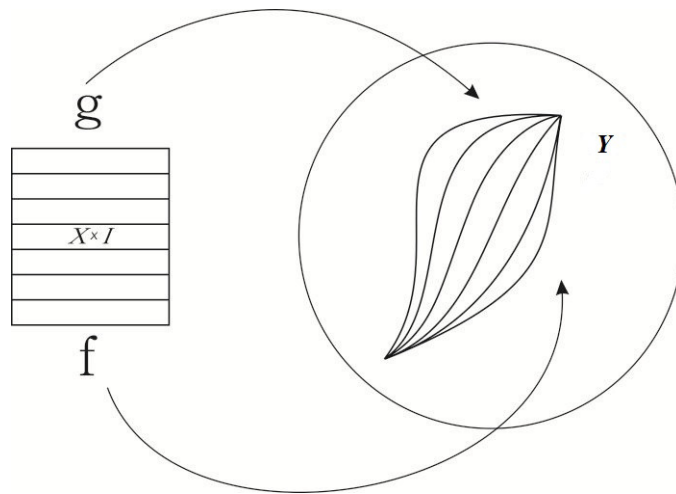


Figura 2.2: Homotopia entre f e g .

O mapa H é chamado de homotopia entre f e g , em outras palavras, a homotopia H deforma a função f continuamente na aplicação g . A homotopia origina uma família de parâmetros de mapas contínuos $H(t)$ para $t \in I = [0, 1]$, onde esse parâmetro é idealizado com uma variação no tempo e que H é uma deformação de f em g com t varrendo de 0 à 1 (veja a Fig. 2.2). A ideia de homotopia está em representar uma deformação contínua, sem pulos ou quebras, de um mapa para outro. Para espaços topológicos X e Y , homotopia está inteiramente ligada a uma relação de equivalência [8]. Homotopia é uma relação de equivalência sobre um conjunto de funções contínuas, é um mapeamento contínuo entre dois espaços topológicos com uma deformação gerada por uma função regulada por um parâmetro. As classes de equivalência são chamadas de classes de homotopia [9], denotada por $[f]$.

O estudo da teoria da homotopia é fundamental para determinar a natureza dos defeitos que podem aparecer em uma quebra espontânea de simetria, que será abordado no capítulo seguinte.

Para o entendimento sobre a classificação das estruturas de domínio será introduzido o conceito de Grupos de Homotopia [13].

2.2 Grupos de Homotopia

Em grupos de homotopia, o interesse está em [1] deformações contínuas de mapas sobre outros. Um grupo de homotopia é uma estrutura algébrica associada a um espaço topológico que nos permite destacar as informações sobre a topologia do espaço. A teoria tem como objetivo construir invariantes topológicos para caracterizar os espaços topológicos. Consideremos os espaços topológicos X e Y com os seguintes mapeamentos $f : X \rightarrow Y$ e $g : X \rightarrow Y$ pertencendo a um conjunto destes mapas, nomeado de variedade M . Podemos introduzir a relação de equivalência, onde os mapeamentos f e g são ditos homotópicos caso um deforme continuamente o outro mapa. Estudando os mapeamentos podemos comparar os espaços dos mapeamentos com os espaços X e Y . Portanto, resumindo a ideia básica dos grupos de homotopia, podemos dizer que toma-se um espaço padrão e estuda-se todos os mapas em outro espaço, para perceber como esses mapas são classificados de acordo com a equivalência homotópica.

Os grupos de homotopia são utilizados para classificar espaços topológicos [1], ou seja, o surgimento das estruturas de domínios são classificados via grupo de homotopia por meio de um espaço topológico representado pelo espaço interno. Mapas que preservam o ponto base formam um conjunto de classes de homotopia, como por exemplo, o conjunto de mapas de uma esfera em uma variedade, essas classes de homotopia caracterizam um grupo chamado de n -ésimo grupo de homotopia denotado por $\pi_n(X)$ [2]. O grupo fundamental é um simples exemplo, o qual terá uma discussão mais abrangente na seção seguinte, é um grupo constituído de classes de homotopia descrito por caminhos fechados (loops) a partir de um ponto base.

2.3 Grupo Fundamental

A topologia é recente quando comparada com outros ramos da Matemática, responsável pelo estudo dos espaços topológicos. A topologia inclui sub-áreas as quais são divididas da seguinte maneira:

- Topologia Geral: relacionado a conceitos como compacidade e conexidade;
- Topologia Geométrica: estuda estruturas como as variedades, incluindo a teoria dos nós;
- Topologia Algébrica: investiga estruturas algébricas como grupos de homotopia e homologia.

Esta última estuda técnicas para formação de imagens algébricas, conhecidas como grupos, dos espaços topológicos. Com a necessidade de caracterizar o espaço e também os mapas, é de extrema importância a introdução de uma função, como mecanismo essencial da criação dessas imagens. O maior objetivo na construção da álgebra topológica gira em torno da reconstrução das formas de todos os espaços ou de classes desses espaços [9, 10]. Classes de caminhos fechados constituem um grupo, que é a principal característica topológica de um espaço. Para essa observação é necessário a introdução de operações entre os caminhos. Primeiro vamos considerar a seguinte ilustração, suponha que uma pessoa percorra um caminho durante uma hora e sem parar continua a caminhar por mais uma hora, agora se ao invés de demorar duas horas para efetuar todo o percurso a pessoa gostaria de realizar todo ele em apenas uma hora, a resposta é simples, ela deveria caminhar mais rápido, ou seja, deveria percorrer o primeiro caminho em apenas meia hora para que possa restar tempo para caminhar a segunda parte do percurso. Portanto, essa é a ideia de operação de caminhos.

Seja o espaço X e os caminhos $f : I \rightarrow X$ (x_0 para x_1) e $g : I \rightarrow X$ (x_1 para x_2) tal que $f(1) = g(0)$, definimos o produto de caminhos ou composição $f \cdot g$ (Fig. 2.3), ao qual consiste em percorrer primeiro o caminho f e em seguida o caminho g , correspondendo ao percurso consecutivo de cada um deles com o dobro da velocidade. Tal caminho é dado por uma aplicação $a(x) = f \cdot g$, definida por:

$$a(x) = (f \cdot g)(x) = \begin{cases} f(2x), & 0 \leq x \leq 1/2; \\ g(2x - 1), & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

O produto nos permite definir as seguintes propriedades:

- Associativa: $[f] \cdot ([g] \cdot [a]) = ([f] \cdot [g]) \cdot [a]$.
- Identidade: é entendida para qualquer $x \in X$, sendo $e_x : I \rightarrow Y$ tal que $e_x(I) = x$, onde e_x é um caminho constante em X . Se f é um caminho entre os pontos x_0 e x_1 , temos:

$$[e_{x_0}] \cdot [f] = [f] \quad (2.4)$$

$$[f] \cdot [e_{x_1}] = [f] \quad (2.5)$$

podemos então perceber que os elementos identidade são diferentes em diferentes pontos.

- Inversa: a existência do elemento inverso é explicado pelo caminho inverso de f que vai de x_0 à x_1 , ou seja, é um caminho que sai de x_1 e chega em x_0 , denotado por f^{-1} , caracterizado por $f^{-1} = f(1 - x)$, então $[f] \cdot [f^{-1}] = [e_{x_0}]$ e $[f^{-1}] \cdot [f] = [e_{x_1}]$.

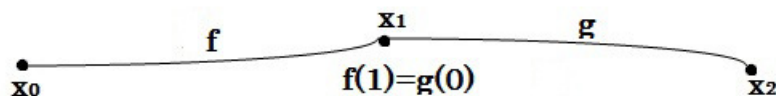


Figura 2.3: Composição dos caminhos f e g .

Dessa forma, fica claro que as propriedades não são capazes de definir uma estrutura de grupo sobre apenas um conjunto de classes. Das propriedades citadas acima, os elementos de identidade são diferentes, impossibilitando que o produto dos caminhos defina um par de classes equivalentes. Portanto, um conjunto das classes de homotopia de caminho em um espaço X não forma um grupo [9]. Se, por outro lado, consideramos um conjunto das classes de homotopia de loops com o ponto base fixo, a operação produto assim definida é capaz de caracterizar um grupo, pois temos: (i) dado dois loops com o mesmo ponto base x_0 , o produto $f \cdot g$ é bem definido e é um loop com o ponto x_0 ; (ii) a propriedade associativa é satisfeita e a identidade é única, o que leva à existência de um elemento inverso. Portanto as propriedades de grupo são asseguradas. O grupo formado por classes de homotopia de loops com ponto base x_0 que podem ser mapeados a um ponto é chamado de grupo fundamental do espaço X relativo ao ponto base ou primeiro grupo de homotopia, identificado como $\pi_1(X, x_0)$. Ele foi introduzido por Poincaré em 1895, e é chamado de primeiro grupo de homotopia em antecipação pelo fato de existirem grupos maiores de homotopia, por isso, também é conhecido como grupo de Poincaré [3]. Quando temos o ponto inicial igual ao ponto final, temos um intervalo fechado equivalente a um círculo S^1 . Como exemplo, consideremos um mapeamento $f : S^1 \rightarrow X$, com $X = \mathbb{R}^2 - (0, 0)$, que corresponde ao plano real menos a origem. Fica claro que qualquer loop que não envolva a origem pode ser continuamente deformado a um ponto, o que já não ocorre com os caminhos fechados em torno da origem. Os loops que circulam em volta da origem são classificados por meio de um número inteiro \mathbb{Z} , cujo sinal é especificado pelo número de vezes e o sentido pela qual a origem é envolvida. Consideremos o conjunto responsável por representar todos os mapeamentos onde o loop envolve a origem \mathbb{Z} . Este conjunto forma um grupo, o grupo fundamental já supracitado $\pi_1(X)$, onde o índice 1 diz que X tem a forma de uma superfície 1-dimensional fechada; ou seja, um loop o qual é topologicamente equivalente a um círculo.

Se considerarmos R como uma região 2-dimensional do espaço e todos os pontos mapeados em um ponto, a forma de R será a de uma superfície fechada equivalente a uma esfera S^2 , dessa maneira o grupo abordado é o $\pi_2(X)$. Alguns defeitos, por exemplo, do tipo vórtice, são associados ao grupo fundamental; outros, como veremos adiante, necessitam de grupos superiores. Como já citado acima, dois espaços topológicos X e Y são considerados homotopias do mesmo tipo ($X \simeq Y$) caso existam mapas contínuos (f e g), tal que a composição entre eles dê como resultado uma identidade. Dessa forma, um mapa f é chamado de homotopia equivalente de g . Em relação a isso, podemos destacar duas observações importantes, a primeira delas: se X é homeomórfico a Y , então os espaços X e Y são homotopias do mesmo tipo, mas nem toda equivalência homotópica é homeomórfica. Essa observação caracteriza que espaços homeomórficos possuem as mesmas características no que diz respeito a homotopia. Exemplos podem ser vistos quando espaços de diferentes dimensões podem ser do mesmo tipo de homotopia [8]. Um ponto k e uma linha real \mathbb{R} são do mesmo tipo de homotopia, mas o ponto k não é homeomórfico a \mathbb{R} . A segunda observação fala que dois espaços topológicos do mesmo tipo de homotopia tem o mesmo grupo fundamental. Há uma dificuldade no entendimento de homotopia de mesmo tipo. Quando afirmamos que $X \simeq Y$, significa dizer que Y é um subespaço de X , dessa maneira Y é obtido a partir de uma deformação contínua de X . Um conceito muito útil para a descrição dos grupos de homotopia é a deformação de retração. Levando em conta um subespaço R , ele é considerado retrátil de X se existir uma homotopia de $\mathbf{1} : X \rightarrow X$ e $f : X \rightarrow R$. Sendo R um subespaço de X e um mapa contínuo $H : X \times I \rightarrow X$, R é denominado de deformação de retração de X e H é uma homotopia entre a matriz identidade e a retração f . Outra definição importante é a de espaço contrátil. Se temos um ponto k pertencente a um espaço topológico X como sendo uma deformação retrátil desse espaço, X é dito contrátil. Dado um mapa constante $e_x : X \rightarrow k$, se existir uma homotopia H tal que $H(x, 0) = e_x = a$ e $H(x, 1) = \mathbf{1} = x$, X é dito contrátil e a homotopia H é chamada de contração [10].

2.4 Grupos Superiores

Vimos anteriormente que o grupo fundamental classifica as classes de homotopia de caminhos fechados em um espaço topológico X [2]. Além do mapeamento de um círculo S^1 a um espaço topológico X , podemos estender essa construção para mais dimensões, por exemplo, existem maneiras de abordar outros grupos à X , tais como o mapeamento de esferas e também do “torus” a um espaço topológico. Apesar de trabalharmos com dimensões maiores, acontece que as classes de homotopia S^n

($n \geq 2$) formam um grupo de maneira similar ao grupo fundamental.

Consideramos I^n como sendo um cubo n -dimensional e sua fronteira sendo caracterizada por ∂I^n [1]. Se olharmos para o grupo fundamental, a fronteira de $I = [0, 1]$ é mapeada a um ponto base x_0 . O interesse aqui está em estudar os mapas contínuos $f : I^n \rightarrow X$ que correspondem ao mapeamento da fronteira em um ponto base x_0 [14], uma vez satisfeito tal mapeamento, nós obtemos S^n a partir de $I^n/\partial I^n$ (denota o cubo). Portanto, o mapa f é chamado de n -loop sobre o ponto base. Assim, considerando um espaço topológico X , o conjunto de classes de homotopia de n -loops mapeados em x_0 é denotado por $\pi_n(X)$ e chamado de n -ésimo grupo de homotopia. Devido a identificação destes pontos na fronteira destes n -loops, então o mapeamento do cubo I^n a um espaço X é topologicamente equivalente a um esfera. Podemos destacar considerações importantes a respeito dos grupos superiores. A primeira delas é que o grupo $\pi_n(X)$ não é abeliano para $n = 1$ (grupo fundamental), mas é abeliano para $n > 1$. O mapeamento entre duas esferas é relevante para muitas aplicações da teoria de homotopia. Outra importante característica fica por conta da igualdade entre os grupos superiores e o conjunto dos números inteiros.

$$\pi_n(S^n) = \mathbb{Z} \tag{2.6}$$

onde \mathbb{Z} corresponde ao conjunto dos números inteiros. Neste caso o número inteiro n caracteriza o mapeamento do número de voltas que uma esfera envolve a outra.

Por fim, um mapeamento $f : S^n \rightarrow S^m$ para $m > n$ temos um grupo de homotopia trivial

$$\pi_n(S^m) = 0 \tag{2.7}$$

caracterizando que há pelo menos um ponto em S^m , a que nenhum ponto de S^n é mapeado. Por outro lado, se tomamos $m < n$ o grupo passa a ser não-trivial, característica comum nas teorias de Yang-Mills. Os defeitos topológicos que veremos na seção seguinte aparecem em modelos com quebras de simetrias e podem ser classificados via homotopia de grupos. A topologia da variedade de vácuos (M) determina que defeitos podem aparecer com quebras de simetrias particulares. Podemos destacar, as paredes de domínio podem se formar se M possui subgrupos desconectados, cordas se formam quando a variedade não é simplesmente conexo e monopólos se formam quando M contém superfícies indeformáveis. O n -ésimo grupo de homotopia $\pi_n(M)$ classifica os mapeamentos distintos da esfera S^n em uma variedade, ou seja, estuda os mapas entre a variedade de um espaço interno e uma variedade do espaço-tempo. Em geral, defeitos topológicos de uma particular dimensionalidade em um dado modelo pode ser classificado por elementos de um grupo homotópico apropriado da variedade:

Defeito	Dimensão	Classificação
Paredes de Domínio	2	$\pi_0(M)$
Cordas	1	$\pi_1(M)$
Monopólos	0	$\pi_2(M)$
Texturas	-	$\pi_3(M)$

Tabela 2.1: *Classificação topológica dos defeitos com grupos de homotopia $\pi_n(M)$.*

A tabela 2.1 relaciona a relação entre os defeitos topológicos e os grupos de homotopia. Dentre os defeitos topológicos destacam-se os defeitos linhas que caracterizados pelo primeiro grupo de homotopia ou grupo fundamental e os defeitos pontos pertencentes ao segundo grupo de homotopia [3]. Entre os muitos defeitos conhecidos, podemos destacar defeito do tipo anel. Da mesma forma como ocorre com as paredes, cordas e monopólos, sua ocorrência é determinada pela topologia da variedade M , ou seja, pelo seu grupo de homotopia. O defeito tipo anel aparece quando dois defeitos linhas que são caracterizados por elemento inverso do primeiro grupo se fundem. Se todas as partes dessas linhas aproximam-se desigualmente, elas desaparecem ao mesmo tempo ao se tocar (veja a Fig. 2.4).

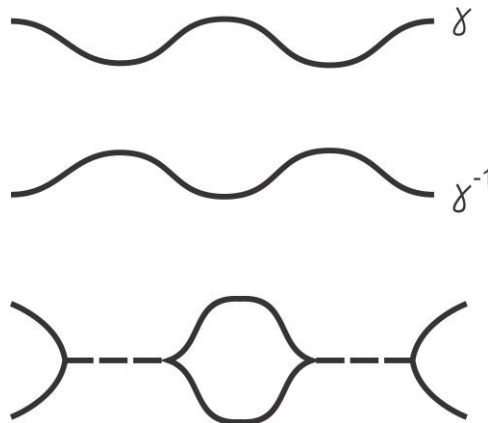


Figura 2.4: Dois defeitos linhas γ e γ^{-1} se combinando originando defeitos do tipo anel [11].

Embora o anel não seja mais do que um defeito linha, um defeito anel é localizado em um volume finito e não se estende ao infinito como um defeito linha, dessa forma, o defeito anel pode ser considerado um tipo de defeito ponto. Isso pode ser visto se considerarmos o raio do anel tendendo

à zero, tornando-se assim um ponto. Portanto, defeito anel necessita de dois parâmetros, sendo um para o defeito linha e outro para o defeito ponto. De acordo com o que foi mostrado, a discussão sobre topologia induz o surgimento e estudo das estruturas de domínio. A característica topológica destas estruturas depende do grupo de homotopia $\pi_n(M)$ da variedade M do vácuo degenerado. Defeitos estáveis topologicamente podem ser classificados por meio dos grupos de homotopia de um espaço topológico X que representa o espaço interno.

2.5 Grupo de Homotopia associado ao mapeamento $S^n \rightarrow S^n$

Agora vamos apresentar alguns exemplos com objetivo de caracterizar o grupo de homotopia associado ao mapeamento $S^n \rightarrow S^n$. Consideremos o exemplo do mapeamento de um círculo S^1 em outro círculo S^1 ($S^1 \rightarrow S^1$) [49]. No mapeamento trivial, representado pela figura abaixo,

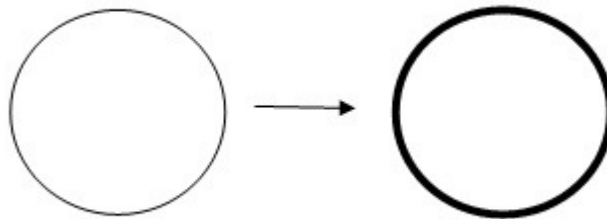


Figura 2.5: Mapeamento de um círculo em outro.

O primeiro círculo S^1 é caracterizado por um ângulo α tal que $0 \leq \alpha < 2\pi$. Se $\alpha = 4\pi$, é equivalente a $\alpha = 2\pi$, dizemos então que o ângulo α é definido módulo 2π . O ângulo β correspondente para o segundo círculo, pode ser obtido pela aplicação de uma função contínua $f(\alpha)$. Considerando alguns exemplos:

$$1) \beta = f_0(\alpha) = 0 \tag{2.8}$$

$$2) \beta = f_0(\alpha) = \pi \tag{2.9}$$

$$3) \beta = f_0(\alpha) = \frac{\pi}{2} \tag{2.10}$$

que corresponde ao não percorrimento de um círculo S^1 (veja Fig. 2.6).

