Universidade Federal do Maranhão

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

Aspectos de Teorias Planares com violação da Simetria de Lorentz

Roemir Peres Machado Moreira

Orientador: Manoel Messias Ferreira Junior

São Luís, Setembro de 2011

Aspectos de Teorias Planares com violação da Simetria de Lorentz

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

Orientador: Manoel Messias Ferreira Junior

Doutor em Física - UFMA

São Luís, Setembro de 2011

Moreira, Roemir Peres Machado.

Aspectos de Teorias Planares com violação da Simetria de Lorentz./ Roemir Peres Machado Moreira - São Luís, 2011.

73 f.

Impresso por computador (fotocópia).

Orientador: Manoel Messias Ferreira Junior.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Maranhão,

Programa de Pós-Graduação em Física, 2011.

1. Violação de Lorentz 2. Eletrodinâmica Planar

3. Redução Dimensional. 4. Propagador de Feynman I. Título

CDU 537.8

Roemir Peres Machado Moreira

Aspectos de Teorias Planares com violação da simetria de Lorentz

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

BANCA EXAMINADORA

Manoel Messias Ferreira Junior (*ORIENTADOR*)

Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Rodolfo Alván Casana Sifuentes

Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Francisco de Assis Brito

Doutor em Física - Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

A todos que acreditam em mim.

Agradecimentos

Dedico este trabalho ao Criador de todas as coisas, sem Ele esse trabalho não seria possível.

À minha família.

Ao meu orientador Manoel Messias Ferreira Junior pela orientação, ensinamentos e ajuda na realização e desenvolvimento do trabalho.

Ao Prof. Rodolfo Casana, pelo apoio, importantes ensinamentos e por ter ajudado bastante na realização dos cálculos desta dissertação.

A todos os amigos e professores do Departamento de Física da UFMA pelos seus ensinamentos e pelas inúmeras conversas sobre essa bela ciência.

À Capes pelo auxílio financeiro durante a execução do trabalho.

"... isso é cultura geral."

Manoel Messia Ferreira Jr

Resumo

O setor de gauge do Modelo Padrão Estendido (MPE) tem sido investigado em muitos aspectos nos últimos anos, discutindo os efeitos da violação da simetria de Lorentz em sistemas físicos e as limitações da magnitude dos parâmetros de violação. Neste trabalho, rediscutimos algumas teorias planares obtidas a partir da redução dimensional do setor de gauge do MPE, e realizamos uma contribuição original: a redução dimensional do setor de gauge CPT-par e não-birrefringente do MPE, composto por nove componentes. A resultante teoria planar abarca um setor de gauge e um setor escalar (dotado de um termo cinético não usual), acoplados entre si por um 3-vetor C^{α} de violação de Lorentz (LV). Ambos os setores, de gauge e escalar, são afetados pelas seis componentes de um tensor simétrico violador de Lorentz, $k_{\mu\rho}$. O tensor de energia-momento é explicitamente calculado, revelando que a energia dos setores de gauge e escalar são estáveis para pequenos valores dos parâmetros de violação. As equações de movimento para os campos elétrico e magnético, assim como para os potenciais, são escritas e analisadas no regime estacionário. Empregamos então o método de Green para obter as soluções clássicas estacionárias desta eletrodinâmica em primeira ordem nos parâmetros de violação. É observado que os coeficientes de violação de Lorentz não alteram o comportamento assintótico dos campos, mas induzem uma dependência angular não observada na teoria planar de Maxwell. A relação de dispersão é exatamente computada, sendo compatível com uma teoria não birrefringente, e demonstrando que a teoria é estável, mas, em geral, não causal. Por fim, calculamos o propagador de Feynman para os campos de gauge e escalar desta teoria planar, de forma exata, usando um conjunto de 11 projetores que formam uma álgebra fechada. Usamos a expressão do propagador de Feynman para analisar a consistência da teoria no que concerne a sua estabilidade, causalidade e unitariedade.

Palavras Chaves: Modelo Padrão Estendido, Redução Dimensional, Eletrodinâmica Planar, Propagador de Feynman

Abstract

The gauge sector of the Standard Model Extended (MPE) has been investigated in many respects in recent years, discussing the effects of Lorentz symmetry violation in physical systems and the limitations on the magnitude of the parameters of violation. This work revisited some planar theories derived from the dimensional reduction of the gauge sector of the MPE, and perform an original contribution: the dimensional reduction of the CPT-even and nonbirefringent gauge sector of the MPE, composed of nine components. The resulting planar theory includes a gauge sector and scalar sector (which has an nonsual kinetic term), coupled together by a 3-vector C^{α} Lorentz violation. Both sectors, gauge and scale, are affected by the six components of a symmetric tensor violates Lorentz, $k_{\mu\rho}$. The energy-momentum tensor is explicitly calculated, revealing that the energy of the gauge and scalar sectors is stable for small values of the parameters of violation. The equations of motion for the electric and magnetic fields, as well as the potentials, are written and analyzed in the steady state. Then employ the method of Green to get the stationary solutions of classical electrodynamics to first order in the parameters of violation. It is observed that the coefficients of Lorentz violation does not alter the asymptotic behavior of the fields, but does not induce an angular dependence observed in the planar theory of Maxwell. The dispersion relation is exactly computed and is compatible with a theory does not birefringent, and demonstrating that the theory is stable, but in general, not causal. Finally, we calculate the Feynman propagator for the gauge fields and scalar theory of planar, accurately, using a set of 11 projectors that form a closed algebra. We use the expression of the Feynman propagator to analyze the consistency of the theory regarding its stability, causality and unitarity.

Keywords: Standard Model Extension, Dimensional Reduction, Planar Electrodynamics, Feynman Propagator.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Desde a antiguidade o homem tem buscado avidamente explicações quanto a sua origem e o comportamento do meio em que vive. Perguntas simples como: De onde viemos? Para onde vamos? E como tudo surgiu? Têm sido motivos de grandes discussões e investimentos. No decorrer dos séculos, filósofos e outros pensadores procuram arduamente respostas a estas e a outras perguntas. Todavia, nos últimos anos, a Física tem ocupado um papel fundamental para as respostas das indagações da humanidade. Leis e experimentos têm sido postos à prova, com afinco, para dar-nos respostas satisfatórias.

Uma das respostas que a Física estabelece advém do Modelo Padrão, desenvolvido entre 1970 e 1973. Este modelo, que não é apropriadamente um modelo e sim uma teoria, traz uma idéia sofisticada sobre as partículas elementares constituintes da natureza, bem como suas interações. O Modelo Padrão classifica as partículas em dois grupos: partículas que não possuem estrutura interna e partículas que possuem estrutura interna. As partículas que não possuem estrutura interna são verdadeiramente elementares, neste caso, temos: léptons (elétron, múon, neutrino) e quarks (up, down, charme). As partículas que possuem estrutura interna são denominadas de hádrons, que por sua vez podem ser divididas em bárions e mésons. Os bárions são constituídos por três quarks ou três antiquarks, como exemplo, temos: os prótons e nêutrons. Por outro lado, os mésons são constituídos por um quark e um antiquark, por exemplo, o píon e o kaon.

A natureza exibe quatro tipos de interações fundamentais: *eletromagnética*, *gravitacional*, *fraca* e *forte*. Cada uma dessas interações ocorre devido a uma propriedade da matéria: carga elétrica (eletromagnética), massa (gravitacional), carga fraca (fraca) e cor (forte). Todas essas interações possuem uma partícula mediadora que é responsável por carregar as informações entre as partículas interagentes. Essas partículas mediadoras são os *fótons* para a interação eletromagnética, os *grávitons* para a interação gravitacional, as partículas W e Z para a interação fraca e os *glúons* para a interação forte.

O Modelo Padrão, embora descreva com sucesso a maioria das interaçõe, possui limitações. A interação gravitacional não é descrita com sucesso neste modelo, sendo assim, tratada separadamente pela Relatividade Geral. Além disso, outros problemas surgiram, pois até o momento, não foi detectado nenhum gráviton e tampouco a peça principal desse quebra-cabeça: o bóson de Higgs. Essa partícula é uma das peças fundamentais do Modelo Padrão, visto que com ela pode-se explicar a origem da massa de todas as outras partículas. Os bósons de Higgs são partículas previstas teoricamente, em 1964, pelo físico escocês Peter Higgs e utilizadas por Steven Weinberg (1967) e Abdus Salam (1968) para explicar o motivo de outras partículas, os bósons vetoriais W^+, W^- e Z^0, possuírem massa. Isso porque havia na teoria Eletrofraca, também denominada *Flavordinâmica Quântica* (FDQ), formulada em 1962 por Sheldon Glashow, Steven Weinberg e Abdus Salam, um paradoxo envolvendo as massas das partículas W e Z[1]. Além dessa teoria, o Modelo Padrão apresenta em seu bojo outras teorias tais como: a *Eletrodinâmica Quântica* (EDQ), formulada na década de 1950 por Richard Feynman, Julian Schwinger e Sin-Itiro Tomonaga, para explicar as interações eletromagnéticas no nível quântico, e a *Cromodinâmica Quântica* (CDQ), proposta na década de 1970 por David Politzer, Frank Wilczek e David Gross, responsável por explicar as interações fortes entre os quarks. A teoria gravitacional, até o momento, como já mencionado, ainda não foi adequadamente incluída na estrutura do Modelo Padrão, devido à dificuldade de ser tratada satisfatoriamente como uma teoria de campo quantizável e renormalizável. Sendo a mesma descrita pela teoria da relatividade geral (TRG) de Einstein, formulada em 1915-1916, cujo objetivo é descrever a física para referenciais inerciais em movimento acelerado. O postulado base da Teoria da Relatividade Geral, chamado de Princípio da Equivalência, especifica que sistemas acelerados e sistemas submetidos a campos gravitacionais, são fisicamente equivalentes, e a gravitação é considerada como um efeito da geometria do espaço-tempo.

Em face do fracasso da inclusão da interação gravitacional no Modelo Padrão, novas teorias afluíram para tratar a física na escala de Planck ($\approx 10^{19} Gev$). Um fato marcante nesta escala de energia é a possibilidade de quebra espontânea de simetria, no caso as simetrias de Lorentz e CPT. As simetrias na Física desempenham um papel importante no entendimento dos sistemas físicos. Isso é devido ao fato de que a cada simetria contínua está associada uma quantidade conservada como: energia, momento, carga etc. A conexão geral entre propriedades de simetria

[1]Por um lado, a debilidade das interações fracas requereria que tais partículas tivessem massas relativamente elevadas. Por outro, a simetria da teoria que dava conta dessas interações exigia que suas massas fossem nulas.Tal contradição desapareceria se as massas dos bósons W e Z fossem aparentes. Quer dizer, se suas massas fossem "dadas"por outras partículas: os bósons de Higgs.[1]

e quantidades conservadas é estabelecida por um importante teorema devido a uma matemática alemã Emmy Noether em 1918. Este teorema estipula que caso um sistema seja invariante sob uma transformação contínua infinitesimal, há uma "corrente" associada, que satisfaz necessariamente uma equação de continuidade, implicando na existência de uma "carga" conservada. Dentre as simetrias existentes, as simetrias de Lorentz e CPT tomam um papel importante para o MP.

A simetria de Lorentz surgiu no final do século XIX em um momento áureo para a Física contemporânea. Nesta época, os físicos vivenciavam um impasse com relação à mecânica newtoniana e o eletromagnetismo de Maxwell, isso porque as leis clássicas dada pela mecânica de Newton mantinham sua estrutura perante as famosas transformações de Galileu, exaltando assim, o princípio da relatividade de Galileu. Por outro lado, aplicando a transformação de Galileu sob o eletromagnetismo de Maxwell, observava-se que as equações de Maxwell não preservavam sua forma padrão, evidenciando que o princípio da relatividade de Galileu não valia para o eletromagnetismo de Maxwell valendo somente para a mecânica de Newton. Este impasse só foi resolvido pelos trabalhos de Lorentz, Poincaré e Einstein, que propuseram um novo conjunto de transformações perante as quais o Eletromagnetismo permanecia inalterado, surgindo, assim, a simetria de Lorentz. Contudo, para manter o eletromagnetismo de Maxwell invariante, tinha de se pagar um preço alto, visto que a Mecânica Clássica teria de incorporar idéias inovadoras no que diz respeito a espaço e tempo. Surgia, então, a Teoria da Relatividade Restrita (TRR), lançada por A. Einstein em 1905. O princípio da relatividade de Einstein assegura que as leis físicas são invariantes perante as transformações de Lorentz, ou seja, que as leis físicas não devem depender da perspectiva de um observador e que tais leis são equivalentes para todos os observadores postados nos mais variados referenciais inerciais. Este equivale ao primeiro postulado da TRR que também traz um segundo no qual estabelece a velocidade da luz como uma constante universal que independe do movimento relativo entre a fonte e o observador. Inúmeros experimentos foram feitos no mundo todo e a simetria de Lorentz foi estabelecida como uma simetria fundamental, que se aproxima da simetria de Galileu para velocidades muito inferiores a da luz.

A simetria CPT foi originalmente sugerida por Julian Schwinger em 1951, e uma derivação mais robusta foi proposta por Gerhard Lüders e Wolfgang Pauli, em 1954. A sigla CPT significa: conjugação de carga (C), inversão espacial ou paridade (P) e inversão temporal (T). A operação de conjugação da carga supõe que para cada partícula existe uma anti-partícula com a mesma massa, porém com carga oposta. Já a operação de paridade está relacionada à reflexão espacial, isto é, a inversão dos eixos espaciais de um determinado sistema físico. A inversão temporal, por outro lado, consiste em inverter o sentido do eixo de evolução temporal do sistema, ou seja, trocar o tempo t por $-t$. Na natureza já foram identificadas a violação de modo individual das simetrias

C, P, T e também da dupla CP mas até o momento não foi observado a violação da simetria CPT. A simetria CP foi proposta por Lev Landau em 1957 e descoberta em 1964 por James Cronin e Val Fitch, os quais foram laureados com o prêmio Nobel de Física em 1980. O mecanismo da quebra espontânea da simetria CP foi proposto por Yiochiro Nambu quando estudava decaimento de káons, levando-o a dividir o prêmio Nobel de Física em 2008. A importância no estudo da quebra espontânea da simetria CP está relacionada ao fato de explicar a existência de mais matéria do que anti-matéria no Universo. Em 2002, Oscar Greenberg provou que a violação CPT implica na quebra de simetria de Lorentz. Isto implica que qualquer estudo de violação CPT inclui também violação de Lorentz. Várias buscas experimentais de tais violações foram realizados durante os últimos anos e, recentemente, tem havido alguma evidência forte para uma violação da simetria de carga em que anti-neutrinos parecem ter uma massa diferente de neutrinos.

Outra simetria fundamental da natureza é a simetria de gauge, que está diretamente ligada ao eletromagnetismo e também às "teorias de gauge". Esta simetria está relacionada às transformações que mantêm os campos elétrico e magnético invariantes perante uma mudança nos potenciais vetorial e escalar. A eletrodinâmica de Maxwell foi a primeira teoria física a exibir a simetria de gauge em sua estrutura, no entanto outras teorias apresentaram tais simetrias como a teoria da Relatividade Geral, a teoria eletrofraca e a cromodinâmica quântica.

Um dos primeiros trabalhos sobre as conseqüências da violação das simetrias de Lorentz foi proposto por Carroll-Field-Jackiw (CFJ) no início dos anos 90 [2], modificando a eletrodinâmica de Maxwell adicionando na densidade de lagrangeana um termo do tipo Chern-Simons, $\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}A^{\mu}V^{\nu}F^{\kappa\lambda}$, em (1+3) dimensões. Com isso, houve um acoplamento do campo de gauge com um campo violador da simetria de Lorentz (V^{ν}). Posteriormente, por volta de 1996 Colladay e Kostelecky [3], influenciados pelos trabalhos de Carroll-Field-Jackiw, elaboraram um modelo teórico que corresponderia a uma extensão do conhecido Modelo Padrão (MP) das interações fundamentais, denominado de Modelo Padrão Estendido (MPE). Este novo modelo, o MPE, incorpora termos violadores da simetria de Lorentz e CPT em todos os setores de interação do Modelo Padrão. Os termos de violação de Lorentz são obtidos através da quebra espontânea de simetria no contexto da teoria de cordas em uma teoria mais fundamental (definida na escala de energia de Planck), e os coeficientes responsáveis pela violação são quantidades tensoriais que fazem o papel de valores esperados no vácuo. Tais coeficientes são geralmente classificados de acordo com a paridade e birrefringência, podendo ser CPT-ímpar, quando viola a simetria CPT, ou CPT-par, quando não viola a simetria CPT.

O MPE preserva a estrutura de gauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, a renormalizabilidade e a microcausalidade do Modelo Padrão. A violação de Lorentz, no contexto do MPE, ocorre apenas no referencial da partícula, sendo preservada no referencial do observador. Isto significa que do ponto de vista do observador, a simetria de Lorentz permanece válida e todas as transformações (rotações e translações) permanecem invariantes. O setor de gauge é formado por um termo CPT-ímpar e um termo CPT-par. O termo CPT-ímpar, que possui paridade ímpar e birrefrinfência, é o termo de Carroll-Field-Jackiw, tal termo gera uma eletrodinâmica de Maxwell modificada denominada de eletrodinâmica Maxwell-Carroll-Field-Jackiw. A eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw tem servido para os mais variados estudos tas como: soluções clássicas, aspectos de causalidade, estabilidade e unitariedade. Quanto ao termo CPT-par do setor de gauge, descrito pelo tensor $(K_F)_{\alpha\beta\mu\nu}$, é composto por 19 coeficientes indepentes, sendo 9 não birrefringentes e 10 birrefringentes. A partir dos estudos precursores de Kostelecky e Mewes, este termo de paridade par ganha notoriedade e, com isso, novas investigações têm sido realizadas nos mais amplos aspectos. É neste arcabouço que está inserida a presente dissertação, voltando-se mais especificamente para as nove componentes não birrefringentes do termo CPT-par do Modelo Padrão Estendido.

O presente trabalho está ambientado dentro de uma estrutura teórica advinda do setor de gauge do Modelo Padrão Estendido. Usamos o procedimento de redução dimensional, aplicado sobre o setor não-birrefringente e CPT-par do MPE, para obter uma eletrodinâmica planar com termos de violação da simetria de Lorentz. Esta teoria planar é estudada em alguns aspectos clássicos, envolvendo o cálculo das relações de dispersão, soluções clássicas estacionárias, tensor de energia-momento. Por fim, calculamos exatamente o propagador de Feynman para o setor escalar e o setor de gauge da teoria, a partir de um conjunto de projetores conhecido. Finalizamos destacando as relações de dispersão físicas deste modelo planar, e fazendo nossas considerações finais.

Capítulo 2

O Setor de gauge do Modelo Padrão Estendido

Nos últimos anos, o setor de gauge do Modelo Padrão Extendido (MPE) tem servido de motivação para diversos estudos teóricos de interesse. Um dos estudos pioneiros foi o de Carrol-Field-Jackiw (CFJ) [2], que em 1990 apresentaram uma eletrodinâmica de Maxwell modificada pela presença de um termo violador da simetria de Lorentz e da simetria CPT, em (1+3) dimensões, estabelecendo um acoplamento do campo de gauge com "background" violador da simetria de Lorentz em uma estrutura tipo Chern-Simons. Este trabalho tornou-se uma referência obrigatória na área pois além de estudar algumas propriedades desta teoria, os autores usaram consequências induzidas por este termo (a birrefringência do vácuo) para impor limites superiores sobre a magnitude do background de violação. Usando dados de birrefringência da luz advinda de galáxias distantes, estes autores estaleceram o seguinte limite superior para a magnitude do background: $\left(k < 10^{-16}\right)$. Este artigo assim instituiu uma linha de pesquisa na física teórica, ampliada no Modelo Padrão Estendido de Colladay & Kostelecky [3], cujo objetivo é estudar as propriedades e consequências de termos violadores de Lorentz, e usá-las para impor limites superiores sobre a magnitude de tais termos. O setor de gauge desse modelo apresenta dois termos de correção à eletrodinâmica usual de Maxwell: um termo CPT-ímpar e outro CPT-par, ambos muito estudados nos anos recentes. O setor CPT-ímpar é representado pelo termo de Carroll-Field-Jackiw [2], cuja lagrangeana é:

$$\mathcal{L}_{1+3} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\nu}F^{\alpha\nu} - \frac{1}{4}\varepsilon^{\beta\alpha\rho\lambda}V_{\beta}A_{\alpha}F_{\rho\lambda} + J^{\alpha}A_{\alpha}, \tag{2.1}$$

onde $V^{\alpha} = (\mathrm{v}_0, \mathbf{v})$ é o background fixo responsável pela violação da simetria de Lorentz. As equações de Euler-Lagrange conduzem às seguintes equações de movimento,

$$\partial_\nu F^{\nu\alpha} + V_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta} = -J^\alpha, \tag{2.2}$$

$$\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta} = 0, \tag{2.3}$$

onde $\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu}$ é o tensor dual do campo eletromagnético. As equações de Maxwell modificadas são

$$\nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} = -\rho, \tag{2.4}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{E} = -\mathbf{v}_0 \mathbf{B} - \mathbf{j}, \tag{2.5}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \tag{2.6}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{2.7}$$

Manipulando estas equações, obtemos as seguintes equações de onda para os campos:

$$\Box \mathbf{B} + \mathbf{v}_0 \left(\nabla \times \mathbf{B}\right) = \nabla \times \left(\mathbf{v} \times \mathbf{E}\right) - \nabla \times \mathbf{j}, \tag{2.8}$$

$$\Box \mathbf{E} + \partial_t \left(\mathbf{v} \times \mathbf{E}\right) = \nabla \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}\right) + \mathbf{v}_0 \partial_t \mathbf{B} + \nabla\rho + \partial_t \mathbf{j}. \tag{2.9}$$

e para os potenciais

$$\Box A^0 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} = -\rho, \tag{2.10}$$

$$\Box \mathbf{A} + \mathbf{v}_0 \mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E} = -\mathbf{j}. \tag{2.11}$$

A relação de dispersão advinda destas equações é

$$\left(p^2\right)^2 + V^2 p^2 - \left(V \cdot p\right)^2 = 0, \tag{2.12}$$

cuja solução geral é

$$p^2 = \frac{1}{2}\left[-V^2 \pm \sqrt{\left(V^2\right)^2 + 4\left(V \cdot p\right)^2}\right]. \tag{2.13}$$

É possível mostrar que esta relação representa uma teoria eletromagnética birrefringente. Para um background tipo-espaço, $V^\alpha = (0, \mathbf{v})$, temos:

$$p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{v}^4 + 4\left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}\right)^2}}. \tag{2.14}$$

Pela estrutura matemática da relação (2.14), percebemos que os modos físicos desta teoria propagam-se com velocidades de fase diferentes, o que implica em birrefringência. Para entender melhor este fato, tomamos o modo "right"(p_{0+}) e o modo "left"(p_{0-}), correspondentes aos sinais

$\pm$ na Eq. (2.14), propagando-se no mesmo sentido. Assim, consideramos o modo "left"(p_{0-}) com momento revertido $(\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p})$, indicando propagação para a direita. Nesta situação, temos:

$$p_{0-}(-\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{v}^4 + 4\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}\right)^2}}. \tag{2.15}$$

Observamos então que este modo não coincide com a expressão do modo "right",

$$p_{0+}(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{v}^4 + 4\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}\right)^2}}. \tag{2.16}$$

Estas relações, obviamente, proporcionam velocidades de fases diferentes para os dois modos propagantes para a direirta, resultando em birrefringência. Para maiores detalhes, vide Ref. [2].

Desde 2002, o setor CPT-par do MPE tem sido minuciosamente investigado, principalmente em conexão com questões capazes de fornecer bons limites superiores para os 19 coeficientes LV. Os estudos sobre as propriedades da eletrodinâmica CPT-par, representado pelo tensor $(K_F)_{\alpha\nu\rho\varphi}$, foram iniciados por Kostelecky e Mewes em Refs. [4], [5], onde foi estipulado a existência de dez combinações linearmente independentes das componentes de $(K_F)_{\alpha\nu\rho\varphi}$ sensível a birrefringência[1]. Um estudo mais amplo e interessante a esse respeito foi realizado recentemente em Ref. [6]. A partir de 2003, experimentos precisos envolvendo rotação óptica e de microondas ressonantes foram realizados, rendendo limites ao nível de até uma parte em 10^{17}sobre os parâmetros CPT-par. O estudo da radiação de Cherenkov [7] e a ausência de emissão de radiação Cherenkov por raios cósmicos de altíssima energia [8, 9] tem sido um ponto de grande interesse nos últimos anos, bem como as interações fóton-férmion produzindo novos limites sobre os coeficientes LV [10, 11, 12], [13]. Investigações sobre as propriedades da temperatura finita e as modificações implícitas na lei de Planck foram desenvolvidas para o setor CPT-par [14], [15]. A avaliação completa das relações de dispersão da eletrodinâmica CPT-par em conexão com o papel desempenhado pelo coeficientes LV birrefringentes é também apresentado nas Refs. [14], [15], [16]. Mais recentemente, a birrefringência dos coeficientes CPT-par em ordens superiores é discutido em Ref. [17].

Em um trabalho recente, o propagador de gauge da eletrodinâmica CPT-par do MPE foi explicitamente realizado na forma de uma matriz 4×4 [16]. As relações de dispersão foram determinadas a partir dos pólos do propagador, e utilizadas para analisar a estabilidade, causalidade e unicidade desta teoria para as componentes não birrefringentes de paridade ímpar e para as componentes isotrópicas de paridade par. A análise mostrou que o pólo do setor de paridade impar é estável, não causal, e unitário, enquanto que o setor isotrópico de paridade par, representado exclusivamente pelo traço das componente, fornece uma teoria estável, causal, e unitária para a faixa de $0 \leq \kappa_{\text{tr}} < 1$.

[1] A birrefringência está ligada ao fato da luz propagar-se em um meio com velocidades distintas. Desta forma, estudar as componentes birrefringentes de uma teoria é analisar as alterações na relação de dispersão da mesma.

