UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

JANDERSON DOS SANTOS DE FREITAS

O TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS E A TOPOLOGIA DOS GRAFOS NO ENSINO BÁSICO

São Luís

2017

JANDERSON DOS SANTOS DE FREITAS

O TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS E A TOPOLOGIA DOS GRAFOS NO ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Coelho Siva Filho

São Luís

2017

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Freitas, Janderson dos Santos de

O TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS E A TOPOLOGIA DOS GRAFOS NO ENSINO BÁSICO / Janderson dos Santos de Freitas. - 2017

45 f.

Orientador(a): João Coelho Silva Filho.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2017.

1. Poliedros de Platão. 2. Teoria dos Grafos. 3. Topologia dos Grafos. I. Filho, João Coelho Silva. II. Título.

JANDERSON DOS SANTOS DE FREITAS

O TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS E A TOPOLOGIA DOS GRAFOS NO ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada ao PROFMAT/ Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 07/04/2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. João Coelho Silva Filho (Orientador)
Doutor em Matemática
Universidade Estadual do Maranhão

Profa. Valdiane Sales Araújo
Doutora em Matemática
Universidade Federal do Maranhão

Profa. Valeska Martins de Souza
Doutora em Matemática
Universidade Federal do Maranhão

À minha mãe Janeide e ao meu pai João Henrique, os quais foram fundamentais para a formação da pessoa que hoje sou.

AGRADECIMENTOS

Acima de tudo agradeço a DEUS por ter podido cursar este mestrado, apesar das dificuldades, pela oportunidade única que me proporcionou, pela força com que me promoveu, pela fé que me dedicou e pela proteção em todos os momentos desta jornada durante as longas idas a São Luís-MA viajando a noite toda, por sempre colocar o transporte certo em meu caminho a fim de que eu sempre pudesse ir e vir em paz.

Agradeço a minha família que foi a base para meu desenvolvimento, a minha mãe Janeide e meu pai João Henrique que sempre tiveram a fé e esperança de que eu pudesse me tornar o filho, homem e profissional que hoje me traduzo; minha irmã Joyna que sempre me trouxe felicidade, carinho e companheirismo.

Agradeço à minha esposa Glaubia que sempre esteve ao meu lado em minhas conquistas. Pelo companheirismo, pelo amor, pelas muitas vezes que a fiz ficar só enquanto saía aos fins de semana para estudar e por ter contribuído para o homem que hoje sou.

Agradeço os meus filhos Pedro Henrique e Júlia Catarina, simplesmente pelo fato de existirem e serem a razão de todo meu esforço e dedicação e amor.

Agradeço a todos os meus amigos que sempre me incentivaram e dirigiram palavras de satisfação. Em especial aos amigos que fiz na turma de 2014 do Profmat da UFMA: Joel, Rubens, Tiago, Leandro, Samir, Jean, Alacides, Werbeth, Make, Ernandes, Galvão e todos os outros amigos que vou levar para toda a vida.

Agradeço à coordenação do PROFMAT, aos meus professores pelo ensino e por promover descobertas enquanto estudante que jamais tinha feito, em especial ao meu orientador Professor Dr. João Coelho, pela singular orientação e dedicação neste trabalho.

Agradeço também à CAPES por me conceder uma bolsa de estudos que foi muito importante para mim durante o curso e, finalmente, gostaria de poder dizer a todos que fizeram parte desse momento de minha vida direta ou indiretamente. MUITO OBRIGADO!

"Educação é aquilo que fica depois que você esquece o que a escola ensinou".

Albert Einstein

RESUMO

O trabalho apresenta a resolução de problemas utilizando a Teoria dos Grafos e o Teorema de Euler. Uma pesquisa que executa atividades específicas no ensino médio envolvendo grafos em várias aplicações da relação de Euler como método de resolução de problemas com Teoria dos Grafos. A relação de Euler é apresentada em uma visão Geométrica e pela planificação dos grafos. Propondo um elo entre os problemas do cotidiano dos alunos com a modelagem de situações problema pela Teoria dos Grafos, especificamente os grafos planares resolvidos com a implementação do Teorema de Euler voltado ao ensino de matemática básica. São mostradas aplicações da Teoria dos Grafos na resolução de problemas com as pontes da cidade de Barra do Corda e da vida escolar dos alunos.

Palavras-chave: Poliedros de Platão. Teoria dos Grafos. Topologia dos Grafos.

ABSTRACT

The paper presents problem solving using Graph Theory and Euler's Theorem. The research performs specific activities in high school involving graphs in various applications of the Euler relation as a problem solving method with Graph Theory. The relationship of Euler is presented in a Geometric view and by the graphs planning. The research proposes a link between the students 'daily problems with the modeling of problem situations by the Graph Theory, specifically the planar graphs solved with the implementation of Euler' s Theorem focused on the teaching of basic mathematics. Applications of Graph Theory are shown in solving problems with the bridges of the city of Barra do Corda and the students' school life.

Keywords: Plato's polyhedrons. Theory of graphs. Topology of Graphs.

SUMÁRIO

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1 INTRODUÇÃO

O Teorema de Euler ou Ralação de Euler foi criado pelo matemático e físico suíço, Leonard Paul Euler, que desenvolveu a maior parte de seu trabalho na Alemanha e na Rússia. Euler cria uma relação lógica e pertinente entre os elementos de um poliedro a fim de quantificar seus elementos como vértices, faces e arestas, ajudando assim em seu estudo e em suas aplicações.

Para exemplificar alguns trabalhos relevantes nessas áreas, podemos destacar Bria (2001) e Oliveira (2007), no estudo dos Grafos e Ribeiro (2017) na análise dos poliedros de Platão, que sugerem diretrizes desses conteúdos no Ensino Básico.

As atividades propostas são desenvolvidas para as aulas de geometria, melhorando os aspectos de compreensão da definição e propriedades dos poliedros, de tal forma que o aluno pode interagir com o objeto de aprendizagem, construindo com autonomia a relação que se estabelece entre faces, vértices e arestas de poliedros e compreendendo o que é um poliedro. É proposto o estudo de resolução de situações problemas envolvendo grafos que podem ser resolvidos utilizando a relação de Euler como método principal, realizando aplicações como forma de resolução a ser proposta no Ensino Médio de situações problemas, até então desconhecidas do aluno desta faixa estudantil.

A proposta mostra situações problema que envolvem o cotidiano e os elementos da realidade do aluno, propiciando uma significativa melhora na abordagem do assunto, pois ao conhecer melhor os elementos envolvidos na situação o aluno tem mais subsídios para construir suas metodologia de resolução do problema proposto, criando assim meios muitas vezes peculiares, originais e alternativos que visam a conclusão do tema.

O Capítulo 2 trata dos estudos e análise dos poliedros, em especial dos poliedros Regulares e dos sólidos de Platão, um famoso estudioso grego cuja obra influenciou o estudo da geometria no mundo. Neste capítulo é mostrada uma visão inicial dos poliedros. Os poliedros regulares e não regulares, convexos e não convexos, alguns dos principais sendo o tetraedro regular, o hexaedro regular, o octaedro regular, o dodecaedro regular, a esfera, entre outros. Também são definidos os conceitos como superfície poliédrica limitada e convexa bem como a prova geométrica do teorema de Euler.

O Capítulo 3 é um estudo dos grafos, do surgimento ao famoso problema envolvendo a ponte de Koningberg, atual Rússia, onde teve início o estudos dos grafos. Este é o capítulo que fundamenta a Teoria dos Grafos. São apresentados a definição de grafos e algumas informações fundamentais para seu estudo, como o tamanho de um grafo, os ciclos ou laços de um grafo, a valência do vértice de um grafo, o caminho ou trilha de um grafo. São classificados os tipos de grafos existentes, os grafos simples, os grafos completos, os grafos regulares, a diferenciação entre os grafos conexos e não conexos, o isomorfismo entre grafos, os grafos eulerianos, os grafos planares convexos e outros.

No Capitulo 4, o capítulo das aplicações, são elencados alguns problemas envolvendo grafos e a representação de sua resolução por Euler. É apresentada uma noção bem definida da relevância do estudo dos grafos no Ensino Médio e seu potencial para resolução dos mais diversos problemas na sociedade. As atividades propostas são contextualizadas de forma simples e eficaz, solucionando problemáticas mais abstratas e destoantes do contexto das salas de aula, favorecendo assim uma melhor compreensão das situações-problemas apresentadas, bem como a elaboração de modelos que visem resolução de problemas do cotidiano e da vida escolar do aluno na matemática.

2 POLIEDROS

O nome Poliedro tem sua origem no grego, onde **poly** significa várias e **edro** significa face, resumindo: sólidos geométricos com muitas faces, ou várias faces. Os poliedros foram objetos de estudo de grandes filósofos na antiguidade, onde os sólidos regulares convexos protagonizavam as teorias sobre o universo. Atualmente pode-se ver que os poliedros são objetos facilmente encontrados no nosso cotidiano em várias formas: como por exemplo nas embalagens comerciais, na arquitetura moderna e em design industrial com a confecção de moldes e planificações, nas artes, etc. Os mais famosos desses poliedros são os **Poliedros de Platão**. Estes poliedros recebem esse nome devido serem objetos de estudo de Platão e seus seguidores (aproximadamente 350 a.C.). O Teorema de Euler é de fundamental importância para que o sólido seja considerado um poliedro de Platão, que deve possuir o mesmo número de arestas em cada uma de suas faces e o número de arestas que partem de cada vértice também deve ser o mesmo.

2.1 Poliedros Regulares

Os poliedros regulares são conhecidos como sólidos platônicos: o cubo ou hexaedro, o tetraedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Alguns se manifestam na natureza em formas assemelhadas a cristais ou moléculas. Outros como os Icosaedros, se assemelham a alguns vírus, como por exemplo o do Herpes e também a alguns protozoários amebóides, que dão origem a esqueletos minerais. Em meteorologia e climatologia, destacam-se cada vez mais os modelos numéricos globais do fluxo atmosférico que usam malhas baseadas em um Icosaedro, refinado por subdivisões.