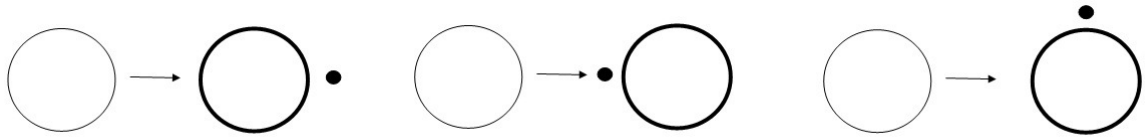


Figura 2.6: Mapeamento do primeiro círculo em um ponto no segundo círculo. Para $\beta = 0$ (esquerda), $\beta = \pi$ (centro) e $\beta = \pi/2$ (direita)

Em geral, para qualquer c constante, o mapeamento dado pela função $\beta = f_0(\alpha) = c$ leva ao círculo S^1 ser percorrido zero vezes.

Outro exemplo pode ser visto da seguinte maneira:

$$4) \beta = f_0(\alpha) = \begin{cases} \xi\alpha, & 0 \leq \alpha < \pi; \\ \xi(2\pi - \alpha), & \pi \leq \alpha < 2\pi. \end{cases} \quad (2.11)$$

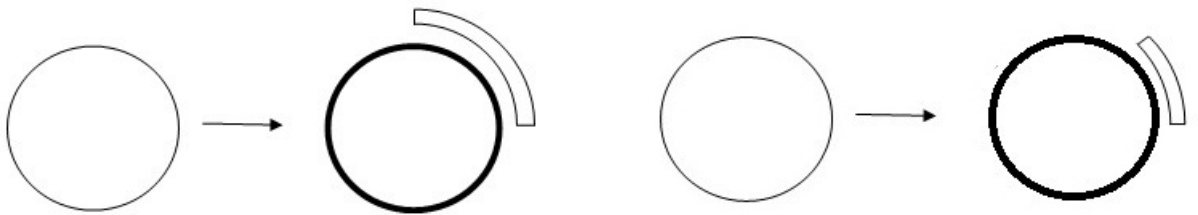


Figura 2.7: Para $\xi = 1/2$ (esquerda) e $\xi = 1/4$ (direita).

Em geral, $0 \leq \xi \leq 1$ leva a S^1 ser percorrido zero vezes. Note ainda que, com $\xi \rightarrow 0$, este mapeamento pode ser deformado no mapeamento 1. Dessa forma, pertencem à mesma classe de homotopia.

Agora, consideramos o exemplo:

$$5) \beta = f_1(\alpha) = \alpha \quad (2.12)$$

O mapeamento completa uma volta em torno do círculo S^1 (veja Fig. 2.8). Sendo $\beta = f_2(\alpha) = 2\alpha$, nós teríamos duas voltas em torno do círculo. Em geral,

$$6) \beta = f_n(\alpha) = n\alpha \quad (2.13)$$

representa um mapeamento com n voltas, tal que o “winding number” Q associado é n . Podemos definir Q como [49]:

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{df}{d\alpha} d\alpha \quad (2.14)$$

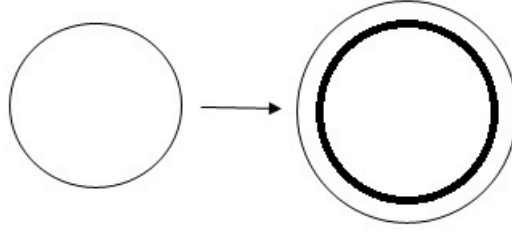


Figura 2.8: Uma volta sobre o segundo círculo.

Assim, para o exemplo 4, temos:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \frac{d}{d\alpha} (\xi\alpha) d\alpha + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{d}{d\alpha} (\xi(2\pi - \alpha)) d\alpha \right) \\ Q &= \frac{1}{2\pi} \left(\xi\alpha \Big|_0^{\pi} + \xi(-1)\alpha \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) \\ Q &= \frac{1}{2\pi} \left(\xi\pi - \xi(2\pi - \pi) \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

E a partir do exemplo 6:

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\alpha} (n\alpha) d\alpha = \frac{1}{2\pi} n\alpha \Big|_0^{2\pi} = n \quad (2.16)$$

constituindo o número de vezes que o segundo círculo S^1 é envolvido, gerando infinitas classes de homotopia. Quando o número de voltas em torno do círculo está em sentido oposto, valores negativos de Q são obtidos, por exemplo:

$$\beta = f_{-3}(\alpha) = -3\alpha \quad (2.17)$$

Assim, as classes de homotopia para o mapeamento $S^1 \rightarrow S^1$ formam um grupo isomorfo ao grupo dos inteiros, o que pode ser representado por:

$$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \quad (2.18)$$

Se X é um subespaço de \mathbb{R}^n e Y é um subespaço de \mathbb{R}^m , o produto cartesiano $X \times Y$ pode ser identificado de forma natural com o subconjunto de \mathbb{R}^{n+m} e então adquire uma topologia de subespaço. Consideramos alguns exemplos: i) S^1 subespaço de \mathbb{R}^2 e (a, b) subespaço de \mathbb{R} . Logo, $S^1 \times (a, b)$ é um subespaço de \mathbb{R}^3 , chamado de cilindro [12].

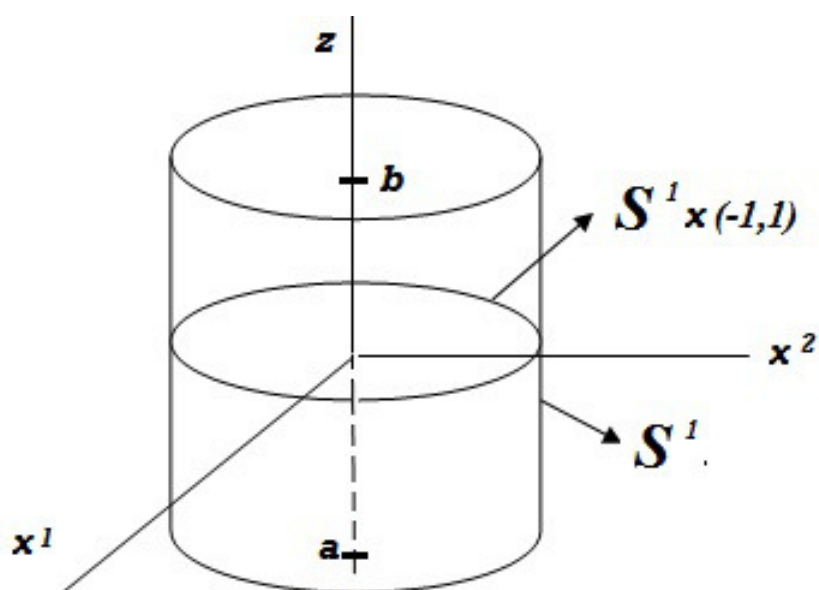


Figura 2.9:

ii) O Toro $S^1 \times S^1$ é o produto cartesiano de dois círculos, e é um subespaço de \mathbb{R}^4 .

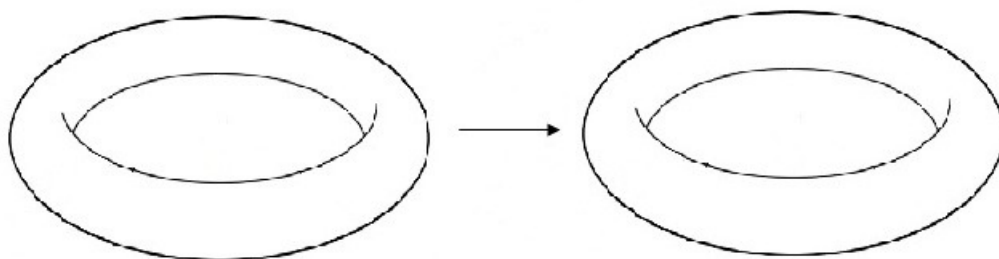


Figura 2.10:

A construção explícita de exemplos pode ser feita definindo-se dois ângulos α e η .

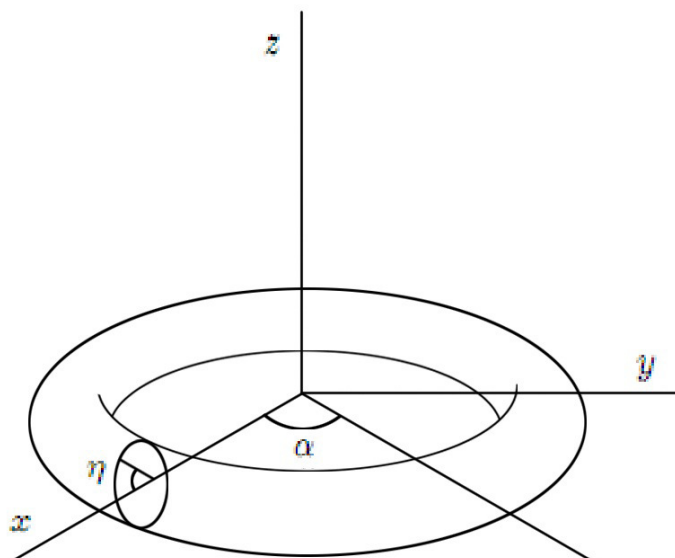


Figura 2.11:

Mostremos que T^2 é homotópico a $S^1 \times S^1$. Considere um círculo no plano $x - z$ de \mathbb{R}^3 , de raio $r > 0$ em torno do ponto $(R, 0, 0)$, com $R > r$.

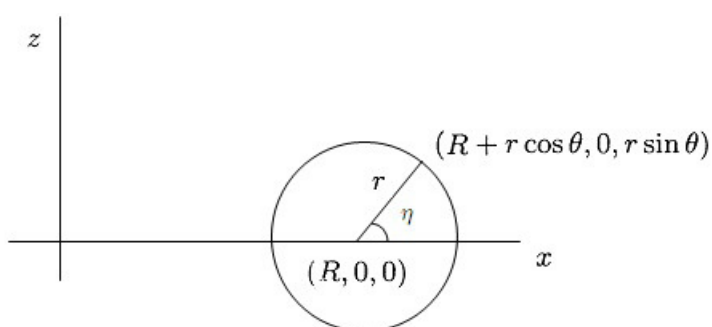


Figura 2.12:

com $0 < \eta < 2\pi$.

Rotacionando esse círculo em torno do eixo-z para obter o toro T^2 em \mathbb{R}^3 , obtemos a Fig. 2.11.

A rotação escolhida é tal que, para todos os pontos do círculo original, z e $x^2 + y^2$ permanecem constantes.

Definindo α como o ângulo em que o círculo é girado leva a

$$x = (R + r \cos \eta) \cos \alpha \quad (2.19)$$

$$y = (R + r \cos \eta) \sin \alpha \quad (2.20)$$

$$z = r \sin \eta \quad (2.21)$$

Assim, T^2 é o conjunto de todos os pontos em \mathbb{R}^3 da forma:

$$\left((R + r \cos \eta) \cos \alpha, (R + r \cos \eta) \sin \alpha, r \sin \eta \right) \quad (2.22)$$

para $0 \leq \eta \leq 2\pi$ e $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Dessa maneira, T^2 é homeomorfo a $S^1 \times S^1$.

Podemos mapear um toro $T^2 = S^1 \times S^1$ em outro toro T^2 de modo análogo ao feito para $S^1 \rightarrow S^1$, $S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$.

Temos que $S^1 \rightarrow S^1$ corresponde a $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Então o mapeamento,

$$S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1 \quad (2.23)$$

é dado por

$$\pi_1(T^2) = \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad (2.24)$$

Finalizada essa discussão matemática sobre homotopia, necessária para a classificação dos defeitos topológicos, abordaremos no capítulo seguinte os defeitos topológicos do ponto de vista físico, procurando descrever sua formação como decorrente da quebra espontânea de simetria.

Capítulo 3

Defeitos Topológicos

3.1 Formação dos Defeitos Topológicos

As implicações cosmológicas de defeitos topológicos têm sido um área de grande interesse e atividade. Em 1966, Nambu, foi um dos primeiros a sugerir um significado de tais defeitos, afirmando que o nosso Universo poderia ter um tipo de estrutura de domínio. Em 1972 foi sugerido por Kirzhnits que a quebra de simetria poderia ser restaurada em altas temperaturas, como acontece em alguns sistemas de matéria condensada. Com passar do tempo, Weinberg indicou que em um Universo primordial houve uma transição de fase possibilitando a formação de paredes de domínios, destacando os efeitos gravitacionais. Como visto no capítulo anterior, a teoria de Homotopia está associada a classificação da topologia da variedade originando os diferentes tipos de defeitos, tais como cordas, paredes de domínio e monopólos, demonstrado por Kibble em 1976. E em meados de 1980, Zel'dovich sugeriu a possibilidade de que a formação de galáxias tenha origem em cordas cósmicas [13].

A possibilidade de tais defeitos aparecerem em nosso Universo depende do entendimento de um mecanismo chamado quebra espontânea de simetria e as transições de fases cosmológicas. A formação dos defeitos topológicos está ligado a quebras espontâneas de simetrias que ocorreram a partir de transições de fases em decorrência do resfriamento do Universo primordial extremamente denso e quente. O início foi marcado por altas temperaturas, depois do seu resfriamento, a temperatura chegou a um ponto crítico abaixo do qual o campo assume um valor esperado de vácuo degenerado, caracterizando assim a quebra de simetria [38]. Ou seja, a quebra de simetria propicia um conjunto de estados fundamentais degenerados, originando os diferentes tipos de defeitos topológicos. Em contexto cosmológico, teríamos: i) monopólos, os quais acredita-se que sofreram aniquilação com anti-monopólos; ii) paredes de domínios, as quais se dissiparam em forma de radiação gravitacional; iii)

vórtices, estes fundamentais em certas descrições de formação das galáxias.

Da mesma forma que a simetria pode ser quebrada, ela também pode ser restaurada a partir de uma temperatura acima do ponto crítico, com o valor esperado no vácuo igual a zero. É nesse ponto que estão inseridas as Teorias de Grande Unificação; contudo, as altas energias necessárias para essas unificações vão muito além da capacidade dos aceleradores de partículas [20].

3.2 Quebra Espontânea de Simetria

Para exemplificar o conceito de quebra de uma simetria, vamos rever dois exemplos da tese de R. Menezes [18]. Primeiramente considere uma grande mesa redonda, contendo um prato, uma colher do lado direito e uma do lado esquerdo para cada lugar sobre a mesa. Vamos agora supor que uma pessoa pegue a colher do lado esquerdo e que a pessoa do lado contrário a essa primeira pegue a colher da direita. Chegando outras pessoas à mesa, elas seguirão o procedimento natural de pegar as colheres seguindo os seus vizinhos. Prosseguindo dessa forma chegará um momento em que uma pessoa ficará sem colher, enquanto que uma outra poderá escolher entre duas. Dessa forma, percebemos que a simetria foi quebrada, onde a situação ideal seria em que todos estivessem com suas colheres.

Considerando como um segundo exemplo de quebra de simetria, uma vareta posicionada verticalmente em cima de uma mesa [17]. Aplicando uma força sobre a mesma, esta por sua vez, acaba por não sofrer nenhuma alteração, ou seja, encontra-se em uma situação estável, a menos que a força alcance um valor crítico, onde a partir desse valor a vareta torna-se instável e começa a se curvar em uma direção arbitrária. Além disso, existem infinitos estados fundamentais (estados degenerados) relacionados por uma simples rotação no eixo da vareta. Ao se encurvar, ela escolheu um estado, no entanto por meio da rotação da vareta pode-se obter todos os outros. Podemos observar que a simetria é quebrada quando a força aplicada sobre a vareta encontra-se acima de um valor crítico. Percebemos do exemplo acima, que para sairmos de uma situação inicial simétrica para uma não-simétrica ocasionando a quebra espontânea de simetria é necessário observar os seguintes elementos: i) um parâmetro do sistema deve assumir um valor crítico acima do qual a configuração torna-se instável; ii) o estado fundamental deve ser degenerado [25]. Tais conflitos são sentidos também na natureza, sendo essas falhas denominadas de defeitos, como é o caso das redes de poliacetileno e também em sistemas ferromagnéticos. Neste último caso, spins passam tem uma orientação aleatória acima uma determinada temperatura crítica. Diminuindo a temperatura, domínios são formados, no interior dos quais os todos os spins estarão alinhados em uma dada direção. Como a direção de magnetização escolhida

depende da Lagrangeana e é aleatória, ao formar-se um domínio a simetria é quebrada, acarretando o surgimento de um defeito topológico (parede de domínio) entre os domínios de magnetização.

A simetria da lagrangeana é importante pois irá caracterizar a estrutura dos estados de vácuo da teoria. Por exemplo, uma lagrangeana com simetria $U(1)$ é invariante sobre uma transformação da forma [22]:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{-i\theta} \phi(x) \quad (3.1)$$

a coordenada θ pode nos permitir o estudo de dois tipos de simetrias. A primeira delas é a simetria global, representa algo que não pode ser mensurável, acontece quando θ não depende da coordenada do espaço-tempo e assume um valor fixo. Ao contrário da global, se θ depende da coordenada do espaço-tempo, ou seja, $\theta = \theta(x)$ a simetria é denominada local, a qual possui um valor diferente de acordo com a localização do ponto x no espaço-tempo. Há outros tipos de transformações, como $\phi \rightarrow -\phi$, conhecida como simetria Z_2 . Um exemplo comum de lagrangeanas invariantes sobre essa transformação é a teoria ϕ^4 , onde ϕ é um campo escalar real.

Dizemos que um sistema sofreu quebra espontânea de simetria se sua lagrangeana possui uma simetria que não é satisfeita pelo estado de vácuo, Ou seja, a lagrangeana é invariante sob uma simetria que impossibilita o estado de menor energia ser invariante [19].

Antes de passarmos para o tratamento matemático, vamos imaginar um “chapéu mexicano”:

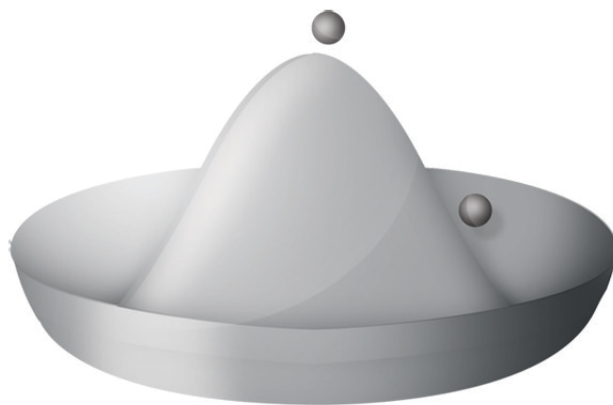


Figura 3.1: Chapéu Mexicano

Coloca-se uma bola acima do chapéu, como mostra a Fig. 3.1. O sistema é instável, pois qualquer

perturbação fará a bola sair do seu repouso e irá começar a descer montanha abaixo. Supondo que o sistema sofre uma pequena perturbação e a bola agora desça, ela irá rolar em uma direção arbitrária, gerando uma quebra na simetria devido à perturbação sentida pelo sistema. As excitações no fundo do chapéu não necessitam de energia. Fazendo analogia entre o exemplo acima e a teoria de campos, quando a bola encontra-se no topo do chapéu poderíamos pensar que esse seria o estado fundamental, porém o estado de vácuo que corresponde ao estado de menor energia, ocorre apenas quando há quebra de simetria [21].