O setor de gauge do MPE, o qual fornece uma eletrodinâmica CPT-par, é representado pela seguinte Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{(1+3)} = -\frac{1}{4}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{4}\left(K_F\right)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\lambda}\hat{\kappa}} - J_{\hat{\mu}}A^{\hat{\mu}}, \tag{2.17}$$

onde os índices com chapéu, variam de 0 a 3, $A^{\hat{\mu}}$ é o quadri-potencial e $F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ é o tensor usual do campo eletromagnético. O tensor $\left(K_F\right)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}}$ representa o acoplamento da violação de Lorentz e possui a simetria do tensor de Riemann[2],

$$\left(K_F\right)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}} = -\left(\kappa_F\right)_{\hat{\nu}\hat{\mu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}}, \left(K_F\right)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}} = -\left(K_F\right)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}}, \ \left(K_F\right)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}} = \left(K_F\right)_{\hat{\lambda}\hat{\kappa}\hat{\mu}\hat{\nu}}, \tag{2.18}$$

$$\left(K_F\right)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}} + \left(K_F\right)_{\hat{\mu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}\hat{\nu}} + \left(K_F\right)_{\hat{\mu}\hat{\kappa}\hat{\nu}\hat{\lambda}} = 0, \tag{2.19}$$

e um duplo traço nulo:

$$\left(K_F\right)^{\hat{\mu}\hat{\nu}}{}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0. \tag{2.20}$$

Uma parametrização muito útil para abordar esta eletrodinâmica é apresentada nas Refs. [4, 5], em que as dezenove componentes LV são escritas em quatro matrizes 3×3, definidas como

$$\left(\kappa_{DE}\right)^{j\kappa} = -2\left(K_F\right)^{0j0\kappa}, \ \left(\kappa_{HB}\right)^{j\kappa} = \frac{1}{2}\epsilon^{jpq}\epsilon^{\kappa lm}\left(K_F\right)^{pqlm}, \tag{2.21}$$

$$\left(\kappa_{DB}\right)^{j\kappa} = -\left(\kappa_{HE}\right)^{\kappa j} = \epsilon^{\kappa pq}\left(K_F\right)^{0jpq}. \tag{2.22}$$

As matrizes κ_{DE}, κ_{HB} contém juntas 11 componentes independentes, enquanto κ_{DB}, κ_{HE} possuem juntas 8 componentes, que somadas dão os 19 elementos independentes do tensor $\left(\kappa_F\right)_{\alpha\nu\rho\varphi}$. Estas matrizes podem ser escritas em termos da paridade-par ($\tilde{\kappa}_e$) e paridade-ímpar ($\widetilde{\kappa}_o$),

$$(\widetilde{\kappa}_{e+})^{j\kappa} = \frac{1}{2}(\kappa_{DE}+\kappa_{HB})^{j\kappa}, \ \ (\widetilde{\kappa}_{e-})^{j\kappa} = \frac{1}{2}(\kappa_{DE}-\kappa_{HB})^{j\kappa} - \frac{1}{3}\delta^{j\kappa}(\kappa_{DE})^{ii}, \ \ \kappa_{\mathrm{tr}} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\kappa_{DE}), \tag{2.23}$$

$$(\widetilde{\kappa}_{o+})^{j\kappa} = \frac{1}{2}(\kappa_{DB}+\kappa_{HE})^{j\kappa}, \quad (\widetilde{\kappa}_{o-})^{j\kappa} = \frac{1}{2}(\kappa_{DB}-\kappa_{HE})^{j\kappa}, \tag{2.24}$$

As dez componentes birrefringentes são severamente limitadas por testes astrofísicos envolvendo dados de alta qualidade de fontes cosmológicas através de espectropolarímetro [18], que produziram rigorosos limites superiores ao nível de 1 parte em 10^{-32} [4, 5] e 1 parte em 10^{-37}[18]. As componentes não birrefringentes estão contidas em duas matrizes 3×3, $\widetilde{\kappa}_{e-}$ (seis elementos) e $\widetilde{\kappa}_{o+}$ (três elementos), e podem ser restritas apenas por meio de testes de laboratório, com dados

[2] É notável destacar que as duas propriedades de antisimetrias do tensor $K^{\mu\nu\lambda\rho}$ reduzem as 256 componentes para 36 componentes independentes, por outro lado, lançando mão da propriedade de simetria as componentes serão reduzidas para 21 componentes independentes. Com as últimas propriedades, o duplo traço nulo e a propriedade cíclica, o tensor é por fim reduzido a 19 componentes independentes.

experimentais envolvendo radiação Cherenkov [7] e a ausência de emissão de radiação Cherenkov por UHECR (ultra raios de alta energia cósmica) [8, 9].

As nove componentes não birrefringentes do setor CPT-par podem ser incorporadas em um tensor simétrico e traço nulo $\kappa_{\mu k}$, definido como uma contração [19]:

$$\kappa_{\hat{\mu}\hat{\kappa}} = (K_F)^{\alpha}{}_{\mu\alpha k} \,. \tag{2.25}$$

As componentes não birrefringentes do tensor $(K_F)_{\mu\nu\lambda\kappa}$ são parametrizadas como

$$(K_F)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}} = \frac{1}{2}\left(g_{\hat{\mu}\hat{\lambda}}\kappa_{\hat{\nu}\hat{\kappa}} - g_{\hat{\mu}\hat{\kappa}}\kappa_{\hat{\nu}\hat{\lambda}} - g_{\hat{\nu}\hat{\lambda}}\kappa_{\hat{\mu}\hat{\kappa}} + g_{\hat{\nu}\hat{\kappa}}\kappa_{\hat{\mu}\hat{\lambda}}\right). \tag{2.26}$$

Com esta parametrização, detém-se

$$(K_F)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}} F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} F^{\hat{\lambda}\hat{\kappa}} = 2\kappa_{\hat{\nu}\hat{\kappa}} F_{\hat{\lambda}}{}^{\hat{\nu}} F^{\hat{\lambda}\hat{\kappa}}, \tag{2.27}$$

logo a lagrangiana (2.17) passa a exibir somente as componentes não-birrefringentes do setor de violação:

$$\mathcal{L}_{(1+3)} = -\frac{1}{4}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{2}\kappa_{\hat{\nu}\hat{\kappa}} F_{\hat{\lambda}}{}^{\hat{\nu}} F^{\hat{\lambda}\hat{\kappa}} - J_{\hat{\mu}}A^{\hat{\mu}}. \tag{2.28}$$

Algumas propriedades desta eletrodinâmica foram recentemente investigadas em Ref.[16], no qual avaliou-se o propagador de Feynman correspondente ao setor de gauge e também foram analisadas algumas das suas propriedades de consistência (causalidade e unitariedade). Outras investigações tem sido realizadas abrangendo aspectos diversificados, tais como: aspectos de consistência e modificações induzidas no QED [20, 21, 22], supersimetria [23], correções radioativas [24], emissão de radiação de Cherenkov no vácuo [25], contribuições da temperatura finita e distribuição de Planck [15, 26], a propagação eletromagnética em guias de onda [27], o efeito Casimir [28] e soluções da eletrodinâmica clássica [29]. A redução dimensional deste eletrodinâmica foi realizada e discutida em Refs.[30], [31], [32].

Capítulo 3

Eletrodinâmica planar CPT-ímpar com termos de violação de Lorentz

Neste capítulo, fazemos uma revisão das primeiras teoria planares dotadas de violação da simetria de Lorentz, e que foram obtidas da teoria original definida em (1+3) dimensões via o procedimento de redução dimensional.

3.1 Redução Dimensional do setor CPT-ímpar

Uma abordagem inicial do setor de gauge do Modelo Padrão Estendido, em (1+2) dimensões, foi desenvolvida em 2003, quando foi realizada a redução dimensional do setor de gauge CPT-ímpar, correspondente à eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw [2], cuja lagrangeana é dada por:

$$\mathcal{L}_{1+3} = -\frac{1}{4}F_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}F^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} + \frac{1}{4}\varepsilon^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\kappa}\widehat{\lambda}}\upsilon_{\widehat{\mu}}A_{\widehat{\nu}}F_{\widehat{\kappa}\widehat{\lambda}} + A_{\widehat{\nu}}J^{\widehat{\nu}} \tag{3.1}$$

onde $\varepsilon^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\kappa}\widehat{\lambda}}$ é o símbolo de Levi-Civita em 4 dimensões, e os índices gregos com chapéu variam de 0 a 3. Esta teoria foi submetida ao procedimento de redução dimensional na Ref. [30]. O procedimento de redução dimensional adotado consiste em "congelar"a terceira componente espacial (z) do 4-vetor posição, extirpando-a do sistema. Isso é feito requerendo que um campo qualquer da teoria, χ, não dependa mais desta componente, ou seja,

$$\partial_3\chi = 0. \tag{3.2}$$

Além disso, separamos a quarta componente dos quadri-vetores das outras três componentes, atribuindo à mesma um comportamento escalar, a fim de separá-la do corpo dos novos 3-vetores definidos em (1+2) dimensões. As outras três componentes dos quadri-vetores são mantidas inalteradas, exceto pela informação que não podem mais depender da coordenada z. Este procedimento, quando aplicado sobre o quadri-potencial eletromagnético, conduz a:

$$A^{\hat{\nu}} \longrightarrow (A^{\nu}; \varphi), \tag{3.3}$$

onde $A^{(3)} = \varphi$ é agora um campo escalar, e os índices gregos sem chapéu variam de 0 a 2. O mesmo procedimento, aplicado ao background e a 4-corrente, leva a:

$$\begin{aligned} \upsilon^{\widehat{\mu}} &= (\upsilon^{\mu}, s)\,, & (3.4)\\ J^{\widehat{\mu}} &= (J^{\mu}, J)\,. & (3.5) \end{aligned}$$

Aplicando o procedimento de redução dimensional no termo cinético da lagrangeana:

$$\begin{aligned} F_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}F^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} &= F_{\mu\widehat{\nu}}F^{\mu\widehat{\nu}} + F_{3\nu}F^{3\nu} = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + F_{\mu 3}F^{\mu 3} + F_{3\nu}F^{3\nu},\\ F_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}F^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} &= F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2F_{\mu 3}F^{\mu 3} = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 2\partial_{\mu}\varphi\partial^{\mu}\varphi, \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde usamos $F^{\mu 3} = \partial^{\mu}\varphi, \quad F_{\mu 3} = -\partial_{\mu}\varphi$. Repetindo a mesma metodologia para o termo de CJF, temos:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\kappa}\widehat{\lambda}}\upsilon_{\widehat{\mu}}A_{\widehat{\nu}}F_{\widehat{\kappa}\widehat{\lambda}} &= \varepsilon^{\mu\nu\kappa\widehat{\lambda}}\upsilon_{\mu}A_{\nu}F_{\kappa\widehat{\lambda}} + \varepsilon^{\mu\nu 3\lambda}\upsilon_{\mu}A_{\nu}F_{3\lambda} + \varepsilon^{\mu\nu k3}\upsilon_{\mu}A_{\nu}F_{k3} + \varepsilon^{\mu 3\kappa\lambda}\upsilon_{\mu}A_{3}F_{\kappa\lambda} + \varepsilon^{3\nu\kappa\lambda}\upsilon_{3}A_{\nu}F_{\kappa\lambda},\\ \varepsilon^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\kappa}\widehat{\lambda}}\upsilon_{\widehat{\mu}}A_{\widehat{\nu}}F_{\widehat{\kappa}\widehat{\lambda}} &= \underbrace{\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}}_{0}\upsilon_{\mu}A_{\nu}F_{\kappa\lambda} + 2\varepsilon^{\mu\nu 3\lambda}\upsilon_{\mu}A_{\nu}\partial_{\lambda}\varphi - \varepsilon^{\mu 3\kappa\lambda}\upsilon_{\mu}\varphi F_{\kappa\lambda} - s\varepsilon^{3\nu\kappa\lambda}A_{\nu}F_{\kappa\lambda},\\ \varepsilon^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\kappa}\widehat{\lambda}}\upsilon_{\widehat{\mu}}A_{\widehat{\nu}}F_{\widehat{\kappa}\widehat{\lambda}} &= 2\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\upsilon_{\mu}A_{\nu}\partial_{\lambda}\varphi + 2\varphi\varepsilon^{\mu\kappa\lambda}\upsilon_{\mu}\partial_{\kappa}A_{\lambda} - s\varepsilon^{\nu\kappa\lambda}A_{\nu}F_{\kappa\lambda}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde $\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} = 0$ (porque terá inevitavelmente um índice repetido), e $\varepsilon^{3\nu\kappa\lambda} = \varepsilon^{\nu\kappa\lambda}$. Sabemos que a menos de um termo de divergência total, vale $\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\upsilon_{\mu}A_{\nu}\partial_{\lambda}\varphi = \varphi\varepsilon^{\mu\lambda\nu}\upsilon_{\mu}\partial_{\lambda}A_{\nu}$, o que implica em

$$\varepsilon^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\kappa}\widehat{\lambda}}\upsilon_{\widehat{\mu}}A_{\widehat{\nu}}F_{\widehat{\kappa}\widehat{\lambda}} = 4\varphi\varepsilon^{\mu\lambda\nu}\upsilon_{\mu}\partial_{\lambda}A_{\nu} - s\varepsilon^{\nu\kappa\lambda}A_{\nu}F_{\kappa\lambda}. \tag{3.8}$$

Com estes cálculos, obtemos a seguinte lagrangeana planar

$$\mathcal{L}_{1+2} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{s}{4}\varepsilon^{\nu\kappa\lambda}A_{\nu}F_{\kappa\lambda} + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\varphi\partial^{\mu}\varphi + \varphi\varepsilon^{\mu\lambda\nu}\upsilon_{\mu}\partial_{\lambda}A_{\nu} + A_{\nu}J^{\nu} - \varphi J, \tag{3.9}$$

sendo que a mesma é composta pela eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons e por um setor escalar sem massa, o qual aparece acoplado com o campo de gauge. O cálculo do propagador de Feynman desta teoria planar, juntamente com a análise da causalidade, estabilidade de energia e unitariedade, foram realizados na Ref. [30].

3.2 Equações de Movimento e Soluções Clássicas do Modelo de Carrol-Field-Jackiw

A teoria planar da lagrangiana (3.9) foi analisada em suas soluções clássicas na Ref. [29], em que foram obtidas as equações de movimento e encontradas suas soluções estacionárias, revelando como o termo de violação da simetria de Lorentz altera as soluções da eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons.

Associada a esta Lagrangeana, utilizando a equação de Euler-Lagrange, temos duas equações de movimento:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{s}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho - \varepsilon^{\mu\nu\rho}v_\nu\partial_\rho\varphi - J^\mu, \tag{3.10}$$

$$\Box\varphi = \epsilon_{\mu\nu k}v^\mu\partial^\nu A^k + J, \tag{3.11}$$

que implicam nas seguintes equações de Maxwell modificadas

$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{E} + \partial_t B = 0, \tag{3.12}$$

$$\partial_t\overrightarrow{E} - \nabla^* B = -\overrightarrow{j} + s\overrightarrow{E}^* + \left(\overrightarrow{v}^*\partial_t\varphi + v_0\overrightarrow{\nabla}^*\varphi\right), \tag{3.13}$$

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E} + sB = \rho - \overrightarrow{v}\times\overrightarrow{\nabla}\varphi, \tag{3.14}$$

$$\Box\varphi - \overrightarrow{v}\times\overrightarrow{E} = -v_0\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A} + J, \tag{3.15}$$

onde a primeira equação decorre da identidade de Bianchi [1] ($\partial_\mu F^{\mu *} = 0$), as duas não homogêneas advêm da equação de movimento (3.10), enquanto a última é derivada da eq. (3.11). Explicitamente, nota-se que a Eq.(3.11) pode ser escrita como duas equações mais simples se o vetor v^μ for puramente tipo-espaço ou tipo-tempo: $\Box\varphi = \overrightarrow{v}\times\overrightarrow{E} + J$, para $v^\mu = (0, \overrightarrow{v})$; $\Box\varphi = -v_0\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A} + J$, para $v^\mu = (v_0, \overrightarrow{0})$. Aplicando o operador diferencial, ∂_μ, sobre a eq. (3.10), tem-se o seguinte resultado para a equação da corrente de gauge: $\partial_\mu J^\mu = -\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu v_\nu\partial_\rho\varphi$, que reduz para a lei convencional da conservação de corrente, $\partial_\mu J^\mu = 0$, onde v^μ é constante ou tem o rotacional nulo ($\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu v_\nu = 0$). Estas condições correspondem exatamente para aquelas que conduzem para uma teoria invariante de gauge [2].

Manipulando as equações de Maxwell, nota-se que os campos B, $\overrightarrow{E}$, satisfazem as equações de

[1] Em $D = 1+2$ o tensor dual é definido como $F^{\mu *} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\nu\alpha}$, sendo um 3-vetor dado por: $F^{\mu *} = (B, -\overrightarrow{E}^*)$. Aqui adotamos a seguinte convenção: $\epsilon_{012} = \epsilon^{012} = \epsilon_{12} = \epsilon^{12} = 1$. O símbolo $(^*)$, de um modo geral, também designa o dual de um vetor de duas componentes: $\left(E^i\right)^* = \epsilon_{ij}E^j \longrightarrow \overrightarrow{E}^* = (E_y, -E_x)$.

onda não homogêneas:

$$(\Box + s^2)B = s\rho + \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{j} - s\overrightarrow{v} \times \nabla\varphi - \partial_t(\nabla\varphi) \times \overrightarrow{v}^* + v_0\nabla^2\varphi, \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}(\Box + s^2)\overrightarrow{E} &= -\overrightarrow{\nabla}\rho - \partial_t\overrightarrow{j} - s\overrightarrow{j}^* - s\overrightarrow{v}(\partial_t\varphi) - sv_0\overrightarrow{\nabla}\varphi + \overrightarrow{v}^*\partial_t^2\varphi \\ &\quad + v_0\overrightarrow{\nabla}^*(\partial_t\varphi) + \overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{\nabla\varphi}),\end{aligned} \tag{3.17}$$

que, no regime estacionário, são reduzidas a:

$$(\nabla^2 - s^2)B = -s\rho - \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{j} + s\overrightarrow{v} \times \nabla\varphi - v_0\nabla^2\varphi, \tag{3.18}$$

$$(\nabla^2 - s^2)\overrightarrow{E} = s\overrightarrow{j}^* + \overrightarrow{\nabla}\rho + sv_o\overrightarrow{\nabla}\varphi - \overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{\nabla\varphi}). \tag{3.19}$$

Tal qual ocorre na eletrodinâmica clássica de MCS, aqui as componentes do potencial $(A_0, \overrightarrow{A})$ obedecem equações de onda de quarta ordem:

$$\Box(\Box + s^2)A_0 = \Box\rho - \Box(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{\nabla\varphi}) - s\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{j} + s\left(\partial_t\overrightarrow{\nabla\varphi}\right) \times \overrightarrow{v}^* - sv_o\nabla^2\varphi, \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}\Box(\Box + s^2)\overrightarrow{A} &= s\partial_t\overrightarrow{j}^* + s\overrightarrow{\nabla}^*\rho + s\overrightarrow{v}\left(\partial_t^2\varphi\right) + sv_o\overrightarrow{\nabla}(\partial_t\varphi) \\ &\quad - s\left(\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{\nabla\varphi})\right)^* + \Box(\overrightarrow{j} - \overrightarrow{v}\partial_t\varphi - v_0\overrightarrow{\nabla}^*\varphi),\end{aligned} \tag{3.21}$$

que são dotados de um setor heterogêneo muito mais complexo devido à presença dos termos $\overrightarrow{v}$ e φ na lagrangiana. É instrutivo observar que as equações de onda (3.16, 3.17, 3.20, 3.21) são reduzidas para a forma usual das equações de onda da teoria de MCS [33] no limite em que se toma $v^\mu \longrightarrow 0$, a saber:

$$(\Box + s^2)B = s\rho + \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{j}; \quad (\Box + s^2)\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}\rho - \partial_t\overrightarrow{j} - s\overrightarrow{j}^*; \tag{3.22}$$

$$\Box(\Box + s^2)A_0 = \Box\rho - s\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{j}; \quad \Box(\Box + s^2)\overrightarrow{A} = s\partial_t\overrightarrow{j}^* + s\overrightarrow{\nabla}^*\rho + \Box\overrightarrow{j}. \tag{3.23}$$

As equações de onda acima apresentam as seguintes soluções [33] (para uma distribuição de carga-pontual e corrente nula):

$$B(r) = (e/2\pi)\,K_0(sr); \quad \overrightarrow{E} = (e/2\pi)\,sK_1(sr)\hat{r}; \tag{3.24}$$

$$A_0(r) = (e/2\pi)\,K_0(sr); \quad \overrightarrow{A}(r) = (e/2\pi)\,[1/r - sK_1(sr)]\,\hat{r}^*. \tag{3.25}$$

Para um background puramente tipo-tempo, $v^\mu = (v_0, 0)$, e trabalhando no regime estacionário, a eq. (3.20) é reduzida para

$$\nabla^2(\nabla^2 - s^2)A_0 = -\nabla^2\rho - s\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{j} - sv_o\nabla^2\varphi + \nabla^2\left(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{\nabla}\varphi\right), \tag{3.26}$$

que ao ser desacoplada do campo escalar, conduz a

$$\nabla^2(\nabla^2 - s^2 + v_0^2)A_0 = -\nabla^2\rho - s\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{j} - v_0^2\rho + sv_0J. \tag{3.27}$$

Podemos solucionar esta equação para uma distribuição de densidade de carga pontual, $\rho(r) = q\delta(r)$, para tanto, toma-se como nula a densidade de corrente, $\overrightarrow{j} = 0, J = 0$, e propondo uma transformada de Fourier para a expressão do potencial escalar, resulta:

$$A_0(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}} \widetilde{A}_0(k) d^2\overrightarrow{k}, \tag{3.28}$$

conduzindo à seguinte solução,

$$A_0(r) = \frac{q}{(2\pi)w^2} \left[s^2 K_0(wr) + v_0^2 \ln r\right], \tag{3.29}$$

onde $w^2 = (s^2 - v_0^2)$. Observa-se que a presença do background violador implica no termo em $\ln r$, o qual altera significativamente o comportamento assintótico do potencial escalar, que passa a exibir uma natureza confinante. É trivial perceber que no limite $v_0 \longrightarrow 0$ recupera-se o potencial escalar associado à eletrodinâmica de MCS, dado pela eq. (3.25). O campo elétrico advém diretamente da eq. (3.29),

$$\overrightarrow{E}(r) = \frac{q}{(2\pi)} \left[\frac{s^2}{w} K_1(wr) - \left(\frac{v_0^2}{w^2}\right) \frac{1}{r}\right] \hat{r}, \tag{3.30}$$

que possui a presença de um termo adicional em $1/r$, quando comparado com a correspondente solução de MCS, dada na eq. (3.24). Esta que se coloca também como uma contribuição do background. No limite para pequenas distancias $(r \ll 1)$, o potencial escalar (3.29), e o campo elétrico (3.30) são reduzidos para a forma:

$$A_0(r) = -\frac{q}{(2\pi)} \left[\ln r + \frac{s^2}{w^2} \ln w\right]; \qquad \overrightarrow{E}(r) = \left(\frac{e}{2\pi}\right) \frac{1}{r} \hat{r}; \tag{3.31}$$

que revela o caráter repulsivo da expressão (3.29) e um campo elétrico radial $1/r$ perto da origem. Ao mesmo tempo, percebe-se que, na origem, os termos de correção induzidos nas eqs.(3.29, 3.30) pelo background, exibem o mesmo comportamento funcional dos termos pré-existentes da MCS. Por outro lado, quando se vai muito longe da origem, o quadro muda drasticamente, uma vez que predomina o termo em $\ln r$, resultando em:

$$A_0(r) = \left[\frac{e v_0^2}{(2\pi) w^2}\right] \ln r, \qquad \overrightarrow{E}(r) = -\left[\frac{e}{(2\pi)} \frac{v_0^2}{w^2}\right] \frac{1}{r} \hat{r}, \tag{3.32}$$

Tem-se uma alteração substancial no comportamento assintótico das soluções do setor elétrico, que passa a exibir um comportamento em $1/r$, usual em uma QED não massiva (sem termo de Chern-Simons).

3.3 Redução Dimensional do Modelo de Carrol-Field-Jackiw na presença do setor de Higgs

Um outro trabalho envolvendo eletrodinâmica planar CPT-ímpar na presença de violação de Lorentz foi realizado na Ref.[22], onde considera-se a eletrodinâmica de CFJ na presença do setor de Higgs em (1+3) dimensões, cuja lagrangeana é:

$$\mathcal{L}_{1+3} = -\frac{1}{4}F_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}F^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} + \frac{1}{4}\varepsilon^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\kappa}\widehat{\lambda}}v_{\widehat{\mu}}A_{\widehat{\nu}}F_{\widehat{\kappa}\widehat{\lambda}} + \left(D^{\widehat{\mu}}\phi\right)^{*} D_{\widehat{\mu}}\phi - V(\phi^{*}\phi) + A_{\widehat{\nu}}J^{\widehat{\nu}} \tag{3.33}$$

onde $D_{\widehat{\mu}} = \partial_{\widehat{\mu}} + ieA_{\widehat{\mu}}$ é a derivada covariante, $V\left(\phi^{*}\phi\right)$ representa o potencial escalar responsável pela quebra espontânea de simetria e $A_{\widehat{\nu}}J^{\widehat{\nu}}$ representa o termo usual de interação do campo com as fontes.

A redução dimensional desta teoria foi realizada na Ref. [32], seguindo o mesmo procedimento apresentado acima. A novidade, neste caso, é a presença do termo cinético do setor de Higgs, cuja redução dimensional resulta em:

$$\left(D^{\widehat{\mu}}\phi\right)^{*}\left(D_{\widehat{\mu}}\phi\right) = \left(D^{\mu}\phi\right)^{*}\left(D_{\mu}\phi\right) - e^{2}\varphi^{2}\phi^{*}\phi.$$

A lagrangeana planar na presença do setor de Higgs é então dada como:

$$\mathcal{L}_{1+2} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{s}{4}\varepsilon^{\nu\kappa\lambda}A_{\nu}F_{\kappa\lambda} + \varepsilon^{\mu\lambda\nu}\varphi v_{\mu}\partial_{\lambda}A_{\nu} + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\varphi\partial^{\mu}\varphi + \left(D^{\mu}\phi\right)^{*}\left(D_{\mu}\phi\right) - e^{2}\varphi^{2}\phi^{*}\phi - V\left(\phi^{*}\phi\right). \tag{3.34}$$

Tal lagrangeana descreve um ambiente planar mais rico que aquele representado pela lagrangiana (3.9), uma vez que é constituída por dois campos escalares: o advindo da redução dimensional e o setor de Higgs. As propriedades desta teoria concernentes à causalidade, estabilidade, unitariedade, conjuntamente com o cálculo do propagador de Feynman, foram calculadas na Ref.[32], enquanto as soluções clássicas desta teoria foram estudadas na Ref. [34].

Capítulo 4

Redução Dimensional do setor não birrefringente do termo CPT-par

4.1 Redução Dimensional do setor CPT-par do MPE

Uma primeira abordagem de teorias planares CPT-par com violação da simetria de Lorentz foi realizada recentemente através da redução dimensional do setor de gauge CPT-par do MPE [35]. Neste trabalho, o procedimento de redução dimensional levou a uma teoria planar composta por um setor de gauge e um setor escalar, ambos dotados de termos de violação de Lorentz, e mutuamente acoplados por um tensor de terceira ordem. Foram estudadas as equações de movimento e as suas soluções estacionárias, obtidas pelo método de Green. Foi calculada a relação de dispersão do setor eletromagnético, revelando que o mesmo é não birrefringente a qualquer ordem, apesar da teoria original ser birrefringente.