De acordo com Dante (2010), um poliedro convexo é regular quando todas as faces são polígonos regulares e congruentes. Dessa mesma forma, os ângulos também são congruentes. Existem somente cinco poliedros regulares, como ilustrado, respectivamente, nas Figuras 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5, encontradas no Site: Porta Mágica da História da Matemática[1], são eles: o **tetraedro regular**, onde as faces são triângulos equiláteros;

[1] < *http : //superhistorimat.blogspot.com.br/*2011/04/*solidos − platonicos − trabalho − do − eduardo.html* > acesso em 02 de abril de 2017.

o **hexaedro regular ou cubo**, em que as faces são quadrados; o **octaedro regular** onde as faces são triângulos equiláteros; o **dodecaedro regular** que tem como faces, pentágonos regulares e, por fim, o **icosaedro regular** com as suas faces compostas por triângulos equiláteros.

É importa observar que todo poliedro regular é um poliedro de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é regular.

O **Tetraedro Regular** é um poliedro regular representado por uma pirâmide triangular regular, associado às esferas circunscrita e inscrita ao sólido, na qual as faces laterais são triângulos congruentes ao triângulo da base.

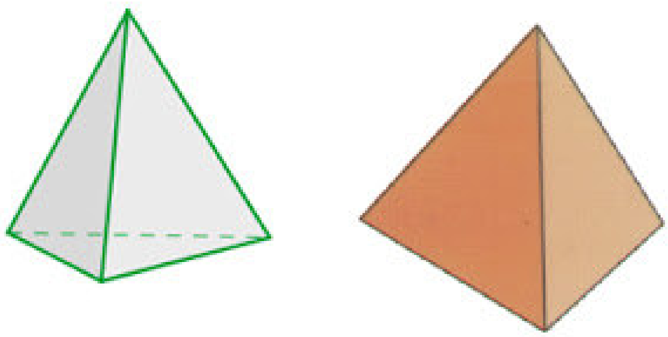


Figura 2.1: Tetraedro Regular

O **Hexaedro Regular ou Cubo** é um poliedro regular mais comum, representado por um prisma quadrangular regular, no qual todas as faces são quadradas.

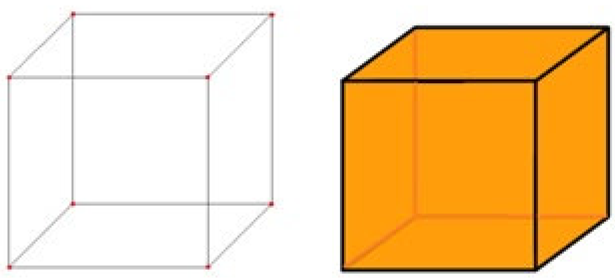


Figura 2.2: Hexaedro Regular ou Cubo

O **Octaedro Regular** é um poliedro regular representado pela fusão de duas pirâmides quadrangulares regulares pelas bases e associado às esferas circunscrita e inscrita ao sólido. Neste sólido, todas as faces laterais são triângulos equiláteros, ou seja, a medida dos lados é congruente à medida dos lados do quadrado da base.

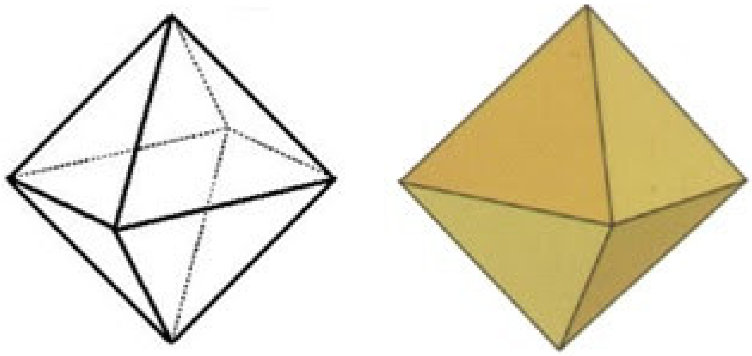


Figura 2.3: Octaedro Regular

O **Dodecaedro Regular** é um poliedro regular que apresenta pentágonos regulares em todas as doze faces. Suas características são, muita das vezes, associadas ao formato de uma bola de futebol, no entanto, esta apresenta 12 pentágonos e 20 hexágonos.

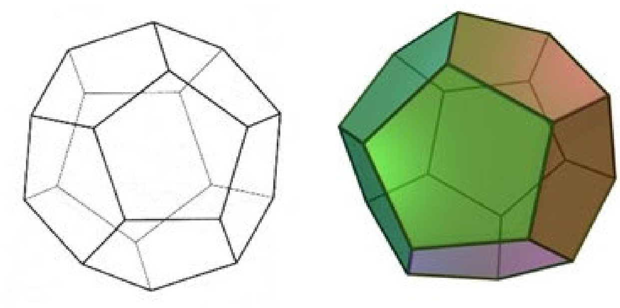


Figura 2.4: Dodecaedro Regular

O **Icosaedro regular** é um poliedro regular que apresenta o triângulo equilátero como polígono formador de todas as suas vinte faces.

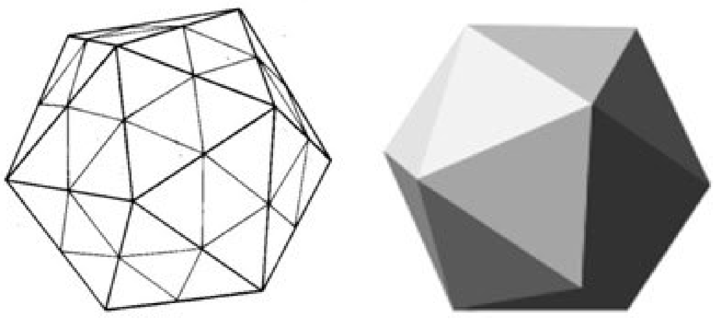


Figura 2.5: Icosaedro regular

2.2 Poliedros Convexos e Não-Convexos

Os poliedros são estudados desde a antiguidade e, provavelmente, foram os seguidores da escola pitagórica (por volta de 500 a.C.) os descobridores de três dos cinco poliedros regulares. Os gregos faziam um paralelo entre os elementos "fundamentais" da natureza e os cinco sólidos geométricos. Conta-se que Platão, além de matemático era também filósofo, relacionava esses sólidos geométricos com a construção do Universo, associando o tetraedro ao fogo, o cubo a terra, o octaedro ao ar, o icosaedro à água e o dodecaedro ao Cosmos, como ilustra a Figura 2.6. Platão acreditava que foi a partir da combinação desses elementos que o Universo foi feito.

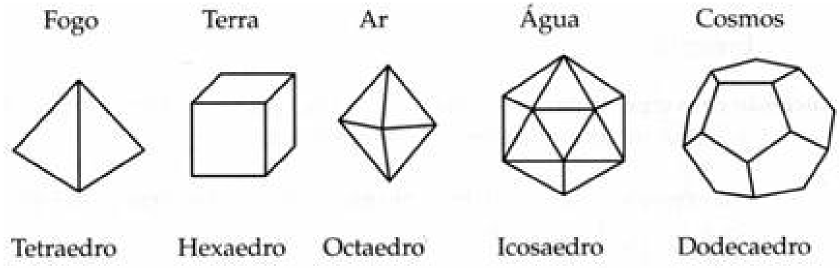


Figura 2.6: Sólidos de Platão e a relação com a natureza. *Fonte: Site Matemática na Minha Vida.*

Sabe-se ainda que, nos dias atuais, essas formas geométricas aparecem com espontaneidade na natureza, as três primeiras em forma de cristais (a estrutura do carbono) e as outras duas como esqueletos de animais marinhos microscópicos.

Essas formas geométricas apresentam características singulares: suas faces são polígonos planos, cada um dos lados desses polígonos pertence a apenas dois dos polígonos formadores do sólido poliédrico e cada um deles pode ser decomposto em triângulos retângulos. Poliedros podem ser atravessados por retas. Quando possuem todos os pontos do segmento de reta cujas extremidades pertencem a eles, são chamados convexos; quando não possuem, são chamados não-convexos ou côncavos. A Figura 2.7 mostra esses poliedros.

De acordo com Dolce (2005), considerando-se um número finito n, com $(n \geq 4)$, de polígonos planos convexos, ou regiões poligonais convexas, é de tal forma que:

a) dois polígonos não estão no mesmo plano;

b) cada lado de polígono é comum a dois e somente dois polígonos;

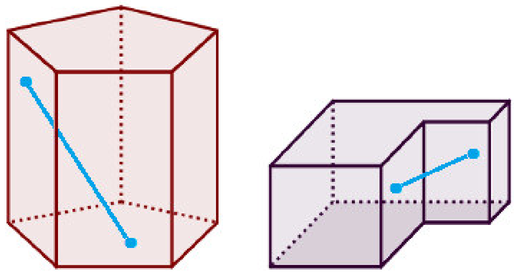


Figura 2.7: Convexos e não convexos

c) o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semi-espaço.

Assim, ficam determinados n semi-espaços, com origem no plano de um polígono que contém os restantes. Sendo que a interseção desses semi-espaços é o *Poliedro Convexo*, que possui *faces*, que são os polígonos convexos; *arestas*, que são os lados dos polígonos; *vérices*, que são os vértices do polígono. A reunião das faces é a *superfície* do poliedro.

Dois poliedros são congruentes se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus elementos de modo que as faces e os ângulos poliédricos de um seja ordenadamente congruentes às faces e ângulos poliédricos do outro. Da congruência entre dois poliedros sai a congruência das faces, arestas, ângulos e diedros.

2.3 Superfície Poliédrica Limitada Convexa

De a cordo com Dolce (2005), superfície poliédrica limitada convexa é a reunião de um número finito de polígonos planos e convexos, tais que:

a) dois polígonos não estão no mesmo plano;

b) cada lado de polígono não está em mais que dois polígonos;

c) havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, eles devem formar uma única poligonal fechada, plana ou não, chamada contorno;

d) o plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semi-espaço (condição de convexidade).

As superfícies poliédricas limitadas convexas que têm contorno são chamadas abertas e as que não têm contorno são chamadas fechadas. Seus elementos são: as *arestas*, que representam os lados dos polígonos; são as *faces*, que constituem o próprio polígono;

os *vérices*, que são os vértices dos polígonos e por fim os *ângulos*, que são os ângulos dos polígonos. Salientado que uma superfície poliédrica convexa aberta ou fechada não é uma região convexa.

2.4 Relação de Euler

Nesta seção é provada a Relação de Euler utilizando-se do processo geométrico, de acordo com Paiva (2010).