Quando pensamos em vácuo, logo associamos um estado sem a presença de campos, caracterizando $\phi = 0$ como correspondendo ao mínimo da energia potencial. Contudo, nem sempre o mínimo será igual a zero pois isso depende da lagrangeana. Para encontrar o estado fundamental é necessário lembrar que as seguintes condições devem ser satisfeitas

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} > 0 \quad (3.2)$$

Para entender como funciona, vamos considerar a lagrangeana ϕ^4 [18, 20, 21]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \quad (3.3)$$

onde ϕ é um campo escalar real e $\lambda > 0$ para que a energia seja limitada [24] ($\lambda = 0$ é trivial). O parâmetro m , que descreve o mínimo do potencial, deve ser analisado de forma separada. Lembrando que a lagrangeana é dada pela energia cinética menos a energia potencial, então de acordo com a Eq. (3.3), observamos que o potencial tem a seguinte forma:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \quad (3.4)$$

derivamos a Eq.(3.4) em função de ϕ de acordo com a Eq.(3.2), no qual obtém-se:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \phi(m^2 + \lambda \phi^2) = 0 \quad (3.5)$$

Como foi dito acima, precisamos analisar separadamente os casos quando $m^2 > 0$ e $m^2 < 0$. Para o caso $m^2 > 0$, obtemos o mínimo do potencial quando $\phi = 0$, representando um campo escalar de massa m . Este estado é invariante sobre a transformação $\phi \rightarrow -\phi$ na lagrangeana, então dizemos que o estado fundamental ($\phi = 0$) não quebra a simetria do modelo, ou seja, a lagrangeana é invariante e possui uma simetria que é satisfeita pelo estado de vácuo. O potencial deste caso pode ser visto na Fig. 3.2

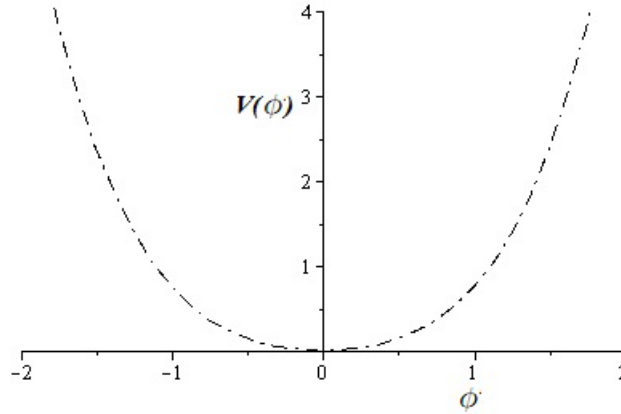


Figura 3.2: O potencial $V(\phi)$ da lagrangeana. Caso $m^2 > 0$ com mínimo em $\phi = 0$.

Agora o caso para $m^2 < 0$, pode ser calculado a partir da Eq.(3.5):

$$m^2 + \lambda\phi^2 = 0$$

$$\phi = \pm\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} = \pm\nu \quad (3.6)$$

onde $\mu^2 = -m^2 > 0$ ($\mu > 0$). Este potencial é ilustrado na Fig. 3.3. A lagrangeana da Eq.(3.3) é invariante sobre a simetria Z_2 [25], com isso o campo em $\phi = 0$ é simétrico sobre a transformação $\phi \rightarrow -\phi$ correspondendo ao máximo do potencial, porém este ponto é instável (voltando ao exemplo do chapéu mexicano, esta situação corresponde à bola no topo do chapéu). Os pontos que correspondem ao mínimo do potencial são $\phi = +\nu$ e $\phi = -\nu$, originando o estado fundamental. Estamos diante de dois valores diferentes para o valor esperado no vácuo. Assim, o vácuo é duplamente degenerado, e ao escolher um dos dois mínimos quebra-se espontaneamente a simetria.

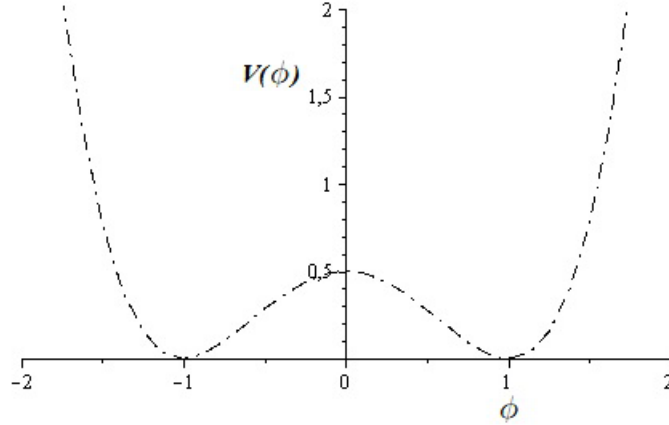


Figura 3.3: O potencial $V(\phi)$ da lagrangeana. Caso $m^2 < 0$ com mínimos em $\phi = \pm\nu$.

Um ponto importante no estudo da quebra de simetria está no reconhecimento do termo de massa na lagrangeana. Na teoria ϕ^4 , percebemos que temos dois estados com a mesma energia, com os mínimos $\phi = \pm\nu$, ao invés de $\phi = 0$. Para entendermos o efeito de geração de massa para o campo, escolhemos um dos dois estados fundamentais, o qual será $\phi = +\nu$, e consideramos perturbações sobre ele.

$$\phi(x) = \nu + \chi(x) \quad (3.7)$$

substituindo a Eq.(3.7) na Eq.(3.3), ficamos com:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - \lambda\nu^2\chi^2 - \lambda\nu\chi^3 - \frac{1}{4}\lambda\chi^4 \quad (3.8)$$

usando $m^2 = -\lambda\nu^2$ da Eq.(3.6). Na lagrangeana, a massa pode ser reconhecida quando olhamos para o termo quadrático do campo, ou seja, o termo $\lambda\nu^2\chi^2$. Portanto, a massa da lagrangeana de um campo escalar livre é $m = \sqrt{2\lambda}\nu$. Outra característica notável da lagrangeana para as perturbações (Eq.(3.8)) fica por conta da sua não invariância sobre as transformações $\chi \rightarrow -\chi$.

Quando a quebra de simetria é contínua, podemos estudar um sistema formado por campos escalares complexos, sendo a lagrangeana escrita da seguinte maneira:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi)^\dagger(\partial^\mu\phi) - V(\phi). \quad (3.9)$$

Como exemplo, podemos considerar um potencial $V(\phi)$ dado por

$$V(\phi) = m^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2. \quad (3.10)$$

Este potencial é semelhante ao chapéu mexicano plotado na Fig 3.1, com as constantes positivas m e λ .

Este modelo é invariante sobre as transformações globais do grupo U(1):

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha}\phi(x) \quad (3.11)$$

O estado de vácuo é obtido a partir do valor de ϕ que minimiza o potencial, portanto:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = m^2\phi^\dagger + 2\lambda\phi^\dagger(\phi^\dagger\phi)^2 \quad (3.12)$$

como foi feito anteriormente, devemos analisar os seguintes casos: i) Para $m^2 > 0$, o mínimo ocorre em $\phi^\dagger = \phi = 0$, dessa forma o vácuo é simétrico sobre as transformações, sendo um caso onde não ocorre a quebra de simetria. ii) Já para o caso onde $m^2 < 0$, temos um máximo que ocorre em $\phi = 0$ e um mínimo em

$$|\phi| = \sqrt{-\frac{m^2}{2\lambda}} = \frac{\nu}{\sqrt{2}} \quad (3.13)$$

onde:

$$\nu = \sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}}. \quad (3.14)$$

No plot da Eq. (3.10), da energia potencial $V(\phi)$ em função dos campos, percebe-se uma característica fundamental de quebra espontânea de simetria contínua, a de que há infinitos estados fundamentais degenerados. Os valores mínimos do potencial estão ao longo de um anel de raio $\nu/\sqrt{2}$; este anel forma um conjunto de estados de vácuo, e a partir de um único estado de vácuo podemos obter todos demais a partir de uma rotação completa em torno do anel.

Consideremos agora perturbações sobre o estado de vácuo, caracterizado por $|\phi| = \nu/\sqrt{2}$. Escolhemos um estado de vácuo qualquer (qualquer mínimo do potencial), quebrando assim a simetria, e representamos o campo em coordenadas cartesianas [22]:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu + \phi_1(x) + i\phi_2(x)). \quad (3.15)$$

Substituindo na lagrangeana (3.9), podemos escrevê-la em função de dois campos ϕ_1 e ϕ_2 , que descrevem as excitações em torno do estado de vácuo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 - \lambda\nu^2\phi_1^2 - \lambda\nu\phi_1(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4}\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \quad (3.16)$$

Observando a lagrangeana acima, podemos concluir que o termo ϕ_1^2 nos indica a presença de massa para o campo ϕ_1 , sendo ela:

$$m_{\phi_1} = \sqrt{2\lambda\nu^2} \quad (3.17)$$

no entanto o campo ϕ_2 não possui massa [13]. O campo massivo corresponde as oscilações radiais e o campo sem massa corresponde ao movimento angular em torno do vale do potencial.

As partículas sem massa são denominadas de bósons de Goldstone. O resultado da quebra espontânea de simetria global exige o aparecimento de uma partícula com massa nula.

3.3 Defeitos Topológicos

Acredita-se que, durante as primeiras fases do Universo, os componentes materiais estavam caracterizados por altos graus de temperaturas e também de simetria. Com o passar do tempo, houve um resfriamento do Universo, devido à sua expansão, promovendo assim as condições para que essas simetrias fossem quebradas. Ocorre que a origem dos defeitos topológicos está atrelada à modelos onde uma simetria pode ser quebrada. Assim, há uma natural conexão entre evolução cosmológica e formação de defeitos.

Os defeitos, em Teoria de Campos, são soluções clássicas das equações de movimento [26]. Os defeitos topológicos são configurações de matéria formados durante as transições de fase do Universo, os quais são divididos em vários tipos, dependendo do tipo de simetria que é quebrada, são eles: paredes de domínios, cordas, monopólos e texturas.

Defeitos topológicos surgem em modelos que suportam quebra espontânea de simetria. Um representante desta classe de soluções são os sólitons (soluções não-lineares, estáveis, com energia localizada e que interagem sem perder sua forma (para sistemas integráveis), ou tem interação intrincada (para sistemas não-integráveis). Em Teoria de Campos, o interesse está em como as soluções se comportam no infinito (comportamento assintótico). Quando temos modelos com apenas um campo escalar, há duas classes de soluções assintóticas, são elas: soluções topológicas e soluções não-topológicas. Tratando-se das soluções não topológicas, os limites assintóticos são os mesmos, ou seja, $\phi(\pm\infty) = \phi_0$. Em (1, 1)-dimensões tais soluções são chamadas de lumps. Quanto às soluções topológicas, elas possuem limites assintóticos diferentes, $\phi(-\infty) = \phi_1$ e $\phi(\infty) = \phi_2$, onde $\phi_1 \neq \phi_2$. Em (1, 1)-dimensões tais soluções são denominadas de kinks (ou antikinks).

A densidade lagrangeana mais simples que descreve a dinâmica padrão de um campo escalar é

(existem exemplos com dinâmica modificada, que não iremos abordar aqui)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (3.18)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial, considerado não-negativo. A equação de movimento é dada a partir da equação de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (3.19)$$

A lagrangeana com dinâmica padrão leva à seguinte forma

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \quad (3.20)$$

Em (1, 1) dimensões ($\phi(x, t)$) a equação de movimento é

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \quad (3.21)$$

O objetivo é encontrar as soluções para a equação de movimento acima. Para configurações de campos estáticos, a Eq.(3.21) fica

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = \frac{dV(\phi)}{d\phi} \quad (3.22)$$

Definimos um objeto que denominamos de corrente topológica

$$j_\mu = \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi \quad (3.23)$$

onde $\epsilon_{\mu\nu}$ é o tensor de Levi-Cevita em 1 + 1 dimensões. A corrente topológica é conservada $\partial_\mu j^\mu = 0$, implicando na existência de uma carga Q

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx j^0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi(x \rightarrow \infty) - \phi(x \rightarrow -\infty) \quad (3.24)$$

A carga Q depende das propriedades assintóticas do campo. Se $Q = 0$ a solução é não-topológica. Para soluções topológicas ($\phi(\infty) \neq \phi(-\infty)$), de onde $Q \neq 0$. Para que soluções desse tipo tenham energia finita é importante que o campo tenha comportamento assintótico que leve aos mínimos do potencial. E para isso, é necessário que o potencial tenha mais de um mínimo.

Na década de 70, foi desenvolvido um método que tinha como objetivo encontrar soluções para as equações de segunda ordem através de equações de primeira ordem. Esse método é chamado de Método de Bogomol'nyi [37, 38].

Considerando o potencial na forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2} W_\phi^2 \quad (3.25)$$

onde $W(\phi)$ é denominado de superpotencial.

A Eq.(3.22) pode ser vista como

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = W_\phi W_{\phi\phi} \quad (3.26)$$

Na busca por soluções para a Eq.(3.26), devemos olhar para a energia das configurações estáticas. Então, a energia é dada por

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx T_{00} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + W_\phi^2 \right) \quad (3.27)$$

A aplicação do método de Bogomol'nyi na equação da energia resulta em

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} dx \left(\frac{d\phi}{dx} \mp \sqrt{2V(\phi)} \right)^2 \pm \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\sqrt{2V(\phi)} \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (3.28)$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} dx \left(\frac{d\phi}{dx} \mp W_\phi \right)^2 \pm \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(W_\phi \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (3.29)$$

onde o primeiro termo é positivo definido, ou seja, o primeiro termo da Eq.(3.29) não pode ser negativo. Então, observamos que o segundo termo da equação acima corresponde a energia mínima.

$$E_{min} = \pm \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(W_\phi \frac{d\phi}{dx} \right) = \pm \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{dW}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (3.30)$$

$$E_{min} = \pm \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{dW}{dx} \right) = \pm \left(W(\phi(x \rightarrow \infty)) - W(\phi(x \rightarrow -\infty)) \right) = |\Delta W| \quad (3.31)$$

com a condição

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi \quad (3.32)$$

A Eq.(3.31) é chamada de limite de Bogomol'nyi. É possível encontrá-lo sabendo apenas do comportamento assintótico da solução do campo e da forma do superpotencial. Note que a Eq.(3.32) é de primeira ordem e as soluções dessa equação são soluções das equações de movimento. Para demonstrar que a equação de primeira ordem satisfaz a equação de segunda ordem, basta diferenciar em função de x a Eq.(3.32), e usar a definição de potencial em termos de W_ϕ .

3.3.1 Kink

O kink é um defeito topológico simples, mas com muitas propriedades interessantes, que surge de uma teoria com um campo escalar real em (1,1) dimensões. Esse defeito é originado por meio de uma simetria discreta $\phi \rightarrow -\phi$, possui energia finita, soluções estáveis e separa duas regiões onde o

campo assume diferentes pontos de mínimos. A imersão de um kink em um espaço de $(3, 1)$ dimensões representa um defeito chamado de parede de domínio.

Vamos considerar o potencial ϕ^4 (Fig. 3.4) com o objetivo de explicitar as soluções do tipo kink.

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\lambda^2(\phi^2 - a^2)^2 \quad (3.33)$$

o potencial $V(\phi)$ é positivo e possui mínimos em $\phi = \pm a$.

Com o superpotencial descrito da seguinte forma

$$W_\phi = \lambda(\phi^2 - a^2) \quad (3.34)$$

A equação associada ao modelo para campos estáticos é

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 2\phi\lambda^2(\phi^2 - a^2) \quad (3.35)$$

enquanto que a equação de primeira ordem é

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm\lambda(\phi^2 - a^2). \quad (3.36)$$

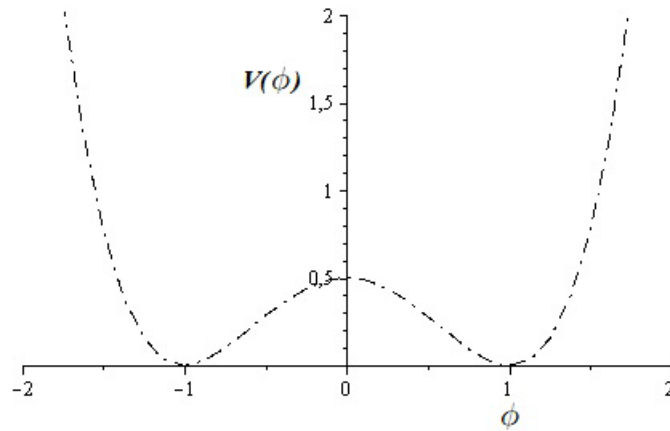


Figura 3.4: Potencial para o modelo ϕ^4 .

Uma forma de encontrar a solução do tipo kink para a equação acima é fazer uma integração.

$$\int \frac{d\phi}{\phi^2 - a^2} = \pm \int \lambda dx \quad (3.37)$$

As soluções são

$$x - x_0 = \pm \frac{1}{a\lambda} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\phi}{a}\right) \quad (3.38)$$

$$\phi(x) = \pm a \tanh\left(a\lambda(x - x_0)\right) \quad (3.39)$$

x_0 é o centro do kink, onde está localizada sua energia. A solução positiva é caracterizada pelo kink (veja Fig. 3.5) e o sinal negativo corresponde ao anti-kink.

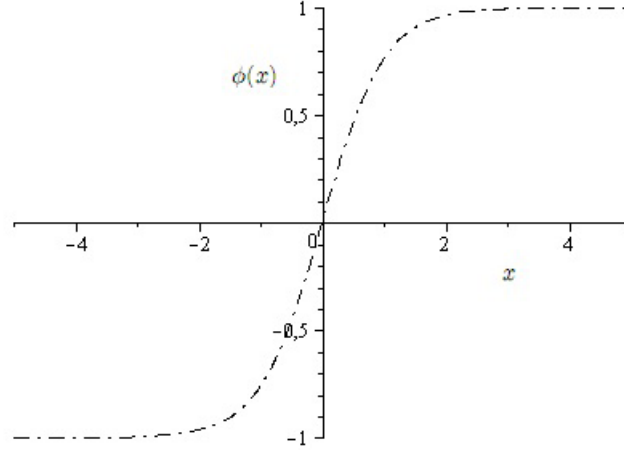


Figura 3.5: Perfil da solução do tipo kink ($\lambda = a = 1$).

A solução para o campo $\phi(x)$ interpola de -1 à 1 quando x vai de $-\infty$ à ∞ , correspondendo as soluções topológicas do tipo kink, ou seja, divide duas regiões do espaço pelos mínimos do potencial.

A densidade de energia é dada por

$$T_{00} = \left(\frac{d\phi(x)}{dx}\right)^2 = a^4 \lambda^2 \operatorname{sech}^4\left(a\lambda(x - x_0)\right) \quad (3.40)$$

o valor máximo de T_{00} é em $x = x_0$ com o valor $\lambda^2 a^4$. A energia da solução é dada por

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx T_{00} = \frac{4a^3 \lambda}{3} \quad (3.41)$$

caracterizando que a energia é finita.

3.3.2 Considerações Topológicas

Com base em uma equação diferencial que envolve um campo em D coordenadas do espaço e uma coordenada do tempo, podemos assumir em geral que a energia das soluções é dada da seguinte forma:

$$E = \int d^D x \rho(\vec{x}, t) \quad (3.42)$$

onde a densidade de energia é maior ou igual a zero ($\rho \geq 0$). Caso tenhamos a densidade igual a zero é caracterizado um estado fundamental (solução de vácuo - ϕ_{vac}). No entanto, algumas propriedades são exigidas quando abordamos soluções diferentes do vácuo, tais como: a energia têm caráter finito, a densidade de energia é não singular e localizada, o campo $\phi(\vec{x}, t)$ é não singular e não dissipativo e a solução estática é estável classicamente [6]. Uma solução estável, excluindo os modos zeros (modos variacionais que não alteram a energia), é um mínimo da energia. Ao contrário, um máximo de energia se resume a uma solução instável classicamente, que por sua vez não sobrevive a estados estacionários, pois flutuações quânticas causam transições longe de qualquer estado localizado em volta do campo ϕ [9].

Considerando duas configurações de campo $\phi(\vec{x})$ e $\phi'(\vec{x})$ de um subconjunto Q_1 pertencente a um conjunto que comporta toda energia finita denotado por Q , podemos afirmar que os campos são homotópicos uns aos outros ($\phi \simeq \phi'$) se existir uma função contínua $H(\vec{x}, t)$ para $t \in I = [0, 1]$, com $H(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x})$ e $H(\vec{x}, 1) = \phi'(\vec{x})$. Por outro lado, ao supor um campo ϕ_1 o qual pertence a componente Q_1 e um outro campo ϕ_2 que pertence a um subconjunto Q_2 , é dito que os dois subconjuntos são desconectados se o campo ϕ_1 não deforma continuamente o campo ϕ_2 , sendo assim ϕ_1 não é homotópico a ϕ_2 . A partir dessa definição, concluímos que são homotópicos todos os campos dentro da componente Q_n [9]. Por fim, o setor que define a solução de vácuo é visto por Q_0 , dessa forma, os setores Q_n com $n \neq 0$ de configurações de campo são chamadas de estáveis topologicamente.