O ponto de partida dos desenvolvimentos é a Lagrangeana do setor CPT-par da eletrodinâmica do MPE:

$$\mathcal{L}_{(1+3)} = -\frac{1}{4}F_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}F^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} - \frac{1}{4}\left(K_F\right)^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\lambda}\widehat{\kappa}} F_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}F_{\widehat{\lambda}\widehat{\kappa}}. \tag{4.1}$$

O tensor $\left(K_F\right)^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\lambda}\widehat{\kappa}}$, que é o responsável pela violação de simetria de Lorentz do modelo, exibe as mesmas simetrias que o tensor de Riemann, dadas nas Eqs.(2.18, 2.19, 2.20). A redução dimensional do setor CPT-par segue o mesmo procedimento descrito nas seções anteriores, conduzindo a:

$$-\frac{1}{4}\left(K_F\right)^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\lambda}\widehat{\kappa}} F_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}F_{\widehat{\lambda}\widehat{\kappa}} = -\frac{1}{4}Z^{\mu\nu\lambda\kappa}F_{\mu\nu}F_{\lambda\kappa} + Z^{\mu\nu\lambda 3}F_{\mu\nu}\partial_\lambda\varphi - Z^{\mu 3\lambda 3}\partial_\mu\varphi\partial_\lambda\varphi, \tag{4.2}$$

onde $Z_{\mu\nu\lambda\kappa}$ é a versão planar do tensor original (K_F):

$$Z_{\mu\nu\lambda\kappa} = \Big[(K_F)_{\mu\nu\lambda\kappa}\Big]_{1+2}, \tag{4.3}$$

que possui as seguintes propriedades:

$$Z_{\mu\nu\lambda\kappa} = -Z_{\nu\mu\lambda\kappa}, \quad Z_{\mu\nu\lambda\kappa} = -Z_{\mu\nu\kappa\lambda}, \quad Z_{\mu\nu\lambda\kappa} = Z_{\lambda\kappa\mu\nu} \tag{4.4}$$

$$Z_{\mu\nu\lambda\kappa} + Z_{\mu\lambda\nu\kappa} + Z_{\mu\kappa\nu\lambda} = 0. \tag{4.5}$$

Podemos, ainda, fazer novas definições para os tensores $Z^{\mu\nu\lambda 3}$ e $Z^{\mu 3\lambda 3}$:

$$(K_F)_{3\mu\nu\lambda} = T_{\mu\nu\lambda}, \tag{4.6}$$

$$(K_F)_{\mu 3\lambda 3} = C_{\mu\lambda}. \tag{4.7}$$

Finalmente, a lagrangeana (4.1) escrita na forma planar, fica:

$$\mathcal{L}_{1+2} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{4}Z^{\mu\nu\lambda\kappa}F_{\mu\nu}F_{\lambda\kappa} + T^{\mu\nu\lambda}F_{\mu\nu}\partial_\lambda\varphi - C^{\mu\lambda}\partial_\mu\varphi\partial_\lambda\varphi. \tag{4.8}$$

Notemos que esta lagrangeana exibe um setor de gauge, um setor escalar bem como um termo de acoplamento entre os setores de gauge e escalar, dado pelo tensor $T^{\mu\nu\lambda}$. O tensor $C^{\mu\lambda}$ é responsável por fornecer um termo cinético não-canônico para o campo escalar. Estes dois tensores possuem as seguintes simetrias:

$$C_{\mu\lambda} = C_{\lambda\mu}, \tag{4.9}$$

$$T_{\mu\nu\lambda} = -T_{\nu\mu\lambda}, \tag{4.10}$$

$$T_{\mu\nu\lambda} + T_{\nu\mu\lambda} + T_{\mu\lambda\nu} = 0. \tag{4.11}$$

O duplo traço da propriedade do tensor K_F é agora escrito como:

$$Z_{\mu\nu}{}^{\mu\nu} + 2C^{\alpha}{}_{\alpha} = 0. \tag{4.12}$$

A lagrangeana (4.8) pode ser escrita em termos dos campos elétrico ($\mathbf{E}$) e magnético (B). Para tanto, basta usar a convenção $F_{0i} = E^i$, $F_{ij} = -\epsilon_{ij}B$, o que resultará em:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \ = \ & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - C_{00}(\partial_0\phi)^2 + C_{0i}(\partial_0\phi)(\partial_i\phi) - C_{ij}(\partial_i\phi)(\partial_j\phi) - \left(L_iE^i\right)B \\ & -\frac{1}{2}(k_{DE})_{ij}E^iE^j - \frac{1}{2}sB^2 - T_{00i}\partial_0\phi E^i - \epsilon_{ij}T_{0ij}\partial_0\phi B + T_{i0j}\partial_i\phi E^j + \epsilon_{lj}T_{ilj}\partial_i\phi B \end{aligned} \tag{4.13}$$

sendo que foram feitas as seguintes convenções:

$$Z_{0ilm} = Z_{0i12} = L_i, \text{ com } L = (L_1, L_2)\,, \tag{4.14}$$

$$Z_{0i0j} = (K_{DE})_{ij}\,, \text{com } (K_{DE})_{ij} = (K_{DE})_{ji}\,, \tag{4.15}$$

$$Z_{1212} = s. \tag{4.16}$$

A classificação da paridade dos parâmetros de violação de Lorentz é dado pela tabela abaixo. O símbolo N designa o número total de componentes e $\mathbb{N}$ designa o número de componentes independentes.

Componentes		N	$\mathbb{N}$
Paridade par	C_{00}, C_{02}, C_{11}, C_{22}, L_2, $(K_{DE})_{11}$, $(K_{DE})_{22}$, s, T_{002}, T_{101}, T_{202}, T_{112}	12	11
Paridade ímpar	C_{01}, C_{12}, L_1, $(K_{DE})_{12}$, T_{001}, T_{012}, T_{102}, T_{201}, T_{212}	9	8
Total		21	19

As equações de movimento são obtidas através da equação de Euler-Lagrange aplicada na lagrangeana (4.8), fornecendo:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} - Z^{\beta\alpha\lambda\kappa}\partial_\alpha F_{\lambda\kappa} - 2T^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\mu\phi = J^\beta, \tag{4.17}$$

$$\Box\phi + T^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha F_{\lambda\kappa} - 2C^{\alpha\lambda}\partial_\alpha\partial_\lambda\varphi = -J. \tag{4.18}$$

Em termos dos campos elétrico e magnético, Eq.(4.17) toma a seguinte forma:

$$\partial_i E^i - (k_{DE})_{ij}\,\partial_i E^j + L^i\partial_i B = \rho, \tag{4.19}$$

$$(1+s)\epsilon^{il}\partial_l B - \partial_t E^i + (k_{DE})^{ij}\,\partial_t E^j - \epsilon^{il}\partial_l(L^j E^j) - L^i\partial_t B = J^i, \tag{4.20}$$

correspondendo às formas modificadas da lei Gauss e Ampere. Na Ref. [35], é apresentada as soluções estacionárias destas equações para cargas pontuais.

Uma questão de interesse é a determinação e estudo da relação de dispersão completa do setor eletromagnético desta teoria. Esta relação pode ser obtida a partir da equação de onda completa para o campo elétrico ou magnético. No caso, optamos por escrever a equação de onda para o campo elétrico. Iniciamos tomando a derivada temporal da Eq. (4.20), e substituindo a identidade de Bianchi, $\partial_t B = -\left(\epsilon_{mn}\partial_m E^n\right)$. Após algumas álgebra, obtemos a equação de onda para o campo elétrico na forma $M_{ij}E^j = 0$, onde a matriz M_{ij} é escrita como:

$$M_{ij} = [-n\partial_j\partial_i + n\delta_{ij}\nabla^2 - [\delta_{ij}\partial_t^2 - (k_{DE})^{ij}\,\partial_t^2] + L_j\partial_t\epsilon_{il}\partial_l - L_i\epsilon_{mj}\partial_t\partial_m]. \tag{4.21}$$

No espaço dos momentos, estes elementos de matriz são apresentados como:

$$M_{ij} = [np_jp_i - n\delta_{ij}\mathbf{p}^2 + [\delta_{ij}p_0^2 - (k_{DE})_{ij}\, p_0^2] + L_j\epsilon_{il}p_0p_l - L_i\epsilon_{mj}p_0p_m]. \tag{4.22}$$

A relação de dispersão é encontrada impondo $\det \mathbb{M} = 0$. Este determinante, $\det \mathbb{M} = M_{11}M_{22} - (M_{12})^2$, é calculado a partir dos elementos de matriz:

$$M_{11} = [np_1^2 - n\mathbf{p}^2 + p_0^2 - (k_{DE})_{11}\, p_0^2 + 2L_1p_0p_2], \tag{4.23}$$

$$M_{22} = [np_2^2 - n\mathbf{p}^2 + p_0^2 - (k_{DE})_{22}\, p_0^2 - 2L_2p_0p_1], \tag{4.24}$$

$$M_{12} = M_{21} = np_1p_2 - (k_{DE})_{12}\, p_0^2 + L_2p_0p_2 - L_1p_0p_1. \tag{4.25}$$

Obtemos a seguinte expressão exata:

$$\begin{aligned} \det \mathbb{M} \quad = \quad & p_0^2 \Big\{ p_0^2 \left[1 - tr(k_{DE}) + \det(k_{DE})\right] + 2p_0[\mathbf{L}\times\mathbf{p} + (k_{DE})_{ij}\, p_iL_j^*] \\ & -[n\mathbf{p}^2 - n\,(k_{DE})_{ij}\, p_ip_j + (\mathbf{L}\cdot\mathbf{p})^2] = 0 \Big\}, \end{aligned} \tag{4.26}$$

cuja solução fornece a relação de dispersão procurada

$$p_0 = \frac{1}{D}\left[\mathbf{L}\times\mathbf{p} + (k_{DE})_{ij}\, p_iL_j^* \pm \Omega\right], \tag{4.27}$$

onde

$$D = [1 - tr(k_{DE}) + \det(k_{DE})], \tag{4.28}$$

$$\Omega = \sqrt{[\mathbf{L}\times\mathbf{p} + (k_{DE})_{ij}\, p_iL_j^*]^2 + D[n\mathbf{p}^2 - (k_{DE})_{ij}\, p_ip_j + (\mathbf{L}\cdot\mathbf{p})^2]}. \tag{4.29}$$

Da relação (4.27), percebemos que ambos os modos propagam-se com a mesma velocidade de fase, o que implica em ausência de birrefringência. Para entender melhor este fato, tomamos o modo "right"(p_{0+}) e o modo "left"(p_{0-}), correspondentes aos sinais $\pm$ na Eq.(4.27), propagando-se no mesmo sentido. Assim, ao tomarmos o modo "left"(p_{0-}) com momento revertido $(\mathbf{p}\rightarrow -\mathbf{p})$, temos:

$$p_{0-}(-\mathbf{p}) = \frac{1}{D}\left[-\mathbf{L}\times\mathbf{p} - (k_{DE})_{ij}\, p_iL_j^* - \Omega\right], \tag{4.30}$$

indicando propagação para a direita. Observamos então que este modo coincide exatamente com a expressão do modo "right"

$$p_{0+}(\mathbf{p}) = \frac{1}{D}\left[\mathbf{L}\times\mathbf{p} + (k_{DE})_{ij}\, p_iL_j^* + \Omega\right], \tag{4.31}$$

com um sinal global revertido. Estas relações, obviamente, proporcionam a mesma velocidade de fase. Esta é uma situação análoga ao que foi verificado nas relações de dispersão do subsetor paridade-ímpar do setor de gauge CPT-par do MPE original [vide Ref.[36]], que também é não-birrefringente. Esta discussão mostra que as 6 componentes do setor electromagnético planar, s, $(k_{DE})_{ij}$, L^i, são realmente não birrefringentes a qualquer ordem. Este é um resultado bastante interessante uma vez que a eletrodinâmica original é birrefringente. Por esta mesma argumentação, percebemos facilmente que a relação de dispersão (2.14) é claramente birrefringente.

4.2 Redução Dimensional do setor CPT-par não birrefringente do MPE

Nesta seção, realizaremos a redução dimensional da eletrodinâmica CPT-par e não birrefringente do Modelo Padrão Estendido, regido pela Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{(1+3)} = -\frac{1}{4}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{2}\kappa_{\hat{\nu}\hat{\rho}}F_{\hat{\lambda}}{}^{\hat{\nu}}F^{\hat{\lambda}\hat{\rho}} - J_{\hat{\mu}}A^{\hat{\mu}}, \tag{4.32}$$

onde $\kappa_{\hat{\nu}\hat{\rho}}$ é um tensor simétrico de traço nulo, já apresentado no Cap. II. É importante destacar que nos estudos do setor CPT-par, observa-se que esta teoria é não birrefringente apenas em primeira ordem nos parâmetros de violação, revelando-se birrefringente em ordens superiores. Pelo comportamento da teoria em primeira ordem nos parâmetros de vioalação, advém a classificação da teoria como birrefringente ou não-birrefringente.

Aqui, novamente adotamos o procedimento de redução dimensional empregado nas Refs. [30],[32], em que o quadri-potencial eletromagnético é escrito como $A^{\hat{\nu}} \longrightarrow (A^{\nu};\phi)$,onde $A^{(3)} = \phi$ é agora um campo escalar e os índices sem chapéu variam de 0 a 2. Aplicando estas prescrições para os termos da Lagrangiana (4.32), obtemos:

$$F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2F_{\mu 3}F^{\mu 3} = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 2\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi, \tag{4.33}$$

$$\kappa_{\widehat{\nu}\widehat{\rho}}F^{\hat{\rho}}_{\ \hat{\lambda}}\quad F^{\hat{\rho}\hat{\lambda}} = \kappa_{\nu\rho}F_{\lambda}{}^{\nu}F^{\lambda\rho} + 2\kappa_{\nu 3}F_{\lambda}{}^{\nu}F^{\lambda 3} + \kappa_{33}F_{\lambda}{}^{3}F^{\lambda 3} + \kappa_{\nu\rho}F_{3}{}^{\nu}F^{3\rho}. \tag{4.34}$$

Relembrando que $F^{\mu 3} = \partial^\mu\phi, \quad F_{\mu 3} = -\partial_\mu\phi$, e considerando as definições,

$$\kappa_{\nu 3} = C_\nu,\ \ \kappa_{33} = \eta, \tag{4.35}$$

obtemos

$$\kappa_{\widehat{\nu}\widehat{\rho}}F^{\hat{\nu}}_{\ \hat{\lambda}}\quad F^{\hat{\rho}\hat{\lambda}} = \kappa_{\nu\rho}F_{\lambda}{}^{\nu}F^{\lambda\rho} + 2C_\nu F_{\lambda}{}^{\nu}\partial^\lambda\phi + \eta\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi - \kappa_{\nu\rho}\partial^\nu\phi\partial^\rho\phi, \tag{4.36}$$

onde $\kappa_{\nu\rho}$ é a versão do tensor $\kappa_{\widehat{\nu}\widehat{\rho}}$ definida em (1+2) dimensões. Com isso, encontramos a seguinte densidade de lagrangeana:

$$\mathcal{L}_{1+2} = \underbrace{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\kappa_{\nu\rho}F_{\lambda}{}^{\nu}F^{\lambda\rho}}_{\mathcal{L}_{EM}}\underbrace{-C_\nu F_{\lambda}{}^{\nu}\partial^\lambda\phi}_{\mathcal{L}_{acoplamento}} + \underbrace{\frac{1}{2}[1-\eta]\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\kappa_{\nu\rho}\partial^\nu\phi\partial^\rho\phi}_{\mathcal{L}_{escalar}} - A_\mu J^\mu + J\phi, \tag{4.37}$$

que é composto pelo setor de gauge ($\mathcal{L}_{EM}$), setor escalar ($\mathcal{L}_{escalar}$) e um setor de acoplamento ($\mathcal{L}_{acoplamento}$), representado pelo 3-vetor de violação de Lorentz C_ν. Sendo simétrico, o tensor $\kappa_{\nu\rho}$

apresenta seis componentes independentes. Este tensor $\kappa_{\nu\rho}$ modifica tanto o setor eletromagnético quanto o setor escalar, alterando a dinâmica do campo de Maxwell e rendendo um termo cinético não-canônico para o campo escalar. Nesta teoria, os tensores $\kappa_{\nu\rho}, C_{\nu}$ apresentam seis e três componentes, respectivamente. Com η, somamos dez parâmetros violadores de Lorentz. Todos os parâmetros LV, C_{ν}, $\kappa_{\nu\rho}, \eta$, são adimensionais, estando, assim, em plena concordância com o caráter adimensional do tensor original $\kappa_{\hat{\mu}\hat{\rho}}$.

A condição do duplo traço nulo do tensor original, $\kappa_{\rho}^{\rho} = 0$, é agora lido como

$$\kappa_{00} - \kappa_{ii} = \eta, \tag{4.38}$$

representando uma restrição entre as suas componentes. Com este vínculo, esta teoria possui nove parâmetros independentes de violação de Lorentz, o mesmo número da teoria original quadridimensional, demonstrando a consistência do procedimento de redução dimensional adotado. Usando a convenção $F_{0i} = E^i$, $F_{ij} = -\epsilon_{ij}B$, a Lagrangiana (4.37) pode ser escrita em termos dos campos $\mathbf{E}$ e B, na forma:

$$\mathcal{L}_{1+2} = \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_{escalar} + \mathcal{L}_{acoplamento},$$

onde

$$\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{2}(1+\kappa_{00})\mathbf{E}^2 - \frac{1}{2}(1-\kappa_{ii})B^2 - \frac{1}{2}\kappa_{ij}E^iE^j + \kappa_{0i}\epsilon_{ij}E^jB, \tag{4.39}$$

$$\mathcal{L}_{escalar} = \frac{1}{2}(1-\eta)[(\partial_t\phi)^2 - (\partial_i\phi)^2] + \frac{1}{2}\kappa_{00}\,(\partial_t\phi)^2 - \kappa_{0i}\partial_t\phi\partial_i\phi + \frac{1}{2}\kappa_{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi, \tag{4.40}$$

$$\mathcal{L}_{acoplamento} = -C^0E^j\partial_j\phi - C^iE^i\partial_t\phi + \epsilon_{ij}C^i\partial_j\phi B. \tag{4.41}$$

O setor escalar apresenta um termo cinético não canônico, que recentemente tem sido investigado em cenários envolvendo defeitos topológicos em (1+1) dimensões [37] e análogos de buracos negros acústicos com violação de Lorentz [38] em (1+2) dimensões. O presente trabalho fornece uma possível origem para este tipo de termo.

Em (1+2) dimensões, o operador paridade age fazendo

$$\mathbf{r} \rightarrow (-x, y), \tag{4.42}$$

sendo que os campos transformam-se da seguinte forma:

$$A_0 \rightarrow A_0,\ \mathbf{A} \rightarrow (-A_x, A_y),\ \mathbf{E} \rightarrow (-E_x, E_y),\ B \rightarrow -B. \tag{4.43}$$

Para mais detalhes, veja Ref. [39]. Aqui, consideramos que o campo ϕ comporta-se como um escalar, $\phi \rightarrow \phi$. Isto nos permite concluir que este modelo planar possui seis componentes de paridade par

$$\kappa_{00}, \kappa_{02}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, C_0, C_2, \tag{4.44}$$

e três de paridade ímpar

$$\kappa_{01}, \kappa_{12}, C_1. \tag{4.45}$$

O fato das componentes de um mesmo vetor transformar-se distintamente é uma conseqüência da forma como os vetores **r**, **A**, **E** comportam-se sob paridade. Por exemplo, se analisarmos o segundo termo do vetor C^i na eq. (4.41), e aplicarmos o comportamento do campo **E** frente a transformação de paridade, temos:

$$\mathcal{L}_{acoplamento} = -C^1 E^1 \partial_t \phi = -C^1(-E_x)\partial_t \phi = C^1 E_x \partial_t \phi, \tag{4.46}$$

$$\mathcal{L}_{acoplamento} = -C^2 E^2 \partial_t \phi = -C^2(E_y)\partial_t \phi = -C^2 E_y \partial_t \phi, \tag{4.47}$$

obtemos, assim, que a componente C^2 é de paridade par e a componente C^1 é de paridade ímpar.

Um assunto que merece atenção é a estabilidade de energia, uma vez que é conhecido que a violação de Lorentz gera instabilidade de energia em alguns modelos, como a eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw [2], por exemplo. Uma análise preliminar relativa a este ponto pode ser executado por meio do tensor energia-momento desta teoria planar, dado por

$$\Theta^{\beta\rho} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\beta A_\alpha\right)}\partial^\rho A_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\beta \phi\right)}\partial^\rho \phi - g^{\beta\rho}\mathcal{L}. \tag{4.48}$$

Para escrevê-lo explicitamente, calculamos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\beta A_\alpha\right)} = -F^{\beta\alpha} - \kappa_\rho^{\alpha} F^{\beta\rho} + \kappa_\rho^{\beta} F^{\alpha\rho} + C^\beta \partial^\alpha \phi - C^\alpha \partial^\beta \phi, \tag{4.49}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\beta \phi\right)} = (1-\eta)\partial^\beta \phi + \kappa^{\beta\lambda}\partial_\lambda \phi - C^\nu F^{\beta}_{\ \nu}, \tag{4.50}$$

que nos leva a

$$\begin{aligned}\Theta^{\beta\rho} = {} & (-F^{\beta\alpha} - \kappa_\rho^{\alpha} F^{\beta\rho} + \kappa_\rho^{\beta} F^{\alpha\rho})\partial^\rho A_\alpha - g^{\beta\rho}\mathcal{L}_{EM} + (1-\eta)\partial^\beta \phi + \kappa^{\beta\lambda}\partial_\lambda \phi)\partial^\rho \phi - g^{\beta\rho}\mathcal{L}_{escalar} \\ & +(C^\beta \partial^\alpha \phi - C^\alpha \partial^\beta \phi)\partial^\rho A_\alpha - C^\nu F^{\beta}_{\ \nu}\partial^\rho \phi - g^{\beta\rho}\mathcal{L}_{acoplamento}.\end{aligned} \tag{4.51}$$

Deste tensor, especificamos a componente da densidade de energia,

$$\begin{aligned}\Theta^{00} = {} & \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + B^2) - \frac{1}{2}\kappa_{ij}E^i E^j + \frac{\kappa_{00}}{2}\mathbf{E}^2 - \frac{1}{2}\kappa_{ii}B^2 + \frac{1}{2}(1-\eta+\kappa_{00})\left(\partial_t \phi\right)^2 + \frac{1}{2}(1-\eta)\left(\partial_i \phi\right)^2 - \frac{1}{2}\kappa^{ij}\partial_i \phi \partial_j \phi \\ & - C^i E^i \partial^0 \phi - \epsilon_{ij} C^i \partial_j \phi B + \left[(E^i - \kappa_{ij}E^j + \kappa_{00}E^i - L^i B - C^i \partial^0 \phi - C^0 \partial_i \phi)\partial_i A_0\right].\end{aligned} \tag{4.52}$$

Realizando uma integração por partes sobre o último termo $\partial_i A_0$,

$$\begin{aligned}& \int (E^i - \kappa_{ij}E^j + \kappa_{00}E^i - L^i B - C^i \partial^0 \phi - C^0 \partial_i \phi)\partial_i A_0 d^2 r = \\ & -\int (\partial_i E^i - \kappa_{ij}\partial_i E^j + \kappa_{00}\partial_i E^i - L^i \partial_i B - C^i \partial_i \partial^0 \phi - C^0 \partial_i^2 \phi) A_0 d^2 r\ ,\end{aligned} \tag{4.53}$$

e usando a lei de Gauss desta teoria (4.67), vemos que este termo não contribui no cálculo da energia, podendo ser assim omitido. Desta forma, obtemos a seguinte densidade de energia :

$$\begin{aligned}\Theta^{00} = & \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + B^2) - \frac{1}{2}\kappa_{ij}E^iE^j + \frac{\kappa_{00}}{2}\mathbf{E}^2 - \frac{1}{2}\kappa_{ii}B^2 + \frac{1}{2}(1-\eta+\kappa_{00})\,(\partial_t\phi)^2 \\ & + \frac{1}{2}(1-\eta)\,(\partial_i\phi)^2 - \frac{1}{2}\kappa^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi - C^iE^i\partial_t\phi - \epsilon_{ij}BC^i\partial_j\phi. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Observamos que a densidade de energia para o campo eletromagnético e campo escalar, quando considerados desacoplados, têm a forma

$$\Theta^{00}_{EM} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + B^2) - \frac{1}{2}\kappa_{ij}E^iE^j + \frac{\kappa_{00}}{2}\mathbf{E}^2 - \frac{1}{2}\kappa_{ii}B^2, \tag{4.55}$$

$$\Theta^{00}_{escalar} = \frac{1}{2}(1-\eta+\kappa_{00})\,(\partial_t\phi)^2 + \frac{1}{2}(1-\eta)\,(\partial_i\phi)^2 - \frac{1}{2}\kappa^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi. \tag{4.56}$$

Ambas densidade de energia do campo de gauge e escalar podem ser consideradas como positiva-definidas, uma vez que as condições, $|\kappa_{\mu\nu}| < 1$, $\kappa_{00} > \kappa_{ii}$, $\kappa_{00} > \eta$, sejam satisfeitas. Como os parâmetros LV são normalmente muito menores que 1, concluímos que os setores escalar e de gauge, considerando isolados, são estáveis. A positividade da energia da teoria total, porém, pode ser deteriorada pelos termos mistos, $C^iE^i\partial_t\phi$ e $\epsilon_{ij}BC^i\partial_j\phi$, quando consideramos o modelo planar completo em que o setor de gauge e escalar aparecem acoplados.

O resultado da Eq. (4.54) pode ser também encontrado se partimos da densidade de Hamiltoniana,

$$\mathcal{H} = \pi^\alpha \dot{A}_\alpha + \pi\dot{\phi} - \mathcal{L}, \tag{4.57}$$

onde

$$\pi^\alpha = \partial\mathcal{L}/\partial\left(\partial_0 A_\alpha\right), \pi = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi},$$

são os momentos conjugados para o campo de gauge e escalar, dados a seguir

$$\pi^\alpha = -F^{0\alpha} - \kappa^\alpha_\rho F^{0\rho} + \kappa^0_\rho F^{\alpha\rho} - C^\alpha\dot{\phi} + C^0\partial^\alpha\phi, \tag{4.58}$$

$$\pi = (1-\eta+\kappa_{00})\dot{\phi} - \kappa_{0i}\partial_i\phi - C^iE^i. \tag{4.59}$$

Substituindo este momento na Eq. (4.57), e usando a lei de Gauss (4.67), derivada na próxima seção determinamos a mesma expressão (4.54) para a densidade de Hamiltoniana.