Teorema 2.4.1. *Se P é um poliedro com V vértices, A arestas e F faces, então vale a relação $V - A + F = 2$.*

Para demonstrar este teorema é utilizado o seguinte Lema:

Lema 2.4.1. *Todo poliedro pode ser triangularizado de tal maneira que $V - A + F$ se mantém constante.*

Demonstração: Seja P um poliedro qualquer. Suponha que P não seja triangularizado. Seja f uma face não-triangular e supõe-se que a quantidade de arestas na face f seja n.

Considerando um vértice v de f, para cada vértice de f diferente de v e não-adjacente a v, traça-se uma nova aresta ligando v a tal vértice. Sabendo-se que existem $n - 3$ vértices, adiciona-se $n - 3$ arestas, o que nos fornece uma triangularização de f. Além disso, $n - 3$ faces foram adicionadas, pois cada vez que adicionamos uma aresta, uma face que já existe é dividida em duas.

O procedimento descrito acima não adiciona nenhum vértice e a quantidade de arestas adicionadas é igual à quantidade de faces também adicionadas, assim $V - A + F$ se mantém inalterado. Fazendo isto para qualquer face não-triangular de P, pode-se triangularizar todas as faces não triangulares do poliedro P de forma que $V - A + F$ não se altera, concluindo-se a prova do Lema.

Este Lema nos deixa livre para provar a Relação de Euler (Teorema) somente para a classe dos poliedros triangularizados, pois se P é um poliedro qualquer, e se tivermos que a Relação de Euler é valida para uma triangularização de P, teremos ela também válida para P, devido o lema nos assegurar que $V - A + F$ não se altera na triangularização em P. Pois, prova-se aqui esta Relação somente para poliedros triangularizados.

Demonstração do Teorema 2.4.1:

Demonstração. Seja P um poliedro triangularizado com V vértices, A arestas e F faces. Por indução em F, prova-se o número de faces do poliedro. A menor quantidade de faces de um poliedro é 4, e o poliedro triangularizado com 4 faces é o tetraedro. Neste caso a relação de Euler é verificada facilmente.

Supondo que $F > 4$ e que a Relação de Euler é válida para todo poliedro triangularizado com menos de F faces, f é uma face qualquer de P e o poliedro P' é obtido colapsando os três vértices de f num único vértice. Assim P' terá 2 vértices a menos do que P (tendo em vista que os três vértices de f se tornarão único); 4 faces a menos (pois além de f, as 3 faces adjacentes a f colapsarão numa única aresta, cada) e 6 arestas a menos, além das 3 arestas de f, têm as arestas das faces adjacentes a f, na qual cada face compartilhavam uma aresta com f e outras duas arestas de cada face se colapsaram numa só, retornando 3 arestas no final do processo.

Como P' tem menos de F faces e ainda é um poliedro triangularizado, a relação de Euler é válida para P', de modo que tem-se: $(V - 2) - (A - 6) + (F - 4) = 2$ que é equivalente a

$$V - A + F = 2,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

3 TEORIA DOS GRAFOS

A Teoria dos Grafos iniciou na cidade de Königsberg (território da Prússia até 1945, atual Kaliningrado, Rússia) em 1736 pelo grande matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783). Koönigsberg era cortada pelo rio Pregel, que possuía duas ilhas. Como era muito complicado fazer o transporte de cargas e pessoas através de barcos, algumas pontes foram construídas para auxiliar neste deslocamento entre as ilhas e as duas margens. Passado algum tempo as pessoas começaram a se questionar sobre a possibilidade de sair de sua casa, passar por cada ponte exatamente uma vez e voltar para o ponto de partida. Na certeza de resolver o problema, Euler montou um diagrama representando o mapa da cidade. O fez da seguinte maneira: a cada ilha e margem ele associou a um ponto que o chamou vértice e a cada ponte uma ligação que a chamou de aresta. Com isso, Euler obteve a Figura 3.1:

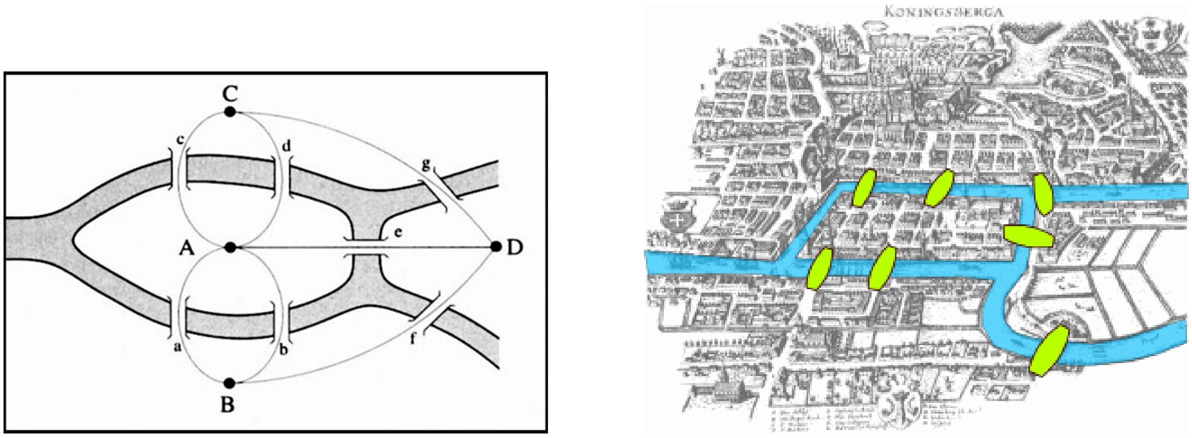


Figura 3.1: Pontes de Köonigsberg. *Fonte: wikipedia.org*

Euler percebeu que só seria possível atravessar o caminho inteiro passando uma única vez em cada ponte se houvesse exatamente zero ou dois pontos de onde saísse um número ímpar de caminhos. A razão de tal coisa é que de cada ponto deve haver um número par de caminhos, pois será preciso um caminho para "entrar" e outro para "sair". Os dois pontos com caminhos ímpares referem-se ao início e ao final do percurso, pois estes não precisam de um para entrar e um para sair, respectivamente. Se não houver pontos com número ímpar de caminhos, pode-se (e deve-se) iniciar e terminar o trajeto no mesmo ponto, podendo esse ser qualquer ponto do esquema. Isso não é possível quando temos dois pontos com números ímpares de caminhos, sendo obrigatoriamente o início e outro o fim.

Essa figura com vários pontos (vértices) e algumas ligações (arestas) ele a denominou de grafo, o primeiro da história. Finalizou seu raciocínio percebendo que existiam vértices com exatamente três arestas incidentes. Por outro lado, sabendo que os moradores queriam atravessar cada ponte apenas uma vez, cada vértice deveria ter um número par de arestas. O que tornaria impossível fazer esse percurso seguindo as regras pensadas pelos moradores.

A Teoria dos Grafos tem sido um dos meios mais simples e eficazes para a solução de problemas em várias áreas do conhecimento humano, como por exemplo nas engenharias, na economia, na matemática, na computação, na química, na física, etc. O Ministério da Educação - (MEC) já fomenta pesquisas pautadas nessa Teoria há bastante tempo. O MEC sugere ainda alguns temas complementares que, de forma interdisciplinar, possam compor a parte diversificada do currículo na busca dos conhecimentos em matemática:

> No ensino médio, o termo “combinatória” está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola - são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Könisberg, tratado por Euler: dado um conjunto de sete ilhas interligadas por pontes, a pergunta que se coloca é: “partindo-se de uma das ilhas, é possível passar pelas demais ilhas e voltar ao ponto de partida, nisso cruzando-se cada uma das pontes uma única vez?” Problemas dessa natureza podem ser utilizados para desenvolver uma série de habilidades importantes: modelar o problema, via estrutura de grafo - no exemplo, um diagrama em que cada ilha é representada por um ponto e cada ponte é um segmento conectando dois pontos; explorar o problema, identificando situações em que há ou não solução; convergir para a descoberta da condição geral de existência de uma tal solução (ainda no exemplo, o caso em que cada ilha tem um número par de pontes). Muitos outros exemplos de problemas combinatórios podem ser tratados de modo semelhante, tais como determinar a rota mais curta em uma rede de transportes ou determinar um eficiente trajeto para coleta de lixo em uma cidade. (BRASIL, 2006, p. 94).

As aplicações de grafos são das mais diversas, inclusive em situações atuais, apresentadas através de diagramas que consistem em um conjunto de pontos ligados por linhas, onde os pontos podem representar centros de comunicações e as linhas suas ligações entre estes centros.

3.1 Os Grafos

Definição 3.1. De acordo com Malta (2008), define-se como um Grafo (G) um conjunto finito de elementos chamados de vértice do Grafo (vG); um conjunto finito de elementos chamados arestas do Grafo (aG) e uma função de incidência (λG), que a cada aresta α *de* G associa um par ordenado de vértices de G, que são os *extremos*.

Quando os grafos são representados por diagramas, os vértices são pontos e as arestas são linhas ligando os pontos. Uma aresta é incidente com os vértices que ele liga e quando uma aresta incide em um único vértice é denominado de laço. Dois vértices são adjacentes, quando eles estão ligados por uma única aresta, e quando não existe aresta incindindo sobre o vértice, diz-se que ele é um vértice isolado, como mostra a Figura 3.2.

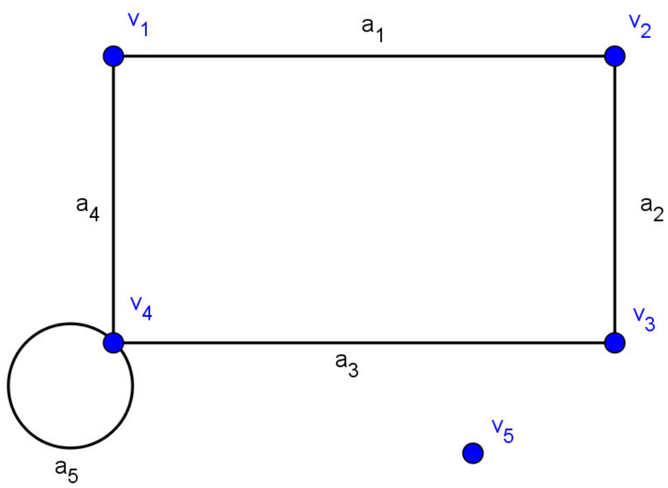


Figura 3.2: Grafo G - com vértice adjacente, vértice isolado e laço.