Configurações do tipo sóliton são chamados de sólitons topológicos quando as propriedades são satisfeitas e também quando possuem setores estáveis topologicamente [13]. Apesar dessa afirmação, algumas teorias podem admitir setores de configurações de campos estáveis topologicamente, mas isso não garante a existência de soluções do tipo sóliton estáveis.

Mediante ao que foi observado, nossa próxima discussão compreende um exemplo 1-dimensional envolvendo um campo escalar real, ao qual se resume sobre uma discussão do kink como um sóliton topológico.

Ao tratarmos a energia finita devemos exigir que o campo deve aproximar-se a um dos vácuos do potencial quando $x \rightarrow \pm\infty$. Dessa forma, como estamos abordando um modelo em $(1, 1)$ dimensões a configuração dos campos define um mapeamento de dois pontos ($x \rightarrow \pm\infty$) representando um espaço infinito a um conjunto de vácuos clássicos, que correspondem aos pontos $\pm v$ do potencial. Abaixo é apresentado um esquema de todas as configurações de campo com energia finita.

$$Q_0 : \phi \rightarrow +v \Rightarrow x \rightarrow \pm\infty \quad (3.43)$$

$$Q_0 : \phi \rightarrow -v \Rightarrow x \rightarrow \pm\infty \quad (3.44)$$

$$Q_{+1} : \phi \rightarrow +v \Rightarrow x \rightarrow +\infty, \text{ e } \phi \rightarrow -v \Rightarrow x \rightarrow -\infty \quad (3.45)$$

$$Q_{-1} : \phi \rightarrow -v \Rightarrow x \rightarrow +\infty, \text{ e } \phi \rightarrow +v \Rightarrow x \rightarrow -\infty \quad (3.46)$$

O mapeamento é uma característica topológica da configuração de campo [14]. Percebemos da Eqs. (3.43 – 3.46) que os pontos do espaço físico podem ser mapeados em dois pontos $+v$ e $-v$, ou seja, existe um mapeamento de dois pontos no espaço físico em dois pontos no espaço interno. A Eq. (3.43) e a Eq. (3.44) diz respeito as soluções de vácuo $\phi = +v$ e $\phi = -v$, respectivamente. Os setores da Eqs. (3.45) e (3.46) são estáveis topologicamente. A Eq. (3.45) corresponde a solução do tipo kink e o setor da Eq. (3.46) contém um antikink. Porém, ainda é necessário mostrar que as soluções são estáveis classicamente. Para observar isso, perturba-se em torno da solução clássica, gerando uma equação de movimento para as flutuações, onde através de uma expansão dessas flutuações obtém-se uma equação de autovalores. Portanto, a estabilidade clássica é alcançada quando não há autovalores negativos.

Introduzindo a corrente topológica

$$j^\mu = \frac{1}{2v} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \quad (3.47)$$

onde $\mu, \nu = 0, 1$. A corrente é conservada

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{1}{2v} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = 0 \quad (3.48)$$

separando as suas partes em temporal e espacial, logo depois integrando em todo espaço, teremos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} j_\nu^0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} j_\nu^1 = 0 \quad (3.49)$$

sendo que o segundo termo irá se anular pelo fato dos campos serem nulos no infinito. Isso nos permite concluir que a carga é conservada e dada por

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} dx j^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2v} \partial_x \phi dx = \frac{1}{2v} \left(\phi(x \rightarrow +\infty) - \phi(x \rightarrow -\infty) \right) \quad (3.50)$$

de acordo com o mapeamento descrito na Eq. (3.45), podemos observar que a carga topológica, onde o kink realiza um mínimo de energia é igual a 1, ou seja, quando $\phi(x \rightarrow +\infty)$ corresponde a $+v$ e já para o campo tendendo a $\phi(x \rightarrow -\infty)$ temos $-v$, a partir disso, temos $Q = 1$. Quando analisamos o antikink, a carga topológica que descreve essa configuração é igual a -1 .

Portanto, concluí-se que quando as propriedades que descrevem uma solução do tipo sóliton são satisfeitas, podemos então chamá-lo de sóliton topológico. Assim, as soluções do tipo kink e antikink são sólitons topológicos.

No próximo capítulo iremos estudar o teorema de Derrick, que impõe restrições à dimensionalidade do espaço para defeitos topológicos construídos apenas com campos escalares, bem como algumas propostas para contornar suas premissas.

Capítulo 4

Teorema de Derrick

Com o objetivo de descrever sistemas mais realísticos, ao contrário de modelos simples de campos escalares em (1+1)-dimensões, deve-se trabalhar com modelos mais complicados e com mais altas dimensões. Mesmo em (1+1)-dimensões, os métodos utilizados são complicados, e em geral não há uma regra geral para soluções dependentes do tempo (uma exceção é o modelo sine-Gordon) [49]. Inicialmente iremos nos restringir a teorias com campos escalares e a soluções estáticas da equações de movimento, obtidas a partir das equações de Euler-Lagrange.

O interesse maior não está em encontrar soluções no vácuo ϕ_{vac} , mas sim soluções para equações de movimento diferentes do vácuo, caracterizando as soluções do tipo sólitons. Porém, para obtenção de soluções do tipo sóliton, há a necessidade de que algumas propriedades sejam satisfeitas, tais como, a energia das soluções devem ser finitas e positivas, as soluções devem ser não-singulares e também não-dissipativas. Assim, procuraremos soluções estáticas e de energia finita, com exceção de soluções triviais do vácuo, e que dependam da dimensionalidade espacial do sistema.

Como dito antes, campos escalares em (1,1)-dimensões não são capazes de englobar sistemas realísticos; por isso campos escalares clássicos em D -dimensões ($D > 1$) espaciais devem ser estudados com objetivo de encontrar soluções que sejam estáveis. Contudo, o Teorema de Derrick restringe essa procura, afirmando que soluções estáveis estáticas e não-singulares não podem existir para $D \geq 2$ [39, 40]. Ou seja, haverá soluções independentes do tempo de energia finita apenas em $D = 1$. As premissas do teorema são uma densidade lagrangeana padrão [49]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - V(\phi) \quad (4.1)$$

onde o potencial é uma função positiva $V(\phi) > 0$ e $\phi(x, t) = \phi_i(x, t)$ com $i = 1 \dots N$ é um conjunto de N campos escalares acoplados em D dimensões.

A prova do teorema é analisada por meio da expressão para a energia total [25]:

$$E = \frac{1}{2} \int d^D x \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \int d^D x V(\phi) = V_1(\phi) + V_2(\phi) \quad (4.2)$$

onde $V_1(\phi)$ representa o termo cinético e $V_2(\phi)$ o termo potencial. Ambos os termos são não-negativos, sendo iguais a zero no estado fundamental. Considerando $\phi(x)$ como uma solução estática, definimos uma família de parâmetros $\phi_a^\lambda(x) = \phi_a(\lambda x)$, originando [18]:

$$E_\lambda = \frac{1}{2} \int d^D x \nabla \phi_a^\lambda \cdot \nabla \phi_a^\lambda + \int d^D x V(\phi_a^\lambda) \quad (4.3)$$

observando que quando $\lambda = 1$, $E_\lambda = E$. Para escrevermos E_λ em termos do campo ϕ , devemos fazer uma mudança de escala $y = \lambda x$ [13, 18]:

$$E_\lambda = \int d^D y \left(\frac{1}{2} \lambda^{2-D} \nabla \phi_a \cdot \nabla \phi_a + \lambda^{-D} V(\phi_a) \right) \quad (4.4)$$

então, podemos escrever:

$$E_\lambda = \lambda^{2-D} V_1(\phi) + \lambda^{-D} V_2(\phi). \quad (4.5)$$

Na busca pela estabilidade das soluções, derivamos a energia em função do parâmetro λ e em seguida voltamos ao caso inicial tomando $\lambda = 1$.

$$\frac{\partial E_\lambda}{\partial \lambda} = (2 - D)V_1(\phi) - DV_2(\phi) = 0. \quad (4.6)$$

Ou seja,

$$(2 - D)V_1(\phi) = DV_2(\phi). \quad (4.7)$$

Levando-se em conta que $V_1(\phi)$ e $V_2(\phi)$ são positivos (premissa do teorema), e, desta forma, descartando a solução trivial ($V_1(\phi) = V_2(\phi) = 0$), pode-se perceber que apenas quando $D = 1$ a expressão terá uma solução, pois implica que os termos cinético e potencial contribuem igualmente para a energia total dos sólitons. Caso $D = 2$, então seria necessário que $V_2(\phi)$ fosse nulo, caracterizando um sistema sem dinâmica. Dessa forma, o teorema nos motiva à buscar uma forma de contornar suas premissas, de modo que seja possível encontrar soluções estáveis em $(3, 1)$ -dimensões. Existem várias formas de contornar o Teorema de Derrick [13, 25, 28, 49], sendo elas: i) a inclusão de vínculos entre os campos escalares (modelo $O(3)$ não-linear) [30]; ii) a adição de campos de gauge (monopólo de 't Hooft) [50]; iii) a consideração de modelos com energia divergente [33, 34, 35]; iv) a introdução de dimensões superiores como nos cenários de mundo-brana; v) teorias de Lifshitz, que contém derivadas espaciais de maior ordem [57]; vi) dependência explícita com a distância na Lagrangeana [51, 52]. Vamos a seguir discutir brevemente algumas dessas alternativas.

4.1 O modelo $O(3)$ não-linear

Vimos pela Eq (4.7), que, se $D = 2$, apenas podemos ter $V_2(\phi) = 0$, ou seja, o campo será um dos zeros do potencial. Por outro lado, supondo que o potencial tem um conjunto contínuo de mínimos, então seria permitido termos mesmo para $D = 2$ soluções onde ϕ mudaria continuamente dentro desse conjunto de mínimos. Essa restrição leva à inclusão de um vínculo $\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1$, e caracteriza o modelo $O(3)$ não-linear. A dinâmica do sistema é descrita pela densidade lagrangeana [28, 49]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\phi}) \cdot (\partial_\mu \vec{\phi}) \quad (4.8)$$

e a energia de uma solução estática obtida a partir da lagrangeana é

$$E = \frac{1}{2} \int d^2x (\partial_\nu \vec{\phi}) \cdot (\partial_\nu \vec{\phi}) \quad (4.9)$$

sendo $\nu = 1$ e 2 . A seguir, por meio da equação da energia, analisamos duas possibilidades: A primeira possibilidade corresponde a $E = 0$, o que corresponde ao campo $\vec{\phi}$ satisfazer a condição $\partial_\nu \phi = 0$. Portanto, o campo é igual a $\vec{\phi}_0$, um vetor unitário no espaço interno que pode apontar em qualquer direção, sendo esse vetor independente de \vec{x} . Então, devido às possíveis escolhas diferentes das direções de $\vec{\phi}_0$ temos uma família contínua infinitamente degenerada de soluções para tal valor de energia. Compare com o modelo $\lambda\phi^4$ em $(1, 1)$ -dimensões, onde a simetria do problema é discreta e há duas possíveis soluções com energia nula. Voltando ao modelo $O(3)$, temos uma simetria contínua e uma família de mínimos degenerados relacionados entre si por rotações no espaço interno. A segunda possibilidade é $E \neq 0$, mas finita. A equação da energia (4.9) fornece [25, 30]:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{\phi}(\vec{x}) = \vec{\phi}_0 \quad (4.10)$$

onde $\vec{\phi}_0$ é mais uma vez um vetor unitário no espaço interno. Assim, aos pontos tendendo para o infinito no espaço de coordenadas corresponderão o mesmo valor $\vec{\phi}_0$ para o campo escalar. Ou seja, o campo satisfaz a mesma condição de contorno para todos os pontos no infinito. Perceba que em modelos que geram kinks, diferentes setores topológicos são identificados por diferentes valores do campo no infinito. O modelo aqui considerado não leva a diferentes setores topológicos mesmo com escolhas diferentes do campo $\vec{\phi}_0$, pois esses setores são relacionados por simples rotações no espaço interno.

4.2 Branas com um Campo Escalar

Nos últimos anos, o interesse no estudo de dimensões extras têm crescido devido à proposta de cenários de mundo-brana. Esses cenários consideram nosso Universo 4-dimensional imerso em um espaço-tempo de mais dimensões. Nessas teorias, a localização dos campos do modelo padrão pode ser feita de duas formas: por construção da ação, branas com espessura infinitesimal, ou na forma de uma ação efetiva, onde alguns modos ou ressonâncias são localizadas, em branas com espessura finita [58]. Em ambos os cenários, a interação gravitacional percebe as dimensões extras e apenas os modos de menor massa contribuem para a modificação da interação gravitacional 4-dimensional. Em cenários de branas mais simples, as branas são construídas por campos escalares acoplados com a gravidade em um espaço $(4, 1)$ -dimensional. A dependência explícita do campo escalar apenas com a única dimensão extra e o tempo permite que o Teorema de Derrick seja contornado, reduzindo as equações à forma de um problema essencialmente $(1, 1)$ -dimensional. Portanto, iniciaremos a construção das branas nesse cenário mais simples, e com um único campo escalar, de modo que possam ser observadas similaridades com os kinks. Um Ansatz para a métrica que descreve branas M_4 imersas em um espaço-tempo que tende a AdS_5 é

$$ds^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2 \quad (4.11)$$

onde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; o termo $e^{2A(y)}$ é o fator de deformação da métrica e o tensor $\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$ é a métrica de Minkowski. É considerado que tanto o $A(y)$ quanto o campo escalar ϕ dependem apenas da dimensão extra y . Partimos da seguinte ação com um acoplamento mínimo entre o campo e a gravidade

$$S = \int d^4x dy \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} R - \frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi - V(\phi) \right) \quad (4.12)$$

onde $g = \det(g_{MN})$ e $M, N = 0, 1, 2, 3, 4$. O campo escalar ϕ constrói o defeito (membrana) e R é o escalar de curvatura. Como citado acima, as soluções do tipo kink podem ser encontradas pois o campo escalar depende apenas da dimensão y , ou seja, $\phi = \phi(y)$. Com o uso das equações de Einstein e de Euler-Lagrange, podemos chegar as equações de movimento do modelo.

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R + g_{MN} \Lambda = 8\pi G T_{MN} \quad (4.13)$$

$$\partial_M \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_M \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (4.14)$$

No caso de uma brana AdS, a constante cosmológica é negativa ($\Lambda < 0$), já para branas dS a constante é positiva ($\Lambda > 0$) e em espaços de Minkowski a constante corresponde a $\Lambda = 0$. As componentes do tensor de energia-momento são

$$T_{MN} = \partial_M \phi \partial_N \phi - g_{MN} \left(\frac{1}{2} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi - V(\phi) \right) \quad (4.15)$$

Substituindo o tensor de energia-momento na Eq (4.13), teremos

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R = 2 \left[\partial_M \phi \partial_N \phi - g_{MN} \left(\frac{1}{2} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi - V(\phi) \right) \right] \quad (4.16)$$

onde $G = 1/4\pi$. Substituindo a densidade lagrangeana na equação de Euler-Lagrange, ficamos com

$$\partial_M \left(\sqrt{-g} g^{MN} \partial_N \phi \right) = \sqrt{g} \frac{V(\phi)}{\partial \phi} \quad (4.17)$$

Portanto, as Eqs (4.16 – 4.17) são equações de movimento. O próximo passo consiste em obter explicitamente as componentes do tensor de Ricci R_{MN} , bem como o escalar de Ricci R . Obtemos

$$R = -4(5A'^2(y) + 2A''(y)) \quad (4.18)$$

e

$$-R_{00} = R_{11} = R_{22} = R_{33} = -e^{2A(y)}(4A'^2(y) + A''(y)) \quad (4.19)$$

$$R_{44} = -4(A'^2(y) + A''(y)) \quad (4.20)$$

A equação da métrica Eq (4.11) nos permite escrever $\sqrt{-g} = \sqrt{e^{8A}} = e^{4A}$. Substituindo as Eqs (4.18) e (4.20) na equação de movimento dada pela Eq (4.16), com $M, N = 4$, teremos:

$$6A'^2(y) = \phi'^2(y) - 2V(\phi) \quad (4.21)$$

$$A'^2(y) = \frac{1}{6}\phi'^2(y) - \frac{1}{3}V(\phi) \quad (4.22)$$

Por outro lado, quando substituimos as Eqs (4.18) e (4.20) para $M, N = 0, 1, 2, 3$, obtemos

$$-6A'^2(y) - 3A''(y) = \phi'^2(y) + 2V(\phi) \quad (4.23)$$

Somando as Eqs (4.21) e (4.23), temos

$$A''(y) = -\frac{2}{3}\phi'^2(y) \quad (4.24)$$

A partir da Eq (4.17) podemos completar o conjunto das equações de movimento

$$\phi''(y) + 4A'(y)\phi'(y) = \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \quad (4.25)$$

onde a linha indica derivação em relação a y . Na busca por um modelo que seja capaz de reduzir a ordem das equações de movimento, consideramos um potencial em termos do superpotencial $W(\phi)$ [47]

$$V(\phi) = \frac{1}{8} \left(\frac{dW(\phi)}{d\phi} \right)^2 - \frac{1}{3} W^2(\phi) \quad (4.26)$$

Potenciais escritos como na Eq (4.26) levam a equações de primeira ordem

$$\phi'(y) = \frac{1}{2} \frac{dW(\phi)}{d\phi} \quad (4.27)$$

e

$$A'(y) = -\frac{1}{3} W(\phi) \quad (4.28)$$

cujas soluções são também soluções das equações de movimento. Com o objetivo de formar branas que se assemelhem às soluções do tipo kink, o campo escalar $\phi(y)$ deve ser assintótico para os mínimos do potencial quando $y \rightarrow \pm\infty$. Como foi visto no capítulo anterior, quando temos um modelo sem gravidade, ou seja, com um potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \lambda^2 (\phi^2 - a^2)^2 \quad (4.29)$$

onde o superpotencial é

$$W(\phi) = \lambda \left(\frac{\phi^3}{3} - a^2 \phi \right) \quad (4.30)$$

Encontramos como solução

$$\phi(x) = \pm a \tanh(a\lambda(x - x_0)) \quad (4.31)$$

que corresponde a soluções do tipo kink (sinal positivo) e anti-kink (sinal negativo). A solução interpola entre os vácuos do potencial. Quando tratamos o caso com gravidade, o potencial de acordo com a Eq (4.26) e Eq(4.30) para $\lambda = a = 1$, ficará

$$V(\phi) = \frac{1}{8} (\phi^2 - 1)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\phi^3}{3} - \phi \right)^2 \quad (4.32)$$

plotado na Fig. 4.1 Percebemos que para obter um solução similar ao kink, foi necessário um potencial sêxtuplo.

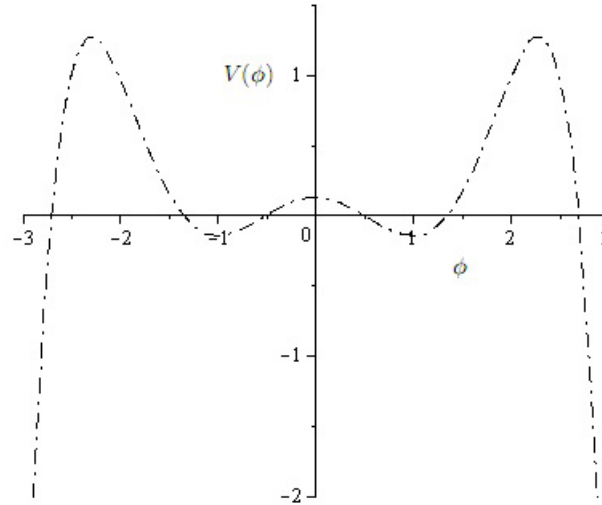


Figura 4.1: Potencial para o caso gravitacional.

A solução é dada por

$$\phi(y) = \tanh\left(\frac{y}{2}\right) \quad (4.33)$$

O potencial possui dois mínimos degenerados em $\phi = \pm 1$ e a solução para o campo interpola entre esses dois mínimos, com base nisso, podemos ver o mesmo comportamento de uma solução do tipo kink. Portanto, a introdução de uma dimensão extra além das quatro dimensões usuais gera uma estrutura de parede de domínio, onde sua espessura é caracterizada pela alternância dos diferentes domínios do potencial que o campo ϕ deve atravessar.