4.3 Equações de Movimento

O comportamento clássico desta teoria é governado pelas equações de movimento originadas da equação de Euler-Lagrange, ou seja,

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \kappa^{\beta\rho}\partial_\alpha F^{\alpha}_{\ \rho} - \kappa^{\alpha\rho}\partial_\alpha F^{\beta}_{\ \rho} + C^\beta \Box\phi - C^\alpha \partial_\alpha \partial^\beta \phi = J^\beta, \tag{4.60}$$

$$[1-\eta]\Box\phi + \kappa^{\alpha\rho}\partial_\alpha\partial_\rho\phi - C_\nu \partial_\alpha F^{\nu\alpha} = J. \tag{4.61}$$

Em termos do potencial de gauge, lembrando que $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$, e usando o gauge de Lorentz, $\partial \cdot A = 0$, as equações assumem a forma

$$[\Box g^{\rho\beta} + \Box\kappa^{\beta\rho} - \kappa^{\alpha\rho}\partial_\alpha\partial^\beta + g^{\rho\beta}\kappa^{\alpha\mu}\partial_\alpha\partial_\mu]A_\rho + \left[C^\beta\Box - C^\alpha\partial_\alpha\partial^\beta\right]\phi = J^\beta, \tag{4.62}$$

$$[(1-\eta)\Box + \kappa^{\alpha\rho}\partial_\alpha\partial_\rho]\phi + C_\nu\Box A^\nu = -J. \tag{4.63}$$

Multiplicando Eq.(4.63) pelo operador $\left[C^\beta\Box - C^\alpha\partial_\alpha\partial^\beta\right]$ e usando Eq.(4.62), encontramos as equações diferenciais para o tri-potencial,

$$\begin{aligned}
&\{-[(1-\eta)\Box + \kappa^{\alpha\lambda}\partial_\alpha\partial_\lambda][\Box g^{\rho\beta} + \Box\kappa^{\beta\rho} - \kappa^{\alpha\rho}\partial_\alpha\partial^\beta + g^{\rho\beta}\kappa^{\alpha\mu}\partial_\alpha\partial_\mu] + \left[\Box^2 C^\beta C^\rho - \Box C^\rho C^\alpha\partial_\alpha\partial^\beta\right]\}A_\rho \\
&= \left[C^\beta\Box - C^\alpha\partial_\alpha\partial^\beta\right]J - [(1-\eta)\Box + \kappa^{\alpha\lambda}\partial_\alpha\partial_\lambda]J^\beta.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Se os termos de segunda ordem envolvendo o vetor de violação de Lorentz C^β são negligenciados, esta equação é reduzida a

$$[\Box g^{\rho\beta} + \Box\kappa^{\beta\rho} - \kappa^{\alpha\rho}\partial_\alpha\partial^\beta + g^{\rho\beta}\kappa^{\alpha\mu}\partial_\alpha\partial_\mu]A_\rho = J^\beta, \tag{4.65}$$

que corresponde à equação desacoplada do campo de gauge. Uma análise similar revela que em primeira ordem a equação de onda para o campo escalar fica

$$[(1-\eta)\Box + \kappa^{\alpha\rho}\partial_\alpha\partial_\rho]\phi = -J. \tag{4.66}$$

As equações de Maxwell modificadas advém da Eq.(4.60),

$$(1+\kappa_{00})\,\partial_i E^i + \epsilon^{ji}\kappa_{0j}\partial_i B - \kappa_{ij}\partial_i E^j - C_0\nabla^2\phi - C^i\partial_i\partial_t\phi = \rho, \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\epsilon^{ij} - \kappa_{il}\epsilon^{lj} - \kappa_{jl}\epsilon^{il}\right)\partial_j B - \partial_0 E^i - \kappa_{i0}\partial_j E^j + \kappa_{\ j0}\partial_j E^i + \kappa_{il}\partial_0 E^l + \kappa_{0l}\epsilon^{il}\partial_0 B \\
&-C^i\nabla^2\phi + C^i\partial_0^2\phi - C^j\partial_j\partial^i\phi - C^0\partial_0\partial^i\phi = J^i,
\end{aligned} \tag{4.68}$$

correspondendo às formas alteradas para a lei de Gauss e lei de Ampere. Por outro lado, o setor escalar evolui como

$$[1-\eta+\kappa_{00}]\partial_t^2\phi - [1-\eta]\nabla^2\phi + \kappa^{ij}\partial_i\partial_j\phi + 2\kappa^{0j}\partial_0\partial_j\phi = -J. \tag{4.69}$$

Para resolver esta eletrodinâmica, as Eqs.(4.66, 4.67, 4.68) devem ser consideradas juntamente com a lei de Faraday,

$$\partial_t B + \nabla \times \mathbf{E} = 0, \tag{4.70}$$

que advém da identidade de Bianchi, $\partial_\mu F^{\mu *} = 0$. Aqui,

$$F^{\mu *} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\nu\alpha}, \tag{4.71}$$

é o tensor dual do campo eletromagnético em $(1+2)$ dimensões, que é um tri-vetor,

$$F^{\mu *} = (-B, -\mathbf{E}^*). \tag{4.72}$$

O símbolo $(^*)$ designa o dual de um 2-vetor: $\left(E^i\right)^* = \epsilon_{ij}E^j$, de forma que $\mathbf{E}^* = (E_y, -E_x)$. Sendo que adotamos a seguinte convenção: $\epsilon_{012} = \epsilon^{012} = \epsilon_{12} = \epsilon^{12} = 1$, $F^{12} = F_{12} = -B$, $F_{0i} = E^i$. Negligenciando os termos envolvendo o campo escalar, resulta

$$(1+\kappa_{00})\,\partial_i E^i + \kappa_{0j}\epsilon^{ji}\partial_i B - \kappa_{ij}\partial_i E^j = \rho, \tag{4.73}$$

$$\left(\epsilon_{ij} - \kappa_{il}\epsilon^{lj} - \kappa_{jl}\epsilon^{il}\right)\partial_j B - \partial_t E^i - \left(\kappa_{i0}\partial_j E^j - \kappa_{j0}\partial_j E^i\right) + \kappa_{il}\partial_t E^l + \kappa_{0l}\epsilon^{il}\partial_t B = J^i, \tag{4.74}$$

4.4 Relação de Dispersão

Nesta seção, buscamos encontrar a relação de dispersão para o setor de gauge (desacoplado) desta teoria planar. Uma possível rota para obter esta relação de dispersão é através das próprias equações de Maxwell, tendo como propósito a obtenção de uma equação de onda completa (dependente do tempo) para o campo elétrico ou campo magnético. Tomamos como ponto de partida a Eq.(4.74), cuja derivada temporal (na ausência de fontes), é

$$\left(\epsilon_{ij} - \kappa_{il}\epsilon^{lj} - \kappa_{jl}\epsilon^{il}\right)\partial_j\partial_t B - \partial_t^2 E^i - \kappa_{i0}\partial_t\partial_j E^j + \kappa_{j0}\partial_t\partial_j E^i + \kappa_{il}\partial_t^2 E^l + \kappa_{0l}\epsilon^{il}\partial_t^2 B = 0. \tag{4.75}$$

Agora, fazemos uso da lei de Faraday, $\partial_t B = -\left(\epsilon_{mn}\partial_m E^n\right)$, para escrever uma equação de onda inteiramente em termos do campo elétrico,

$$\mathbb{M}_{in}E^n = 0, \tag{4.76}$$

com

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_{in} \;=\; & [\delta_{in}(\nabla^2 - \kappa_{jm}\partial_j\partial_m - (1+\kappa_{00})\partial_t^2 + 2\kappa_{0j}\partial_j\partial_t) - \partial_n\partial_i + \kappa_{im}\partial_n\partial_m + \kappa_{in}\partial_t^2 \\ & -\kappa_{in}\nabla^2 + \kappa_{jn}\partial_j\partial_i - \kappa_{0i}\partial_n\partial_t - \kappa_{0n}\partial_i\partial_t],\end{aligned} \tag{4.77}$$

que no espaço dos momentos é

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_{in} &= [\delta_{in}(-\mathbf{p}^2 + \kappa_{jm}p_jp_m + (1+\kappa_{00})p_0^2 + 2\kappa_{0j}p_jp_0) + p_np_i - \kappa_{im}p_np_m \\ &\quad -\kappa_{in}p_0^2 + \kappa_{in}\mathbf{p}^2 - \kappa_{jn}p_jp_i - \kappa_{0i}p_np_0 - \kappa_{0n}p_ip_0]. \end{aligned} \tag{4.78}$$

As componentes da matriz $\mathbb{M}$ são explicitamente escritas como

$$\mathbb{M}_{11} = ((-p_2^2(1-\kappa_{11}-\kappa_{22}) + (1+\kappa_{00}-\kappa_{11})p_0^2 + 2\kappa_{02}p_2p_0), \tag{4.79}$$

$$\mathbb{M}_{22} = (-p_1^2(1-\kappa_{11}-\kappa_{22}) + (1+\kappa_{00}-\kappa_{22})p_0^2 + 2\kappa_{01}p_1p_0), \tag{4.80}$$

$$\mathbb{M}_{12} = \mathbb{M}_{21} = (p_1p_2(1-\kappa_{11}-\kappa_{22}) - \kappa_{12}p_0^2 - \kappa_{01}p_2p_0 - \kappa_{02}p_1p_0). \tag{4.81}$$

A relação de dispersão desta teoria advém da Eq. (4.76), cuja solução é determinada por $\det \mathbb{M} = 0$. Com um pouco de álgebra, calculamos exatamente o determinante desta matriz, implicando em:

$$[\alpha p_0^2 + \beta p_0 + \gamma] = 0, \tag{4.82}$$

com

$$\alpha = (1+\kappa_{00})(1+\kappa_{00} - Tr\mathbb{K}) + \det \mathbb{K}, \tag{4.83}$$

$$\beta = -2\kappa_{0i}Q_{ij}p_j, \; Q_{ij} = [(1+\kappa_{00})\delta_{ij} - \kappa_{ij}] \tag{4.84}$$

$$\gamma = (1 - Tr\mathbb{K})[\kappa_{ij}p_ip_j - (1+\kappa_{00})\mathbf{p}^2] - (\epsilon_{ij}p_i\kappa_{0j})^2. \tag{4.85}$$

Tal equação nos remete à seguinte relação de dispersão:

$$p_0 = \frac{\kappa_{0i}Q_{ij}p_j}{\alpha} \pm \frac{\sqrt{(\kappa_{0i}Q_{ij}p_j)^2 - \alpha(1-Tr\mathbb{K})[\kappa_{ij}p_ip_j - (1+\kappa_{00})\mathbf{p}^2] + \alpha(\epsilon_{ij}p_i\kappa_{0j})^2}}{\alpha}. \tag{4.86}$$

Esta relação de dispersão caracteriza uma teoria não-birrefringente, conclusão está obtida pelo mesmo tipo de análise realizada para a relação de dispersão (4.27). É novamente importante ressaltar que a teoria planar é não-birrefringente em qualquer ordem, enquanto a teoria original (definida em (1+3) dimensões) é não-birrefringente apenas em primeira ordem.

A relação de dispersão (4.86) pode ser analisada para alguns casos particulares. Anulando os coeficientes anisotrópicos $\kappa_{0j} = 0$ e $\kappa_{ij} = 0$, resta apenas o elemento isotrópico de paridade par, κ_{00}. Com isso, temos $\beta = 0, \gamma = -(1+\kappa_{00})\mathbf{p}^2$, $\alpha = (1+\kappa_{00})^2$, e Eq.(4.86) nos fornece a relação

$$p_0 = \pm\frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{1+\kappa_{00}}}, \tag{4.87}$$

que caracteriza uma teoria eletromagnética isotrópica (representa ondas que se propagam da mesma forma em todas das direções).

Adotando $\kappa_{00}=0,\kappa_{0j}=0$, encontramos a seguinte relação de dispersão anisotrópica,

$$p_0=\pm N_0\left|\mathbf{p}\right|\sqrt{1-\kappa_{ij}\frac{p_ip_j}{\mathbf{p}^2}}, \tag{4.88}$$

onde $N_0=\sqrt{(1-Tr\mathbb{K})/(1-Tr\mathbb{K}+\det\mathbb{K})}$. A anisotropia está relacionada à dependência desta expressão com a direção de propagação, contida no termo $\kappa_{ij}p_ip_j$. Neste caso, dependendo da direção de propagação (dada pelo $\mathbf{p}$ adotado), teremos relações de dispersão diferentes.

Para $\kappa_{ij}=0$ e $\kappa_{00}=0$, encontramos outra relação de dispersão anisotrópica,

$$p_0=\kappa_{0i}p_i\pm\left|\mathbf{p}\right|\sqrt{1+\left(\kappa_{0i}\frac{p_i}{|\mathbf{p}|}\right)^2+\left(\epsilon_{ij}\kappa_{0j}\frac{p_i}{|\mathbf{p}|}\right)^2}. \tag{4.89}$$

Observando que $\left(\epsilon_{ij}\kappa_{0j}p_i\right)^2=(\epsilon_{ij}\kappa_{0j}p_i)(\epsilon_{lm}\kappa_{0m}p_l)=\left(\kappa_{0j}\right)^2\mathbf{p}^2-\left(\kappa_{0j}p_j\right)^2$, a relação (4.89) assume a forma simples:

$$p_0=\kappa_{0i}p_i\pm\left|\mathbf{p}\right|\sqrt{1+\left(\kappa_{0j}\right)^2}. \tag{4.90}$$

A causalidade da teoria pode ser analisada pelo cálculo da velocidade de grupo ($u_g=dp_0/d\left|\mathbf{p}\right|$) associada com cada relação de dispersão. A relação (4.87) é compatível com uma teoria estável e causal, uma vez que fornece a seguinte velocidade de grupo:

$$u_g=\frac{1}{\sqrt{1+\kappa_{00}}}, \tag{4.91}$$

que é menor que 1 para $\kappa_{00}>0$. Esta é a condição para assegurar a causalidade do setor isotrópico da teoria. As relações (4.88, 4.90) descrevem uma eletrodinâmica estável e não-causal. As velocidades de grupo associadas são:

$$u_g = \pm N_0\sqrt{1-\kappa_{ij}\cos\theta_i\cos\theta_j}, \tag{4.92}$$

$$u_g = \sqrt{1+\left(\kappa_{0j}\right)^2}\pm\kappa_{0i}\cos\theta_i, \tag{4.93}$$

onde $\cos\theta_i=p_i/\left|\mathbf{p}\right|$. É fácil perceber que estas duas velocidades podem ser maiores que 1 para certos valores dos cossenos, implicando em violação da causalidade. Desta forma, percebemos que o setor anisotrópico é em geral não-causal.

Dada a complexidade da relação de dispersão geral, uma opção interessante é analisá-la em primeira ordem nos parâmetros de violação de Lorentz. Em primeira ordem, temos:

$$\alpha=(1+2k_{00}-Tr\mathbb{K}),\quad \beta=-2k_{0i}p_i, \tag{4.94}$$

$$\gamma=k_{ij}p_ip_j-(1+k_{00}-Tr\mathbb{K})\mathbf{p}^2. \tag{4.95}$$

Com isto, a relação de dispersão (4.86) toma a forma

$$p_0 = \frac{k_{0i}p_i \pm \sqrt{(k_{0i}p_i)^2 - (1+2k_{00} - Tr\mathbb{K})[k_{ij}p_ip_j - (1+k_{00} - Tr\mathbb{K})\mathbf{p}^2]}}{(1+2k_{00} - Tr\mathbb{K})}, \tag{4.96}$$

que recai em

$$p_0 = k_{0i}p_i \pm \frac{\sqrt{(1+3k_{00} - 2Tr\mathbb{K})\mathbf{p}^2 - k_{ij}p_ip_j + (k_{0i}p_i)^2}}{(1+2k_{00} - Tr\mathbb{K})}, \tag{4.97}$$

quando usamos

$$(1+2k_{00} - Tr\mathbb{K})[k_{ij}p_ip_j - (1+k_{00} - Tr\mathbb{K})\mathbf{p}^2] = k_{ij}p_ip_j - [1+3k_{00} - 2Tr\mathbb{K}]\mathbf{p}^2. \tag{4.98}$$

Expandindo a raiz e o denominador em primeira ordem,

$$\sqrt{[(1+3k_{00} - 2Tr\mathbb{K})\mathbf{p}^2 - k_{ij}p_ip_j] + (k_{0i}p_i)^2} = |\mathbf{p}| \left[1 + \frac{3}{2}k_{00} - Tr\mathbb{K} - \frac{k_{ij}}{2}p_ip_j/\mathbf{p}^2\right], \tag{4.99}$$

$$(1+2k_{00} - Tr\mathbb{K})^{-1} = (1 - 2k_{00} + Tr\mathbb{K}), \tag{4.100}$$

finalmente obtemos

$$p_0 = k_{0i}p_i \pm |\mathbf{p}| \left(1 - \frac{1}{2}k_{00} - \frac{1}{2}k_{ij}\frac{p_ip_j}{\mathbf{p}^2}\right). \tag{4.101}$$

Esta é a relação de dispersão do setor de gauge em primeira ordem nos coeficientes de vioalação.

4.4.1 Relação de dispersão do setor escalar

A relação de dispersão do setor escalar pode ser obtida diretamente da Eq.(4.66), tomada na ausência de fontes. No espaço dos momentos, tal equação é lida como:

$$[(1-\eta)p^2 + \kappa^{\alpha\rho}p_\alpha p_\rho] = 0, \tag{4.102}$$

com a constante η dada pela Eq. (4.38). Em componentes, obtemos

$$[(1-\eta)p_0^2 - (1-\eta)\mathbf{p}^2 + \kappa_{00}p_0^2 + \kappa_{ij}p_ip_j - 2\kappa_{0i}p_0p_i] = 0, \tag{4.103}$$

implicando na seguinte expressão,

$$[(1-\eta+\kappa_{00})p_0^2 - 2\kappa_{0i}p_0p_i - (1-\eta)\mathbf{p}^2 + \kappa_{ij}p_ip_j] = 0. \tag{4.104}$$

que leva à relação de dispersão exata:

$$p_0 = \frac{\kappa_{0i}p_i \pm \sqrt{(\kappa_{0i}p_i)^2 + (1-\eta+\kappa_{00})[(1-\eta)\mathbf{p}^2 - \kappa_{ij}p_ip_j]}}{(1-\eta+\kappa_{00})}. \tag{4.105}$$

Assim como realizado para a relação de dispersão do setor de gauge, podemos expandir a relação de dispersão escalar em primeira ordem, obtendo:

$$p_0 = k_{0i}p_i \pm |\mathbf{p}| \left[1 - \frac{\kappa_{00}}{2} - \frac{1}{2}\kappa_{ij}\frac{p_i p_j}{\mathbf{p}^2}\right]. \tag{4.106}$$

É interessante observar que a relação do setor escalar coincide com a relaçao de dispersão do setor de gauge, dada pela Eq.(4.101), em primeira ordem nos parâmetros de violação.

A velocidade de propagação deste modo vale:

$$u_g = \left[1 - \frac{\kappa_{00}}{2} - \frac{1}{2}\kappa_{ij}\cos\theta_i\cos\theta_j \div k_{0i}\cos\theta_i\right]. \tag{4.107}$$

Vemos assim que esta relação de dispersão também implica em modos não causais, uma vez que podemos ter $u_g > 1$ para alguns valores de θ_i, θ_j.

4.5 Solução Eletrostática e Magnetostática

Nesta seção, aplicaremos o tradicional método das funções de Green para obter as soluções estacionárias da eletrodinâmica planar descrita nas seções precedentes. Em primeira ordem, os parâmetros de violação de Lorentz, as soluções das equações de movimento (4.62) e (4.63) são dadas por:

$$A_\mu = \frac{1}{\Box}\left(g_{\mu\rho} - \kappa_{\mu\rho} - g_{\mu\rho}\kappa^{\alpha\beta}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box} + \kappa_{\rho\alpha}\frac{\partial^\alpha\partial_\mu}{\Box}\right)J^\rho + \frac{1}{\Box}\left(C_\mu - C^\sigma\frac{\partial_\sigma\partial_\mu}{\Box}\right)J, \tag{4.108}$$

$$\phi = -\frac{1}{\Box}\left[1 + \eta - \kappa^{\alpha\beta}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\right]J + \frac{1}{\Box}C_\rho J^\rho. \tag{4.109}$$

A partir da equação (4.108), obtemos as funções de Green que solucionam o campo de gauge,

$$G_{\mu\rho}\left(x - x'\right) = \frac{1}{\Box}\left[g_{\mu\rho} - \kappa_{\mu\rho} - g_{\mu\rho}\kappa^{\alpha\beta}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box} + \kappa_{\rho\alpha}\frac{\partial^\alpha\partial_\mu}{\Box}\right]\delta\left(x - x'\right), \tag{4.110}$$

$$G_\mu\left(x - x'\right) = \frac{1}{\Box}\left(C_\mu - C^\sigma\frac{\partial_\sigma\partial_\mu}{\Box}\right)\delta\left(x - x'\right), \tag{4.111}$$

enquanto a função de Green que soluciona o campo escalar (4.109) é:

$$G\left(x - x'\right) = -\frac{1}{\Box}\left[1 + \eta - \kappa^{\mu\beta}\frac{\partial_\mu\partial_\beta}{\Box}\right]\delta\left(x - x'\right), \tag{4.112}$$

onde $x = (x_0, \mathbf{r})$. Ambas equações acima mostram que as fontes J^μ e J atuam como geraradoras de fenômenos eletromagnéticos, inclusive a fonte do campo escalar, J .

4.5.1 Soluções estáticas para o campo de gauge puro

No espaço dos momentos, tais funções de Green são expressas como:

$$
\begin{aligned}
G_{\mu\rho}(p) &= -\frac{1}{p^2}\left[g_{\mu\rho}-\kappa_{\mu\rho}-\kappa_{\alpha\rho}\frac{p^{\alpha}p_{\mu}}{p^2}+g_{\mu\rho}\kappa^{\gamma\sigma}\frac{p_{\gamma}p_{\sigma}}{p^2}\right]J^{\rho}, && (4.113)\\
G_{\mu}(p) &= -\frac{1}{p^2}\left(C_{\mu}-C^{\sigma}\frac{p_{\sigma}p_{\mu}}{p^2}\right)J, && (4.114)\\
G(p) &= \frac{1}{p^2}\left[1+\eta-\kappa^{\mu\beta}\frac{p_{\mu}p_{\beta}}{p^2}\right]. && (4.115)
\end{aligned}
$$

A solução estacionária para o campo de gauge em (4.108) pode ser expressa como

$$A_{\mu}(\mathbf{r})=\int d\mathbf{r}' G_{\mu\rho}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,J^{\rho}(\mathbf{r}')+\int d\mathbf{r}' G_{\mu}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,J(\mathbf{r}'). \tag{4.116}$$

As componentes da função de Green são obtidas a partir de (4.113- 4.115), que nos rende:

$$G_{00}(\mathbf{R})=-\frac{1}{2\pi}\left(1-\kappa_{00}+\frac{1}{2}\kappa_{aa}\right)\ln R-\frac{1}{4\pi}\kappa^{ab}\frac{R_aR_b}{R^2}, \tag{4.117}$$

$$G_{0i}(\mathbf{R})=\frac{1}{2\pi}\kappa_{0i}\ln R\,,\quad G_{i0}(\mathbf{R})\;=\;\frac{1}{4\pi}\kappa_{0i}\ln R\;-\frac{1}{4\pi}\kappa_{0a}\frac{R_aR_i}{R^2}, \tag{4.118}$$

$$G_{ij}(\mathbf{R})=\frac{1}{2\pi}\left[\delta_{ij}\left(1+\frac{1}{2}\kappa_{aa}\right)+\frac{1}{2}\kappa_{ij}\right]\ln R+\frac{1}{4\pi}\delta_{ij}\kappa_{ab}\frac{R_aR_b}{R^2}-\frac{1}{4\pi}\kappa_{ja}\frac{R_aR_i}{R^2}, \tag{4.119}$$

e $G_{\mu}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ é funções de Green que descreve a contribuição da fonte escalar J para o campo eletromagnético dado por:

$$G_0(\mathbf{R})=-\frac{1}{2\pi}C_0\ln R\,,\quad G_i(\mathbf{R})=-\frac{1}{4\pi}C_i\ln R\;+\frac{1}{4\pi}C_a\frac{R_aR_i}{R^2}, \tag{4.120}$$

onde $\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$e usamos as seguintes integrais:

$$
\begin{aligned}
\int\frac{d^2}{(2\pi)^2}\frac{1}{\mathbf{p}^2}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} &= -\frac{1}{2\pi}\ln R\,, && (4.121)\\
\int\frac{d^2}{(2\pi)^2}\frac{p_ap_b}{\mathbf{p}^4}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} &= -\frac{1}{4\pi}\left[\delta_{ab}\ln R+\frac{R_aR_b}{R^2}\right]. && (4.122)
\end{aligned}
$$

As componentes não diagonais da função de Green revelam que as cargas geram campos elétrico e magnético, bem como as correntes. Vamos agora calcular os campos elétricos e magnéticos para algumas configurações especiais de carga e densidades de corrente. De acordo com a Eq. (4.116), os potenciais escalar e vetor são

$$
\begin{aligned}
A_0(\mathbf{r}) = &-\frac{1}{2\pi}\left(1-\kappa_{00}+\frac{1}{2}\kappa_{aa}\right)\int d\mathbf{r}'\;\rho(\mathbf{r}')\;\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\;-\frac{1}{4\pi}\kappa_{ab}\int d\mathbf{r}'\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_a(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_b}{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}\rho(\mathbf{r}') \quad (4.123)\\
&+\frac{1}{2\pi}\kappa_{0a}\int d\mathbf{r}'\;J^a(\mathbf{r}')\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\;-\frac{1}{2\pi}C_0\int d\mathbf{r}'J(\mathbf{r}')\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|
\end{aligned}
$$

e

$$A_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\kappa_{0j}\int d\mathbf{r}'\ \rho(\mathbf{r}')\ \ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\ \ -\frac{1}{4\pi}\kappa_{0a}\int d\mathbf{r}'\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_a(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\rho(\mathbf{r}')$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left[\delta_{jb}\left(1+\frac{1}{2}\kappa_{aa}\right)+\frac{1}{2}\kappa_{jb}\right]\int d\mathbf{r}'\ J^b(\mathbf{r}')\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \tag{4.124}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\delta_{jc}\kappa_{ab}\int d\mathbf{r}'\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_a(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_b}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}J^c(\mathbf{r}')-\frac{1}{4\pi}\kappa_{ab}\int d\mathbf{r}'\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_a(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}J^b(\mathbf{r}')$$

$$-\frac{1}{4\pi}C_j\int d\mathbf{r}'J(\mathbf{r}')\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\ \ +\frac{1}{4\pi}C_a\int d\mathbf{r}'\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_a(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}J(\mathbf{r}'),$$

respectivamente.

Para uma distribuição estática de carga pontual, $\rho(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r}')\ [J_i(\mathbf{r}') = 0 = J(\mathbf{r}')]$, o potencial escalar e o potential vetor são

$$A_0(\mathbf{r}) = -\frac{q}{2\pi}\left[\left(1-\kappa_{00}+\frac{1}{2}\kappa_{aa}\right)\ln r+\frac{1}{2}\kappa_{ab}\frac{r_ar_b}{r^2}\right], \tag{4.125}$$

$$A_j(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi}\left(\kappa_{0j}\ln r\ \ -\kappa_{0a}\frac{r_ar_j}{r^2}\right), \tag{4.126}$$

respectivamente. A solução (4.125) difere da usual para o potencial escalar gerado por uma carga pontual em (1 +2) dimensões principalmente devido ao termo $\kappa^{ab}r_ar_b/r^2$, que produz um comportamento anisotrópico. O campo elétrico produzido pela carga pontual é

$$E_i(\mathbf{r}) = -\frac{q}{2\pi}\left[\left(1-\kappa_{00}+\frac{1}{2}\kappa_{aa}\right)\frac{r_i}{r^2}+\kappa_{ib}\frac{r_b}{r^2}-\kappa_{ab}\frac{r_ar_b}{r^4}r_i\right]. \tag{4.127}$$

Além de seu comportamento radial em r^{-1}, este campo elétrico apresenta anisotropias, devido aos dois últimos termos não radiais $\kappa_{ib}r_b/r^2$ e $\kappa_{ab}r_ar_br_i/r^4$, produzidos pelo background de violação. Interssante notar que estas correções não modificam o usual comportamento assintótico do campo elétrico em (1 +2) dimensões. Este permanece decaindo com $1/r$, o que é consistente com a natureza adimensional dos parâmetros de violação. Observe que no caso em que o parâmetro de violação é dimensional, como ocorre no caso da teoria planar advinda da redução dimensional da eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw [vide seção 3.2], as soluções não preservam o comportamento assintótico da teoria de Maxwell usual.