Em um Grafo G tem-se:

i) (v_G) como os vértices do Grafo G;

ii) (a_G) sendo as aresta do grafo G;

iii) (λG) a função de incidência do Grafo G;

iv) $v_G = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$;

v) v_5 como o vértice isolado;

vi) (v_1, v_2) os vértices adjacentes;

vii) $(v_4,\ v_4)$ o laço.

A Tabela 3.1 mostra a composição do Grafo:

$\alpha(aG)$	λG
a_1	(v_1, v_2)
a_2	(v_2, v_3)
a_3	(v_3, v_4)
a_4	(v_1, v_4)
a_5	(v_4, v_4)

Tabela 3.1: Composição do Grafo

3.1.1 Tamanho de um grafo

O tamanho de um Grafo é dado pela soma do número de arestas com o número de vértices do Grafo, ou seja, $|aG| + |vG|$. A Figura 3.3 ilustra um exemplo do tamanho de um Grafo: $|aG| + |vG| = 5 + 4 = 9$.

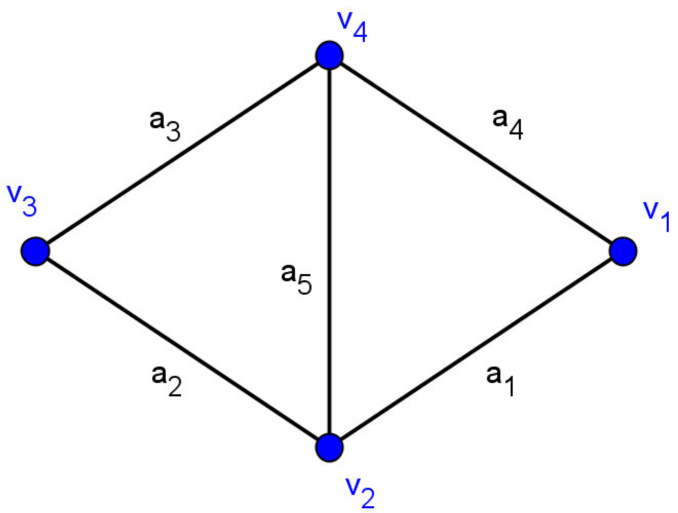


Figura 3.3: Tamanho do grafo.

Portanto, o gráfico ilustrado na Figura 3.3 é um Grafo de tamanho 9.

3.1.2 Ciclos e laços em um grafo

Ciclo (ou Circuito) é um caminho que inicia e termina no mesmo vértice. Os ciclos que tem comprimento 1 são chamados de laços ou *loop* que num Grafo é uma aresta cujas terminações (início e fim) estão no mesmo vértice.

Um ciclo simples é um ciclo que tem um comprimento de pelo menos 3 e no qual o vértice inicial só aparece mais uma vez, como vértice no final, e os outros vértices aparecem uma única vez. Um grafo chama-se acíclico se não contém ciclos simples.

3.1.3 Grau do Vértice de um Grafo

O grau ou valência de um vértice v, dado por (gG(v)), em um Grafo é exatamente o número de arestas que incidem naquele vértice v, ressaltando que os laços são contados dua vezes. A Figura 3.4 exemplifica o grau do vértice do seguinte modo: $(gG(v_1)) = 2$, $(gG(v_2)) = 3$, $(gG(v_3)) = 4$ e $(gG(v_4)) = 3$.

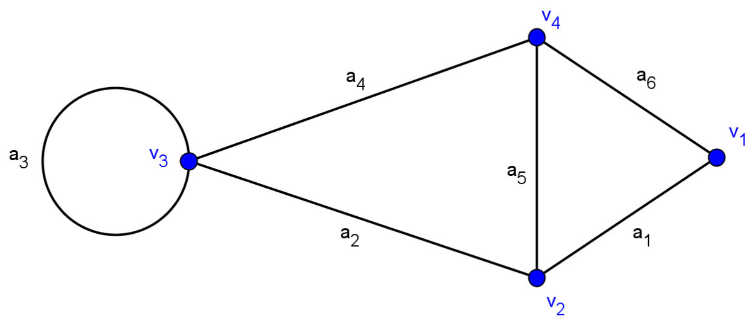


Figura 3.4: Graus em um grafo.

Proposição 3.1: *A soma dos graus dos vértices em um Grafo é igual a duas vezes o número de arestas do Grafo*, ou seja:

$$\sum gG(v) = 2|aG|$$

Exemplo 3.1. Da Figura 3.4, $(gG(v_1)) = 2$, $(gG(v_2)) = 3$, $(gG(v_3)) = 4$ e $(gG(v_4)) = 3$, assim: $|aG| = 6$. É fácil a verificação da **Proposicão 3.1** neste exemplo, onde:

$$\sum gG(v) = 2 + 3 + 4 + 3 = 12$$

$$2|aG| = 2.6 = 12$$

$$\sum gG(v) = 2|aG|$$

3.1.4 Caminho e trilha de um grafo

Um caminho em um Grafo é uma sequência de vértices tal que de cada um de seus vértices há uma aresta para o próximo vértice da sequência. O primeiro vértice é chamado de vértice inicial e o último é chamado de vértice final.

Alguns caminhos são específicos na teoria dos Grafos, um deles é o *Caminho Euleriano*, que em um grafo usa cada aresta exatamente uma vez. Se esse caminho realmente existir, o grafo é dito traversável. Tem-se ainda o *Ciclo Euleriano*, ciclo este que usa cada aresta exatamente uma vez. Outro caminho não menos importante é o *Caminho Hamiltoniano* em um grafo, esse caminho 'visita' cada vértice exatamente uma vez. O ciclo Hamiltoniano é um ciclo que 'visita' cada vértice uma única vez.

Seja G um Grafo. Um caminho em G é uma sequência de vértices de G,

$$(\{v_{i_1}, v_{j_1}\}, ..., \{v_{i_n}, v_{j_n}\})$$

tal que $v_{j_a} = v_{i_{a+1}}$, para todo $1 \leq a \leq n-1$.

Trilha é todo percurso que não possui repetição de arestas. Ela será fechada se $a_0 = a_k$ e será não simples se algum dos vértices intermediários repetir-se.

Exemplo 3.2. A sequência de vértices (v_1, v_2, v_4, v_3) é um exemplo de caminho no Grafo da Figura 3.5.

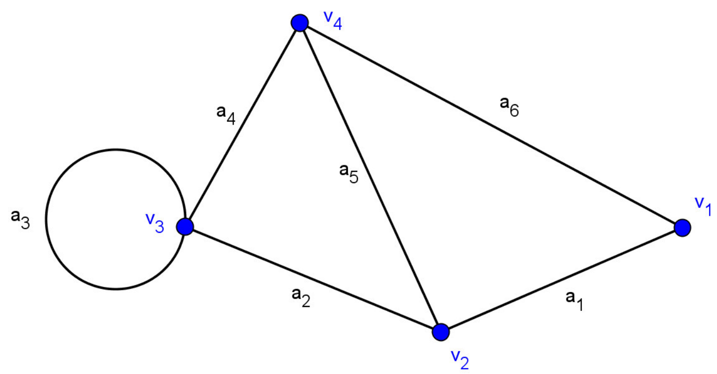


Figura 3.5: Caminhos de um Grafo.

3.2 Grafo Simples

Um grafo é dito simples se não existe laços nem duas arestas distintas com o mesmo par de extremos (arestas paralelas). É um grafo não direcionado que, no máximo, existe uma aresta entre quaisquer dois vértices, ou seja, sem arestas paralelas. Para um grafo simples, o número de ´vizinhos' de um vértice é igual ao seu grau ou valência, como mostra a Figura 3.6.

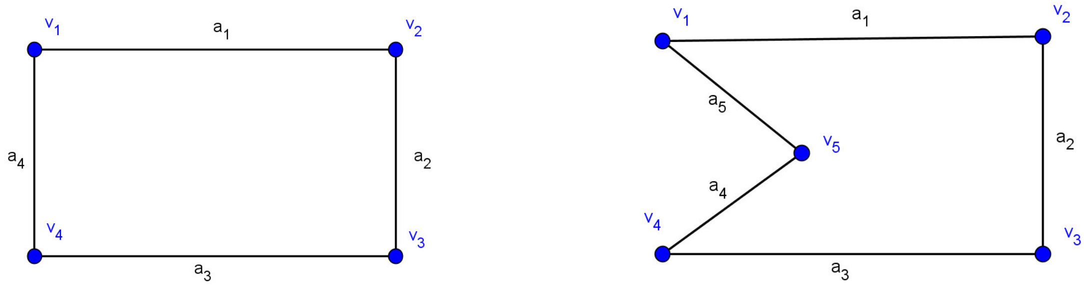
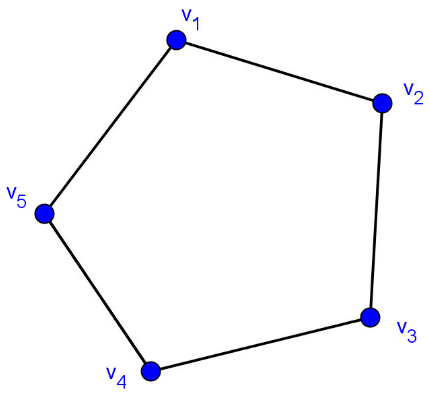


Figura 3.6: Exemplos de Grafo Simples.

3.3 Grafo Completo e Grafo Regular

O grafo completo, ilustrado na Figura 3.7, é na verdade um grafo simples com algumas especificidades, em que seus vértices são, dois a dois, adjacentes, ou seja, para cada vértice do grafo, existe uma aresta conectando este vértice a cada um dos demais, sendo que todos os vértices do grafo possuem o mesmo grau. Um grafo completo de n vértices é geralmente denotado por K_n. Este grafo tem $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas que correspondem a todas as possíveis escolhas de pares de vértices.

Um grafo G cujos vértices são todos de mesmo grau g é chamado regular de grau g. Resumindo: Grafo Regular é um grafo em que todos os vértices têm o mesmo grau.