4.3 Sólitons BPS em Teoria de Lifshitz

Dentre as possibilidades de contornar o Teorema de Derrick para que sejam construídos defeitos, em particular quando temos (3,1)-dimensões podemos destacar a Teoria de Lifshitz. Devido aos resultados do Teorema de Derrick, teorias de campos escalares padrão não são capazes de suportar soluções do tipo sóliton em $D \geq 2$, ou seja, soluções estáveis com energia finita em altas dimensões tendem a colapsar. No entanto, a Teoria de Campo Escalar de Lifshitz pode suportar soluções com energia finita formada apenas por campos escalares em três dimensões. Tais soluções são sólitons do tipo ponto e do tipo corda, sendo chamadas respectivamente de pólos de Lifshitz (L poles) e cordas de Lifshitz (L strings). A ideia da Teoria de Lifshitz está em adicionar altas ordens de derivadas espaciais na ação mantendo de segunda ordem as derivadas temporais. Em [57], a Teoria de Lifshitz

foi analisada com derivadas espaciais de quarta ordem. Tais teorias são muito mais difíceis de serem examinadas do que apenas as teorias de segunda ordem. Considerando a construção da Teoria de Lifshitz em (3,1) dimensões, a ação invariante [57] para um simples campos escalar real é

$$S = \int d^3x dt \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla^2 \phi)^2 - a \phi^5 \nabla^2 \phi - \lambda \phi^{10} \right) \quad (4.34)$$

onde a e λ são constantes. A ação mais geral desse tipo pode ser escrita compactamente da forma

$$S = \int d^3x dt \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla^2 \phi)^2 - K(\phi) \nabla^2 \phi - V(\phi) \right) \quad (4.35)$$

onde $K(\phi)$ possui ordem cinco e $V(\phi)$ ordem dez. Podemos escrever a expressão para a energia, sendo que $E = \int d^3x T_{00}$

$$E = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla^2 \phi)^2 + K(\phi) \nabla^2 \phi + V(\phi) \right) \quad (4.36)$$

Agora será utilizado o mesmo processo da prova do Teorema de Derrick, porém utilizaremos a energia de Lifshitz. A energia para configurações estáticas é escrita abaixo:

$$E = \int d^3x \left(\frac{1}{2} (\nabla^2 \phi)^2 + K(\phi) \nabla^2 \phi + V(\phi) \right) \quad (4.37)$$

Considerando uma variação do campo, podemos escrever

$$\phi(x) \rightarrow \phi(\lambda x) \quad (4.38)$$

A energia sobre essa variação pode agora ser escrita

$$E_\lambda = \int d^3x \left(\frac{1}{2} (\nabla^2 \phi(\lambda x))^2 + K(\phi) \nabla^2 \phi(\lambda x) + V(\phi) \right) \quad (4.39)$$

Fazemos um reescalonamento $y \rightarrow \lambda x$ com objetivo de escrever E_λ em função de ϕ

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \int \frac{d^3y}{\lambda^3} \left(\frac{1}{2} (\lambda^2 \nabla^2 \phi(y))^2 + \lambda^2 K(\phi) \nabla^2 \phi(y) + V(\phi) \right) \\ E_\lambda &= \lambda V_1(\phi) + \lambda^{-1} V_2(\phi) + \lambda^{-3} V_3(\phi) \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde $V_1(\phi) = \int d^3x (\nabla^2 \phi)^2$, $V_2(\phi) = \int d^3x K(\phi) \nabla^2 \phi$ e $V_3(\phi) = \int d^3x V(\phi)$. Uma condição necessária para a análise da solução é que a variação da energia sobre a variação do campo deve ser zero, implicando em

$$\frac{\partial E_\lambda}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=1} = V_1(\phi) - V_2(\phi) - 3V_3(\phi) = 0 \quad (4.41)$$

Para garantir a estabilidade da solução a segunda derivada deve ser positiva

$$\frac{\partial^2 E_\lambda}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=1} = 2V_2(\phi) + 12V_3(\phi) > 0 \quad (4.42)$$

substituindo a Eq (4.41) na equação acima, ficamos com $4V_1(\phi) - 2V_2(\phi) > 0$. Esta quantidade é necessariamente positiva. Portanto, a adição de termos derivativos de alta ordem nos leva a sólitons estáveis.

4.4 Dependência explícita com a distância na Lagrangeana

Nessa proposta considera-se uma densidade lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (4.43)$$

onde o potencial tem a dependência explícita da distância [51, 52]:

$$V(\phi) = \frac{1}{2r^N} W_\phi^2. \quad (4.44)$$

A métrica é a de Minkowski (+, -, ..., -), a coordenada radial $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_D^2}$ e ϕ é o campo escalar. O fator $1/r^N$ introduzido na Eq (4.44) é um modelo efetivo, advindo de uma teoria mais fundamental que aborda uma versão simplificada abeliana do modelo dielétrico [51], descrito pela densidade lagrangeana $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - f(\phi) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$. A equação de movimento em um espaço-tempo com $(D, 1)$ dimensões é descrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (4.45)$$

Porém, na busca por configurações estáticas, a eq.(4.45) fica:

$$\nabla^2 \phi = \frac{dV}{d\phi} \quad (4.46)$$

A energia é dada por:

$$E = \int \left(\frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \frac{1}{2r^N} W_\phi^2 \right) r^{D-1} dr \quad (4.47)$$

Supondo que as soluções da equação de campo só dependem da coordenada radial, ou seja, $\phi = \phi(\vec{r})$ e a energia total é a soma das energias cinética e potencial:

$$E = E_c + E_p \quad (4.48)$$

podemos escrever a energia total através da mudança $\phi^\lambda(r) = \phi(\lambda r)$ [18].

$$E = \frac{1}{2} \int \lambda^2 (\nabla \phi)^2 d^D r + \int \frac{1}{r^N} V(\lambda \phi) d^D r \quad (4.49)$$

$$E = \lambda^{2-D} E_c^D + \lambda^{N-D} E_p^D \quad (4.50)$$

Para assegurar a estabilidade das soluções, obtemos por meio da derivada primeira e da derivada segunda em função do parâmetro λ , respectivamente as seguintes condições

$$(2 - D)E_c^D + (N - D)E_p^D = 0 \quad (4.51)$$

$$(2 - D)(1 - D)E_c^D + (N - D)(N - D - 1)E_p^D \geq 0 \quad (4.52)$$

O interesse está em observar casos que possam ser capazes de suportar soluções topológicas. Sabemos que essas condições colocam restrições à respeito de N e D , pois se olharmos para o caso padrão onde $D = 1$ e $N = 0$, caso responsável pela existência das soluções estáveis, teremos uma igualdade das energias cinética e potencial. Já para $D = 2$ e $N = 2$ não se obtêm nenhuma relação entre as energias E_c^D e E_p^D . Quando voltamos a atenção para $D \geq 3$ apenas podemos ter a igualdade $E_c^D = E_p^D$ quando temos $N = 2(D - 1)$ [51]. Em seguida, para obtermos a energia de Bogomol'nyi partimos da energia das configurações estáticas:

$$E = \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2 \right] dx \quad (4.53)$$

$$E = \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{d\phi}{dr} \mp \frac{W_\phi}{r^{N/2}} \right)^2 \pm 2 \frac{W_\phi}{r^{N/2}} \frac{d\phi}{dr} \right] r^{D-1} dr \quad (4.54)$$

Igualamos o primeiro termo da integral a zero para podermos obter a energia mínima do sistema, ficando com:

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{W_\phi}{r^{N/2}} \quad (4.55)$$

Portanto, reescrevemos a eq.(4.54)

$$E = \int \frac{dW}{dr} r^{D-1-N/2} dr \quad (4.56)$$

A energia então é:

$$E = \int \frac{dW}{dr} dr = |\Delta W| = |W[\phi(\infty)] - W[\phi(0)]| \quad (4.57)$$

resultado obtido somente se $N = 2(D - 1)$. Percebemos da equação acima que precisamos calcular o superpotencial W nos valores de ϕ para determinar o valor da energia de qualquer solução. As equações de primeira ordem utilizando a Eq (4.55) e também $N = 2(D - 1)$ é escrita da seguinte forma [51]:

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{1}{r^{D-1}} W_\phi \quad (4.58)$$

correspondendo a energia de Bogomol'nyi para modelos com campos escalares em D dimensões espaciais. As equações de primeira ordem são de extrema importância já que suas soluções resolvem a equação de movimento. A equação de movimento para o campo ϕ é

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^{D-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{D-1} \frac{d\phi}{dr} \right) = \frac{1}{r^{2(D-1)}} W_\phi W_{\phi\phi} \quad (4.59)$$

Para analisar a estabilidade das soluções, consideramos pequenas flutuações

$$\phi(x, t) = \phi(r) + \sum_k \eta_k(r) \cos(\omega_k t) \quad (4.60)$$

isso nos leva à uma equação para os modos das flutuações $H\eta_k = \omega_k^2 \eta_k$

$$H\eta_k = \left(-\frac{1}{r^{D-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{D-1} \frac{d}{dr} \right) + \frac{1}{r^{2(D-1)}} (W_{\phi\phi}^2 + W_{\phi\phi\phi}) \right) \eta_k \quad (4.61)$$

com o Hamiltoniano sendo escrito conforme a equação abaixo

$$H = \frac{1}{r^{2(D-1)}} \left(-r^{D-1} \frac{d}{dr} \mp W_{\phi\phi} \right) \left(r^{D-1} \frac{d}{dr} \mp W_{\phi\phi} \right) \quad (4.62)$$

determinando o estado de menor energia

$$\frac{1}{r^{D-1}} \left(r^{D-1} \frac{d}{dr} \mp W_{\phi\phi} \right) \eta_k = 0 \quad (4.63)$$

obtendo o modo zero, a partir da equação de primeira ordem, que corresponde ao termo entre parênteses da equação acima

$$\eta_0(r) = k \exp \left(\pm \int W_{\phi\phi} r^{1-D} dr \right) \quad (4.64)$$

onde k é a constante de normalização. Com base nisso, podemos investigar a presença dos defeitos em modelos específicos. Investigaremos primeiro o caso quando $D = 1$. A equação de movimento agora é:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = W_\phi W_{\phi\phi} \quad (4.65)$$

Consideramos um superpotencial na forma

$$W(\phi) = p \left[\frac{\phi^{(2p-1)/p}}{2p-1} - \frac{\phi^{(2p+1)/p}}{2p+1} \right] \quad (4.66)$$

Portanto, o potencial é dado por [18, 51]

$$V(\phi) = \frac{1}{2r^{2(D-1)}} \phi^2 \left(\phi^{-1/p} - \phi^{1/p} \right)^2 = \frac{1}{2r^{2(D-1)}} W_\phi^2 \quad (4.67)$$

O parâmetro p é real e assume valores apenas ímpares, pois quando assumimos por exemplo $p = 2$, o modelo se torna instável, devido ao modo zero ser não-normalizável. Para $p = 1$, obtêm-se a teoria ϕ^4 . Quando $p = 3, 5, \dots$ são encontrados novos modelos capazes de suportar os mínimos ± 1 , tendo como centro do defeito $x = 0$. As equações de primeira ordem são

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \phi^{(p-1)/p} \mp \phi^{(p+1)/p} \quad (4.68)$$

cujas soluções são

$$\phi(x) = \pm \tanh^p \left(\frac{x}{p} \right) \quad (4.69)$$

e podem ser vistos na figura

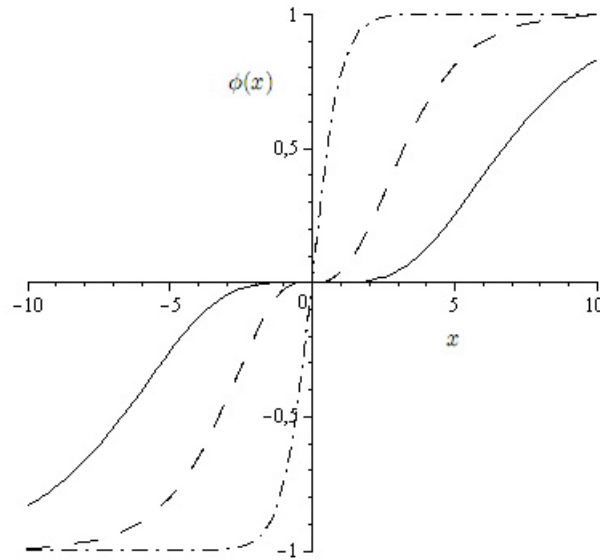


Figura 4.2: Soluções topológicas para modelos com $p = 1$ (traço-ponto), $p = 3$ (traço) e $p = 5$ (linha sólida) .

Como dito antes da Fig 4.2 percebemos que $p = 1$ é caracterizado pelo kink padrão, enquanto para $p = 3, 5$ os novos tipos de solução são denominados de soluções 2-kink, compostos por dois kinks padrão, originando a espessura do defeito. Quando levamos em conta $D = 2$ e $N = 2$, a forma da equação de movimento a partir da eq.(4.59) é

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} W_\phi W_{\phi\phi} \quad (4.70)$$

lembrando que a solução depende apenas da coordenada radial. Efetuando uma mudança de variável $dx = \pm r^{-1} dr$ mapeando o modelo para $D = 2$ em um modelo $d = 1$, obtemos a seguinte equação

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = W_\phi W_{\phi\phi} \quad (4.71)$$

O modelo admite a solução da forma

$$\phi(r) = \pm \left(\frac{r^{2/p} - 1}{r^{2/p} + 1} \right)^p \quad (4.72)$$

Dessa forma, fica claro a presença de defeitos em sistemas descritos com campos escalares em um espaço-tempo D -dimensional, suportando defeitos estáticos.

Capítulo 5

Armadilhamento de campos de spin-0 em um anel em $(3, 1)$ -dimensões

Os defeitos topológicos são de grande interesse em Física. Como exemplos podemos citar as aplicações no estudo do confinamento do quark [42], gravitação e cosmologia [43] e física da matéria condensada [44]. A ideia que nós vivemos em um mundo brana multidimensional [45] têm sido aplicada aos defeitos topológicos, com interessantes percepções ao problema da constante cosmológica e problema da hierarquia [46], com extensões de defeitos gerados dinamicamente por branas espessas [47]. A nova geração de aceleradores também levou a um interesse cada vez maior no processo de localização de campos nas branas [48].

A simplicidade de campos escalares levou à questão se soluções descrevendo defeitos topológicos construídos somente com campos escalares são realizados em qualquer dimensionalidade. Para responder este problema, o conhecido Teorema de Derrick diz que (visto no capítulo anterior), para $D \geq 2$, soluções estáticas estáveis e não triviais são proibidas [49]. O teorema considera como ponto de partida uma densidade lagrangeana padrão em $(D, 1)$ -dimensões da seguinte forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi - V(\phi) \tag{5.1}$$

onde o potencial $V(\phi)$ é uma função não negativa, o qual deve zerar em seu mínimo absoluto. Podemos encontrar na literatura alguns exemplos de como escapar deste teorema [50]. No presente trabalho nós estamos interessados em uma estratégia para considerar a dependência explícita com a distância na densidade lagrangeana [51, 52]. Em particular, no artigo [51], defeitos construídos apenas com um campo escalar em $(2, 1)$ -dimensões são obtidos, os quais são anéis com raio e espessuras característicos.

No presente trabalho tais anéis são imersos em um usual espaço-tempo de Minkowski em (3,1)-dimensional formando outra classe de defeitos que podem ser estudados com respeito a sua capacidade de armadilhar campos de matéria, em particular campos de spin-0.

Na seção 5.1 será mostrado a incorporação de um anel com apenas um campo escalar. Já na seção 5.2, o assunto abordado será a ressonância dos estados de spin-0. Uma solução de séries para uma equação do tipo Schrödinger para modos escalares massivos é primeiramente atacada na ordem para implementar um método numérico que descreve estados ressonantes. Os resultados são confrontados com um diagrama de espaço de fase. Nossa conclusão é apresentada na seção 5.3.

5.1 Anel com um Campo Escalar

O anel imerso é descrito pela ação em (3,1)-dimensional [51]

$$S_0 = \int dt d^3x \left(\frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi - \frac{1}{2r^2} W_\phi^2 \right) \quad (5.2)$$

onde z é a direção ao longo do eixo de simetria do anel e r é a coordenada radial dada por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Nós usamos as letras maiúsculas M e N para todas as dimensões em (3,1), as letras latinas i e j para x , y e z e as letras gregas μ e ν para as duas dimensões (t, z) . A equação de movimento para o campo escalar ϕ é

$$\partial_M \partial^M \phi + \frac{1}{r^2} W_\phi W_{\phi\phi} = 0 \quad (5.3)$$

Nós assumimos que o campo escalar ϕ depende somente de r . Neste caminho, a equação se reduz à

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} W_\phi W_{\phi\phi} \quad (5.4)$$

onde ∇^2 é o Laplaciano 2-dimensional.

Isto pode ser mostrado [51] que as soluções da equação de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{r} W_\phi(\phi) \quad (5.5)$$

são também soluções da Eq. (5.4). Derivando em relação a r , teremos

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} W_\phi \right) = -\frac{1}{r^2} W_\phi + \frac{1}{r^2} W_\phi W_{\phi\phi}$$

substituindo a equação acima na Eq (5.4), onde o Laplaciano 2-dimensional têm a seguinte forma

$$\nabla^2\phi = \frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr}$$

então ficamos com

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{r^2} W_\phi W_{\phi\phi} \quad (5.6)$$

a qual corresponde a Eq (5.4).

A ação (5.2) pode ser interpretada como uma teoria efetiva de um modelo mais fundamental. Uma possibilidade é uma teoria em que um fio carregado é imerso em um meio dielétrico cuja permissividade elétrica $g(\phi)$ é dependente do campo ϕ . Nós podemos expressar a ação da seguinte maneira

$$S_0 = \int dt d^3x \left(\frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi - \frac{g(\phi)}{4} F_{MN} F^{MN} - e A_M J^M \right) \quad (5.7)$$

onde $J_M = (\delta(r), 0, 0, 0)$ representa a carga. Da equação de Maxwell $\partial_M (g(\phi) F^{MN}) = e J^N$, obtemos a Lei de Coulomb para o campo elétrico radial

$$E = \frac{1}{r} \frac{e}{g(\phi)} \quad (5.8)$$

A equação de movimento para o campo escalar estático e radial para a ação (5.7) é dada

$$\nabla^2\phi = -\frac{1}{2} g_\phi E^2 \quad (5.9)$$

que leva a equação (5.4) se escolhermos

$$W_\phi(\phi) = \frac{e}{\sqrt{g(\phi)}}$$

Se mudarmos a variável r com $d\xi = r^{-1} dr$, podemos escrever

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{d\xi} \frac{d\xi}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d\phi}{d\xi}$$

derivando em relação a r ,

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = -\frac{1}{r^2} \frac{d\phi}{d\xi} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{d\phi}{d\xi} \right)$$

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = -\frac{1}{r^2} \frac{d\phi}{d\xi} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2\phi}{d\xi^2}$$

então substituindo a equação acima na Eq. (5.6) ficaremos com

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d\phi}{d\xi} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2\phi}{d\xi^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{r^2} W_\phi W_{\phi\phi} \quad (5.10)$$

cancelando o primeiro e terceiro termos do lado direito da Eq (5.10), a equação de segunda ordem (5.4) pode ser escrita como

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} = W_\phi W_{\phi\phi} \quad (5.11)$$

e a equação de primeira ordem (5.5) como

$$\frac{d\phi}{d\xi} = W_\phi(\phi) \quad (5.12)$$

Dessa forma nosso problema antes bidimensional é mapeado em um efetivo 1-dimensional.