O campo magnético produzido por uma carga pontual advém do potencial vetor (4.126):

$$B(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi}\epsilon_{ij}\frac{\kappa_{0i}r_j}{r^2}. \tag{4.128}$$

Aqui, observa-se que o parâmetro κ_{0i} gera um campo magnético anisotrópico cujo comportamento assintótico vai com r^{-1}. Tal solução pode ser usada para impor um limite superior para o coeficiente κ_{0i} usando dados experimentais concernentes à física bidimensional.

Para uma caraga pontual com velocidade **u,** $J^i(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r}')u^i$, $[\rho(\mathbf{r}') = 0 = J(\mathbf{r}')]$, o potencial escalar é

$$A_0(\mathbf{r}) = -\frac{q}{2\pi}\kappa_{0a}u_a \ln r \ , \tag{4.129}$$

enquanto o potencial vetor resulta igual a

$$A_j(\mathbf{r}) = -\frac{q}{2\pi}\left[\left(1+\frac{1}{2}\kappa_{aa}\right)u_j + \frac{1}{2}\kappa_{ja}u_a\right]\ln r - \frac{q}{4\pi}\kappa_{ab}u_j\frac{r_a r_b}{r^2} + \frac{q}{4\pi}\kappa_{ab}u_b\frac{r_a r_j}{r^2}. \tag{4.130}$$

O campo elétrico e magnético ficam são respectivamente

$$E_i(\mathbf{r}) = -\frac{q}{2\pi}\kappa_{0a}u_a\frac{r_i}{r^2}, \tag{4.131}$$

$$B(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi}\left[\left(1+\frac{1}{2}\kappa_{aa}\right)\epsilon_{ij}\frac{r_i u_j}{r^2} - \epsilon_{ij}\kappa_{ab}\frac{r_a r_b r_i u_j}{r^4} + \epsilon_{ij}\kappa_{ja}\frac{3r_i u_a - r_a u_i}{r^2}\right]. \tag{4.132}$$

Neste modelo uma fonte escalar pontual, $J(\mathbf{r}') = q_s\delta(\mathbf{r}')$, $[\rho(\mathbf{r}') = 0 = J_i(\mathbf{r}')]$, também gera campos eletromagnéticos, cujos potenciais escalar e vetor são dadas por

$$A_0(\mathbf{r}) = -\frac{q_s}{2\pi}C_0\ln r, \quad A_j(\mathbf{r}) = -\frac{q_s}{4\pi}C_j\ln r \ + \frac{q_s}{4\pi}C_a\frac{r_a r_j}{r^2}, \tag{4.133}$$

levando as seguintes soluções para o campo elétrico e magnético:

$$E_i(\mathbf{r}) = -\frac{q_s}{2\pi}C_0\frac{r_i}{r^2}, \quad B(\mathbf{r}) = \frac{q_s}{2\pi}\epsilon_{ij}\frac{C_j r_i}{r^2}. \tag{4.134}$$

4.5.2 Solução estática para o campo escalar puro

Da eq. (4.109), a solução estacionária para o campo escalar pode ser expressa como:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, J(\mathbf{r}') - \frac{1}{2\pi}C_\mu \int d\mathbf{r}' \ J^\mu(\mathbf{r}') \ \ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \tag{4.135}$$

onde $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ é a função de Green estacinária do campo escalar obtida da eq. (4.112), então

$$G(\mathbf{R}) = \frac{1}{2\pi}\left(1+\eta+\frac{1}{2}\kappa_{aa}\right)\ln R + \frac{1}{4\pi}\kappa_{ab}\frac{R_a R_b}{R^2}. \tag{4.136}$$

O campo escalar gerado por uma fonte pontual de carga escalar, $J(\mathbf{r}') = q_s\delta(\mathbf{r}')$, é

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q_s}{2\pi}\left[\left(1+\eta+\frac{1}{2}\kappa_{aa}\right)\ln r + \frac{1}{2}\kappa_{ij}\frac{r_i r_j}{r^2}\right]. \tag{4.137}$$

Confirmamos assim que o campo escalar apresenta um comportamento muito semelhante ao do potencial escalar, dado pela Eq. (4.125).

Da mesma forma, o campo escalar produzido por uma fonte de carga pontual escalar, $\rho(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r}')$, e uma carga pontual com velocidade constante **u,** $J^i(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r}')u^i$, são

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{q}{2\pi}C_0\ln r \ , \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi}C_i u_i\ln r, \tag{4.138}$$

respectivamente, mostrando também um comportamento similar.

Capítulo 5

Propagador de Feynman e análise da consistência para a teoria CPT-par planar

Neste capítulo, apresentamos o cálculo exato do progador de Feynman da teoria planar descrita pela Lagrangiana (4.37), tomando os setores eletromagnético e escalar desacoplados, ou seja, tomando $C_\mu = 0$. Este cálculo é similar ao desenvolvido na Ref. [40], onde foi encontrado o propagador do campo de gauge do setor CPT-par e não-birrefringente do Modelo Padrão Estendido usando a seguinte prescrição para o tensor simétrico $\kappa_{\hat{\nu}\hat{\rho}}$ de 9 componentes

$$\kappa_{\hat{\nu}\hat{\rho}} = \frac{1}{2}(A_{\hat{\nu}}B_{\hat{\rho}} + A_{\hat{\rho}}B_{\hat{\nu}}) - \frac{1}{4}g_{\hat{\nu}\hat{\rho}}(A \cdot B), \tag{5.1}$$

compatível com o fato deste tensor possuir traço nulo ($\kappa_{\hat{\nu}}{}^{\hat{\nu}} = 0$). Na teoria planar da Lagrangiana (4.37), o tensor planar obtido, $k_{\nu\mu}$, possui traço não-nulo, devendo esta característica ser observada no procedimento aqui desenvolvido. Após o cálculo exato do propagador, realizamos uma análise da causalidade e unitariedade da teoria baseada em cima dos pólos do propagador.

5.1 Cálculo do propagador de Feynman

Ao desconsiderarmos o termo de acoplamento, ($C_\mu = 0$) na lagrangeana (4.37), os setores de gauge e escalar acabam sendo desacoplados, desta forma, a lagrangeana toma a forma:

$$\mathcal{L}_{1+2} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}k_{\nu\rho}F_{\lambda}{}^{\nu}F^{\lambda\rho} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \frac{1}{2}[1-\eta]\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\kappa_{\nu\rho}\partial^\nu\phi\partial^\rho\phi, \tag{5.2}$$

onde $(\partial_\mu A^\mu)^2/2\xi$ é o termo de gauge fixo. Para fazer o cálculo do propagador, faz-se necessário escrever a lagrangeana em sua forma quadrática

$$\mathcal{L}_{1+2} = \frac{1}{2}A^\nu \left[D_{\nu\mu}\right] A^\mu + \frac{1}{2}\phi \left[\boxdot\right] \phi, \tag{5.3}$$

onde

$$D_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu + \Box k_{\nu\mu} - k_{\nu\rho}\partial_\mu\partial^\rho - k_{\alpha\mu}\partial^\alpha\partial_\nu + g_{\mu\nu}k_{\alpha\rho}\partial^\alpha\partial^\rho + \frac{1}{\xi}\partial_\nu\partial_\mu, \tag{5.4}$$

$$\boxdot = -(1-\eta)\Box - k_{\nu\rho}\partial^\nu\partial^\rho. \tag{5.5}$$

A forma quadrática da lagrangeana (5.3) exibe dois setores distintos, sendo estes de gauge e escalar. Sob estas circunstâncias, iniciaremos o cálculo do propagador de Feynman para o setor de gauge, o qual satisfaz a seguinte relação:

$$D_{\mu\beta}\Delta^{\beta\nu}\left(x-y\right) = \delta_\mu{}^\nu \delta\left(x-y\right). \tag{5.6}$$

Formalmente, o propagador do campo de gauge é definido como

$$i\Delta_{\alpha\beta}\left(x-y\right) = \left\langle 0\left| T(A_\alpha\left(x\right)A_\beta\left(y\right))\right| 0\right\rangle,$$

onde $\Delta_{\alpha\beta}$ é o operador que aparece na Eq. (5.6). Devemos calcular o propagador de gauge de Feynman, $\xi = 1$, o que implica em

$$D_{\mu\nu} = \Box g_{\mu\nu} + \Box k_{\nu\mu} - k_{\nu\rho}\partial_\mu\partial^\rho - k_{\alpha\mu}\partial^\alpha\partial_\nu + g_{\mu\nu}k_{\alpha\rho}\partial^\alpha\partial^\rho. \tag{5.7}$$

O operador tensorial $D_{\mu\nu}$ pode ser escrito no espaço dos momentos, para tanto, basta fazermos uma transformação de Fourier, levando em:

$$\widetilde{D}^{\lambda\rho} = -p^2 g^{\lambda\rho} + p^\lambda p_\nu k^{\nu\rho} - p^2 k^{\lambda\rho} + p^\rho p_\delta k^{\lambda\delta} - g^{\lambda\rho}p_\delta p_\nu k^{\nu\delta}. \tag{5.8}$$

No espaço dos momentos a inversão deste operador é dada por

$$\tilde{D}^{\lambda\rho}\tilde{\Delta}_{\rho\beta} = \delta^\lambda{}_\beta. \tag{5.9}$$

Para realizar esta inverão, usamos a parametrização geral do tensor simétrico, $k^{\lambda\rho}$,

$$k^{\lambda\rho} = \frac{1}{2}(A^\lambda B^\rho + A^\rho B^\lambda), \tag{5.10}$$

com traço não-nulo, onde A^λ, B^ρ, são dois tri-vetores arbitrários que compõem os coeficientes de violação de Lorentz do tensor $k^{\lambda\rho}$, dados por

$$k^{00} = A^0 B^0,\ k^{0i} = \frac{1}{2}(A^0 B^i + A^i B^0),\ k^{ij} = \frac{1}{2}(A^i B^j + A^j B^j),$$

onde o traço é $k^{ii} = (A{\cdot}B)$. Aqui, k^{00} é o coeficiente isotrópico de paridade par, enquanto k^{0i}, k^{ij} representam os parâmetros anisotrópicos.

Substituindo a parametrização (5.10) em Eq.(5.8), temos:

$$\widetilde{D}^{\lambda\rho} = -\left[p^2 + (p\cdot A)(p\cdot B)\right] g^{\lambda\rho} - \frac{1}{2}\,(A\cdot B)\,p^\lambda p^\rho + \frac{1}{2}(p\cdot A)\left(p^\rho B^\lambda + p^\lambda B^\rho\right)$$
$$+\frac{1}{2}(p\cdot B)\left(p^\rho A^\lambda + p^\lambda A^\rho\right) - \frac{1}{2}p^2\left(A^\lambda B^\rho + A^\rho B^\lambda\right). \tag{5.11}$$

A fim de resolver a relação $\tilde{D}^{\lambda\rho}\tilde{\Delta}_{\rho\beta} = \delta^\lambda{}_\beta$, devemos ter um conjunto de operadores que constituam uma álgebra fechada, composto pelos seguintes projetores:

$$\Theta_{\rho\beta},\ \omega_{\rho\beta},\ A_\rho B_\beta,\ A_\beta B_\rho,\ p_\rho A_\beta,\ p_\beta A_\rho,\ p_\rho B_\beta,\ p_\beta B_\rho, B_\beta B_\rho, A_\beta A_\rho, \tag{5.12}$$

onde

$$\Theta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu},\quad \omega_{\mu\nu} = p_\mu p_\nu/p^2$$

são os projetores transversal e longitudinal. A álgebra completa é apresentada nas seguintes tabelas:

		$\Theta_{\rho\beta}$	$\omega_{\rho\beta}$	$A_\rho B_\beta$	$A_\beta B_\rho$	$p_\rho A_\beta$
$g^{\lambda\rho}$		Θ^λ_β	ω^λ_β	$A^\lambda B_\beta$	$A_\beta B^\lambda$	$p^\lambda A_\beta$
$\Theta^{\lambda\rho}$		Θ^λ_β	0	$A^\lambda B_\beta - \frac{(p\cdot A)p^\lambda B_\beta}{p^2}$	$A_\beta B^\lambda - \frac{(p\cdot B)p^\lambda A_\beta}{p^2}$	0
$\omega^{\lambda\rho}$		0	ω^λ_β	$\frac{(p\cdot A)p^\lambda B_\beta}{p^2}$	$\frac{(p\cdot B)p^\lambda A_\beta}{p^2}$	$p^\lambda A_\beta$
$p^\lambda B^\rho$		$p^\lambda B_\beta - \frac{(B\cdot p)p^\lambda p_\beta}{p^2}$	$\frac{(B\cdot p)p^\lambda p_\beta}{p^2}$	$(A\cdot B)p^\lambda B_\beta$	$B^2 p^\lambda A_\beta$	$(p\cdot B)p^\lambda A_\beta$
$p^\rho B^\lambda$		0	$B^\lambda p_\beta$	$(p\cdot A)\ B_\beta B^\lambda$	$(p\cdot B)\ A_\beta B^\lambda$	$p^2 B^\lambda A_\beta$
$p^\lambda A^\rho$		$p^\lambda A_\beta - \frac{(p\cdot A)p^\lambda p_\beta}{p^2}$	$\frac{(p\cdot A)p^\lambda p_\beta}{p^2}$	$A^2 p^\lambda B_\beta$	$(A\cdot B)p^\lambda A_\beta$	$(p\cdot A)p^\lambda A_\beta$
$p^\rho A^\lambda$		0	$A^\lambda p_\beta$	$(p\cdot A)\ B_\beta A^\lambda$	$(p\cdot B)\ A_\beta A^\lambda$	$p^2 A^\lambda A_\beta$
$p^\lambda p^\rho$		0	$p^\lambda p_\beta$	$(p\cdot A)p^\lambda B_\beta$	$(p\cdot B)p^\lambda A_\beta$	$p^2 p^\lambda A_\beta$
$A^\lambda B^\rho$		$A^\lambda B_\beta - \frac{(p\cdot B)A^\lambda p_\beta}{p^2}$	$\frac{(p\cdot B)A^\lambda p_\beta}{p^2}$	$(B\cdot A)A^\lambda B_\beta$	$B^2 A^\lambda A_\beta$	$(p\cdot B)A^\lambda A_\beta$
$A^\rho B^\lambda$		$A_\beta B^\lambda - \frac{(p\cdot A)B^\lambda p_\beta}{p^2}$	$\frac{(p\cdot A)B^\lambda p_\beta}{p^2}$	$A^2 B^\lambda B_\beta$	$(A\cdot B)\ A_\beta B^\lambda$	$(p\cdot A)B^\lambda A_\beta$

Tabela I: Álgebra do tensor projetor

		$p_\beta A_\rho$	$p_\rho B_\beta$	$p_\beta B_\rho$	$A_\beta A_\rho$	$B_\beta B_\rho$
$g^{\lambda\rho}$		$p_\beta A^\lambda$	$p^\lambda B_\beta$	$p_\beta B^\lambda$	$A_\beta A^\lambda$	$B_\beta B^\lambda$
$\Theta^{\lambda\rho}$		$p_\beta A^\lambda$ $\frac{-p^\lambda p_\beta (p\cdot A)}{p^2}$	0	$p_\beta B^\lambda$ $\frac{-p^\lambda p_\beta (p\cdot B)}{p^2}$	$A_\beta A^\lambda$ $\frac{-p^\lambda A_\beta (p\cdot A)}{p^2}$	$B_\beta B^\lambda$ $-\frac{p^\lambda B_\beta (p\cdot B)}{p^2}$
$\omega^{\lambda\rho}$		$\frac{p^\lambda p_\beta (p\cdot A)}{p^2}$	$p^\lambda B_\beta$	$\frac{p^\lambda p_\beta (p\cdot B)}{p^2}$	$\frac{p^\lambda A_\beta (p\cdot A)}{p^2}$	$\frac{p^\lambda B_\beta (p\cdot B)}{p^2}$
$p^\lambda B^\rho$		$p^\lambda p_\beta (A\cdot B)$	$p^\lambda B_\beta (p\cdot B)$	$p^\lambda p_\beta B^2$	$(B\cdot A)p^\lambda A_\beta$	$B^2 p^\lambda B_\beta$
$p^\rho B^\lambda$		$(p\cdot A)B^\lambda p_\beta$	$p^2 B^\lambda B_\beta$	$(p\cdot B)B^\lambda p_\beta$	$(p\cdot A)B^\lambda A_\beta$	$(p\cdot B)B^\lambda B_\beta$
$p^\lambda A^\rho$		$A^2 p^\lambda p_\beta$	$(p\cdot A)p^\lambda B_\beta$	$(A\cdot B)p^\lambda p_\beta$	$A^2 p^\lambda A_\beta$	$(A\cdot B)p^\lambda B_\beta$
$p^\rho A^\lambda$		$(p\cdot A)A^\lambda p_\beta$	$p^2 A^\lambda B_\beta$	$(p\cdot B)A^\lambda p_\beta$	$(p\cdot A)A_\beta A^\lambda$	$(p\cdot B)A^\lambda B_\beta$
$p^\lambda p^\rho$		$(p\cdot A)p^\lambda p_\beta$	$p^2 p^\lambda B_\beta$	$(p\cdot B)p^\lambda p_\beta$	$(p\cdot A)p^\lambda A_\beta$	$(p\cdot B)p^\lambda B_\beta$
$A^\lambda B^\rho$		$(A\cdot B)A^\lambda p_\beta$	$(p\cdot B)A^\lambda B_\beta$	$B^2 A^\lambda p_\beta$	$(A\cdot B)A_\beta A^\lambda$	$B^2 A^\lambda B_\beta$
$A^\rho B^\lambda$		$A^2 B^\lambda p_\beta$	$(p\cdot A)B_\beta B^\lambda$	$(A\cdot B)p_\beta B^\lambda$	$A^2 B^\lambda A_\beta$	$(A\cdot B)B^\lambda B_\beta$

Tabela II: Álgebra do tensor projetor

Então, o propagador do campo de gauge tem sua forma geral:

$$\widetilde{\Delta}_{\rho\beta}(p) = (\alpha_1\,\Theta_{\rho\beta} + \alpha_2\,\omega_{\rho\beta} + \alpha_3 A_\rho B_\beta + \alpha_4 A_\beta B_\rho + \alpha_5\,p_\rho A_\beta + \alpha_6 p_\beta A_\rho + \alpha_7 p_\rho B_\beta + \alpha_8 p_\beta B_\rho + \alpha_9 A_\beta A_\rho + \alpha_{10} B_\beta B_\rho), \tag{5.13}$$

com os coeficientes α_i para ser determinados. Executando todas as contrações tensoriais, obtemos um sistema de dez equações para os dez coeficientes α_i, que são:

$$\alpha_1[-p^2 - (p\cdot A)(p\cdot B)] = 1, \tag{5.14}$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_6\frac{1}{2}\left[(p\cdot A)(A\cdot B) + (p\cdot B)A^2\right] + \alpha_8\frac{1}{2}\left[(p\cdot B)(A\cdot B) + (p\cdot A)B^2\right] = 0, \tag{5.15}$$

$$\alpha_1\frac{1}{2}(p\cdot A) + \alpha_3\frac{1}{2}\left[(p\cdot A)(A\cdot B) + A^2(p\cdot B)\right] - \alpha_7 p^2 + \alpha_{10}\frac{1}{2}\left[(p\cdot A)B^2 + (p\cdot B)(A\cdot B)\right] = 0, \tag{5.16}$$

$$\alpha_1\frac{1}{2}(p\cdot B) + \alpha_4\frac{1}{2}\left[(p\cdot A)B^2 + (p\cdot B)(A\cdot B)\right] - \alpha_5 p^2 + \alpha_9\frac{1}{2}\left[(p\cdot A)(A\cdot B) + (p\cdot B)A^2\right] = 0, \tag{5.17}$$

$$-\alpha_1\frac{1}{2}p^2 + \alpha_3[-p^2 - \frac{1}{2}(p\cdot A)(p\cdot B) - \frac{1}{2}p^2(A\cdot B)] + \alpha_{10}\frac{1}{2}\left[(p\cdot B)^2 - p^2B^2\right] = 0, \tag{5.18}$$

$$-\alpha_1\frac{1}{2}p^2 + \alpha_4\left[-p^2 - \frac{1}{2}(p\cdot A)(p\cdot B) - \frac{1}{2}p^2(A\cdot B)\right] + \alpha_9\frac{1}{2}\left[(p\cdot A)^2 - p^2A^2\right] = 0, \tag{5.19}$$

$$\alpha_1\frac{1}{2}(p\cdot B) + \alpha_6\left[-p^2 - \frac{1}{2}(p\cdot B)(p\cdot A) - \frac{1}{2}p^2(A\cdot B)\right] + \alpha_8\frac{1}{2}\left[(p\cdot B)^2 - p^2B^2\right] = 0, \tag{5.20}$$

$$\alpha_1\frac{1}{2}(p\cdot A) + \alpha_6\frac{1}{2}\left[(p\cdot A)(A\cdot p) - p^2A^2\right] + \alpha_8\left[-p^2 - \frac{1}{2}(p\cdot A)(p\cdot B) - \frac{1}{2}p^2(A\cdot B)\right] = 0, \tag{5.21}$$

$$\frac{1}{2}\alpha_3[(p\cdot A)^2-p^2A^2]+\alpha_{10}\left[-p^2-\frac{1}{2}(p\cdot A)(p\cdot B)-\frac{1}{2}p^2(A\cdot B)\right]=0, \tag{5.22}$$

$$\alpha_9\left[-p^2-\frac{1}{2}(p\cdot A)(p\cdot B)-\frac{1}{2}p^2(B\cdot A)\right]+\alpha_4\frac{1}{2}\left[(p\cdot B)(p\cdot B)\ -p^2B^2\right]=0. \tag{5.23}$$

Ao resolvermos o sistema, encontramos as soluções para estes dez coeficientes :

$$\alpha_1=-\frac{1}{[p^2+(p\cdot A)(p\cdot B)]},\qquad \alpha_2=a_1\left[\frac{N}{\boxtimes(p)}\right], \tag{5.24}$$

$$\alpha_3=\alpha_4=-\frac{\alpha_1}{2}\left[\frac{p^2[p^2+\frac{1}{2}(p\cdot B)(p\cdot A)]}{\boxtimes(p)}\right], \tag{5.25}$$

$$\alpha_5=\alpha_6=\frac{\alpha_1}{2}\left[\frac{p^2(p\cdot B)+(p\cdot A)(p\cdot B)^2-\frac{1}{2}(p\cdot A)B^2p^2}{\boxtimes(p)}\right], \tag{5.26}$$

$$\alpha_7=\alpha_8=\frac{\alpha_1}{2}\left[\frac{(p\cdot A)p^2+(p\cdot A)^2(p\cdot B)-\frac{1}{2}(p\cdot B)A^2p^2}{\boxtimes(p)}\right], \tag{5.27}$$

$$\alpha_9=\alpha_{10}=-\frac{\alpha_1}{4}\left[\frac{p^2[(p\cdot B)^2\ -p^2B^2]}{\boxtimes(p)}\right], \tag{5.28}$$

onde o elemento do denominador $\boxtimes(p)$ é

$$\boxtimes(p)=f(A,B)p^2+[(p\cdot A)(p\cdot B)+\frac{1}{2}(p\cdot A)(p\cdot B)(A\cdot B)+\frac{1}{4}(p\cdot B)^2A^2\ +\frac{1}{4}(p\cdot A)^2B^2], \tag{5.29}$$

sendo que

$$f(A,B)=[1+(A\cdot B)+\frac{1}{4}(A\cdot B)^2-\frac{1}{4}B^2A^2]. \tag{5.30}$$

Com estes resultados, o propagador de gauge fica devidamente escrito como

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}_{\rho\beta}(p) \quad &= \quad -\frac{1}{[p^2+(p\cdot A)(p\cdot B)]\boxtimes(p)}\{\boxtimes(p)\Theta_{\rho\beta}+N(p)\omega_{\rho\beta}-F(p)(A_\rho B_\beta+A_\beta B_\rho)\\ &+G(p)(p_\rho A_\beta+p_\beta A_\rho)+H(p)(p_\rho B_\beta+p_\beta B_\rho)+I(p)A_\beta A_\rho+J(p)B_\beta B_\rho\}\end{aligned} \tag{5.31}$$

onde os seus coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned}N(p)=\boxtimes+\frac{1}{4}\Big\{&\left((p\cdot A)[p^2+\frac{1}{2}(p\cdot B)(p\cdot A)+\frac{1}{2}p^2(A\cdot B)]+\frac{1}{2}(p\cdot B)\left[(p\cdot A)^2-p^2A^2\right]\right)\\ &\left(\left[(p\cdot A)(A\cdot B)+(p\cdot B)A^2\right]+\left[(p\cdot B)(A\cdot B)+(p\cdot A)B^2\right]\right)\Big\},\end{aligned} \tag{5.32}$$

$$G(p)=\frac{1}{2}\left[p^2[(p\cdot B)+\frac{1}{2}(A\cdot B)(p\cdot B)-\frac{1}{2}B^2(p\cdot A)]+(p\cdot A)(p\cdot B)^2\right], \tag{5.33}$$

$$H(p)=\frac{1}{2}\left[p^2[(p\cdot A)+\frac{1}{2}(A\cdot B)(p\cdot A)-\frac{1}{2}A^2(p\cdot B)]+(p\cdot A)^2(p\cdot B)\right], \tag{5.34}$$

$$F(p) = \frac{p^2}{2}[p^2 + \frac{1}{2}(p \cdot B)(p \cdot A) + \frac{1}{2}p^2(A \cdot B)], \tag{5.35}$$

$$I(p) = \frac{1}{4}p^2[p^2B^2 - (p \cdot B)^2], \tag{5.36}$$

$$J(p) = \frac{1}{4}p^2[p^2A^2 - (p \cdot A)^2]. \tag{5.37}$$

e $A^2 = A \cdot A = A_\mu A^\mu$, $B^2 = B \cdot B = B_\mu B^\mu$. Este propagador de gauge, como esperado, é simétrico diante da permutação dos índices ($\widetilde{\Delta}_{\rho\beta} = \widetilde{\Delta}_{\beta\rho}$) e, também, perante a permutação de $A \longleftrightarrow B$.