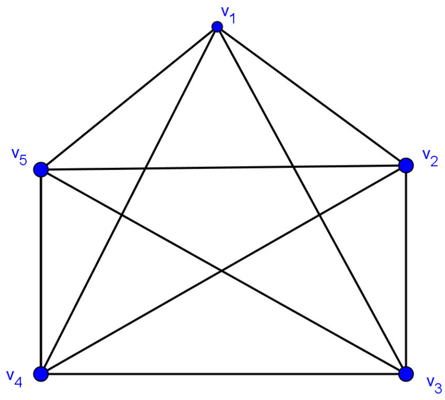


Figura 3.7: Exemplos de grafo completo.

3.4 Grafo Conexo e Desconexo

Um grafo será dito **grafo conexo** se for possível estabelecer um caminho de qualquer vértice para qualquer outro vértice desse mesmo grafo através do percurso das arestas. Caso o Grafo G dado possua pelo menos dois vértices que não estejam ligados através de algum caminho, esse grafo será então um **grafo desconexo**. Ainda, se houver a possibilidade de estabelecer um caminho de qualquer vértice para qualquer outro vértice, mesmo depois de remover $k-1$ vértices, diz-se que o grafo está *k-conexo*.

Exemplo 3.3. Em um grupo de seis pessoas, Amélia (A), Beatriz (B), Carol (C), Dilma (D), Elizabeth (E) e Fátima (F), sabe-se que que:

1) Amélia é irmã de Beatriz, Carol e Fátima;

2) Beatriz é irmã de Carol e;

3) Dilma é irmã de Elizabeth.

Essas pessoas terão relações familiares como irmãs, duas a duas, quando tiverem pelo menos o pai ou a mãe em comum. Além de irmãos, temos ainda relações de amizade recíprocas entre essas pessoas do grupo, ou seja, relações em que se uma pessoa X_1 é amiga da pessoa X_2, a pessoa X_2 também será amiga da pessoa X_1.

Acerca dessas relações de amizade, sabe-se que:

i) Amélia conhece Beatriz, Elizabeth e Fátima;

ii) Beatriz conhece Carol;

iii) Carol conhece Dilma, Elizabeth e Fátima;

iv) Dilma conhece Elizabeth.

A Figura 3.8 representará um grafo com as relações familiares (irmãs) e a Figura 3.9, um outro grafo para representar as relações de amizade deste grupo.

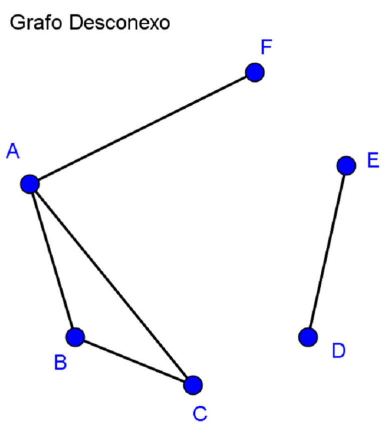


Figura 3.8: Grafo das relações familiares.

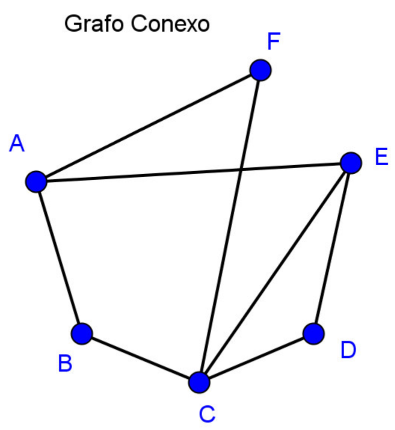


Figura 3.9: Grafo das relações de amizade.

3.5 Grafos Eulerianos

Pode-se afirmar que um grafo G é euleriano se houver um ciclo em G que contemple todas as arestas desse grafo. Assim diz-se que este é um ciclo euleriano. O grafo da Figura 3.10 é portanto euleriano, pois ele contém um ciclo: v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_3, v_1, v_6, v_2, v_7, v_3, v_6, v_7, v_1, que é um ciclo euleriano.

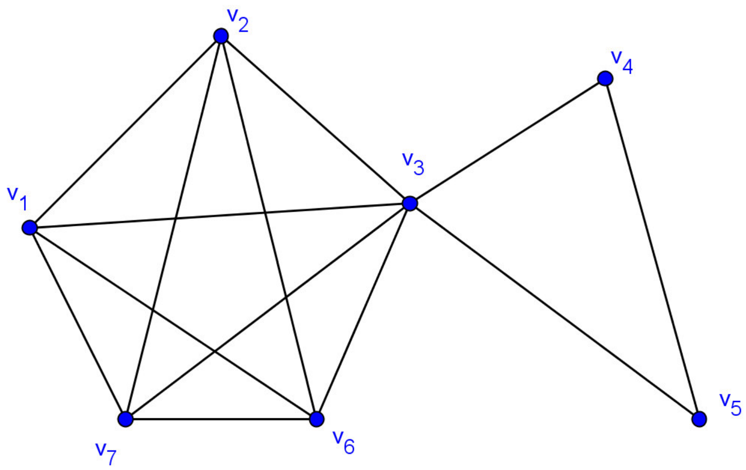


Figura 3.10: Exemplo de Grafo Euleriano.

3.5.1 Isomorfismo Entre Grafos

Dois grafos são ditos isomorfos se houver possibilidade de se estabelecer uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e os vértices do outro e também entre as arestas de um e as arestas do outro, salientando que as arestas devam preservar as suas adjacências. A Figura 3.11 mostra grafos isomorfos entre si:

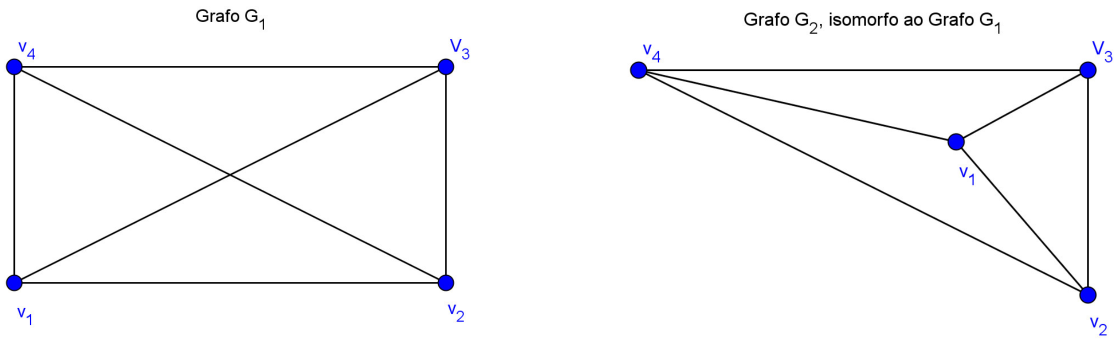


Figura 3.11: Exemplo de isomorfismo entre os grafos G_1 e G_2.

3.5.2 Grafo Bipartido Completo

Diz-se que um grafo $G(v, a)$ é bipartido quando o seu conjunto de vértices v, puder ser particionado em dois conjuntos v_1 e v_2 de tal forma que toda aresta de G tenha uma extremidade em v_1 e outra extremidade em v_2. Esse grafo bipartido é dito completo quando possui uma aresta para cada par de vértices $v_i \in v_1$ e $v_j \in v_2$. Se n_1 é o número de vértices em v_1 e se n_2 é o número de vértices em v_2, logo o grafo bipartido completo é denotado por K_{n_1,n_2}, como exemplifica a Figura 3.12.

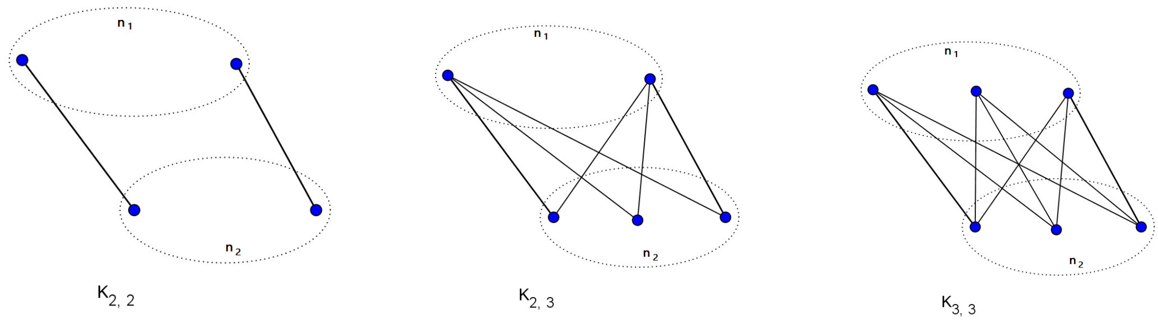


Figura 3.12: Grafos bipartidos K_{n_1,n_2}.

3.6 Grafos Planares Conexos

Os Grafos planares são aqueles que apresentam uma característica que os tornam diferentes dos demais grafos. Essa diferença é a possibilidade de seu diagrama poder ser representado em um plano sem que duas de suas arestas quaisquer se cruzem. Quando um grafo G aceita uma representação num certo plano P sem que existam arestas que se interceptam, diz-se que G é um grafo realizável em P. Assim, um grafo diz-se planar se é realizável no plano.

Observa-se ainda que, apesar de um determinado grafo admitir uma representação com suas arestas cruzando-se, isso não determina que esse grafo não seja planar. Logo pode-se encontrar outra maneira de representá-lo de modo que não ocorram arestas se cruzando.

Definição 3.2. Um Grafo G_1 é planar, se existir um certo Grafo G_2, isomorfo a G_1, cuja representação seja planar.