Considerando uma simples escolha, o potencial ϕ^4 onde

$$W_\phi(\phi) = \sqrt{\lambda}(a^2 - \phi^2) \quad (5.13)$$

têm como solução

$$\phi(\xi) = a \tanh(a\sqrt{\lambda}(\xi - \xi_0)) \quad (5.14)$$

Com $\xi = \ln r$ e $\xi_0 = \ln r_0$ nós temos

$$\phi(r) = a \tanh(a\sqrt{\lambda} \ln(r/r_0)) \quad (5.15)$$

onde r_0 é o raio do anel. A Fig. 5.1a mostra que a solução interpola entre -1 e 1 , o vácuo do potencial $V(\phi)$. A densidade de energia é

$$T_{00} = \lambda a^4 \operatorname{sech}^4(a\sqrt{\lambda} \ln(r/r_0)) \quad (5.16)$$

A análise dimensional mostra que $[\phi] = [a] = [W_\phi] = M$ e $[\lambda] = M^{-2}$.

A Fig 5.1b mostra que T_{00} tem um máximo em $r = r_0$, que pode ser tomado como coordenada radial do centro do anel. Nós podemos definir arbitrariamente os limites efetivos $r_1 = 0.651r_0$ e $r_2 = 1.535r_0$ do anel, que corresponde aos pontos onde a densidade de energia decai 70% de seu máximo. Neste caminho nós podemos falar que o anel é caracterizado por $r_1 < r < r_2$, onde $r_0 \in [r_1, r_2]$ é o centro do

anel. A espessura do anel cresce linearmente com seu raio, e é dado por $r_2 - r_1 = 0.884r_0$. A energia total é finita dada por

$$E = \int_0^\infty dr r T_{00} = \frac{8\pi}{3} a^3 \sqrt{\lambda} \quad (5.17)$$

Considerando o problema de localização de campos de spin-0 em tais defeitos, o seguinte processo geral é usado em branas [53].

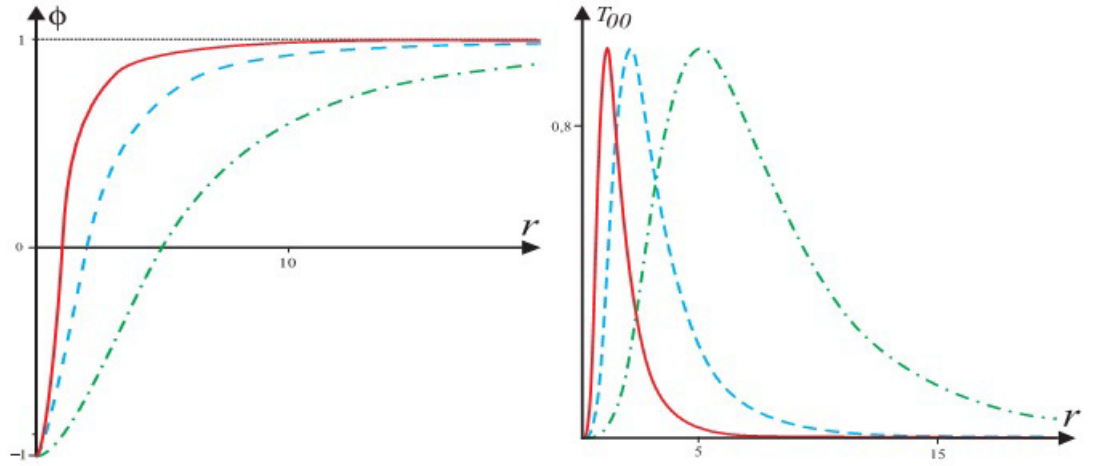


Figura 5.1: (a) Campo escalar $\phi(r)$, interpolando entre -1 e 1 . (b) T_{00} como uma função de r . Nas duas figuras temos $r_0 = 1$ (traço sólido), $r_0 = 2$ (tracejada) e $r_0 = 5$ (ponto-tracejada). Nós fixamos $a = \lambda = 1$.

5.2 Localização de Spin-0

Nós consideramos um campo escalar Φ suficientemente fraco para negligenciar a “backreaction” no anel, como foi mostrado anteriormente, é construído com o campo escalar ϕ . A fim de tornar claro o raciocínio, nós pegamos a ação para o sistema como

$$S = S_0 + S_1 \quad (5.18)$$

com S_0 dado pela Eq. (5.2), e

$$S_1 = \int dt d^3x \left(\frac{1}{2} \partial_M \Phi \partial^M \Phi - V(\Phi, \phi) \right) \quad (5.19)$$

Dessa forma, a dependência explícita de r no potencial somente ocorre para a ação do campo forte ϕ e não é efetivo para o campo escalar fraco Φ . O conjunto completo de equações é

$$\partial_M \partial^M \phi + \frac{1}{r^2} W_\phi W_{\phi\phi} + \frac{\partial V(\Phi, \phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (5.20)$$

$$\partial_M \partial^M \Phi + \frac{\partial V(\Phi, \phi)}{\partial \Phi} = 0 \quad (5.21)$$

Em geral, este conjunto de equações diferenciais acopladas se de difícil solução, mas para nossa proposta, tomamos a solução $\phi(r)$ para o caso livre dada pela Eq (5.5), uma vez que não é influenciada pelo acoplamento com o campo Φ , e somente precisamos resolver a Eq (5.21) para o campo Φ .

Nós fazemos a decomposição

$$\Phi(t, x, y, z) = \sum_n \Phi_n(t, z) \rho_n(r) \quad (5.22)$$

ou seja, estamos olhando para soluções para o campo escalar Φ com simetria radial em duas dimensões x e y . Por simplicidade consideramos soluções com momento angular zero, onde a variável angular θ não contribui. Consideramos o simples acoplamento

$$V(\Phi, \phi) = \frac{1}{2} \left(F(\phi) + \mathcal{V}(\phi) \right) \Phi^2 \quad (5.23)$$

reescrevemos a Eq (5.21)

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi + \partial_r \partial^r \Phi + \frac{\partial V(\Phi, \phi)}{\partial \Phi} = 0 \quad (5.24)$$

$$\sum_n \rho_n(r) \partial_\mu \partial^\mu \Phi_n(t, z) + \sum_n \Phi_n(t, z) \partial_r \partial^r \rho_n(r) + \left(F(\phi) + \mathcal{V}(\phi) \right) \sum_n \Phi_n(t, z) \rho_n(r) = 0$$

impondo que $\Phi_n(t, z)$ satisfaz a equação de Klein-Gordon 1-dimensional $\partial_\mu \partial^\mu \Phi_n(t, z) + m_n^2 \Phi_n(t, z) = 0$, então

$$- \sum_n \rho_n(r) m_n^2 \Phi_n(t, z) - \sum_n \Phi_n(t, z) \partial_r \partial^r \rho_n(r) + \left(F(\phi) + \mathcal{V}(\phi) \right) \sum_n \Phi_n(t, z) \rho_n(r) = 0$$

colocando em evidência o termo $\Phi_n(t, z)$

$$\sum_n \Phi_n(t, z) \left[-m_n^2 \rho_n(r) - \nabla_{(2)}^2 \rho_n(r) + \left(F(\phi) + \mathcal{V}(\phi) \right) \rho_n(r) \right] = 0$$

Nesse caminho a Eq. (5.21) está vinculada a equação do tipo Schrödinger 2-dimensional para o modo escalar $\rho_n(r)$

$$(-\nabla_{(2)}^2 + \tilde{V}_{sch})\rho_n(r) = m_n^2\rho_n(r) \quad (5.25)$$

com o potencial

$$\tilde{V}_{sch}(\phi) = F(\phi) + \mathcal{V}(\phi) \quad (5.26)$$

A análise dimensional mostra que $[\Phi] = M$ e $[F(\phi)] = [\mathcal{V}(\phi)] = M^2$.

A ação dada pela Eq. (5.19) pode ser integrada em (x, y) dimensões.

$$S_1 = \int dt dx dy dz \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \frac{1}{2} \partial_r \Phi \partial^r \Phi - V(\Phi, \phi) \right) \quad (5.27)$$

fazendo uso da decomposição Eq. (5.22) e também da Eq. (5.26), temos

$$\begin{aligned} S_1 = & \int dt dz \int r dr \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \left(\sum_n \Phi_n(t, z) \rho_n(r) \right) \partial^\mu \left(\sum_m \Phi_m(t, z) \rho_m(r) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \partial_r \left(\sum_n \Phi_n(t, z) \rho_n(r) \right) \partial^r \left(\sum_m \Phi_m(t, z) \rho_m(r) \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \tilde{V}_{sch}(\phi) \sum_n \Phi_n(t, z) \rho_n(r) \sum_m \Phi_m(t, z) \rho_m(r) \right] \end{aligned}$$

agrupando os modos escalares massivos, encontramos:

$$\begin{aligned} S_1 = & \frac{1}{2} \int dt dz \left[\sum_{n,m} \left(\partial_\mu \Phi_n(t, z) \partial^\mu \Phi_m(t, z) \right) \int r dr \rho_n(r) \rho_m(r) + \right. \\ & \left. + \sum_{n,m} \Phi_n(t, z) \Phi_m(t, z) \int r dr \partial_r \rho_n(r) \partial^r \rho_m(r) - \right. \\ & \left. - \tilde{V}_{sch}(\phi) \sum_n \Phi_n(t, z) \Phi_m(t, z) \int r dr \rho_n(r) \rho_m(r) \right] \end{aligned}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \int dt dz \left[\sum_{n,m} \partial_\mu \Phi_n(t,z) \partial^\mu \Phi_m(t,z) \delta_{mn} + \sum_{n,m} \Phi_n(t,z) \Phi_m(t,z) \int r dr \rho_n(r) \nabla^2 \rho_m(r) - \right. \\ \left. - \tilde{V}_{sch}(\phi) \sum_n \Phi_n(t,z) \Phi_m(t,z) \delta_{mn} \right]$$

usando a Eq (5.25)

$$S_1 = \frac{1}{2} \int dt dz \left[\sum_n \partial_\mu \Phi_n(t,z) \partial^\mu \Phi_n(t,z) + \sum_{n,m} \Phi_n(t,z) \Phi_m(t,z) \left(\int r dr \rho_n(r) \rho_m(r) \tilde{V}_{sch}(\phi) - \right. \right. \\ \left. \left. - \int r dr \rho_n(r) \rho_m(r) m_n^2 \right) - \tilde{V}_{sch}(\phi) \sum_n \Phi_n^2(t,z) \right]$$

obtendo a ação para os modos escalares massivos 1-dimensional Φ_n com massa m_n ,

$$S_1 = \int dt dz \sum_n \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_n \partial^\mu \Phi_n - \frac{1}{2} m_n^2 \Phi_n^2 \right) \quad (5.28)$$

e a condição de ortonormalidade para as componentes $\rho_n(r)$

$$\int dr r \rho_n(r) \rho_m(r) = \delta_{mn} \quad (5.29)$$

A análise dimensional mostra que $[\Phi_n] = M^{-1}$ e $[\rho_n] = M$.

Uma boa forma de investigar os modos massivos é olhar para uma transformação que torna a equação do tipo Schrödinger 2-dimensional em uma 1-dimensional. Isto pode ser feito após a introdução de $\psi_n = \rho_n \sqrt{r}$, com dimensionalidade $[\psi_n] = \sqrt{M}$.

$$-\frac{d^2 \rho_n(r)}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\rho_n(r)}{dr} + \tilde{V}_{sch}(\phi) \rho_n(r) = m_n^2 \rho_n(r) \\ -\frac{d^2}{dr^2} \left(\psi_n(r) r^{-1/2} \right) - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\psi_n(r) r^{-1/2} \right) + \tilde{V}_{sch}(\phi) \psi_n(r) r^{-1/2} = m_n^2 \psi_n(r) r^{-1/2}$$

após algumas derivações e cancelamentos, chegamos a seguinte equação

$$-\frac{d^2 \psi_n(r)}{dr^2} - \frac{1}{4r^2} \psi_n(r) + \tilde{V}_{sch}(\phi) \psi_n(r) = m_n^2 \psi_n(r) \quad (5.30)$$

Então, a Eq. (5.25) pode ser reescrita como

$$-\frac{d^2\psi_n(r)}{dr^2} + \left[F(\phi(r)) - \frac{1}{4r^2} \right] \psi_n(r) + \mathcal{V}(r)\psi_n(r) = m^2\psi_n(r) \quad (5.31)$$

Note que a condição de ortonormalidade Eq. (5.29) pode agora ser escrita como

$$\int dr \psi_n(r)\psi_m(r) = \delta_{mn} \quad (5.32)$$

Isto significa que com a escolha

$$F(\phi(r)) = \frac{1}{4r^2} \quad (5.33)$$

alcançamos uma equação do tipo Schrödinger 1-dimensional com o potencial $\mathcal{V}(r)$. As funções de onda $\psi_m(r)$ caracterizam um problema de mecânica quântica onde $|\psi(r)|^2 dr$ é identificado como a probabilidade de encontrar a partícula escalar a uma distância entre r e $r + dr$ da origem.

Para o modelo ϕ^4 considerado neste trabalho, a Eq (5.15) dá

$$F(\phi) = \frac{1}{4r_0^2} \left(\frac{a - \phi}{a + \phi} \right)^{\frac{1}{a\sqrt{\lambda}}} \quad (5.34)$$

e para um caso particular $a = \lambda = 1$ nós temos

$$F(\phi) = \frac{1}{4r_0^2} \frac{1 - \phi}{1 + \phi} \quad (5.35)$$

Agora, consideramos alguns acoplamentos específicos para estudar como o mecanismo de localização trabalha para escalares massivos em defeitos topológicos de fundo. Primeiro de tudo, note que a massa do campo Φ é dada por

$$m_\Phi^2 = F(\phi) + \mathcal{V}(\phi) \quad (5.36)$$

Nós queremos estudar uma classe de defeitos mostrando o armadilhamento de partículas na borda do anel. Isto colocou algumas restrições nas possíveis formas de m_Φ^2 . Uma possível escolha é:

$$m_\Phi^2 = \sqrt{\lambda} \left(\frac{a - \phi}{a + \phi} \right) (a^3 + 2a^2\phi + \phi^2\alpha + a\phi^2 - \phi^3) \quad (5.37)$$

onde α é um parâmetro adimensional. Para o caso particular $a = \lambda = 1$ nós temos

$$m_\Phi^2 = \left(\frac{1 - \phi}{1 + \phi} \right) (1 + 2\phi + \phi^2\alpha + \phi^2 - \phi^3) \quad (5.38)$$

a Fig. 5.2a mostra que m_Φ^2 diverge em $r = 0$, compatível ao caráter repulsivo do centro do anel. A massa decresce para valores positivos de r , assumindo um local mínimo em $r = r_0$ e tendendo a zero para $r \rightarrow \infty$. Dessa forma, esperamos a presença de ressonâncias ao redor do raio do anel. À primeira vista não seria esperado modos taquiônicos nem soluções não físicas.

Contudo, a verdadeira análise física deve ser realizada com a função $\mathcal{V}(\phi)$. A Fig. 5.2b coloca um diagrama r_0 versus α . Então é possível ver três regiões características: a região III, fisicamente aceitável e onde as excitações taquiônicas são ausentes; a região II, onde excitações taquiônicas são produzidas; a região não física I, caracterizada pelo potencial de Schrödinger $\mathcal{V}(\phi) \rightarrow -\infty$ quando $\phi \rightarrow -1$, no centro do anel. Este caráter não físico é alcançado para $r_0 < r_0^*$, onde $r_0^* = 1/(2 + \sqrt{1 + \alpha})$. Para $r_0 = r_0^*$ há um ponto de transição onde $\mathcal{V}(r = 0) = -2 - 1/r_0^{*2}$

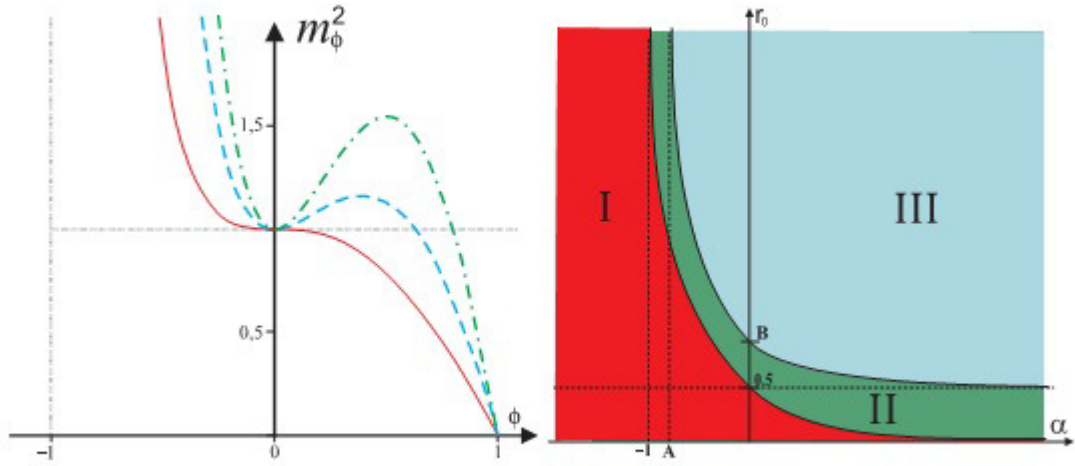


Figura 5.2: (a) Massa quadrada m_Φ^2 do campo Φ em função de ϕ , para $\alpha = 1$ (linha sólida), $\alpha = 5$ (tracejada) e $\alpha = 1$ (linha tracejada pontilhada). Nós fixamos $a = \lambda = 1$. (b) Diagrama r_0 versus α , mostrando as três regiões: região III, fisicamente aceitável e onde excitações taquiônicas são ausentes; a região II, onde excitações taquiônicas são produzidas; a região não física I. Na figura, $A = -0.789$ e $B = 0.823$.

O potencial do tipo Schrödinger, pode ser obtido das Eqs. (5.34), (5.36) e (5.37). A expressão para λ e a geral não é uma função racional. Para o caso particular de $\lambda = 1$ e $a = 1$, apesar da perda do seu caráter explícito dimensional, a expressão é mais compacta e fornece

$$\mathcal{V} = -4 \frac{r_0^4 \alpha}{(r^2 + r_0^2)^2} - 8 \frac{r_0^6}{(r^2 + r_0^2)^3} + 2 \frac{r_0^2}{r^2 + r_0^2} + \frac{4r_0^2 + 4r_0^2 \alpha - 1}{4r^2} \quad (5.39)$$

A partir de agora manteremos $\lambda = 1$ e $a = 1$. A Fig. 5.3 mostra alguns plots do potencial do tipo

Schrödinger $\mathcal{V}(r)$ para valores fixos de α e r_0 . Para $r_0 \gg 1$, o caráter positivo do potencial proíbe modos taquiônicos. Existe a possibilidade de encontrar tais modo para $r_0 < 1$, e essa possibilidade aumenta com o decréscimo de α . O local mínimo em torno de $r = r_0$ pode em princípio permitir a presença de estados metaestáveis em torno do raio do anel. Para grandes valores de α , (olhar o caso $\alpha = 10$ na Fig. 5.3c), o raio espessura/profundidade do local mínimo aumenta com r_0 . Isto significa que para tais valores de α esperamos encontrar ressonâncias para um anel de raio grande (de acordo com o que é visto na Fig. 5.4). Para valores grandes fixos de r_0 , (olhar o caso de $r_0 = 5$ na Fig. 5.3a-5.3c), o raio espessura/profundidade do local mínimo aumenta com α . Isso significa que com esses valores de r_0 esperamos encontrar ressonâncias para grandes valores de α .