Agora, vamos calcular o propagador de Feynman para o setor escalar, que satisfaz a relação

$$\Delta \boxdot = 1. \tag{5.38}$$

No espaço dos momentos, o operador $\boxdot$ é escrito como

$$\boxdot(p) = (1 - \eta)p^2 + k_{\nu\rho}p^\nu p^\rho. \tag{5.39}$$

$$\boxdot(p) = (1 - \eta)p^2 + (p \cdot A)(p \cdot B), \tag{5.40}$$

onde a relação (5.10) foi usada. O propagador escalar é definido por $\langle\phi\phi\rangle = i\Delta(p)$ $\langle\phi\phi\rangle = i\Delta(p)$, que produz

$$\langle\phi\phi\rangle = \frac{i}{(1 - \eta)p^2 + (p \cdot A)(p \cdot B)}. \tag{5.41}$$

Exceto pela presença do fator LIV escalar η , este propagador tem uma estrutura de pólos similar a um dos pólos do propagador de gauge, $p^2 + (p \cdot A)(p \cdot B) = 0$.

5.2 Relação de Dispersão

As relações de dispersão do setor, neste caso, são obtidas a partir dos pólos do propagador, que são

$$p^2 + (p \cdot A)(p \cdot B) = 0, \tag{5.42}$$

$$f(A, B)p^2 + [(p \cdot A)(p \cdot B) + \frac{1}{2}(p \cdot A)(p \cdot B)(A \cdot B) + \frac{1}{4}(p \cdot B)^2A^2 \;+ \frac{1}{4}(p \cdot A)^2B^2] = 0, \tag{5.43}$$

com $f(A, B)$ dado pela Eq.(5.30). A partir dessas relações, podemos analisar a estabilidade da energia, causalidade e a unicidade desta teoria planar. Em (1+2) dimensões, o campo eletromagnético possui apenas um grau de liberdade físico, está associado a apenas uma relação de dispersão. Isto indica que, das duas relações de dispersão apresentadas, apenas uma deve ser física, uma vez que não são coincidentes.

Para elucidar esta questão, consideramos algumas escolhas para A^μ, B^μ, que representam as componentes do tensor $k^{\lambda\rho}$. De agora em diante, adotaremos a notação geral: $A^\mu = (A_0, \mathbf{A})$, $B^\mu = (B_0, \mathbf{B})$. Iniciaremos discutindo a escolha, $A^\mu = (A_0, 0)$, $B^\mu = (B_0, 0)$, que representam o coeficiente isotrópico de paridade par, $k_{00} = A_0 B_0$. As relações de dispersão (5.42,5.43) neste caso conduzem à seguinte expressão:

$$p_0 = |\mathbf{p}|\sqrt{\frac{1}{1 + A_0 B_0}}, \tag{5.44}$$

que coincide com a relação (4.87) advinda das equações de Maxwell. A análise do setor isotrópico, portanto, não permite distinguir qual das Eqs. (5.42,5.43) é a física.

Agora tomamos $A^\mu = (0, \mathbf{A})$, $B^\mu = (B_0, 0)$, especificando as componentes $k^{0i} = \frac{1}{2} B_0 A^i$. As Eqs. (5.42,5.43) conduzem respectivamente à:

$$p_0 = B_0(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A})/2 \pm |\mathbf{p}|\sqrt{1 + B_0^2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A})^2/4\mathbf{p}^2}, \tag{5.45}$$

$$p_0 = B_0(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A})/2 \pm |\mathbf{p}|\sqrt{1 + B_0^2\mathbf{A}^2/4}. \tag{5.46}$$

É fácil perceber que a relação (5.46) é a coincidente com a relação de dispersão anistrópica (4.90) advinda das equações de Maxwell, com a identificação $B_0^2\mathbf{A}^2/4 = (\ k_{0i})^2$. Este é uma primeira evidência de que a relação de dispersão física é a Eq. (5.43).

Para finalizar a identificação, trabalhamos agora com as componentes anisotrópicas, k^{ij}, parametrizadas pela escolha $A^\mu = (0, \mathbf{A}), B^\mu = (0, \mathbf{B})$, para a qual as relações de dispersão (5.42,5.43) tomam a forma, respectivamente,

$$p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{B})}, \tag{5.47}$$

$$\begin{aligned} p_0 = \frac{1}{\sqrt{f}} \Bigg[& \mathbf{p}^2 - \mathbf{p}^2(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + \frac{\mathbf{p}^2}{4}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 - \frac{\mathbf{p}^2}{4}\mathbf{B}^2\mathbf{A}^2 + \frac{1}{4}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{B})^2\mathbf{A}^2 \ + \frac{1}{4}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A})^2\mathbf{B}^2 \\ & -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{B}) + \frac{1}{2}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \Bigg]^{1/2}, \end{aligned} \tag{5.48}$$

com

$$f = [1 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + \frac{1}{4}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 - \frac{1}{4}\mathbf{B}^2\mathbf{A}^2. \tag{5.49}$$

Observando que

$$tr\mathbb{K} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \ \ \det \mathbb{K} = \frac{1}{4}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 - \frac{1}{4}\mathbf{B}^2\mathbf{A}^2, \tag{5.50}$$

concluímos que

$$f = 1 - tr\mathbb{K} + \det \mathbb{K}. \tag{5.51}$$

Conhecendo a identidade,

$$\mathbb{K}_{ij}\mathbb{K}_{mj}C_iD_m{=}\mathbf{tr}(\mathbb{K})(\mathbb{K}_{ij}C_iD_j) - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D})(\det \mathbb{K}), \tag{5.52}$$

que está demonstrada no Apêndice, obtemos a seguinte relação:

$$\frac{1}{4}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{B})^2\mathbf{A}^2 \ + \frac{1}{4}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A})^2\mathbf{B}^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - \frac{1}{4}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 + \frac{1}{4}\mathbf{B}^2\mathbf{A}^2, \tag{5.53}$$

Usando esta expressão, resulta

$$p_0 = \frac{1}{\sqrt{f}} \left[\mathbf{p}^2 - \mathbf{p}^2(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{A})(\mathbf{p}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{A})(\mathbf{p}\cdot\mathbf{B}) \right]^{1/2}, \tag{5.54}$$

que se reduz a

$$p_0 = \sqrt{\frac{1-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})}{(1 - tr\mathbb{K} + \det\mathbb{K})}} \sqrt{\mathbf{p}^2 + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{A})(\mathbf{p}\cdot\mathbf{B})}, \tag{5.55}$$

que equivale exatamente à Eq.(5.46). Este resultado permite concluir que o propagador de Feynman (5.31) possui apenas um pólo físico, associado à relação de dispersão física da teoria (5.43). A relação de dispersão (5.42) revela-se não-física por não conseguir reproduzir as relações de dispersão advindas das equações de Maxwell em sua totalidade. Sendo assim a relação (5.43) é a única relação de dispersão do setor eletromagnético. Este resultado pode vir a ser confirmado com a análise da unitariedade, que deve revelar o caráter físico da relação (5.43).

Resta agora analisar a relação de dispersão advinda do propagador de Feynman para o setor escalar, ou seja,

$$(1-\eta)p^2 + (p\cdot A)(p\cdot B) = 0, \tag{5.56}$$

onde a constante η está dada pela Eq. (4.38), ou seja,

$$\eta = \kappa_{00} - tr\mathbb{K}. \tag{5.57}$$

É fácil perceber que a relação (5.56) é igual à relação (4.102), confirmando a consistência dos nossos resultados.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho, estudamos um modelo planar, definido em (1+2) dimensões, dotado da violação da simetria de Lorentz. Iniciamos apresentando uma breve revisão de algumas teorias planares dotadas de termos de violação da simetria de Lorentz, especificamente dos modelos resultantes da redução dimensional da teoria de Carroll-Field-Jackiw (setor de gauge CPT-ímpar) e do setor CPT-par do MPE. Apresentamos brevemente as lagrangeanas obtidas e as principais propriedades associadas. Em seguida, procedemos à apresentação da contribuição original do presente trabalho, que envolve a obtenção do modelo planar não-birrefringente a partir da redução dimensional do setor CPT-par e não-birrefringente do Modelo Padrão Estendido. A eletrodinâmica planar obtida é composta de um setor de gauge e de um setor escalar, nos quais a violação de Lorentz é controlada pelo tensor simétrico $\kappa_{\nu\rho}$ (de seis componentes) e pelo o tri-vetor C_{μ}, responsável pelo acoplamento destes setores. A teoria possui nove componentes independentes de violação de Lorentz, sendo que seis são de paridade par e três de paridade ímpar. A teoria planar obtida é não-birrefringente a qualquer ordem nos parâmetros de violação, enquanto a teoria original é não birrefringente apenas em primeira ordem. O cálculo do tensor energia-momento revelou que a densidade de energia de toda a teoria resulta positivo-definida, desde que os parâmetros de violação de Lorentz sejam pequenos. Em seguida, realizamos o cálculo das relações de dispersão da teoria planar partindo-se das equações de Maxwell completas. Tais relações foram especializadas para os setores isotrópico e anisotrópico, revelando que o primeiro setor é causal, enquanto o segundo é não causal. Analisamos as equações de onda para o setor de gauge desacoplado, cuja soluções estacionárias foram obtidas através do método de Green. As soluções encontradas revelaram que os termos da violação de Lorentz não modificam o comportamento do eletromagnetismo planar de Maxwell, mantendo o usual comportamento assintótico em $1/r$. Contudo, os coeficientes de violação de Lorentz alteram a dependência radial, uma vez que termos de dependência angular são induzidos. Um cálculo análogo foi realizado para o setor escalar, demonstrando que este obedece a mesma solução estacionária para o potencial escalar.

Finalizamos calculando o propagador de Feynman para o setor de gauge da lagrangiana planar obtida, usando um conjunto de 10 projetores que formam uma álgebra fechada. Obtemos uma expressão exata para o propagador de Feynman, que possui dois pólos que implicam em duas relações de dispersão. Observamos que apenas uma destas duas relações, a física, reproduz corretamente as relações de dispersão advindas das equações de Maxwell.

Capítulo 7

Apêndice

Um ponto discutido neste apêndice é a demostração da identidade (5.52), que implica na expressão (5.53). Iniciamos apresentando a identidade:

$$\mathbf{C}\cdot\mathbb{N}^2\mathbf{D} = \mathbf{tr}(\mathbb{N})(\mathbf{C}\cdot\mathbb{N}\mathbf{D}) - (\mathbf{C}\cdot\mathbf{D})\,\mathrm{det}\mathbb{N}, \tag{7.1}$$

$$\mathbb{N}_{ij}\mathbb{N}_{mj}C_iD_m = \mathbf{tr}(\mathbb{N})(\mathbb{N}_{ij}C_iD_j) - (\mathbf{C}\cdot\mathbf{D})(\det\mathbb{N}), \tag{7.2}$$

onde $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ são dois bivetores genéricos, e $\mathbb{N}$ é uma matriz 2×2 genérica. Em componentes:

$$\mathbf{C}\cdot\mathbb{N}\mathbf{D} = \mathbb{N}_{ij}C_iD_j = \mathbb{N}_{11}C_1D_1 + \mathbb{N}_{22}C_2D_2 + \mathbb{N}_{12}C_1D_2 + \mathbb{N}_{21}C_2D_1, \tag{7.3}$$

$$\mathbf{C}\cdot\mathbb{N}^2\mathbf{D} = (\mathbb{N}\mathbf{C})\cdot(\mathbb{N}\mathbf{D}) = \mathbb{N}_{ij}C_i\mathbb{N}_{mj}D_m. \tag{7.4}$$

Para realizar esta demonstração, iniciamos escrevendo explicitamente o termo:

$$\mathbf{C}\cdot\mathbb{N}^2\mathbf{D} = \mathbb{N}_{ij}C_i\mathbb{N}_{mj}D_m = (\mathbb{N}_{11}C_1 + \mathbb{N}_{21}C_2)(\mathbb{N}_{11}D_1 + \mathbb{N}_{21}D_2) \tag{7.5}$$

$$+(\mathbb{N}_{12}C_1 + \mathbb{N}_{22}C_2)(\mathbb{N}_{12}D_1 + \mathbb{N}_{22}D_2), \tag{7.6}$$

$$\mathbb{N}_{ij}C_i\mathbb{N}_{mj}D_m = \mathbb{N}_{11}\mathbb{N}_{11}C_1D_1 + \mathbb{N}_{11}\mathbb{N}_{21}C_1D_2 + \mathbb{N}_{21}\mathbb{N}_{11}C_2D_1 + \mathbb{N}_{21}\mathbb{N}_{21}C_2D_2 \tag{7.7}$$

$$+\mathbb{N}_{12}\mathbb{N}_{12C_1}D_1 + \mathbb{N}_{12}\mathbb{N}_{22}C_1D_2 + \mathbb{N}_{22}\mathbb{N}_{12}C_2D_1 + \mathbb{N}_{22}\mathbb{N}_{22}C_2D_2, \tag{7.8}$$

Somamos e subtraímos o termo $\mathbb{N}_{11}C_2\mathbb{N}_{22}D_2$ na primeira linha, e rearranjamos de modo a compor o

$$\begin{aligned}\mathbb{N}_{ij}C_i\mathbb{N}_{mj}D_m = {} & \mathbb{N}_{11}\mathbb{N}_{11}C_1D_1 + \mathbb{N}_{11}\mathbb{N}_{21}C_1D_2 + \mathbb{N}_{21}\mathbb{N}_{11}C_2D_1 + (\mathbb{N}_{11}C_2\mathbb{N}_{22}D_2 - \mathbb{N}_{11}C_2\mathbb{N}_{22}D_2) \\ & +\mathbb{N}_{21}\mathbb{N}_{21}C_2D_2 + \mathbb{N}_{12}C_1\mathbb{N}_{12}D_1 + \mathbb{N}_{12}C_1\mathbb{N}_{22}D_2 + \mathbb{N}_{22}C_2\mathbb{N}_{12}D_1 + \mathbb{N}_{22}C_2\mathbb{N}_{22}D_2.\end{aligned} \tag{7.9}$$

Da mesma forma, somamos e subtraímos o termo $\mathbb{N}_{22}\mathbb{N}_{11}C_1D_1$ na segunda linha,

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}_{ij}C_i\mathbb{N}_{mj}D_m &= \mathbb{N}_{11}\mathbb{N}_{11}C_1D_1 + \mathbb{N}_{11}\mathbb{N}_{21}C_1D_2 + \mathbb{N}_{21}\mathbb{N}_{11}C_2D_1 + \mathbb{N}_{11}C_2\mathbb{N}_{22}D_2 \\
&\quad -\mathbb{N}_{11}C_2\mathbb{N}_{22}D_2 + \mathbb{N}_{21}\mathbb{N}_{21}C_2D_2 + \mathbb{N}_{12}\mathbb{N}_{12}C_1D_1 + (\mathbb{N}_{22}\mathbb{N}_{11}C_1D_1 - \mathbb{N}_{22}\mathbb{N}_{11}C_1D_1) \\
&\quad +\mathbb{N}_{12}\mathbb{N}_{22}C_1D_2 + \mathbb{N}_{22}\mathbb{N}_{12}C_2D_1 + \mathbb{N}_{22}\mathbb{N}_{22}C_2D_2, \qquad (7.10)
\end{aligned}$$

e rearranjamos de modo a compormos o termo $(\mathbb{N}_{ij}C_iD_j)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}_{ij}C_i\mathbb{N}_{mj}D_m &= \mathbb{N}_{11}\mathbb{N}_{11}C_1D_1 + \mathbb{N}_{11}\mathbb{N}_{21}C_1D_2 + \mathbb{N}_{21}\mathbb{N}_{11}C_2D_1 + \mathbb{N}_{11}C_2\mathbb{N}_{22}D_2 \\
&\quad -\mathbb{N}_{11}C_2\mathbb{N}_{22}D_2 - \mathbb{N}_{22}\mathbb{N}_{11}C_1D_1 + \mathbb{N}_{21}\mathbb{N}_{21}C_2D_2 + \mathbb{N}_{12}\mathbb{N}_{12}C_1D_1 \\
&\quad +\mathbb{N}_{22}(\mathbb{N}_{11}C_1D_1 + \mathbb{N}_{12}C_1D_2 + \mathbb{N}_{12}C_2D_1 + \mathbb{N}_{22}C_2D_2), \qquad (7.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}_{ij}C_i\mathbb{N}_{mj}D_m &= \mathbb{N}_{11}\mathbb{N}_{ij}C_iD_j + \mathbb{N}_{22}\mathbb{N}_{ij}C_iD_j + \\
&\quad -\mathbb{N}_{11}C_2\mathbb{N}_{22}D_2 - \mathbb{N}_{22}\mathbb{N}_{11}C_1D_1 \\
&\quad +\mathbb{N}_{21}\mathbb{N}_{21}C_2D_2 + \mathbb{N}_{12}\mathbb{N}_{12}C_1D_1. \qquad (7.12)
\end{aligned}$$

Para finalizar, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}_{ij}C_i\mathbb{N}_{mj}D_m &= (\mathbb{N}_{11} + \mathbb{N}_{22})\mathbb{N}_{ij}C_iD_j \\
&\quad -\mathbb{N}_{11}\mathbb{N}_{22}(C_2D_2 + C_1D_1) + \mathbb{N}_{21}\mathbb{N}_{21}(C_2D_2 + C_1D_1) \qquad (7.13)
\end{aligned}$$

que é a identidade procurada:

$$\mathbb{N}_{ij}C_i\mathbb{N}_{mj}D_m = \mathbf{tr}(\mathbb{N})\mathbb{N}_{ij}C_iD_j - (\mathbb{N}_{11}\mathbb{N}_{22} - \mathbb{N}_{21}\mathbb{N}_{21})(\mathbf{C}\cdot\mathbf{D}), \qquad (7.14)$$

$$\mathbb{N}_{ij}\mathbb{N}_{mj}C_iD_m = \mathbf{tr}(\mathbb{N})(\mathbb{N}_{ij}C_iD_j) - (\det\mathbb{N})(\mathbf{C}\cdot\mathbf{D}). \qquad (7.15)$$

Tomando $\mathbf{C} = \mathbf{D} = \mathbf{p}$, temos:

$$\mathbb{N}_{ij}\mathbb{N}_{mj}p_ip_m = \mathbf{p}^2\,(\mathbb{N}_{ij}p_ip_j) - \mathbf{p}^2\det\mathbb{N}. \qquad (7.16)$$

Observando a definição da matriz $\mathbb{K}_{ij} = (A_iB_j + A_jB_i)/2$, obtemos as relações

$$tr\mathbb{K} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}),\;\; \det\mathbb{K} = \frac{1}{4}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2 - \frac{1}{4}\mathbf{B}^2\mathbf{A}^2. \qquad (7.17)$$

Lembrando que

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}_{ij}p_ip_j &= (\mathbf{p}\cdot\mathbf{A})(\mathbf{p}\cdot\mathbf{B}),\;\; \det\mathbb{K} = \frac{1}{4}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2 - \frac{1}{4}\mathbf{B}^2\mathbf{A}^2, \\
\mathbb{K}_{ij}\mathbb{K}_{mj}p_ip_m &= \frac{1}{4}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{B})^2\mathbf{A}^2 + \frac{1}{4}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{A})^2\mathbf{B}^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{A})(\mathbf{p}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}),
\end{aligned}$$

finalmente temos

$$\frac{1}{4}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{B})^2\mathbf{A}^2 + \frac{1}{4}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{A})^2\mathbf{B}^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{A})(\mathbf{p}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{p}\cdot\mathbf{A})(\mathbf{p}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{p}^2\left[\frac{\mathbf{1}}{4}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2 - \frac{1}{4}\mathbf{B}^2\mathbf{A}^2\right], \tag{7.18}$$

$$\frac{1}{4}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{B})^2\mathbf{A}^2 + \frac{1}{4}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{A})^2\mathbf{B}^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{A})(\mathbf{p}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{p}^2\left[\frac{\mathbf{1}}{4}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2 - \frac{1}{4}\mathbf{B}^2\mathbf{A}^2\right], \tag{7.19}$$

que é a identidade (5.53).

Referências Bibliográficas

[1] Marco Antonio Moreira, RBEF **31**, 1306 (2009).

[2] S.M. Caroll, G.B. Field and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).

[3] D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev.* D **55**, 6760 (1997); D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev.* D **58**, 116002 (1998); S. R. Coleman and S. L. Glashow, *Phys. Rev.* D **59**, 116008 (1999); S.R. Coleman and S.L. Glashow, *Phys. Rev.* D **59**, 116008 (1999).

[4] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **87**, 251304 (2001).

[5] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D **66**, 056005 (2002).

[6] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D **80**, 015020 (2009).

[7] B. Altschul, Nucl. Phys. B **796**, 262 (2008); B. Altschul, Phys. Rev. Lett. **98**, 041603 (2007); C. Kaufhold and F.R. Klinkhamer, Phys. Rev. D **76**, 025024 (2007).

[8] F.R. Klinkhamer and M. Risse, Phys. Rev. D **77**, 016002 (2008); F.R. Klinkhamer and M. Risse, Phys. Rev. D **77**, 117901 (A) (2008).

[9] F. R. Klinkhamer and M. Schreck, Phys. Rev. D **78**, 085026 (2008).

[10] V. A. Kostelecky and A.G.M. Pickering, Phys. Rev. Lett. **91**, 031801 (2003); B. Altschul, Phys.Rev. D **70,** 056005 (2004).

[11] C.D. Carone, M. Sher, and M. Vanderhaeghen, Phys. Rev. D **74**, 077901 (2006); B. Altschul, Phys. Rev. D **79**, 016004 (2009).

[12] M.A. Hohensee, R. Lehnert, D. F. Phillips, R. L. Walsworth, Phys. Rev. D **80**, 036010(2009); M.A. Hohensee, R. Lehnert, D. F. Phillips, R. L. Walsworth, Phys. Rev. Lett. **102**, 170402 (2009); B. Altschul, Phys. Rev. D **80**, 091901(R) (2009).

[13] J.-P. Bocquet *et at.*, Phys. Rev. Lett. **104,** 241601 (2010).

[14] R. Casana, M. M. Ferreira Jr., J. S. Rodrigues, Madson R.O. Silva, Phys. Rev. D **80**, 085026 (2009); R. Casana, M. M. Ferreira, Jr, M. R.O. Silva, Phys.Rev. D **81**, 105015 (2010).

[15] R. Casana, M. M. Ferreira Jr. and J. S. Rodrigues, Phys. Rev. D **78**, 125013 (2008).

[16] R. Casana, M. M. Ferreira Jr., A.R. Gomes, F. E. P Santos, Phys.Rev.D **82**, 125006 (2010).

[17] Qasem Exirifard, Phys.Lett. B 699:1-4, (2011).

[18] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **97**, 140401 (2006).

[19] B. Altschul, Phys. Rev. Lett. **98**, 041603 (2007).

[20] C. Adam and F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B **607**, 247 (2001); C. Adam and F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B **657**, 214 (2003).

[21] A.A. Andrianov and R. Soldati, Phys. Rev. D **51**, 5961 (1995); Phys. Lett. B **435**, 449 (1998); A.A. Andrianov, R. Soldati and L. Sorbo, Phys. Rev. D **59**, 025002 (1998); A. A. Andrianov, D. Espriu, P. Giacconi, R. Soldati, J. High Energy Phys. 0909, 057 (2009); J. Alfaro, A.A. Andrianov, M. Cambiaso, P. Giacconi, R. Soldati, Int.J.Mod.Phys.A 25, 3271 (2010); V. Ch. Zhukovsky, A. E. Lobanov, E. M. Murchikova, Phys.Rev. D73 065016, (2006).

[22] A. P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo, J.A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **67**, 085021 (2003); A.P. Baeta Scarpelli and J.A. Helayel-Neto, Phys.Rev. D 73, 105020 (2006).

[23] M.S. Berger, V. A. Kostelecky, Phys.Rev.D 65, 091701 (2002); H. Belich , J.L. Boldo, L.P. Colatto, J.A. Helayel-Neto, A.L.M.A. Nogueira, Phys.Rev. D **68**, 065030 (2003); A.P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J.L. Boldo, L.P. Colatto, J.A. Helayel-Neto, A.L.M.A. Nogueira, Nucl. Phys. Proc. Suppl.127, 105-109 (2004).

[24] R. Jackiw and V. A. Kostelecký, Phys. Rev. Lett. **82**, 3572 (1999); J. M. Chung and B. K. Chung Phys. Rev. D **63**, 105015 (2001); J.M. Chung, Phys.Rev. D **60**, 127901 (1999); G. Bonneau, Nucl.Phys. B **593**, 398 (2001); M. Perez-Victoria, Phys. Rev. Lett. **83**, 2518 (1999); M. Perez-Victoria, J. High. Energy Phys. **0104**, (2001) 032; O.A. Battistel and G. Dallabona, Nucl. Phys. B **610**, 316 (2001); O.A. Battistel and G. Dallabona, J. Phys. G **28**, L23 (2002); J. Phys. G **27**, L53 (2001); A. P. B. Scarpelli, M. Sampaio, M. C. Nemes, and B. Hiller, Phys. Rev. D **64**, 046013 (2001); T. Mariz, J.R. Nascimento, E. Passos, R.F. Ribeiro and F.A. Brito, J. High. Energy Phys. **0510** (2005) 019; B. Altschul, Phys. Rev. D **70**, 101701 (2004); A.P.B. Scarpelli, M. Sampaio, M.C. Nemes, B. Hiller, Eur. Phys. J. C **56**, 571 (2008); Oswaldo M. Del Cima, J. M. Fonseca, D.H.T. Franco, O. Piguet, Phys. Lett. **B** 688, 258 (2010); G. Gazzola, H. G. Fargnoli, A. P. Baêta Scarpelli, Marcos Sampaio, M. C. Nemes, arXiv:1012.3291.

[25] R. Lehnert and R. Potting, Phys. Rev. Lett. **93**, 110402 (2004); R. Lehnert and R. Potting, Phys. Rev. D **70**, 125010 (2004); B. Altschul, Phys. Rev. D **75**, 105003 (2007); C. Kaufhold and F.R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B **734, 1** (2006).

[26] J. M. Fonseca, A. H. Gomes, W. A. Moura-Melo, Phys. Lett. B **671**, 280 (2009).

[27] A.H. Gomes, J.M. Fonseca, W.A. Moura-Melo, A.R. Pereira, JHEP 05, 104 (2010).

[28] M. Frank and I. Turan, Phys. Rev. D 74, 033016 (2006); O.G. Kharlanov, V.Ch. Zhukovsky, Phys. Rev. D81, 025015 (2010).

[29] R. Casana, M.M. Ferreira, and C.E.H. Santos, Phys. Rev. D 78, 105014 (2008).

[30] H. Belich, M.M. Ferreira Jr., J.A. Helayel-Neto, M.T.D. Orlando, Phys. Rev. D **67**,125011 (2003); Erratum-ibid., Phys. Rev. **D** 69, 109903 (2004).

[31] H. Belich, M.M. Ferreira Jr., J.A. Helayel-Neto, M.T.D. Orlando, Phys. Rev. D **68**, 025005 (2003).