Utiliza-se o termo **Grafo Plano** para uma representação planar de um grafo planar. A Figura 3.11 é um exemplo, onde G_1 é um grafo planar e G_2 é um **Grafo Plano**. Tem-se aqui um exemplo de grafo planar e não-planar, respectivamente nas Figuras 3.13 e 3.14:

Uma maneira clássica de determinar se um dado grafo é planar é utilizando um teorema (Teorema de Kuratowski) que menciona dois grafos não planares que são

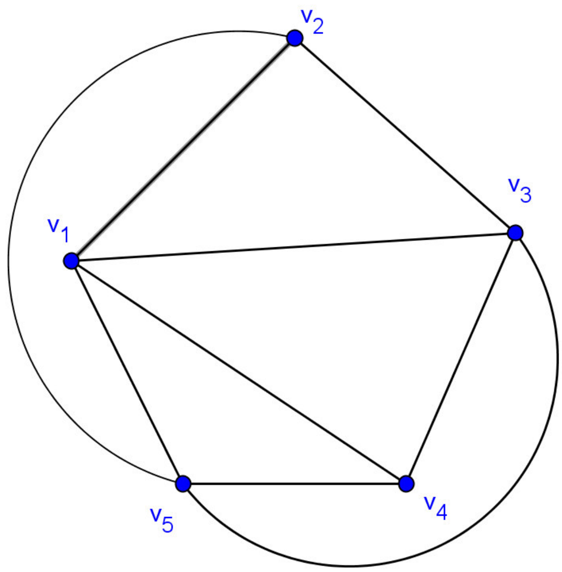


Figura 3.13: Exemplo de Grafo planar.

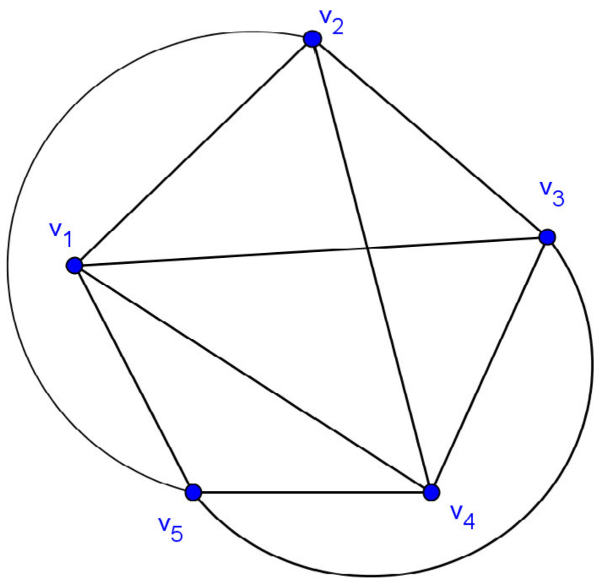


Figura 3.14: Exemplo de Grafo não-planar.

fundamentais no estudo de planaridade. Estes dois grafos são conhecidos como Grafos de Kuratowski.

3.6.1 Teorema de Kuratowski

Kazimierz Kuratowski (1896-1980) foi um matemático nascido na Polônia e que se dedicou à pesquisa na área de topologia. Kuratowski passou a sua vida em um local diretamente relacionado com duas grandes guerras mundiais. No início do século XX foi estudar engenharia na Escócia, foi quando iniciou-se a primeira guerra e seus estudos foram logo interrompidos. Entre os anos 1927 e 1934 ele lecionou na Politécnica de Lviv, lá ele frequentava uma Cafeteria Escocesa, estabelecimento famoso por ser o local onde se reuniam membros da escola de matemática daquela cidade.

Depois que saiu da Politécnica, em 1934, transferiu-se para a Universidade de Varsóvia. Quando vem a segunda guerra mundial então ele passou a dar aulas clandestinamente na Polônia, devido a educação superior naquele país ter sido proibida durante a ocupação alemã. Com a reabertura da Universidade em 1945, Kuratowski voltou a lecionar, tendo depois ocupado diversos cargos importantes e contribuído significativamente com a reconstrução da vida científica em seu país.

Nesta seção utiliza-se o resultado obtido por Kuratowski na teoria dos grafos, mais especificamente na construção de grafos planares. É mostrado o teorema em homenagem a Kazimierz Kuratowski, na teoria dos grafos. O teorema é uma *caracterização gráfica matemática proibida de grafos planares.* O teorema diz que um grafo finito é planar se, e somente se, ele não contém um subgrafo que é uma subdivisão da K_5 (que é um grafo completo em cinco vértices) ou de $K_{3,\ 3}$ (grafo bipartido completo em seis vértices, três dos quais se conectam a cada um dos outros três, também conhecido como o gráfico de utilidade.

Resumindo, tem-se:

Teorema 3.6.1. *Um grafo é planar se, e somente se, nenhum de seus sub-grafos for homeomorfo a K_5 ou a $K_{3,\ 3}$.*

Demonstração. Para provar este teorema usa-se um método que pode ser muito útil na obtenção de uma representação planar de um grafo planar ou na prova de que não pode ser encontrada essa representação .

Parte 1 - *O grafo K_5 é um grafo não planar.*

Considere o grafo K_5 e v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 os cinco vértices deste grafo. Como o grafo é completo, pode-se encontrar um circuito *hamiltoniano* em G. Veja por exemplo no seguinte circuito onde se acrescentam arestas ao grafo, como mostram as Figuras 3.14, 3.15, 3.16 e 3.17:

É de fácil verificação que não se consegue incluir a última aresta do grafo

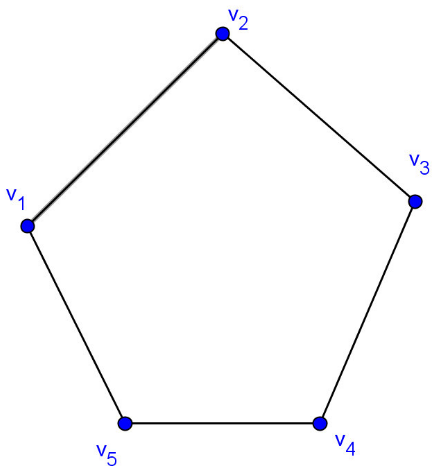


Figura 3.15: Grafo K_5 em seu estado original.

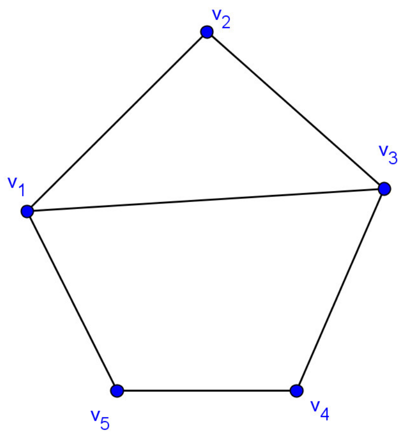


Figura 3.16: Grafo K_5 acrescido da aresta (v_2, v_5).

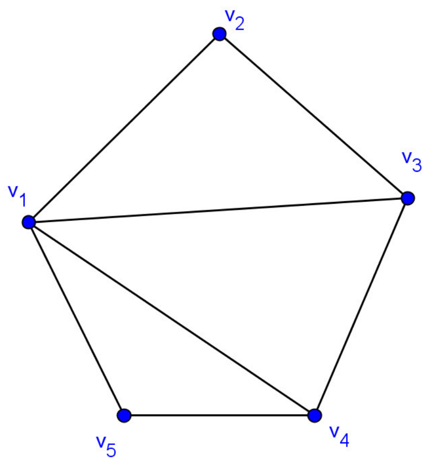


Figura 3.17: Grafo K_5 acrescido das arestas (v_1, v_3) e (v_1, v_4).

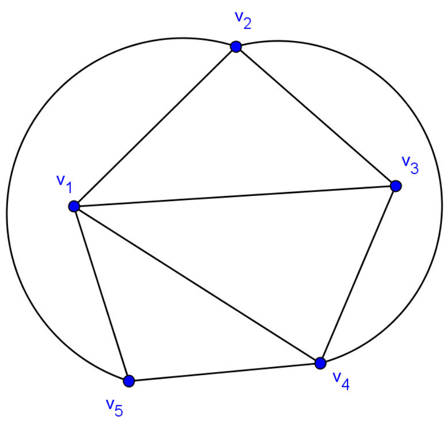


Figura 3.18: Grafo K_5 acrescido das arestas (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_5) e (v_2, v_4).

(v_3, v_5) sem que as arestas se cruzem, portanto o grafo K_5 não é um grafo planar.

Parte 2 - *O grafo $K_{3,3}$ é um grafo não planar.* Para apresentar esta parte do grafo de Kuratowski deve-se retomar a definição de grafo bipartido, ilustrado na Figura 3.12. Para isso, demonstra-se esta parte do teorema usando o mesmo argumento da prova da parte 1, tendo em vista que estes dois grafos possuem propriedades em comum:

i) São grafos regulares;

ii) Os dois são não planares;

iii) A remoção de uma aresta ou um vértice torna o grafo planar;

iv) K_5 é não planar com o menor número de vértices e $K_{3,\ 3}$ é não planar com o menor número de arestas. □

3.7 Prova com Grafos da Relação de Euler

Sobre Sólidos Platônicos mencionado anteriormente, usou-se a relação de Euller para poliedros, dada por: $V - A + F = 2$, onde V é o número de vértices de um poliedro convexo, A é o número de arestas e F é o número de faces.

Nota-se que a relação de Euler para poliedros é válida também para grafos planares conexos. Afinal, existe uma forma elementar de levar uma instância do primeiro problema para uma instância do segundo: sobre uma face do poliedro, planifique o poliedro de modo que todas as faces estejam sobre um mesmo plano, daí iremos provar a relação para grafos planares conexos.

Dado um grafo planar, isto é, um grafo desenhado sobre o plano e sem interseções entre arestas, chamamos de faces internas aquelas regiões limitadas pelas arestas do grafo que formam um ciclo. A face externa é a única região ilimitada. Considera-se como face tanto a interna quanto a externa.

Teorema 3.7.1. *Da relação de Euler, se G é um grafo planar conexo com v vértices, a arestas e f faces, então vale que $v - a + f = 2$.*

Demonstração. Por indução em f, prova-se então. Se $f = 1$, então G é uma árvore e temos que $v = a + 1$. Daí, a relação é verificada neste caso.

Supõe-se que $f > 1$ e que para todo grafo conexo com $f - 1$ faces a relação seja verdadeira. Como G contém pelo menos duas faces, G não é uma árvore, logo G contém um ciclo. Removendo-se uma aresta deste ciclo, mesmo assim o grafo resultante ainda será conexo e terá o mesmo número de vértices, mas tanto o número de arestas quanto o número de faces diminuirá em uma unidade, o que possibilita aplicar a hipótese de indução, de modo que temos $n - (m - 1) - (f - 1) = 2$.