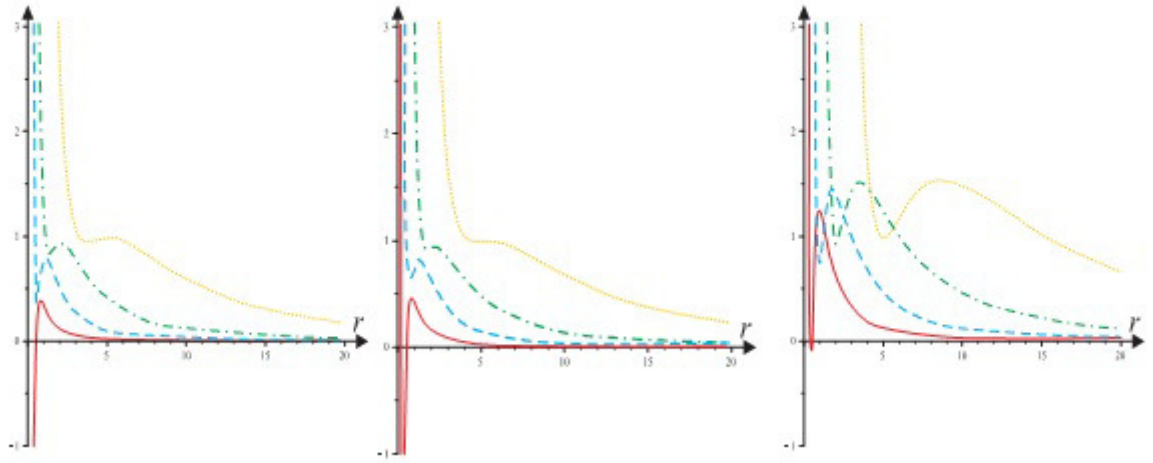


Figura 5.3: Potencial do tipo Schrödinger $\mathcal{V}(r)$ para (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 1$ e (c) $\alpha = 10$. Em todas as figuras $r_0 = 0.5$ (linha sólida), $r_0 = 1$ (tracejada), $r_0 = 2$ (pontilhada-tracejada) e $r_0 = 5$ (pontilhada). Nós fixamos $a = \lambda = 1$.

Na ordem para investigar numericamente os estados massivos, nós primeiro aplicamos o método de Frobenius com um procedimento do Maple [54] para alcançarmos a solução de série em torno do ponto regular $r = 0$:

$$\psi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^p \left(a_0 + \frac{a_1 r}{r_0} + \frac{a_2 r^2}{r_0^2} + \frac{a_3 r^3}{r_0^3} + \dots\right) \quad (5.40)$$

Para nossa proposta nós somente precisamos manter os primeiros termos da série. A expressão polinomial nos dá

$$p_1 = 1/2 + \sqrt{r_0^2 + r_0^2\alpha} \quad (5.41)$$

$$p_2 = 1/2 - \sqrt{r_0^2 + r_0^2\alpha} \quad (5.42)$$

Ambos p_1 e p_2 levam a $a_1 = 0$, mas somente a escolha $p = p_1$ é compatível com a exigência física $\psi(r=0) = 0$ e $\psi'(r=0) = 0$ para todo $\alpha > 0$. Para $p = p_1$, a relação de recorrência resulta

$$a_2 = \frac{a_0(4r_0^2m^2 - 12p + 4r_0^2\alpha + 12r_0^2 + 3 + 12p^2)}{4r_0^2\alpha - 4p^2 + 4r_0^2 - 9 - 12p} \quad (5.43)$$

Esta solução é válida para todas as escolhas de a_0 , mas arbitrariamente escolhemos $a_0 = 1$. Com essa escolha podemos alcançar uma expressão conveniente para $\psi(r)$ e $\psi'(r)$, válida para $r \ll r_0$. Um único valor para a_0 pode ser obtido depois de um processo de normalização. Dessa maneira, Eqs (5.40) e (5.41) levam à

$$\psi(r) = -\frac{1}{4} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{1/2 + \sqrt{r_0^2(\alpha+1)}} \frac{\left(4r^2\alpha + r^2m^2 + 6r^2 - 4 - 4\sqrt{r_0^2(\alpha+1)} \right)}{1 + \sqrt{r_0^2(\alpha+1)}}, r \ll r_0 \quad (5.44)$$

A expressão anterior e sua derivada com respeito a r quando usada para atingir $\psi(r_{min})$ e $\psi'(r_{min})$, para o ponto de partida $r = r_{min} \ll r_0$ do método numérico de Runge-Kutta. Note da Eq. (5.44), como neste modelo as condições iniciais dependem dos modos das massas e do parâmetro α . A solução da série será a entrada para a integração numérica, que então leva as soluções $\psi(r)$ válida também para $r \gg r_0$.

Com as soluções numéricas para funções de onda não normalizadas $\psi(r)$ permanece a seguinte questão qual é a probabilidade de encontrar modos massivos no anel. As soluções $\psi_m(r)$ mostram um comportamento característico perto da origem $r = 0$, tendendo a ondas planas longe do anel. Nós podemos obter uma expressão analítica para uma função de onda não normalizável $\psi(r)$ para $r \gg r_0$. Primeiro de tudo note que neste regime o potencial do tipo Schrödinger é

$$V_{sch} = \frac{3r_0^2 + r_0^2\alpha - 1/4}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-4}), r \gg r_0 \quad (5.45)$$

com solução

$$\psi_m(r) = A\sqrt{r}BesselJ(r_0\sqrt{\alpha+3}, mr) + B\sqrt{r}BesselY(r_0\sqrt{\alpha+3}, mr), r \gg r_0 \quad (5.46)$$

com A e B constantes. Dessa forma podemos considerar um processo de normalização para as funções de onda em uma caixa com bordas localizadas em r_{min} e r_{max} , onde r_{max} deve ser escolhido suficientemente grande para permitir um número suficientemente grande de oscilações de $\psi_m(r)$ para $r_{min} < r < r_{max}$. Também devemos considerar uma espessura finita do anel, definindo a probabilidade P_{ring} de encontrar o modo massivo ψ_m no anel proporcional a $\int dr |\psi_m(r)|^2$. Com a escala r_{max} podemos alcançar uma expressão satisfatória para P_{ring} , definida similarmente como [55, 56].

$$P_{ring} = \frac{\int_{r_1}^{r_2} dr |\psi_m(r)|^2}{\int_{r_{min}}^{r_{max}} dr |\psi_m(r)|^2} \quad (5.47)$$

Nós investigamos numericamente as soluções $\psi_m(r)$ com a descrição $\Delta r = 0.1$ para a faixa $0 < r < 80$, obtendo P_{ring} com Eq. (5.47). Nós podemos caracterizar o pico de ressonância quando a sua largura a meia altura do máximo é maior que o valor correspondente ao pico. Neste caso teremos estados metaestáveis com um tempo de decaimento inversamente proporcional a largura a meia altura do máximo do pico. Nossa análise mostra que valores grandes de αb e r_0 são melhores para atingirmos estados ressonantes. Como exemplo, Fig. 5.4 mostra o plot do P_{ring} versus m para $\alpha = 10$ e $r_0 = 1, 2$ e 3 .

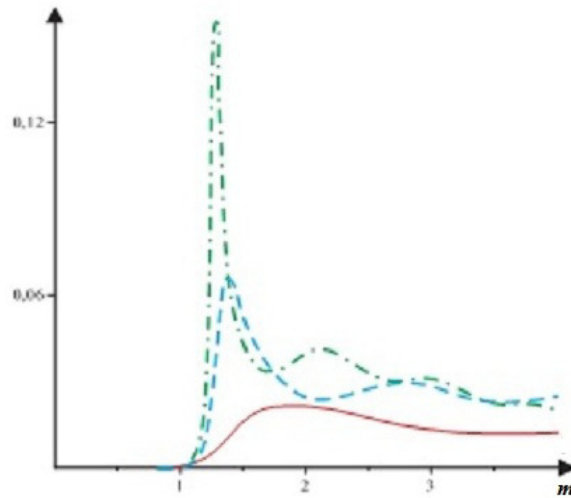


Figura 5.4: P_{ring} versus m para $\alpha = 10$ e $r_0 = 1$ (linha sólida), $r_0 = 2$ (tracejada) e $r_0 = 3$ (pontilhada-tracejada). Para cada valor de r_0 , os limites do anel r_1 e r_2 são definidos pelos pontos onde a densidade de energia decai 70% de seu máximo.

Note da Fig 5.4a presença de um pico de ressonância para $r_0 = 3$ em $m = 1.28$. Para $r_0 = 2$ ocorre um mais amplo pico de ressonância com um maior valor de massa $m = 1.39$, em comparação com o

pico com $r_0 = 3$. Para $r_0 = 1$ não há pico de ressonância. Neste caminho, vemos que o decréscimo do raio do anel aumenta as massas do campo Φ , favorecendo o processo de vazamento dos modos massivos.

Capítulo 6

Conclusão

Estudamos alguns conceitos relacionados a Teoria de Homotopia destacando principalmente que duas funções contínuas em um espaço topológico podem ser ditas homotópicas caso uma função possa se deformar à outra continuamente. A descrição entre os mapas de um espaço interno e uma variedade do espaço-tempo é caracterizada como teoria de homotopia. Dentre os principais conceitos destacam-se as homotopias de caminho, os caminhos fechados denominados de loops, as classes de equivalência as quais são chamadas de classes de homotopia, um conjunto de funções contínuas que originam o grupo de homotopia. Pôde ser observado que as estruturas de domínio que surgem são classificadas via grupos de homotopia, ou seja, os defeitos topológicos podem ser classificados por meio dos grupos homotópicos de uma espaço topológico representado pelo espaço interno. Portanto, a característica topológica da estrutura depende do grupo $\pi_n(M)$ da variedade do vácuo degenerado. Outro ponto de destaque fica por conta do grupo fundamental, ao qual só pode ser formado caso seja descrito por um caminho fechado (loop), ou seja, um grupo de classes homotópicas que começa e termina no mesmo ponto denominado de ponto base.

No Capítulo 3 consideramos a origem dos defeitos topológicos, onde tais defeitos aparecem em nosso Universo a partir do entendimento sobre quebra espontânea de simetria e transições de fases cosmológicas. Essas transições foram marcadas pelo decréscimo da temperatura a uma ponto crítico onde abaixo desse ponto o campo assume um valor esperado de vácuo degenerado, um conjunto de estados fundamentais degenerados, quebrando assim a simetria e originando os mais diferentes tipos de defeitos topológicos, assim como paredes de domínio, cordas e monopólos. Tais defeitos topológicos são soluções clássicas das equações de movimento e são configurações de matéria formados dessas transições do Universo primordial. Neste capítulo estamos particularmente interessados em modelos de um campo escalar em $(1, 1)$ -dimensões, e em soluções do tipo kink, onde o campo escalar interpola

entre dois valores correspondentes a estados de vácuo. O método de Bogomolny'i é utilizado para encontrar um formalismo de primeira ordem que resolva as equações de movimento.

No Capítulo 4 foi abordado o Teorema de Derrick, o qual restringe o aparecimento de soluções estáveis e não-singulares em dimensões espaciais maiores que 1. Na busca de encontrar soluções de energia finita e positiva, não-singulares e não-dissipativas, revisamos algumas formas de contornar o Teorema de Derrick para $D \geq 2$. Algumas possíveis formas de contornar o Teorema de Derrick são a inclusão de vínculos entre os campos escalares (modelo $O(3)$ não-linear) e a consideração de modelos com dependência explícita com a distância na lagrangeana.

Revisamos ainda a formulação de branas em $(4,1)$ -dimensões, a qual, por considerar o campo escalar dependente apenas da dimensão extra, torna o problema matematicamente análogo a um em $(1,1)$ -dimensões.

Finalmente no Capítulo 5, revisamos o formalismo introduzido na Ref [51], motivando fisicamente a ação e caracterizando a estrutura do defeito. Para uma classe de modelos particular, nós estudamos a questão da localização do spin-0 na borda do anel, focando o aparecimento de estados ressonantes e sua dependência sobre o raio do anel r_0 e um parâmetro de acoplamento do modelo. Depois chegamos a uma equação do tipo Schrödinger para os modos escalares massivos, um diagrama do espaço de fase foi encontrado caracterizando as excitações físicas aceitáveis. Estados ressonantes particulares em torno do centro do anel ($r = r_0$) foram obtidos numericamente, depois do uso de uma expansão em série válida para o núcleo interior $r \ll r_0$. A presença de tais ressonâncias confirma o que era esperado do espaço de fase e mostra que o acoplamento particular entre os campos escalares fracos e fortes, em caso de raios grandes é capaz de reduzir o vazamento dos modos massivos. Por outro lado, reduzindo o raio do anel os modos massivos são expelidos, mostrando que há um limite em que tais defeitos possam atuar como um mecanismo de armadilhamento das partículas escalares. Para raios pequenos, nossos resultados indicam uma interação repulsiva agindo entre as paredes do anel e as partículas massivas de spin-0.

Possíveis extensões deste trabalho, e que podem ser objeto de investigação futura, incluem a localização de outros campos de matéria nesta classe de defeitos, bem como a busca de possíveis realizações do modelo em sistemas de física da matéria condensada.

Capítulo 7

Apêndice

7.1 Construção das curvas limitando as regiões física, taquiônica e não física

O diagrama da Fig 5.2(b) corresponde ao limite das regiões física, taquiônica e não-física. Vamos demonstrar a construção desse diagrama, primeiro limitando-nos as regiões física e taquiônica. Com uso do termo da massa:

$$m := (a, \lambda) \rightarrow \frac{\sqrt{\lambda}(\phi^4 - a\phi^3\alpha - 2a\phi^3 + a^2\phi^2\alpha + a^3\phi + a^4 - a^2\phi^2)}{\phi + a} \quad (7.1)$$

e o termo

$$F := R \rightarrow \frac{1}{4R^2} \frac{(-\phi + 1)}{\phi + 1} \quad (7.2)$$

dessa forma, o potencial de Schrödinger pode ser escrita como:

$$V := (\phi) - > m(a, \lambda) - F(R); \quad (7.3)$$

Em particular, estamos fixando os valores $a = \lambda = 1$, reescrevendo a Eq 7.3 e utilizando um comando do Maple chamado *factor*, temos então:

$$V := (\phi) - > \frac{1}{4R^2} \frac{(\phi - 1)(4R^2\phi^3 - 4R^2\phi^2\alpha - 4R^2\phi^2 - 8R^2\phi + 1 - 4R^2)}{\phi + 1} \quad (7.4)$$

$$V := (\phi) - > \frac{1}{4R^2} \frac{(\phi - 1)K}{\phi + 1} \quad (7.5)$$

onde o termo K corresponde a:

$$K := 4R^2\phi^3 - 4R^2\phi^2\alpha - 4R^2\phi^2 - 8R^2\phi + 1 - 4R^2 \quad (7.6)$$

diferenciando a Eq 7.6 em função de ϕ , encontramos:

$$\frac{dK}{d\phi} := 12R^2\phi^2 - 8R^2\phi\alpha - 8R^2\phi - 8R^2 \quad (7.7)$$

utilizamos o comando *solve* ao qual resolve a Eq 7.7, alcançando duas soluções para ϕ :

$$\phi_1 := \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha + 7} \quad (7.8)$$

$$\phi_2 := \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha + 7} \quad (7.9)$$

porém, apenas a Eq 7.9 será usada por seu caráter convergente. Em seguida, nos utilizamos dos comandos *subs* e logo após *expand*. O primeiro desses comandos é utilizado para substituir a solução 7.9 na Eq 7.6, obtendo uma equação em função apenas de R e α . Por fim, usando o *solve* na equação encontrada, chegamos a uma solução para o R em função do parâmetro α . O plot dessa solução é visto na figura abaixo:

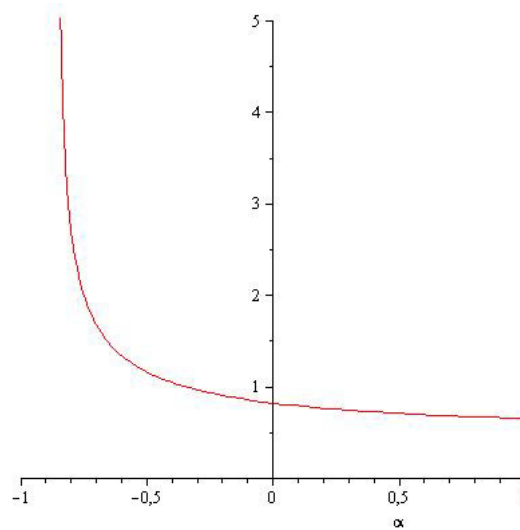


Figura 7.1: Limite entre as regiões II e III

O próximo passo consiste da construção das regiões I e II, ou seja, as regiões taquiônica e não física. Com base nisso, introduzimos o termo de massa com $a = \lambda = 1$:

$$m := \frac{\phi^4 - \phi^3\alpha - 2\phi^3 + \phi^2\alpha + \phi + 1 - \phi^2}{(\phi + 1)} \quad (7.10)$$

e

$$F := \frac{1}{4R^2} \frac{(-\phi + 1)}{(\phi + 1)} \quad (7.11)$$

O potencial de Schrödinger corresponde a diferença entre as Eqs 7.10 e 7.11

$$V := m - F \quad (7.12)$$

diferenciando a Eq 7.12 e utilizando a expressão *factor*, obtemos:

$$V := \frac{1}{2} \frac{(6R^2\phi^4 - 4R^2\phi^3\alpha - 4R^2\phi^2\alpha - 14R^2\phi^2 + 4R^2\phi\alpha - 4R^2\phi + 1)}{(\phi + 1)^2 R^2} \quad (7.13)$$

o numerador da Eq 7.13 é uma equação de quarta ordem para ϕ , devido a isso, podemos resolvê-la obtendo mais uma vez uma expressão em função apenas de R e do parâmetro α . A partir do comando *solve* encontramos soluções para R em função de α , sendo elas:

$$R_1 := \frac{1}{2\sqrt{\alpha + 1}} \quad (7.14)$$

e

$$R_2 := -\frac{1}{2\sqrt{\alpha + 1}} \quad (7.15)$$

utilizamos apenas a solução 7.14. O plot dessa solução pode ser visto na Fig 7.2:

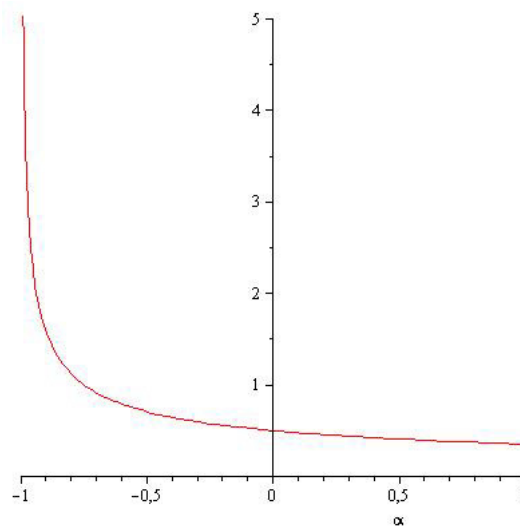


Figura 7.2: Limite entre as regiões I e II

7.2 Soluções Numéricas

Muitas vezes não é possível encontrar uma forma analítica para soluções de equações diferenciais. Devido a isso, podemos construir um algoritmo que seja capaz de nos levar a uma solução numérica. Iremos demonstrar um método em Maple que nos mostrará a probabilidade de encontrarmos partículas em volta do anel (observação: o raio no programa será expresso pela letra R). Vamos primeiro considerar o potencial de Schrödinger expresso por:

$$W(r, \alpha, R) = \frac{1}{4} \left(\frac{12 R^2 r^6 + 28 R^4 r^4 - 12 R^6 r^2 + 4 R^8 + 4 R^2 \alpha r^6 - 4 R^4 \alpha r^4 - 4 R^6 \alpha r^2 + 4 R^8 \alpha - r^6 - 3 r^4 R^2 - 3 r^2 R^4 - R^6}{r^2 (r^2 + R^2)^3} \right) \quad (7.16)$$

Logo em seguida incrementamos a função de onda

$$psir0 := (r, \alpha, R, m) \rightarrow -\frac{1}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^{1/2 + \sqrt{R^2(\alpha+1)}} \frac{(4 r^2 \alpha + r^2 m^2 + 6 r^2 - 4 - 4 \sqrt{R^2(\alpha+1)})}{1 + \sqrt{R^2(\alpha+1)}} \quad (7.17)$$

e sua derivada

$$Dpsir0 := (r, \alpha, R, m) \rightarrow -\frac{1}{8} \frac{1}{(1 + \sqrt{R^2(\alpha+1)})} r \left(\frac{r}{R} \right)^{1/2 + \sqrt{R^2(\alpha+1)}} (20 r^2 \alpha + 5 r^2 m^2 + 30 r^2 + 8 r^2 \sqrt{R^2(\alpha+1)} \alpha + 2 r^2 \sqrt{R^2(\alpha+1)} m^2 + 12 r^2 \sqrt{R^2(\alpha+1)} - 4 - 12 \sqrt{R^2(\alpha+1)} - 8 R^2 \alpha - 8 R^2) \quad (7.18)$$

Para resolver a equação diferencial utilizamos o comando *dsolve*, especificando as condições de contorno:

$$dsys := (r0, \alpha, R, m) \rightarrow dsolve \left(\left[\frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} - W(r, \alpha, R) \psi(r) + m^2 \psi(r), \psi(r0) = psir0(r0, \alpha, R, m), D(\psi)(r0) = Dpsir0(r0, \alpha, R, m) \right], \psi(r), numeric \right) \quad (7.19)$$

Devemos agora escolher os valores dos parâmetros, portanto $\alpha = 10$, o raio do anel $R = 3$, o valor referente ao passo é 0.1 e também definimos o primeiro ponto da análise numérica, ou seja, $r0 = 0.1$.