[32] H. Belich, M.M. Ferreira Jr., J.A. Helayel-Neto, Eur. Phys. J. C 38, 511–519 (2005); H. Belich Jr., T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr. J.A. Helayël-Neto, Eur. Phys. J. **C 42**, 127–137 (2005).

[33] W.A. Moura-Melo, Ph.D. Thesis, CBPF, Brazil (2001);W. A. Moura-Melo and J. A. Helay¨el-Neto, Phys.Rev. D63, 065013 (2001).

[34] Q.G. Bailey and V.A. Kostelecky, Phys. Rev. D 70, 076006 (2004); R. Casana, M. M. Ferreira Jr, C.E. H. Santos, Phys.Rev.D78, 105014 (2008); Rodolfo Casana, Manoel M. Ferreira Jr, A. R. Gomes, Paulo R. D. Pinheiro, Eur. Phys. J. C 62, 573 (2009).

[35] R. Casana, M. M. Ferreira Jr., E. S. Carvalho, Phys.Rev.D **84**, 045008 (2011).

[36] R. Casana, M. M. Ferreira Jr, A. R. Gomes, Paulo R. D. Pinheiro, Phys.Rev. D (2009).

[37] M.N. Barreto, D. Bazeia, R. Menezes, Phys.Rev. **D 73**, 065015 (2006).

[38] M. A. Anacleto, F. A. Brito, E. Passos, Phys. Lett. B 694, (2010); M. A. Anacleto, F. A. Brito, E. Passos, arXiv:1101.2891.

[39] Gerald V. Dunne, arXiv:hep-th/9902115; S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, Ann. Phys. (NY) 140, 372 (1982).

[40] R. Casana, M. M. Ferreira Jr., A.R. Gomes, F. E. P Santos, Phys.Rev. D **82**, 125006 (2010).

[41] V. A. Kostelecky and S. Samuel, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 224 (1989); *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1811 (1991); *Phys. Rev.* D **39**, 683 (1989); *Phys. Rev.* D **40**, 1886 (1989), V. A. Kostelecky and R. Potting, *Nucl. Phys.* B **359**, 545 (1991); Phys. Lett. B **381**, 89 (1996); V. A. Kostelecky and R. Potting, *Phys. Rev.* D **51**, 3923 (1995).

[42] V.A. Kostelecky, M.Mewes, Phys.Rev.Lett. 99, 011601 (2007); V. A. Kostelecky and M. Mewes, Astrophys. J. Lett. **689**, L1 (2008); J.-Q. Xia, Hong Li, X. Wang, X. Zhang, Astron.Astrophys. 483, 715 (2008); J.-Q. Xia, H. Li, X. Zhang, Phys.Lett. B 687, 129(2010); B. Feng, M. Li, J.-Q. Xia, X. Chen, X. Zhang, Phys. Rev. Lett. 96, 221302 (2006); P. Cabella, P. Natoli, J. Silk, Phys. Rev. D 76, 123014 (2007).

[43] D. Bazeia, M. M. Ferreira Jr., A. R. Gomes, R. Menezes, Physica **D 239**, 947 (2010); A. de Souza Dutra, R. A. C. Correa, arXiv:1012.0268.

[44] N.M. Barraz, Jr., J.M. Fonseca, W.A. Moura-Melo, and J.A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D**76**, 027701 (2007); M. B. Cantcheff, Eur. Phys. J. C **46**, 247 (2006); M. B. Cantcheff, C.F.L. Godinho, A.P. Baeta Scarpelli, J.A. Helayël-Neto, Phys. Rev. D **68**, 065025 (2003); H. Belich, T. Costa-Soares, J.A. Helayel-Neto, M.T.D. Orlando, R.C. Paschoal, Phys. Lett. A **370**, 126 (2007); C. N. Ferreira, J. A. Helayël-Neto and C. E. C. Lima, New J. Phys. 12 (2010) 053029.

[45] R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and N. Russell, Phys. Rev. Lett. **79**, 1432 (1997); R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and N. Russell, Phys. Rev. D **57**, 3932 (1998); R. Bluhm, V.A. Kostelecky, C. D. Lane, and N. Russell, Phys. Rev. Lett. **88**, 090801 (2002); R. Bluhm and V.A. Kostelecky, Phys. Rev. Lett. **84**, 1381 (2000); R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and C.D. Lane, Phys. Rev. Lett. **84**, 1098 (2000); R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and N. Russell, Phys. Rev. Lett. **82**, 2254 (1999); V.A. Kostelecky and C. D. Lane, Phys. Rev. D **60**, 116010 (1999).

[46] A. P. Baeta Scarpelli and J. A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **73**, 105020 (2006); N.M. Barraz, Jr., J.M. Fonseca, W.A. Moura-Melo, and J.A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **76**, 027701 (2007); M.N. Barreto, D. Bazeia, and R. Menezes, Phys. Rev. D **73**, 065015 (2006); J.W. Moffat, Int. J. Mod. Phys. D **12** 1279 (2003); F. W. Stecker and S.T. Scully, Astropart. Phys. **23**, 203 (2005); H. Belich et al., Phys. Rev. D **68**, 065030 (2003); E. O. Iltan, Eur. Phys. J. C **40**, 269 (2005); Mod. Phys. Lett. A **19**, 327 (2004); JHEP 0306 (2003) 016; T. Mariz, J.R. Nascimento, A.Yu. Petrov, L.Y. Santos, A.J. da Silva, Phys. Lett. B 661, 312 (2008); M. Gomes, J.R. Nascimento, E. Passos, A.Yu. Petrov, A.J. da Silva, Phys.Rev. D **76**, 047701 (2007); A.F. Ferrari, M. Gomes, A.J. da Silva, J.R. Nascimento, E. Passos, A.Yu. Petrov., Phys. Lett. B 652, 174 (2007); O. Bertolami and D.F. Mota, Phys. Lett. B 455, 96 (1999).

[47] K. Moriyasu, An Elementary Primer for Gauge Theory, World ScientificPublishing Co Pte Ltd., Cingapure, 1983.

[48] R. U. Sexl and H.K. Urbantke, "Relativity, Groups, Particles: special relativity and relativistic symmetry in field and particle physics", Springer-Verlag, New York (1992).

[49] M. Veltman, "Quantum Theory of Gravitation", in Methods in Field Theory Ed.by R. Bailian and J. Zinn-Justin, North-Holland Publising Company and World Scientific Publising Co Ltd, Singapore, 1981.

Aspects of a planar nonbirefringent and *CPT*-even electrodynamics stemming from the standard model extension

Rodolfo Casana, Manoel M. Ferreira, Jr., and Roemir P. M. Moreira

Departamento de Física, Universidade Federal do Maranhão, Campus Universitário do Bacanga, São Luís - MA, 65085-580, Brazil

(Received 31 August 2011; published 12 December 2011)

We have studied a $(1+2)$-dimensional Lorentz-violating model which is obtained from the dimensional reduction of the nonbirefringent sector of the *CPT*-even electrodynamics of the standard model extension. The planar theory contains a gauge sector and a scalar sector which are linearly coupled by means of a Lorentz-invariance violating (LIV) vector, S^{μ}, while the kinetic terms of both sectors are affected by the components of a Lorentz-violating symmetric tensor, $\kappa^{\mu\nu}$. The energy-momentum tensor reveals that both sectors present energy stability for sufficiently small values of the Lorentz-violating parameters. The full dispersion relation equations are exactly determined and analyzed for some special configurations of the LIV backgrounds, showing that the planar model is entirely nonbirefringent at any order in the LIV parameters. At first order, the gauge and scalar sectors are described by the same dispersion relations. Finally, the equations of motion have been solved in the stationary regime and at first order in the LIV parameters. It is observed that the Lorentz-violating parameters do not alter the asymptotical behavior of the electric and magnetic fields but induce an angular dependence which is not present in Maxwell's planar theory.

DOI: 10.1103/PhysRevD.84.125014 PACS numbers: 11.30.Cp, 11.55.Fv, 12.60.−i

I. INTRODUCTION

Since the establishment of the special theory of relativity as a truth of nature, Lorentz symmetry has been taken as a key ingredient of theoretical physics. A motivation for studies involving the violation of Lorentz symmetry is the demonstration that string theories may support spontaneous violation of this symmetry [1], with important and interesting connections with the physics in the Planck energy scale. The standard model extension (SME) [2] has arisen as a theoretical framework for addressing Lorentz violation (LV) in a broader context than the usual standard model, in an attempt to scrutinize remnant effects of this violation in several low energy systems. In this way, the SME incorporates Lorentz-violating coefficients in all sectors of the standard model and in general relativity, representing a suitable tool for investigating Lorentz violation in several distinct respects.

The violation of Lorentz symmetry in the gauge sector of the SME is governed by a *CPT*-odd and a *CPT*-even tensor, yielding some unconventional phenomena such as vacuum birefringence and Cherenkov radiation. The LV coefficients are usually classified in accordance with the parity and birefringence. The *CPT*-odd term is represented by the Carroll-Field-Jackiw background [3], which is also parity odd and birefringent. This electrodynamics has been investigated, encompassing aspects as diverse as consistency aspects and modifications induced in QED [4–6], supersymmetry [7], vacuum Cherenkov radiation emission [8], finite-temperature contributions and Planck distribution [9,10], electromagnetic propagation in waveguides [11], the Casimir effect [12], magnetic monopoles, and topological defects [13]. A broader approach for topological defects in a Lorentz-violating environment was developed recently [14].

The *CPT*-even gauge sector of the SME is represented by the *CPT*-even tensor, $(k_F)_{\alpha\beta\mu\nu}$, composed of 19 independent coefficients, with nine nonbirefringent and ten birefringent ones. This sector has been studied since 2002 [15–18], being represented by the following Lagrangian:

$$\mathcal{L}_{(1+3)} = -\tfrac{1}{4}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \tfrac{1}{4}(k_F)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\lambda}\hat{\kappa}} - J_{\hat{\mu}}A^{\hat{\mu}}, \quad (1)$$

where the indices with a hat, $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$, run from 0 to 3, $A^{\hat{\mu}}$ is the four-potential, and $F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ is the usual electromagnetic field tensor. The tensor $(k_F)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}}$ stands for the Lorentz-violating coupling and possesses the symmetries of the Riemann tensor, $(k_F)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}} = -(k_F)_{\hat{\nu}\hat{\mu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}}$, $(k_F)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}} = -(k_F)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}}$, $(k_F)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}} = (k_F)_{\hat{\lambda}\hat{\kappa}\hat{\mu}\hat{\nu}}$, $(k_F)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}} + (k_F)_{\hat{\mu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}\hat{\nu}} + (k_F)_{\hat{\mu}\hat{\kappa}\hat{\nu}\hat{\lambda}} = 0$, and a double null trace, $(k_F)^{\hat{\mu}\hat{\nu}}{}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0$. A very useful parametrization for addressing this electrodynamics is the one presented in Refs. [15,16], in which the 19 LV components are enclosed in four 3×3 matrices, defined as

$$(\kappa_{DE})^{j\kappa} = -2(k_F)^{0j0\kappa}, \quad (\kappa_{HB})^{j\kappa} = \tfrac{1}{2}\epsilon^{jpq}\epsilon^{\kappa lm}(k_F)^{pqlm}, \quad (2)$$

$$(\kappa_{DB})^{j\kappa} = -(\kappa_{HE})^{\kappa j} = \epsilon^{\kappa pq}(k_F)^{0jpq}. \quad (3)$$

The matrices κ_{DE}, κ_{HB} contain, together, 11 independent components, while κ_{DB}, κ_{HE} possess, together, eight components, which equals the 19 independent elements of the tensor $(k_F)_{\alpha\nu\rho\varphi}$. The ten birefringent components are severely constrained by astrophysical tests involving high-quality cosmological spectropolarimetry data, which have

 © 2011 American Physical Society

yielded stringent upper bounds at the level of 1 part in 10^{32} [15,16] and 1 part in 10^{37} [17]. The nonbirefringent components are embraced by the matrices $\tilde{\kappa}_{e-}$ (six elements) and $\tilde{\kappa}_{o+}$ (three elements), and can be constrained by means of laboratory tests [19] and the absence of emission of Cherenkov radiation by ultrahigh energy cosmic rays [20,21]. These coefficients also undergo restriction at the order of 1 part in 10^{17} considering their subleading birefringent role [22]. This CPT-even sector has also been recently investigated in connection with consistency aspects in Refs. [23,24].

Planar field theories have been investigated since the early 1980s [25], initially as a scientific curiosity and a theoretical possibility. Such theories, however, have gained much attention due to their connection with the Chern-Simons electrodynamics and the proposition of the fractionary statistics [26]. The experimental discovery of the fractional quantum Hall effect [27] in 1982 ascribed a physical reality to the Chern-Simons theories, mainly after Laughlin's seminal explication for this effect in terms of an incompressible quantum fluid whose elementary excitations have fractional charge [28]. The confirmation of the fractional charge and statistics of these elementary excitations was demonstrated in Ref. [29], imputing to anyons a large relevance. New studies revealed that an Abelian Higgs Chern-Simons model also supports charged vortices with finite energy and nonzero angular momentum [30], opening the possibility of treating these defects as extended charged anyons. The interest in Chern-Simons models was boosted again in 1987 when it was suggested that a theoretical mechanism for the high-T_c superconductors could be constructed in terms of anyonic excitations [31,32]. This idea, nevertheless, lost strength when it was experimentally demonstrated that the high-T_c superconducting state does not exhibit the parity and time reversion violation that characterizes the Chern-Simons models. The connections between anyons [33,34] and the fractionary quantum Hall effect have been broadly investigated in recent years [35]; the same has been verified for the Chern-Simons self-dual vortex configurations [36,37].

A CPT-even field theory in a $(1+2)$-dimensional model with Lorentz violation was recently attained by means of the dimensional reduction of the CPT-even gauge sector of the standard model extension [38]. The resulting planar electrodynamics is composed of gauge and scalar sectors, both endowed with Lorentz violation, whose planar Lagrangian is

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{(1+2)} = &-\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \tfrac{1}{4}Z_{\mu\nu\lambda\kappa}F^{\mu\nu}F^{\lambda\kappa} + \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \\ &- C_{\mu\lambda}\partial^\mu\phi\partial^\lambda\phi + T_{\mu\lambda\kappa}\partial^\mu\phi F^{\lambda\kappa}, \end{aligned} \tag{4}$$

where $Z_{\mu\nu\lambda\kappa}$, $C_{\mu\lambda}$, $T_{\mu\lambda\kappa}$ are Lorentz-invariance violating (LIV) tensors which have, together, 19 components and present the following symmetries:

$$\begin{aligned} Z_{\mu\nu\lambda\kappa} &= Z_{\lambda\kappa\mu\nu}, \\ Z_{\mu\nu\lambda\kappa} &= -Z_{\nu\mu\lambda\kappa}, \\ Z_{\mu\nu\lambda\kappa} &= -Z_{\mu\nu\kappa\lambda}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$Z_{\mu\nu\lambda\kappa} + Z_{\mu\lambda\kappa\nu} + Z_{\mu\kappa\nu\lambda} = 0, \tag{6}$$

$$T_{\mu\lambda\kappa} + T_{\lambda\kappa\mu} + T_{\kappa\mu\lambda} = 0, \tag{7}$$

$$C_{\mu\lambda} = C_{\lambda\mu}, \qquad T_{\mu\lambda\kappa} = -T_{\mu\kappa\lambda}. \tag{8}$$

Some aspects of this model, involving wave equations and dispersion relations, were addressed in Ref. [38], having shown that the pure Abelian gauge or electromagnetic sector presents nonbirefringence at any order. The birefringence in this model is associated with the elements of the coupling tensor, $T_{\mu\lambda\kappa}$. It should be mentioned that this model is composed of parity-odd and parity-even terms, allowing its consideration on (parity-even) planar systems in which the Chern-Simons models cannot be applied.

In the present work, we accomplish the dimensional reduction of the nonbirefringent gauge sector of the SME, represented by nine components which can be incorporated in a symmetric and traceless tensor, $\kappa_{\hat{\nu}\hat{\rho}}$, defined as the contraction [39], $\kappa_{\hat{\nu}\hat{\rho}} = (k_F)^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\rho}}$. The nonbirefringent components of the tensor $(k_F)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}}$ are parametrized as

$$(k_F)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\rho}} = \tfrac{1}{2}(g_{\hat{\mu}\hat{\lambda}}\kappa_{\hat{\nu}\hat{\rho}} - g_{\hat{\mu}\hat{\rho}}\kappa_{\hat{\nu}\hat{\lambda}} - g_{\hat{\nu}\hat{\lambda}}\kappa_{\hat{\mu}\hat{\rho}} + g_{\hat{\nu}\hat{\rho}}\kappa_{\hat{\mu}\hat{\lambda}}), \tag{9}$$

which implies

$$(k_F)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\rho}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\lambda}\hat{\rho}} = 2\kappa_{\hat{\nu}\hat{\rho}}F_{\hat{\lambda}}{}^{\hat{\nu}}F^{\hat{\lambda}\hat{\rho}}, \tag{10}$$

so that the Lagrangian (1) takes on the form

$$\mathcal{L}_{(1+3)} = -\tfrac{1}{4}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \tfrac{1}{2}\kappa_{\hat{\nu}\hat{\rho}}F_{\hat{\lambda}}{}^{\hat{\nu}}F^{\hat{\lambda}\hat{\rho}} - J_{\hat{\mu}}A^{\hat{\mu}}. \tag{11}$$

Some properties of this nonbirefringent electrodynamics were investigated in Ref. [24], in which the corresponding Feynman gauge propagator was evaluated and some of its consistency properties (causality and unitarity) were analyzed.

In the present work, we perform the dimensional reduction of Lagrangian (11), which produces a nonbirefringent planar theory composed of nine LIV parameters instead of the 19 attained in Ref. [38]. In this simpler framework, Lorentz violation is controlled only by a rank-2 tensor, which modifies the kinetic part of the scalar and gauge sectors, and a rank-1 tensor, which couples both sectors. The density of energy is evaluated, revealing that the model presents positive-definite energy for small values of the Lorentz-violating parameters. We work out the complete dispersion relations of this planar model from the vacuum-vacuum amplitude, showing that the theory is nonbirefringent. In principle, this planar approach opens the possibility of imposing bounds on the $(1+2)$-dimensional LIV parameters and transferring them to the corresponding $(1+3)$ parameters, but it depends on the features of the planar system under inspection.

This work is organized as follows. In Sec. II, we accomplish the dimensional reduction of Lagrangian (11), obtaining a planar scalar electrodynamics in which the Lorentz violation is controlled by the symmetric tensor $\kappa_{\mu\rho}$, the counterpart of the original tensor $\kappa_{\hat{\mu}\hat{\rho}}$ defined in $(1+2)$ dimensions, and a three-vector denoted as S_ν. The energy-momentum tensor is computed, and the density of the energy is analyzed. Section III is devoted to the analysis of the dispersion relation in two situations: considering the complete model and regarding the gauge and scalar sectors as decoupled. In Sec. IV, we write the corresponding equations of motion and wave equations for the model. The wave equations for the gauge and scalar sectors are solved in the stationary regime at first order in the LIV parameters. In Sec. V, we present our conclusions *and perspectives*.

II. THE DIMENSIONAL REDUCTION PROCEDURE

In this section, we perform the dimensional reduction of the model represented by Lagrangian (11). There are some distinct procedures for accomplishing the dimensional reduction of a theory. In the present case, we adopt the one that freezes the third spacial component of the position four-vector and any other four-vector. This is done by requiring that the physical fields $\{\chi\}$ do not depend on the third spatial component anymore, that is, $\partial_3\chi = 0$. Besides this, we split out the fourth component of the four-vectors. This procedure is employed in Ref. [38]. The electromagnetic four-potential is written as

$$A^{\hat{\nu}} \longrightarrow (A^\nu; \phi), \tag{12}$$

where $A^{(3)} = \phi$ is now a scalar field and the Greek indices (without a hat) run from 0 to 2, $\mu = 0, 1, 2$. Carrying out this prescription for the terms of Lagrangian (11), one then obtains

$$F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 2\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi, \tag{13}$$

$$\kappa_{\hat{\nu}\hat{\rho}}F_{\hat{\lambda}}{}^{\hat{\nu}}F^{\hat{\lambda}\hat{\rho}} = \kappa_{\nu\rho}F_\lambda{}^\nu F^{\lambda\rho} - 2S_\nu F^{\nu\lambda}\partial_\lambda\phi + \eta\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi - \kappa_{\nu\rho}\partial^\nu\phi\partial^\rho\phi, \tag{14}$$

where we have defined $F^{\mu 3} = \partial^\mu\phi$, $F_{\mu 3} = -\partial_\mu\phi$. Also, we have renamed the set of LIV parameters; they now are represented by a second-rank tensor $\kappa_{\nu\rho}$ [which is the $(1+2)$-dimensional counterpart of the tensor $\kappa_{\hat{\nu}\hat{\rho}}$], a vector S_ν, and a scalar quantity η, which are defined as

$$S_\nu = \kappa_{\nu 3}, \qquad \eta = \kappa_{33}, \tag{15}$$

respectively. Thus, after the dimensional reduction procedure, we attain the following Lagrangian density:

$$\mathcal{L}_{1+2} = \underbrace{-\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\kappa_{\nu\rho}F_\lambda{}^\nu F^{\lambda\rho}}_{\mathcal{L}_{EM}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}[1-\eta]\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \tfrac{1}{2}\kappa_{\nu\rho}\partial^\nu\phi\partial^\rho\phi}_{\mathcal{L}_{\text{scalar}}} + \underbrace{S_\nu F^{\nu\lambda}\partial_\lambda\phi}_{\mathcal{L}_{\text{coupling}}} - A_\mu J^\mu - J\phi, \tag{16}$$

composed of a gauge sector ($\mathcal{L}_{EM}$), a scalar sector ($\mathcal{L}_{\text{scalar}}$), and a coupling sector ($\mathcal{L}_{\text{coupling}}$) ruled by the Lorentz-violating vector S_ν that contains three LIV parameters. The Lorentz-violating symmetric tensor $\kappa_{\nu\rho}$ presents six independent coefficients, which modify both the electromagnetic and scalar sectors, altering the dynamics of the Maxwell field and yielding a noncanonical kinetic term for the scalar field. The LIV noncanonical kinetic term that alters the scalar sector has been recently investigated in scenarios involving topological defects in $(1+1)$ dimensions [40] and acoustic black holes with Lorentz violation [41] in $(1+2)$ dimensions. A similar term was also found in the Lagrangian (4) of Ref. [38]. The present work provides a possible origin for this kind of term. Recently, a $O(N)$ scalar Lagrangian was considered in the presence of the Lorentz-violating term $K^i_{\nu\rho}\partial^\nu\phi_i\partial^\rho\phi_i$, where i labels the scalar field [42]. This work has addressed renormalization aspects of Yukawa theories endowed with Lorentz violation.

Our planar model (16) has ten dimensionless Lorentz-violating parameters contained in the tensors $\kappa_{\nu\rho}$, S_ν and in the scalar η. The traceless condition of the original tensor, $\kappa^{\hat{\rho}}{}_{\hat{\rho}} = 0$, gives one constraint between the $\kappa_{\nu\rho}$ components,

$$\kappa_{00} - \kappa_{ii} = \eta. \tag{17}$$

So, the model possesses nine independent Lorentz-violating parameters, the same number as the original four-dimensional theory. It demonstrates the consistency in the dimensional reduction procedure.

We define the components of the electric field as $E^i = F_{0i}$, the magnetic field by $B = -\frac{1}{2}\epsilon_{ij}F_{ij}$, and $\epsilon_{012} = \epsilon_{12} = 1$; then the Lagrangian (16) can be written in terms of fields of the electric and magnetic fields in the form

$$\mathcal{L}_{1+2} = \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_{\text{scalar}} + \mathcal{L}_{\text{coupling}}, \tag{18}$$

where

$$\mathcal{L}_{EM} = \tfrac{1}{2}(1+\kappa_{00})\mathbf{E}^2 - \tfrac{1}{2}(1-\kappa_{ii})B^2 - \tfrac{1}{2}\kappa_{ij}E^iE^j + \kappa_{0i}\epsilon_{ij}E^jB, \tag{19}$$

$$\mathcal{L}_{\text{scalar}} = \tfrac{1}{2}(1-\eta)[(\partial_t\phi)^2 - (\partial_i\phi)^2] + \tfrac{1}{2}\kappa_{00}(\partial_t\phi)^2 - \kappa_{0i}\partial_t\phi\partial_i\phi + \tfrac{1}{2}\kappa_{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi, \tag{20}$$

$$\mathcal{L}_{\text{coupling}} = -S^0E^j\partial_j\phi - S^iE^i\partial_t\phi + \epsilon_{ij}S^i\partial_j\phi B. \tag{21}$$

The above decomposition allows us to determine the parity properties of the LIV coefficients. In $(1+2)$ dimensions, the parity operator acts as $\mathbf{r}\to(-x,y)$; it changes the fields as $A_0\to A_0$, $\mathbf{A}\to(-A_x,A_y)$, and $\mathbf{E}\to(-E_x,E_y)$, $B\to -B$. For more details, see Ref. [25]. Here, we consider that the field ϕ behaves as a scalar, $\phi\to\phi$. Since the Lagrangian density is parity even, we can conclude that the planar model possesses six parity-even (κ_{00}, κ_{02}, κ_{11}, κ_{22}, S_0, S_2) and three parity-odd (κ_{01}, κ_{12}, S_1) coefficients. The fact that the components of the vector S^μ transform distinctly is a consequence of the way the vectors $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ and the field ϕ behave under parity.