Logo, a relação de Euler vale também para o grafo em seu estado original, como queríamos demonstrar. □

4 GRAFOS: Aplicações no Ensino Básico

Neste capítulo desenvolve-se as definições, demonstrações e suas aplicações associadas à Teoria dos Grafos.

A Teoria dos Grafos mostra-se uma importante ferramenta matemática simples e poderosa na construção de modelos matemáticos e resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento, tais como em redes computacionais, na genética, na física, na química, nas pesquisas operacionais de telecomunicações e nas conexões aeroportuárias ou no fluxo de programas na escolha de uma rota ótima ou de logística.

Um grafo é um par ordenado $G = (V, A)$, tal que V é o conjunto dos vértices não vazio e finito e A o conjunto das arestas, sendo que cada aresta está associada a pelo menos um vértice. Diz-se que os grafos são representações gráficas de situações reais: os grafos Eulerianos são as arestas do grafo formando um ciclo e os grafos Hamiltonianos quando há um ciclo passando por todos os vértices do grafo.

Para a inserção e desenvolvimento das atividades com grafos na escola, inicialmente é apresentado um pequeno histórico da Teoria de Grafos e suas definições mais relevantes como pré-requisitos para objetivar as propostas das atividades aos alunos.

4.1 Problema das Pontes

Inicia-se abordando a mais antiga citação sobre essa teoria, que ocorreu no ano de 1736, protagonizada pelo matemático suíço *Leonhard Euler* em seu artigo "*The Seven Bridges of Königsberg*". Este problema foi o precursor, cuja solução envolveu conceitos do que viria a ser a Teoria dos Grafos e ficou conhecido como "*Problema das Pontes de Königsberg*".

Exemplo 4.1. Este problema consistia em ver a possibilidade de percorrer todas as pontes que ligavam as quatro regiões separadas pelo Rio Pregel, sem passar pela mesma ponte mais de uma vez.

No mesmo ano, Euler analisou o problema trocando as regiões por vértices e as pontes por arestas, modelando o problema, e desta forma provou que não existia solução para o problema das pontes de Königsberg, conforme ilustrado na Figura 4.1.

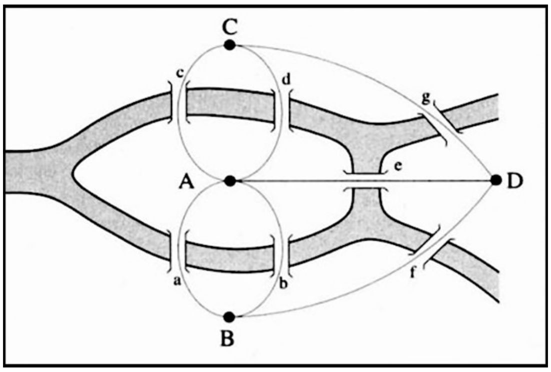


Figura 4.1: Primeiro Grafo da História

Utilizando algo muito simples, que não existia na época de Euler e que formava um desenho no qual tinha alguns pontos e linhas ligando pares de pontos, o então grafo. No problema das pontes, o grafo de Euler tinha quatro regiões: um representando uma das margens do rio, o segundo a outra margem; o terceiro ponto representava uma das ilhas e o quarto outra ilha. Sendo assim, o grafo tinha quatro pontos (vértices) e sete linhas (arestas), que representavam as pontes. O desafio era fazer um passeio pelo grafo que partisse de um dos quatro vértices, percorresse cada uma das sete arestas uma única vez e voltasse ao ponto (vértice) de partida. Com esta modelagem foi que Euler racionalizou o problema e o resolveu.

Solução - *Euler resolveu da seguinte maneira: ao atravessar cada vértice, são gastos exatamente duas arestas, uma para entrar no ponto e outra para sair. Para atravessar qualquer vértice, são gastas duas arestas, uma para entrar no vértice e outra para sair. Ele concluiu que cada vértice deve ter grau par de arestas. Acontece que o grafo das pontes de Königsberg tem pontos de grau ímpar e, portanto, o problema não pode ter solução.*

4.2 As Pontes de Barra do Corda - Maranhão

A questão principal desta seção foi inspirada no problema das pontes de Königsberg, resolvido por Leonhard Euler (1707-1783). Cuja resolução inspirou o surgimento e desenvolvimento da Teoria dos Grafos.

De acordo com o IBGE[1], a Cidade de Barra do Corda localiza-se no centro do estado do Maranhão a cerca de 450 km da capital São Luís. Com população estimada no ano de 2016 em 86.662 habitantes, é um dos maiores municípios da região centro-maranhense, como ilustra a Figura 4.2.

Figura 4.2: Mapa do Maranhão, ao centro Barra do Corda. *Fonte: Site Wikipédia*

Esta cidade é cortada por dois rios perenes, o Rio Mearim e o Rio Corda, além de alguns afluentes menores conhecidos como brejos ou riachos. O Rio Corda, que leva o nome da cidade, deságua no Rio Mearim e o encontro de suas águas, que acontece bem no centro da cidade, divide-a em três regiões geográficas principais: Trizidela, Centro e Entre Rios, como mostra a Figura 4.3.

Por ser uma localidade que surgiu e cresceu as margens de rios, com o passar dos anos foram criadas várias pontes na cidade para ligar os diferentes setores e bairros a fim de melhorar o trânsito e o acesso de pessoas e mercadorias, a todos os pontos da cidade.

Exemplo 4.2. Assim como em Königsberg, propõe-se a mesma problemática em Barra do Corda. Sair de uma região da cidade e passar por cada uma de suas pontes, exatamente uma única vez e voltar à mesma região.

[1] IBGE - Instituto Brasileiro de geografia e Estatística, disponível em: $< http : //cod.ibge.gov.br/BHB >$, acesso em 25 de Março 2017.

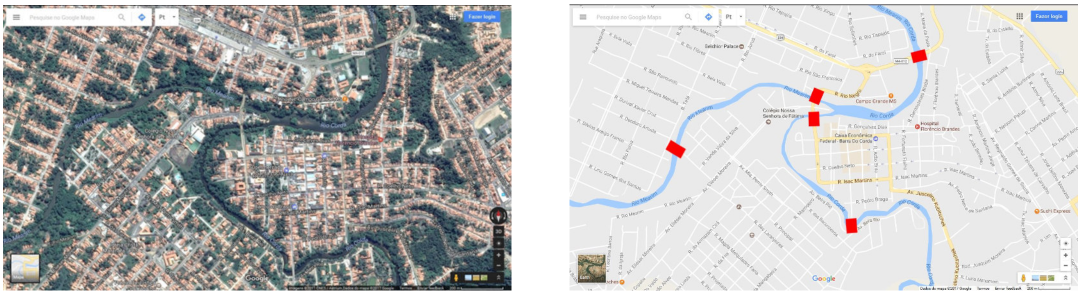


Figura 4.3: Foto aérea e mapa de Barra do Corda. *Fonte: Google Maps.*

Podemos através de similar resolução ilustrar a problemática da seguinte forma: cada margem de um lado do rio é relacionado com um ponto e este denominado de vértice e admitindo cada uma das pontes que ligam a região central da cidade como aresta. Assim obtém-se a Figura 4.4.

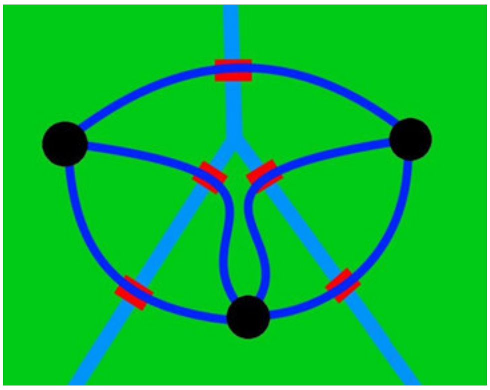


Figura 4.4: Grafo do problema da cidade de Barra do Corda.

Solução - *Pode-se notar que no grafo descrito na Figura 4.4, não vale a relação de Euler:* $V - A + F = 2$*, pois tem-se 3 vértices e 5 arestas e fazendo* $3 - 5 + F = 2$*, nos leva a ter* $F = 4$*, mas como o grafo do problema mostra-se com apenas 3 regiões limitadas, ou seja, 3 faces, contrariando a hipótese que é* $F = 4$*. Então, se não vale a relação* $V - A + F = 2$*, não há possibilidade de solução.*

Mas, por outro lado, se houver a possibilidade de excluir uma das pontes, como mostra o grafo na Figura 4.5, então tem-se a validade da relação de Euler, logo o problema teria solução, pois teríamos 3 vértices, 4 arestas e 3 faces: $V - A + F = 3 - 4 + 3 = 2$.

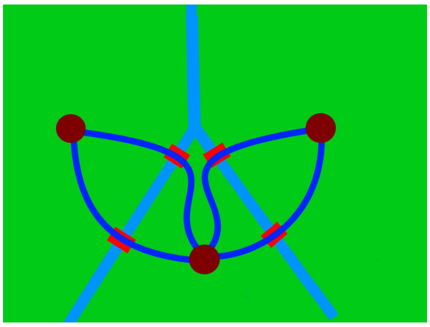


Figura 4.5: Grafo com uma ponte a menos.

Nota-se nas Figuras 4.6 e 4.7 que mesmo valendo a Relação $V - A + F = 2$, não é possível fazer o caminho euleriano. Euler percebeu que só seria possível atravessar o caminho inteiro passando uma única vez em cada ponte se houvesse exatamente zero ou dois pontos de onde saísse um número ímpar de caminhos. A razão de tal coisa é que de cada ponto deve haver um número par de caminhos, pois será preciso um caminho para "entrar" e outro para "sair", portanto não basta apenas excluir uma ponte, tem que ser a ponte certa.

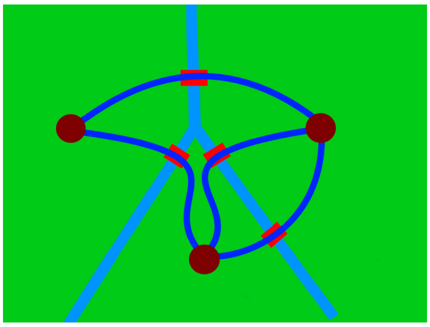


Figura 4.6: Grafo com uma ponte a menos e $V - A + F = 3 - 4 + 3 = 2$.