A partir da densidade de energia, podemos encontrar os pontos que identificam a espessura do anel:

$$T_{00} = a^4 \sqrt{\lambda} (\operatorname{sech}^4(\ln(r/R))) \quad (7.20)$$

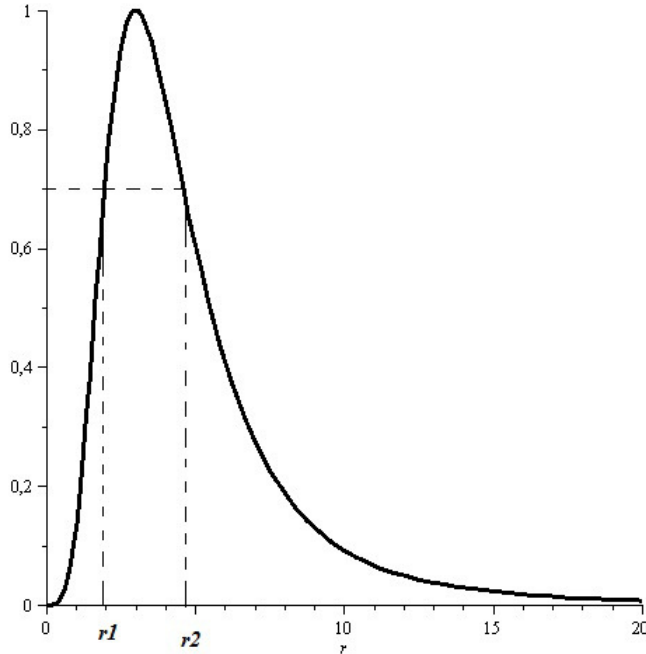


Figura 7.3: Densidade de energia. Fixamos $a = \lambda = 1$ e $R = 3$

O limite entre r_1 e r_2 descreve a espessura do anel. Para alcançarmos os seguintes pontos, fizemos uma escolha arbitraria a 70% do decaimento da densidade de energia:

$$r1 := \text{fsolve}(\operatorname{sech}^4(\log(r/3)) = 0.7, r, r = 0..2) \quad (7.21)$$

e

$$r2 := \text{fsolve}(\operatorname{sech}^4(\log(r/3)) = 0.7, r, r = 2..5) \quad (7.22)$$

obtendo os valores 1.95 e 4.60, respectivamente.

O Maple nos permite criar nossas próprias funções através do comando chamado *proc*, onde se faz necessário a introdução das variáveis global e local. Em seguida construímos um *loop* (variando de 1 à Nr) o qual corresponderá a função de onda não normalizada, escrita no Maple da seguinte forma:

$$tpsi[j] := rhs(op(dsyst(r0, \alpha, R, m)(t[j]))) [2] \quad (7.23)$$

Em um próximo *loop* (variando de 1 à $Nring$) conseguiremos expressar a espessura do anel:

$$tring[i] := 1.95 + \frac{2.66 * i}{Nring} \quad (7.24)$$

e também sua função de onda correspondente

$$tpsi_{ring}[i] := rhs\left(op(dsys(r0, \alpha, R, m)(tring[i]))[2]\right) \quad (7.25)$$

O próximo passo está na criação de uma sequência em relação aos dois loops acima, portanto temos:

$$tpsir := seq([t[k], tpsi[k]], k = 1..Nr) \quad (7.26)$$

e

$$tpsir_{ring} := seq([tring[k], tpsi_{ring}[k]], k = 1..Nring) \quad (7.27)$$

Agora, podemos inserir ao programa a expressão que corresponderá a probabilidade de encontrar a partícula em volta do anel. Tal probabilidade foi inserida por meio da aplicação da área do trapézio a densidade de energia. Portanto, teremos a probabilidade:

$$P := \frac{N}{D} \quad (7.28)$$

onde

$$N := \sum_{k=1}^{Nring-1} \left(\left((tpsir_{ring}[k+1])^2 + (tpsir_{ring}[k])^2 \right) \cdot (tring[k+1] - tring[k]) \right) \quad (7.29)$$

e

$$D := \sum_{k=1}^{Nr-1} \left(\left((tpsir[k+1])^2 + (tpsir[k])^2 \right) \cdot (t[k+1] - t[k]) \right) \quad (7.30)$$

Para finalizar o programa é necessário a inserção do termo de massa, calculado através de um *loop* que varia de 1 à 50:

$$tm[i] := 0.9 + 4.2 * (i - 1)/100 \quad (7.31)$$

A probabilidade de encontrarmos partículas no anel é confrontada com a massa gerando o gráfico abaixo (lembrando que essa demonstração foi feita para o raio do anel igual a 3 e $a = \lambda = 1$):

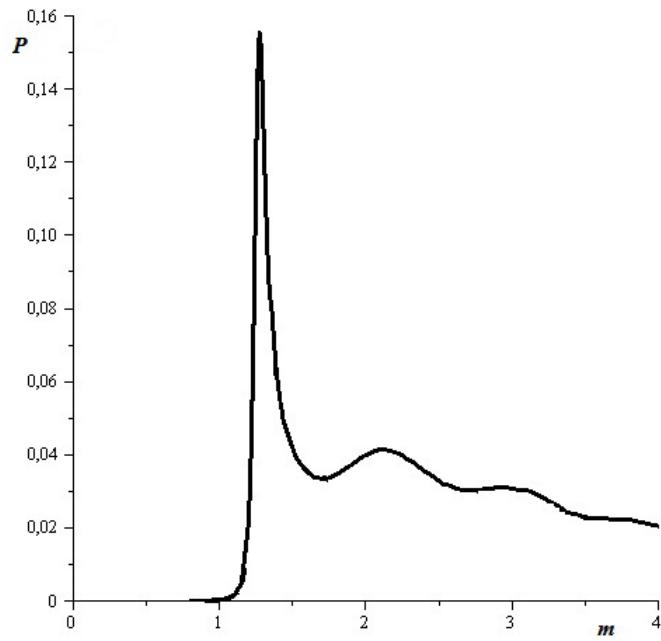


Figura 7.4: P versus m para $\alpha = 10$ r $R = 3$.

Referências Bibliográficas

- [1] Allen Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2002.
- [2] Mikio Nakahara, Geometry, Topology and Physics, Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, 1989.
- [3] R Aldrovandi and J G Pereira, An Introduction to Geometrical Physics, Instituto de Física Teórica, São Paulo-Brasil, UNESP.
- [4] T W B Kibble, J Phys A, Math Gen Vol 9, N° 8, 1976.
- [5] Andrew Wallace, An Introduction to Algebraic Topology, Pergamon Press, 1957.
- [6] Cohen, A Course in Simple Homotopy Theory, Springer-Verlag New York, 1970.
- [7] Solomon Lefschetz, Algebraic Topology, American Mathematical Society, Providence , Rhode Island, 1991.
- [8] P J Hilton, An Introduction to Homotopy Theory, Lecturer in Mathematics in the University of Cambridge, 1953.
- [9] Sidney Coleman, Classical Lumps and their Quantum, Lyman Laboratory of Physics Harvard University Cambridge, Massachusetts, USA, 1975.
- [10] Tsen Hu, Homotopy Theory, Wayne State University, Detroit, 1959.
- [11] H. Nakanishi, K. Hayashi e H. Mori, Topological Classification of Unknotted Ring Defects, Commun. Math. Phys. 117, 203-213 (1988).
- [12] Gregory L Naber, Topology, Geometry and Gauge Fields: Foundations, Spring-Verlag, New York, 1997.

- [13] A Vilenkin and E P S Shellard, Cosmic Strings and Other Topological Defects, Cambridge University Press, 1994.
- [14] Vallery Rubakov, Classical Theory of Gauge Fields, Princeton University Press, 2002.
- [15] Leandro Ibiapina Beviláqua, Branais em Supergravidade, Universidade de São Paulo, Instituto de Física, São Paulo, 2006.
- [16] Elcio Abdalla, Teoria Quântica da Gravitação: Cordas e Teoria M, Revista Brasileira de Ensino de Física, v 27, n 1, p 147-155, (2005).
- [17] Marco Antonio Moreira, O Modelo Padrão da Física de Partículas, Revista Brasileira de Ensino de Física, v 31, n 1, 1306 (2009).
- [18] Roberto Menezes da Silva, Defeitos Globais em Teoria de Campos e Aplicações, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2007.
- [19] Priscila Masseto de Aquino, Física além do modelo padrão em teorias com dimensões extras, Universidade de São Paulo, 2007.
- [20] Álvaro Gomes dos Santos Neto, Defeitos Topológicos em Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação, Universidade de Brasília 2006.
- [21] Fleming, Quebra Espontânea de Simetria de Modelos Cosmológicos, Instituto de Física, USP.
- [22] Lewis Ryder, Quantum Field Theory, University of Kent at Canterbury, Cambridge University Press, 1996.
- [23] Mike Guidry, Gauge Fields Theories: An Introduction with Applications, Weiley-Interscience.
- [24] David Atkinson, P W Johnson, Quantum Fields Theory: A Self Contained Course, Rinton Press, Vol 2, 2002.
- [25] Adalto Rodrigues Gomes dos Santos Filho , Estrutura Interna e Localização de Gravidade em Branais, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2005.
- [26] Mukhanov, Physical Foundations of Cosmology, Cambridge University Press, 2005.
- [27] J A Peacock, Cosmological Physics, University of Cambridge, 1981.

- [28] Tanmay Vachaspati, *Kink and Domain Wall: An introduction to Classical and Quantum Solitons*, Cambridge University Press, 2006.
- [29] Tanmay Vachaspati, *Formation of Topological Defects*, [arXiv:hep-ph/9710292v1], 1997.
- [30] Belavin and Polyakov, *Metastable states of two-dimensional isotropic ferromagnets*, Gorkii State University, *Prisma Zh Eskp Teor Fiz* 22, N° 10, 503-506, (20 november 1975).
- [31] Altemar de Sousa Júnior, *Estudo de Modelos de Campos Escalares*, Universidade Federal da Paraíba, 2010.
- [32] Polyakov, *Particle spectrum in quantum field theory*, Intitute of Theoretical Physics, *ZhETF Pis Red* 20, N° 6, 430-433, 1974.
- [33] Vilenkin and Barriola, *Gravitational Field of a Global Monopole*, *Physical Review Letters*, Tufts University, Massachussetts, 1989.
- [34] Harari and Loutó, *Repulsive Gravitational effetcs of global monopoles*, *Physical Review D*, Instituto de Astronomía y Física del Espacio, Argentina, 1990.
- [35] Vilenkin and Cho, *Gravitational Field of Vaccumless Defects*, Institute of Cosmology, Massachusetts, USA, 1998.
- [36] Vilenkin and Cho, *Gravity of superheavy higher-dimensional global defects*, 2008.
- [37] Wilson Hugo Cavalcante Freire, *Campos Escalares, Defeitos Topológicos e Potenciais Confinantes*, Universidade Federal da Paraíba, 2004.
- [38] Antônio da Silva Inácio, *Defeitos Topológicos em Modelos de Campos Escalares*, Universidade Federal da Paraíba, 2003.
- [39] Coleman, *Aspects of Symmetry*, Harvard University, Cambridge University Press, 1988.
- [40] T D Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, Columbia University , 1981.
- [41] Xin Shi and Xin-zhou Li, *The Gravitational Field of a Global Monopole*, *Class.Quant.Grav.* 8:761-767,1991, [arXiv:0903.3085v1], 2009.
- [42] J. Greensite, *Prog. Part. Nucl. Phys.* 51 (2003) 1; T. Suzuki, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* 30 (1993) 176; M. N. Chernodub, M. I. Polikarpov, in *Confinement, Duality, and Nonperturbative Aspects*

- of QCD, p. 387; M. N. Chernodub, V. I. Zakharov, Phys. Rev. Lett. 98 (2007) 082002; M. N. Chernodub, K. Ishiguro, A. Nakamura, T. Sekido, T. Suzuki, V.I. Zakharov, PoSLAT2007, 174 (2007); M.N. Chernodub, Atsushi Nakamura, V.I. Zakharov, Phys.Rev.D78, 074021 (2008).
- [43] A. Anabalón, S. Willison, J. Zanelli, Phys.Rev.D77, 044019 (2008); P. Mukherjee, J. Urrestilla, M. Kunz, A. R. Liddle, N. Bevis, M. Hindmarsh, Phys.Rev.D83, 043003 (2011); M. Sakellariadou, Lect.NotesPhys.738, 359 (2008); P.P. Avelino, C.J.A.P. Martins, C. Santos, E.P.S.Shellard, Phys.Rev.Lett. 89, 271301 (2002); Erratum-ibid. 89, 289903 (2002); P.P. Avelino, L. Sousa, Phys.Rev.D83, 043530 (2011).
- [44] J.C.Y. Teo and C.L. Kane, Phys. Rev. B 82, 115120 (2010); M.A. Silaev and G.E. Volovik, J. Low Temp. Phys, 161, 460 (2010); T. Fukui and T. Fujiwara, Z₂ index theorem for Majorana zero modes in a class D topological superconductor, arXiv:1009.2582; T.Sh. Misirpashaev and G.E. Volovik, Physica, B 210, 338 (1995); G.E. Volovik, *Pis'ma ZhETF* 93,69 (2011).
- [45] V.A. Rubakov and M.E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B 125, 136 (1983); V.A. Rubakov and M.E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B 125, 139 (1983); E.J. Squires, Phys. Lett. B 167, 286 (1986); M. Visser, Phys. Lett. B 159, 22 (1985); K. Akama, Lect. Notes Phys. 176, 267 (1982); I. Antoniadis, Phys. Lett. B 246, 377 (1990)
- [46] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, Phys. Lett. B 429, 263 (1998); I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G.R. Dvali, Phys. Lett. B 436, 257 (1998); L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. 83, 3370 (1999).
- [47] O. DeWolfe, D.Z. Freedman, S.S. Gubser and A. Karch, Phys. Rev. D 62, 046008 (2000); M. Gremm, Phys. Lett. B 478, 434 (2000); M. Gremm, Phys. Rev. D 62, 044017 (2000); A. Kehagias and K. Tamvakis, Phys. Lett. B 504, 38 (2001); C. Csaki, J. Erlich, T. Hollowood and Y. Shirman, Nucl. Phys. B 581, 309 (2000); O. CastilloFelisola, A. Melfo, N. Pantoja and A. Ramirez, Phys. Rev. D 70, 104029 (2004); V. Dzhunushaliev, V. Folomeev, D. Singleton and S. Aguilar-Rudametkin, Phys. Rev. D 77, 044006 (2008); V. Dzhunushaliev, V. Folomeev, K. Myrzakulov and R. Myrzakulov, Gen. Rel. Grav. 41, 131 (2009); D. Bazeia, F.A. Brito and A.R. Gomes, JHEP 0411, 070 (2004); D. Bazeia and A.R. Gomes, JHEP 0405, 012 (2004); D. Bazeia, A.R. Gomes and L. Losano, Int. J. Mod. Phys. A 24, 1135 (2009).
- [48] Y. X. Liu, J. Yang, Z. H. Zhao, Chun-E Fu and Y. S. Duan, Phys. Rev. D 80, 065019 (2009); Y. X. Liu, H. T. Li, Z. H. Zhao, J. X. Li and J. R. Ren, JHEP 0910, 091 (2009); I. Oda, Phys. Lett.

- B 496, 113 (2000); C.A.S. Almeida, R. Casana, M.M. Ferreira and A.R. Gomes, Phys. Rev. D 79, 125022 (2009).
- [49] R. Hobart, Proc. Phys. Soc. Lond.82, 201(1963); G. H. Derrick J. Math. Phys. 5, 1252 (1964); R. Rajaraman, Solitons and Instantons, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [50] G. 'tHooft, Nucl. Phys. B 79, 276 (1974); A. M. Polyakov, JETP Lett. 20, 194 (1974); H. Aratyn, L.A. Ferreira and A.H. Zimerman, Phys.Rev.Lett. 83, 1723 (1999); T. D. Lee, Particle Physics and Introduction to Field Theory, Contemporary Concepts in Physics, vol.1, Harwood Acad. Publ., Chur, Switzerland, 1988; T. D. Lee, Phys. Rep. 23, 254 (1976); M. Barriola and A. Vilenkin, Phys. Rev. Lett. 63, 341 (1989); D. Harari and C. Loust' o, Phys. Rev. D 42, 2626 (1990); I. Cho and A. Vilenkin, Phys. Rev. D 59, 063510 (1999).
- [51] D. Bazeia, J. Menezes, and R. Menezes, Phys. Rev. Lett. 91, 241601 (2003).
- [52] D. Bazeia, J. Menezes, R. Menezes, Mod. Phys. Lett. B19, 801 (2005).
- [53] V. Dzhunushaliev, V. Folomeev, D. Singleton, S. Aguilar-Rudametkin, Phys.Rev. D77, 044006 (2008); D. Langlois and M. Sasaki, Phys.Rev.D68, 064012 (2003); Y. Liu, H. Guo, C. Fu, J. Ren, JHEP 1002, 080 (2010); R. Davies and D. P. George, Phys. Rev. D 76, 104010 (2007); D. P. George and R. R. Volkas, Phys. Rev. D 75, 105007 (2007)
- [54] H. Aratyn and C. Rasinariu, A short course in mathematical methods with Maple, World Scientific, 2006. See p. 559.
- [55] Y. X. Liu, J. Yang, Z. H. Zhao, Chun-E Fu, and Y. S. Duan, Phys.Rev.D80, 065019 (2009).
- [56] C.A.S. Almeida, R. Casana, M.M. Ferreira and A.R. Gomes, Phys. Rev. D 79, 125022 (2009).
- [57] A Kobakhidze, J E Thompson and R Volkas, BPS solitons in Lifshitz field theories, Phys. Rev. D 83, 025007 (2011) [arXiv:1010.1068v2].
- [58] Chun-E Fu, Yu-Xiao Liu, Heng Guo, Bulk matter fields on two-field thick branes, arXiv:1101.0336v3 (2011).
- [59] Mannheim D P, Brane-localized Gravity, World Scientific Publishing Company, 2005.
- [60] Zwiebach B, A First Course in String Theory, Cambridge Univ Press, Cambridge UK, 2004.

- [61] Rodolfo Casana, Eduardo S. Carvalho, Manoel M. Ferreira Jr, "Dimensional reduction of the CPT-even electromagnetic sector of the Standard Model Extension", to appear in Physical Review D(2011)
- [62] H. Belich, M.M. Ferreira Jr., J.A. Helayel-Neto, M.T.D. Orlando, Phys. Rev. D 67,125011 (2003); Erratum-ibid., Phys. Rev. D 69, 109903 (2004).
- [63] H. Belich, M.M. Ferreira Jr., J.A. Helayel-Neto, M.T.D. Orlando, Phys. Rev. D 68, 025005 (2003).
- [64] H. Belich, M.M. Ferreira Jr., J.A. Helayel-Neto, Eur. Phys. J. C 38, 511 (2005).
- [65] P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin, Phys. Rev. B 77, 195430 (2008).
- [66] V. M. Pereira, J. M. B. Lopes dos Santos, A. H. Castro Neto, Phys. Rev. B 77, 115109 (2008).
- [67] X. Zhou, C. Fang, W. Tsai, and J. Hu, Phys. Rev. B 80, 245317 (2009).