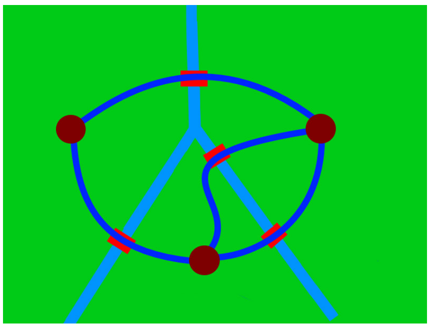


Figura 4.7: Grafo com uma ponte a menos e $V - A + F = 3 - 4 + 3 = 2$.

4.3 Problema: Água, Luz e Esgoto

Atividade apresentada aos alunos sobre a possibilidade de instalação de alguns serviços básicos como: água, luz e esgoto, ilustrado na Figura 4.8, que os maradores de um determinado bairro terão em suas residências:

Exemplo 4.3. Uma rede de instalação desses serviços devem ser subterrâneas e nenhum dos condutores pode cruzar-se para que não haja perigo de inundação, curto circuito ou contaminação. Isso é possível?

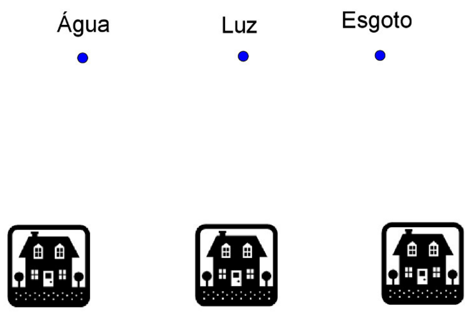


Figura 4.8: Ligação de água, luz e esgoto.

Primeiramente leva-se os alunos a questionarem: se as residências estão posicionadas de forma triangular, e os serviços estão postados entre as residências, há possibilidade destas instalações serem realizadas sem exporem as residências ao perigo?

Os alunos devem observar a Figura 4.8 do problema e indicar por arestas as ligações possíveis entre as residências. Após a decisão tomada, eles devem justificar seu raciocínio sobre a possibilidade ou não da ligação ser concretizada.

Solução - *Sejam A, L e E, água, luz e esgoto, respectivamente e C_1, C_2 e C_3, as casas 1, 2 e 3, constroi-se então um grafo (ver Figura 4.7) de vértices C_1, C_2, C_3, A, L e E e arestas AC_1, AC_2, AC_3, LC_1, LC_2, LC_3, EC_1, EC_2, EC_3 e verifica-se se o grafo é planar ou não-planar.*

Supondo o grafo planar, logo vale a relação de Euler: $V - A + F = 2$.

Como o grafo da Figura 4.9 possui 6 vértices e 9 arestas, pela relação $V - A + F = 2$, tem-se $6 - 9 + F = 2$, o que implica em $F = 5$, logo tem-se 5 regiões determinadas no grafo dado. Sabendo-se que uma das regiões é ilimitada, tem-se somente 4 regiões litadas pelas arestas, conforme mostram as Figuras 4.10, 4.11 e 4.12.

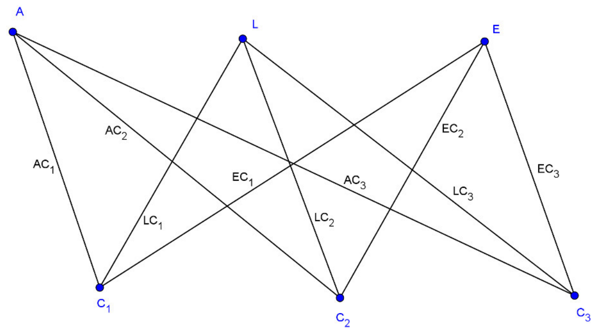


Figura 4.9: Grafo: Água, Luz e Esgoto.

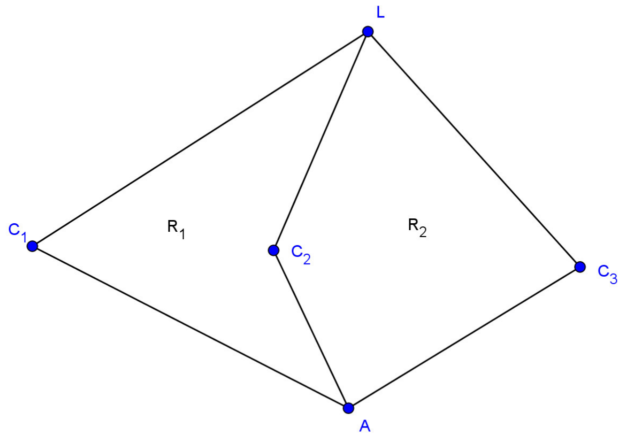


Figura 4.10: Água A, Luz L e regiões: R_1 e R_2.

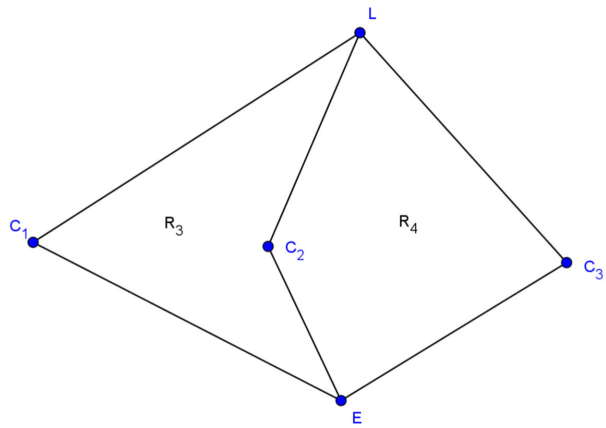


Figura 4.11: Esgoto E, Luz L e regiões: R_3 e R_4.

Conclui-se que este grafo é não-planar, ou seja, tem pelo menos 6 regiões limitadas pelas arestas do grafo, o que vai de encontro à hipótese inicial, onde

$$V - A + F = 2.$$

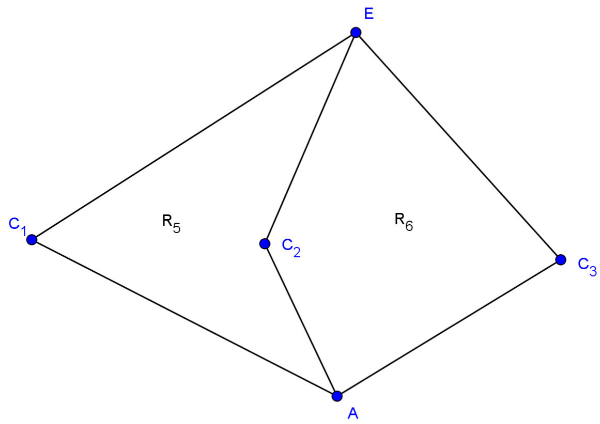


Figura 4.12: Água A, Esgoto E e regiões: R_5 e R_6.

Não sendo o grafo planar, não pode-se fazer as ligações sem que se cruzem as arestas (às redes: luz, água e esgoto).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando as aplicações da Teoria dos Grafos, que iniciaram no problema tradicional sobre as pontes de Konigsberg e que neste trabalho foram exemplificados com as pontes da cidade maranhense de Barra do Corda e problemas envolvendo tecnologia da informação em redes de computadores e organogramas de empresas são resolvidos utilizando a Teoria dos Grafos.

O trabalho mostrou a importância de uma das mais "novas" teorias no campo Matemático, que é a Teoria dos Grafos. Foi abordado a relação desta ferramenta da matemática com a realidade atual, principalmente no mundo da informática e nas disciplinas que necessitam de um conhecimento em redes conexas e desconexas nas mais diversas atividades humanas no mundo contemporâneo. Além de definir o conceito de Grafos de Euler e Hamiltonianos, o trabalho contribui substancialmente no ensino-aprendizagem desta Teoria na Matemática Básica.

O conceito de Grafo foi tratado pela variedade de aplicações que esta teoria tem para oferecer aos alunos atuais que sempre estão "antenados" com as novas formas de ver o mundo. Os problemas resolvidos construíram uma visão do conceito de como deve ser a matemática e, sobretudo, a geometria através de grafos conectados com a relação de Euler vista para poliedros.

O trabalho abriu uma vertente de pesquisas onde o aluno pode ver que a matemática sempre está aberta para novos enfrentamentos, muita das vezes com temas mais prazerosos que outros convencionais, exercendo um fascínio por parte da comunidade estudantil, fazendo com que o processo ensino aprendizagem se torne muito mais eficiente e instigante.

A relevância deste trabalho está na ideia de uma obra que vem contribuir significativamente para novas pesquisas e consulta para professores que pesquisem novos métodos em sala de aula e que visem melhorar o ensino da matemática. Acredita-se ainda que esse trabalho venha ser útil aos professores, no incentivo a trabalhar com grafos, quer seja tirada desta proposta ou na preparação do seu próprio material. Esta proposta vem fomentar e despertar um maior interesse nos alunos pela Matemática e suas aplicações usando a Teoria dos Grafos. O trabalho apresenta uma fonte de pesquisa para novas investidas na educação matemática, principalmente no campo de novas vinculações com a geometria, que são a Teoria dos Grafos.

REFERÊNCIAS

BOAVENTURA NETO, Paulo O. **Grafos**: teorias, modelos e algoritmos. 4 ed. E. Blücher. São Paulo, 2006.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Secretaria de Educação Básica, 2006.

BRIA, J. **Grafos no Ensino Fundamental e Médio**: Matemática, Interdisciplinaridade e Realidade. Tese, COPPE - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro: 2001.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto e aplicação. Volume 2. São Paulo: Ática, 2010.

DOLCE, Osvaldo. **Fundamentos de matemática elementar**: geometria espacial, posição e métrica - vol. 10. 6. ed. São Paulo: Editora Atual, 2005.

MALTA, G. H. S. **Grafos no Ensino Médio**: uma Inserção Possível, Dissertação, Porto Alegre: PPGEM da UFRGS, 2008.

OLIVEIRA, J.B.P. **Introduzir o estudo de grafos com texto, jogos e situações interdisciplinares**. Projeto Fundão RJ. 2007.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**: Paiva. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

RIBEIRO, Amanda Gonçalves. **O que são poliedros de Platão?**. Brasil Escola. Disponível em: $< http://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-sao-poliedros-platao.htm >$. Acesso em 16 de janeiro de 2017.