An issue that deserves some attention is the energy stability, once it is known that Lorentz violation yields energy instability in some models, as in, for example, the Carroll-Field-Jackiw electrodynamics [3]. A preliminary analysis concerning this point can be performed by means of the energy-momentum tensor for the full planar theory,

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\rho)}\partial^\nu A_\rho + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}, \tag{22}$$

which is carried out as

$$\begin{aligned}\Theta^{\mu\nu} = {} & -F^{\mu\rho}F^{\nu}{}_{\rho} - \kappa^{\rho\beta}F^{\mu}{}_{\beta}F^{\nu}{}_{\rho} + \kappa^{\mu\beta}F^{\rho}{}_{\beta}F^{\nu}{}_{\rho} \\ & + S^\mu F^{\nu\rho}\partial_\rho\phi + S_\rho F^{\rho\nu}\partial^\mu\phi + S_\beta F^{\beta\mu}\partial^\nu\phi \\ & + (1-\eta)\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi + \kappa^{\mu\beta}\partial_\beta\phi\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}.\end{aligned} \tag{23}$$

We now specialize our evaluation for the density of energy,

$$\begin{aligned}\Theta^{00} = {} & \tfrac{1}{2}M_{jk}E_jE_k + \tfrac{1}{2}(1-\kappa_{jj})B^2 + B\epsilon_{jk}S_j\partial_k\phi \\ & - S_jE_j\partial_0\phi + \tfrac{1}{2}(1+\kappa_{jj})(\partial_0\phi)^2 + \tfrac{1}{2}N_{jk}\partial_j\phi\partial_k\phi,\end{aligned} \tag{24}$$

where we have defined the symmetric matrices

$$\begin{aligned}M_{jk} &= (1+\kappa_{00})\delta_{jk} - \kappa_{jk}, \\ N_{jk} &= (1-\kappa_{00}+\kappa_{ii})\delta_{jk} - \kappa_{jk},\end{aligned} \tag{25}$$

and used $\eta = \kappa_{00} - \kappa_{jj}$. We see that the energy density for the electromagnetic and scalar fields, when regarded as isolated, are

$$\Theta^{00}_{EM} = \tfrac{1}{2}M_{ij}E_jE_k + \tfrac{1}{2}(1-\kappa_{jj})B^2, \tag{26}$$

$$\Theta^{00}_{\text{scalar}} = \tfrac{1}{2}(1+\kappa_{jj})(\partial_0\phi)^2 + \tfrac{1}{2}N_{jk}\partial_j\phi\partial_k\phi. \tag{27}$$

Both the gauge and scalar energy densities will be positive definite if $|\kappa_{jj}| < 1$ and the matrices M_{ij} and N_{ij} are positive definite. As the LV parameters are usually much smaller than the unit, we conclude that the scalar and gauge sectors, as regarded separately, are stable. However, the energy positivity of the full model seems to be spoiled by the mixing terms $S_jE_j\partial_0\phi$ and $B\epsilon_{jk}S_j\partial_k\phi$. In order to have more clarity, we write Eq. (24) in the following way:

$$\begin{aligned}\Theta^{00} = {} & \frac{1}{2}[E_j - (M^{-1})_{ja}S_a\partial_0\phi]M_{jk}[E_k - (M^{-1})_{ka}S_a\partial_0\phi] \\ & + \frac{1}{2}(1-\kappa_{ii})\left[B + \frac{\epsilon_{jk}S_j\partial_k\phi}{(1-\kappa_{ii})}\right]^2 \\ & + \frac{1}{2}[1+\kappa_{jj} - (M^{-1})_{ij}S_iS_j](\partial_0\phi)^2 \\ & + \frac{1}{2}\left[N_{jk} - \frac{(S_a)^2\delta_{jk} - S_jS_k}{1-\kappa_{ii}}\right]\partial_j\phi\partial_k\phi.\end{aligned} \tag{28}$$

This shows that the energy density is positive definite whenever the LV parameters are sufficiently small.

III. DISPERSION RELATIONS

In this section, we compute the dispersion relations of the model described by the Lagrangian density (16). Our approach follows an alternative way by evaluating the vacuum-vacuum amplitude (VVA) of the model. After the Hamiltonian analysis, the well-defined VVA for the model, in the generalized Lorentz gauge, can be written as

$$Z = \det(\xi^{-1/2}\Box)\int \mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\phi\exp\left\{i\int dx\frac{1}{2}A_\mu D^{\mu\nu}A_\nu - \frac{1}{2}\phi\boxdot\phi + \phi\mathbb{J}^\mu A_\mu\right\}, \tag{29}$$

where ξ is the gauge-fixing parameter and we have defined the following operators:

$$\begin{aligned}D^{\mu\nu} = {} & (\Box + \kappa^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\sigma)g^{\mu\nu} + (\xi^{-1}-1)\partial^\mu\partial^\nu \\ & + \kappa^{\mu\nu}\Box - \kappa^{\mu\rho}\partial_\rho\partial^\nu - \kappa^{\nu\rho}\partial_\rho\partial^\mu,\end{aligned} \tag{30}$$

$$\boxdot = (1-\eta)\Box + \kappa^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu, \quad \mathbb{J}^\mu = S^\mu\Box - S^\nu\partial_\nu\partial^\mu. \tag{31}$$

With the purpose of understanding the dispersion relations of the full model, we first analyze the dispersion relations of the gauge and scalar sectors when considered uncoupled.

A. Uncoupled dispersion relations

For $S^\mu = 0$ the vacuum-vacuum amplitude (29) is factored as $Z = Z_{A_\mu}Z_\phi$, where Z_{A_μ} and Z_ϕ are the vacuum-vacuum amplitudes for the pure gauge and pure scalar fields, respectively.

1. *Dispersion relation for the pure gauge field*

The vacuum-vacuum amplitude for the pure gauge field is

$$Z_{A_\mu} = \det(\xi^{-1/2}\Box)\int \mathcal{D}A_\mu \exp\left\{i\int dx \frac{1}{2}A_\mu D^{\mu\nu}A_\nu\right\} = \det(\xi^{-1/2}\Box)(\det D^{\mu\nu})^{-1/2}, \quad (32)$$

with the operator $D^{\mu\nu}$ defined by (30). By computing the functional determinant

$$\det D^{\mu\nu} = \det(\xi^{-1}\Box^2)\det(\boxminus), \quad (33)$$

the VVA for the pure gauge field is

$$Z_{A_\mu} = \det(\boxminus)^{-1/2}, \quad (34)$$

where the operator $\boxminus$ in momentum space reads as

$$\tilde{\boxminus} = \alpha p_0^2 + \beta p_0 + \gamma, \quad (35)$$

with the coefficients defined as

$$\alpha = (1+\kappa_{00})(1+\kappa_{00} - \mathrm{tr}\mathbb{K}) + \det\mathbb{K}, \quad \mathbb{K} = [\kappa_{ij}], \quad (36)$$

$$\beta = -2\kappa_{0i}Q_{ij}p_j, \qquad Q_{ij} = [(1+\kappa_{00})\delta_{ij} - \kappa_{ij}], \quad (37)$$

$$\gamma = (1-\mathrm{tr}\mathbb{K})[\kappa_{ij}p_ip_j - (1+\kappa_{00})\mathbf{p}^2] - (\epsilon_{ij}p_i\kappa_{0j})^2. \quad (38)$$

The dispersion relations for the pure gauge field are obtained from the condition $\tilde{\boxminus} = 0$, which yields

$$p_0 = \frac{\kappa_{0i}Q_{ij}p_j}{\alpha} \pm \frac{\sqrt{(\kappa_{0i}Q_{ij}p_j)^2 - \alpha(1-\mathrm{tr}\mathbb{K})[\kappa_{ij}p_ip_j - (1+\kappa_{00})\mathbf{p}^2] + \alpha(\epsilon_{ij}p_i\kappa_{0j})^2}}{\alpha}. \quad (39)$$

One can show that this relation implies nonbirefringence at any order in the LIV parameters, once it yields the same phase velocity for the left and right modes traveling in the same sense. For similar situations, see Ref. [38]. At first order, it is given by

$$p_0 = \kappa_{0i}p_i \pm |\mathbf{p}|\left(1 - \frac{1}{2}\kappa_{00} - \frac{\kappa_{ij}p_ip_j}{2\mathbf{p}^2}\right). \quad (40)$$

The gauge dispersion relation (39) can be specialized for some particular cases. For $\kappa_{ij} = 0$, $\kappa_{0j} = 0$, the Lorentz-violating coefficients are represented by the parity-even element κ_{00}, and Eq. (39) yields the relation

$$p_0 = \pm\frac{|\mathbf{p}|}{(1+\kappa_{00})^{1/2}}, \quad (41)$$

which is the isotropic parity-even dispersion relation. Adopting $\kappa_{00} = 0$, $\kappa_{0j} = 0$, we achieve the anisotropic dispersion relation

$$p_0 = \pm N_0|\mathbf{p}|\sqrt{1 - \kappa_{ij}p_ip_j/\mathbf{p}^2}, \quad (42)$$

where $N_0 = \sqrt{(1-\mathrm{tr}\mathbb{K})/(1-\mathrm{tr}\mathbb{K}+\det\mathbb{K})}$. This relation involves parity-even and parity-odd coefficients.

For $\kappa_{ij} = 0$, $\kappa_{00} = 0$, we attain another anisotropic dispersion relation,

$$p_0 = \kappa_{0i}p_i \pm |\mathbf{p}|\sqrt{1 + (\kappa_{0i})^2}. \quad (43)$$

The energy-momentum tensor of the pure gauge field shows that the electromagnetic sector represents a stable theory. The relations (41)–(43), however, could anticipate a noncausal electrodynamics for some values of the LIV coefficients. The spoil of causality may be inferred from the evaluation of the group velocity ($u_g = dp_0/d|\mathbf{p}|$) associated with each dispersion relation.

2. Dispersion relation of the pure scalar sector

In the same way, the vacuum-vacuum amplitude for the uncoupled scalar field is

$$Z_\phi = \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{-\frac{i}{2}\int dx\phi\boxdot\phi\right\} = (\det\boxdot)^{-1/2}, \quad (44)$$

with the operator $\boxdot$ defined in Eq. (31). In momentum space it reads

$$\tilde{\boxdot} = (1-\eta)p^2 + \tilde{\kappa}^{\rho\sigma}p_\rho p_\sigma. \quad (45)$$

The dispersion relation of the scalar field is computed by the condition $\tilde{\boxdot} = 0$, taking into account the relation (17), which provides the following equation for p_0:

$$(1+\mathrm{tr}\mathbb{K})p_0^2 - 2(\kappa_{0i}p_i)p_0 - (1-\kappa_{00}+\mathrm{tr}\mathbb{K})\mathbf{p}^2 + \kappa_{ij}p_ip_j = 0, \quad (46)$$

whose roots are

$$p_0^{(\pm)} = \lambda\left[\kappa_{0i}p_i \pm \sqrt{(\kappa_{0i}p_i)^2 + (1+\mathrm{tr}\mathbb{K})[(1-\kappa_{00}+\mathrm{tr}\mathbb{K})\mathbf{p}^2 - \kappa_{ij}p_ip_j]}\right], \quad (47)$$

and $\lambda = [1+\mathrm{tr}\mathbb{K}]^{-1}$. This is a nonbirefringent relation at any order in LIV parameters. At first order such a relation is given by

$$p_0 = \kappa_{0i} p_i \pm |\mathbf{p}| \left(1 - \frac{1}{2}\kappa_{00} - \frac{\kappa_{ij} p_i p_j}{2\mathbf{p}^2}\right), \tag{48}$$

which is exactly the first-order gauge dispersion relation given in Eq. (40). Although the exact dispersion relations of the scalar and gauge sectors, (39) and (47), are clearly different, at first order in the LIV parameters both sectors are governed by the same dispersion relation. A direct analysis of the relation (47) indicates that the scalar sector can support noncausal modes, similarly as it occurs in the gauge sector.

B. Full dispersion relations

In order to examine the complete dispersion relations, we evaluate the vacuum-vacuum amplitude (29) considering the presence of the coupling vector S^μ. We first integrate the ϕ-field, obtaining

$$Z = \det(\xi^{-1/2}\Box)\det(\boxdot)^{-1/2} \times \int \mathcal{D}A_\mu \exp\left\{i \int dx \frac{1}{2} A_\mu \mathbb{D}^{\mu\nu} A_\nu\right\}, \tag{49}$$

where the operator $\mathbb{D}^{\mu\nu}$ is defined as

$$\mathbb{D}^{\mu\nu} = D^{\mu\nu} + \frac{\mathbb{J}^\mu \mathbb{J}^\nu}{\tilde{\boxdot}}. \tag{50}$$

By integrating the gauge field, we achieve

$$Z = \det(\xi^{-1/2}\Box)\det(\boxdot)^{-1/2}\det(\mathbb{D}^{\mu\nu})^{-1/2}, \tag{51}$$

which can be rewritten as

$$Z = \det(\xi^{-1/2}\Box)\det(\boxdot)\det(\boxdot D^{\mu\nu} + \mathbb{J}^\mu\mathbb{J}^\nu)^{-1/2}. \tag{52}$$

We now compute the functional determinant of the term $(\boxdot D^{\mu\nu} + \mathbb{J}^\mu\mathbb{J}^\nu)$,

$$\det(\boxdot D^{\mu\nu} + \mathbb{J}^\mu\mathbb{J}^\nu) = \det(\xi^{-1/2}\Box)^2 \det(\boxdot)^2 \det(\otimes), \tag{53}$$

which, replaced in Eq. (52), leads to the simpler result

$$Z = \det(\otimes)^{-1/2}. \tag{54}$$

In momentum space the operator $\otimes$ is represented by $\tilde{\otimes}(p)$, and the dispersion relations for the full model are obtained from the equation $\tilde{\otimes}(p) = 0$. In our case, we have the exact equation for the dispersion relations,

$$\tilde{\otimes}(p) = a_4(p_0)^4 + a_3(p_0)^3 + a_2(p_0)^2 + a_1 p_0 + a_0 = 0, \tag{55}$$

with a_k ($k = 0, 1, 2, 3, 4,$) being functions of the LIV parameters having the following structure:

$$a_4 = 1 + a_4^{(1)} + a_4^{(2)} + a_4^{(3)}, \tag{56}$$

$$a_3 = a_3^{(1)} + a_3^{(2)} + a_3^{(3)}, \tag{57}$$

$$a_2 = -2\mathbf{p}^2 + a_2^{(1)} + a_2^{(2)} + a_2^{(3)}, \tag{58}$$

$$a_1 = a_1^{(1)} + a_1^{(2)} + a_1^{(3)}, \tag{59}$$

$$a_0 = \mathbf{p}^4 + a_0^{(1)} + a_0^{(2)} + a_0^{(3)}, \tag{60}$$

where $a_k^{(n)}$ ($n = 1, 2, 3$) represents the contribution to nth order in the LIV parameters to the coefficient a_k, whose explicit expressions are given in the Appendix. Below we present some configurations of the LIV parameters which allow us to factorize and solve exactly the full dispersion relation equation given in Eq. (55).

We first analyze the pure contribution of the coupling vector S^μ to the dispersion relations of the scalar and gauge fields. For this purpose, we set $\kappa^{\mu\nu} = 0$ in the full vacuum-vacuum amplitude (54), obtaining

$$Z = \det(\Box)^{-1/2}\det[(1 + S^2)\Box - (S\cdot\partial)^2]^{-1/2}. \tag{61}$$

This describes two bosonic degrees of freedom: the first one is a gauge field governed by the usual dispersion relation,

$$p_0 = \pm|\mathbf{p}|, \tag{62}$$

while the second one describes a massless scalar field,

$$(p_0)_\pm = -\frac{S_0(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})}{1 - \mathbf{S}^2} \pm \frac{\sqrt{(1 + S^2)[\mathbf{p}^2(1 - \mathbf{S}^2) + (\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2]}}{1 - \mathbf{S}^2}, \tag{63}$$

which also is compatible with the absence of birefringence. At leading order the above dispersion relation reads

$$(p_0)_\pm = -S_0(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}) \pm |\mathbf{p}|\left(1 + \frac{1}{2}(S_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2}{\mathbf{p}^2}\right), \tag{64}$$

showing that the contributions of the vector S_μ to the dispersion relations only begin at second order.

The second case corresponds to the general isotropic dispersion relation, provided by fixing $\kappa_{ij} = 0$, $\kappa_{0i} = 0$, and $S_i = 0$. The partition function (54) factorizes as

$$Z = \det[(1 + \kappa_{00})\Box + \kappa_{00}\nabla^2]^{-1/2}\det[(1 + \kappa_{00})\Box - \{(S_0)^2 - (k_{00})^2 - \kappa_{00}\}\nabla^2]^{-1/2}, \tag{65}$$

describing two bosonic degrees of freedom supporting the following dispersion relations:

$$p_0 = \pm\frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{1 + \kappa_{00}}}, \tag{66}$$

$$p_0 = \pm|\mathbf{p}|\sqrt{\frac{1 - (\kappa_{00})^2 + (S_0)^2}{1 + \kappa_{00}}}. \tag{67}$$

The relation (66) describes the gauge field, while the relation (67) is associated with the massless scalar field. This association comes from Eqs. (39) and (47), when properly written for the pure isotropic coefficient κ_{00}.

A third case is obtained by considering κ_{0i} and S_0 as non-null, which provides the following vacuum-vacuum amplitude:

$$Z = \det[\Box - 2\kappa_{0i}\partial_i\partial_0]^{-1/2}\det\{\Box - 2\kappa_{0i}\partial_i\partial_0 - [(S_0)^2 + (k_{0i})^2]\nabla^2 + (\kappa_{0i}\partial_i)^2\}^{-1/2}. \tag{68}$$

The first operator $\Box - 2\kappa_{0i}\partial_i\partial_0$ describes the dispersion relation of a massless scalar degree of freedom,

$$p_0 = \kappa_{0i}p_i \pm |\mathbf{p}|\sqrt{1 + \frac{(\kappa_{0i}p_i)^2}{\mathbf{p}^2}}, \tag{69}$$

while the operator $\Box - 2\kappa_{0i}\partial_i\partial_0 - [(S_0)^2 + (k_{0i})^2]\nabla^2 + (\kappa_{0i}\partial_i)^2$ gives the dispersion relations of the gauge field,

$$p_0 = \kappa_{0i}p_i \pm |\mathbf{p}|\sqrt{1 + (\kappa_{0i})^2 + (S_0)^2}. \tag{70}$$

The specialization of the exact relations (39) and (47) for the coefficients κ_{0i} is the element that allows us to define what the scalar and the gauge field dispersion relations are.

A more complicated case which also provides exact dispersion relations is obtained by considering as non-null κ_{00} and S_i, yielding

$$\tilde{\otimes}(p) = a_4(p_0)^4 - a_2(p_0)^2 + a_0 = 0, \tag{71}$$

with

$$a_4 = (1 + \kappa_{00})(1 + \kappa_{00} - \mathbf{S}^2), \tag{72}$$

$$a_2 = \mathbf{p}^2(1 + \kappa_{00})[2 - (\kappa_{00})^2 - 2\mathbf{S}^2] + (1 + 2\kappa_{00})(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2, \tag{73}$$

$$a_0 = \mathbf{p}^4(1 + \kappa_{00})(1 - \kappa_{00} - \mathbf{S}^2) + \mathbf{p}^2(1 + \kappa_{00})(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2. \tag{74}$$

This gives the dispersion relation for the gauge field,

$$p_0^{(1)} = \pm\sqrt{\frac{a_2 + \sqrt{(a_2)^2 - 4a_4a_0}}{2a_4}}, \tag{75}$$

and the following one for the massless scalar,

$$p_0^{(2)} = \pm\sqrt{\frac{a_2 - \sqrt{(a_2)^2 - 4a_4a_0}}{2a_4}}. \tag{76}$$

Both dispersion relations can be expressed at second order in the LIV coefficients, yielding

$$p_0 = \pm|\mathbf{p}|\left(1 - \frac{1}{2}\kappa_{00} + \frac{A^{(2)} - 2\sqrt{B^{(4)}}}{8\mathbf{p}^2}\right), \tag{77}$$

$$p_0 = \pm|\mathbf{p}|\left(1 - \frac{1}{2}\kappa_{00} + \frac{A^{(2)} + 2\sqrt{B^{(4)}}}{8\mathbf{p}^2}\right), \tag{78}$$

where

$$A^{(2)} = \mathbf{p}^2(\kappa_{00})^2 + 2(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2, \tag{79}$$

$$B^{(4)} = \mathbf{p}^4(\kappa_{00})^4 + 4\mathbf{p}^4(\kappa_{00})^2\mathbf{S}^2 - 6\mathbf{p}^2(\kappa_{00})^2(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2 + (\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^4. \tag{80}$$

Here, it is important to highlight that at first order in the LIV backgrounds the dispersion relations (77) and (78) are the same, confirming the results of the previous subsections: at first order the scalar and the gauge sectors are governed by the same dispersion relations. The relations (75)–(78) are nonbirefringent ones.

For arbitrary configurations of the LIV backgrounds, it is convenient to compute the roots of the dispersion relations (55) in a perturbative way. At first order in the LIV parameters, we obtain

$$p_0^{(g,s)} = \kappa_{0i}p_i \pm |\mathbf{p}|\left(1 - \frac{1}{2}\kappa_{00} - \frac{1}{2}\frac{\kappa_{ij}p_ip_j}{\mathbf{p}^2}\right), \tag{81}$$

for the dispersion relations of the gauge and massless scalar fields. This is the same expression of Eqs. (40) and (48), confirming our previous computations. We thus verify that all the dispersion relations of this planar model are free from the influence of the vector S^μ at first order in the LIV parameters, and free from birefringence.

IV. EQUATIONS OF MOTION AND STATIONARY SOLUTIONS

The classical behavior of this theory is governed by the equations of motion stemming from the Euler-Lagrange equations, that is,

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \kappa^{\beta\rho}\partial_\alpha F^\alpha{}_\rho - \kappa^{\alpha\rho}\partial_\alpha F^\beta{}_\rho + S^\beta\Box\phi - S^\alpha\partial_\alpha\partial^\beta\phi = J^\beta, \tag{82}$$

$$[1 - \eta]\Box\phi + \kappa^{\alpha\rho}\partial_\alpha\partial_\rho\phi + S_\nu\partial_\alpha F^{\nu\alpha} = -J. \tag{83}$$

In terms of the gauge potential and by using the Lorentz gauge, $\partial\cdot A = 0$, these equations are written as

$$[\Box g^{\beta\rho} + \Box\kappa^{\beta\rho} + g^{\beta\rho}\kappa^{\alpha\sigma}\partial_\alpha\partial_\sigma - \kappa^{\rho\alpha}\partial_\alpha\partial^\beta]A_\rho + [S^\beta\Box - S^\alpha\partial_\alpha\partial^\beta]\phi = J^\beta, \tag{84}$$

$$[(1 - \eta)\Box + \kappa^{\alpha\rho}\partial_\alpha\partial_\rho]\phi + S_\nu\Box A^\nu = -J. \tag{85}$$

The modified Maxwell equations stemming from Eq. (82) lead to the altered forms for the Gauss and Ampere laws,

$$(1 + \kappa_{00})\partial_iE^i + \epsilon^{ji}\kappa_{0j}\partial_iB - \kappa_{ij}\partial_iE^j - S_0\nabla^2\phi - S^i\partial_i\partial_t\phi = \rho, \tag{86}$$

$$(\epsilon^{ij} - \kappa_{il}\epsilon^{lj} - \kappa_{jl}\epsilon^{il})\partial_jB + \kappa_{0l}\epsilon^{il}\partial_0B - \partial_0E^i + \kappa_{il}\partial_0E^l - \kappa_{i0}\partial_jE^j + \kappa_{j0}\partial_jE^i - S^i\nabla^2\phi + S^i\partial_0^2\phi - S^j\partial_j\partial^i\phi - S^0\partial_0\partial^i\phi = J^i, \tag{87}$$

while the scalar sector evolves in accordance with

$$[1-\eta+\kappa_{00}]\partial_t^2\phi-[1-\eta]\nabla^2\phi+\kappa^{ij}\partial_i\partial_j\phi + 2\kappa^{0j}\partial_0\partial_j\phi-S_0\partial_iE^i+S_i\partial_0E^i-\epsilon_{ij}S_i\partial_jB=-J. \quad (88)$$

In order to solve this electrodynamics, Eqs. (83), (86), and (87) should be considered jointly with the Faraday law,

$$\partial_t B+\nabla\times\mathbf{E}=0, \quad (89)$$

which comes from the tensor form of the Bianchi identity, $\partial_\mu F^{\mu *}=0$. Here, $F^{\mu *}=\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\nu\alpha}$ is the dual of the electromagnetic field tensor in (1 + 2) dimensions.

At first order in LIV parameters, the solutions of the equations of motion (84) and (85) are

$$A_\mu=\frac{1}{\Box}\left(g_{\mu\rho}-\kappa_{\mu\rho}-g_{\mu\rho}\kappa^{\alpha\beta}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}+\kappa_{\rho\alpha}\frac{\partial^\alpha\partial_\mu}{\Box}\right)J^\rho + \frac{1}{\Box}\left(S_\mu-S^\sigma\frac{\partial_\sigma\partial_\mu}{\Box}\right)J, \quad (90)$$

$$\phi=-\frac{1}{\Box}\left[1+\eta-\kappa^{\alpha\beta}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box}\right]J+\frac{1}{\Box}S_\rho J^\rho. \quad (91)$$

The pure Green's functions for the gauge and scalar fields read

$$G_{\mu\rho}(x-x')=\frac{1}{\Box}\left[g_{\mu\rho}-\kappa_{\mu\rho}-g_{\mu\rho}\kappa^{\alpha\beta}\frac{\partial_\alpha\partial_\beta}{\Box} + \kappa_{\rho\alpha}\frac{\partial^\alpha\partial_\mu}{\Box}\right]\delta(x-x'), \quad (92)$$

$$G_\mu(x-x')=\frac{1}{\Box}\left(S_\mu-S^\sigma\frac{\partial_\sigma\partial_\mu}{\Box}\right)\delta(x-x'), \quad (93)$$

$$G(x-x')=-\frac{1}{\Box}\left[1+\eta-\kappa^{\mu\beta}\frac{\partial_\mu\partial_\beta}{\Box}\right]\delta(x-x'), \quad (94)$$

respectively, where $x=(x_0,\mathbf{r})$. The above equations show that both sources J^μ and J can generate electromagnetic phenomena.

A. Static solutions for the pure gauge field

The stationary solution for the gauge field in (90) can be expressed as

$$A_\mu(\mathbf{r})=\int d\mathbf{r}'G_{\mu\rho}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')J^\rho(\mathbf{r}')+\int d\mathbf{r}'G_\mu(\mathbf{r}-\mathbf{r}')J(\mathbf{r}'), \quad (95)$$

where $G_{\mu\rho}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ is the stationary Green's function whose components obtained from (92) are

$$\begin{aligned}
G_{00}(\mathbf{R})&=-\frac{1}{2\pi}\left(1-\kappa_{00}+\frac{1}{2}\kappa_{aa}\right)\ln R-\frac{1}{4\pi}\kappa^{ab}\frac{R_aR_b}{R^2},\\
G_{0i}(\mathbf{R})&=\frac{1}{2\pi}\kappa_{0i}\ln R,\\
G_{i0}(\mathbf{R})&=\frac{1}{4\pi}\kappa_{0i}\ln R-\frac{1}{4\pi}\kappa_{0a}\frac{R_aR_i}{R^2},\\
G_{ij}(\mathbf{R})&=\frac{1}{2\pi}\left[\delta_{ij}\left(1+\frac{1}{2}\kappa_{aa}\right)+\frac{1}{2}\kappa_{ij}\right]\ln R\\
&\quad+\frac{1}{4\pi}\delta_{ij}\kappa_{ab}\frac{R_aR_b}{R^2}-\frac{1}{4\pi}\kappa_{ja}\frac{R_aR_i}{R^2},
\end{aligned} \quad (96)$$

and $G_\mu(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ is the Green's function describing the contribution of the scalar source J to the electromagnetic field, given by

$$\begin{aligned}
G_0(\mathbf{R})&=-\frac{1}{2\pi}S_0\ln R,\\
G_i(\mathbf{R})&=-\frac{1}{4\pi}S_i\ln R+\frac{1}{4\pi}S_a\frac{R_aR_i}{R^2},
\end{aligned} \quad (97)$$

where we have denoted $\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$.

The nondiagonal components of the Green's functions reveal that the charges yield electric and magnetic fields as well as currents do. We now compute the electric and magnetic fields for some special configurations of charge and current densities. In accordance with Eq. (95), the scalar and vector potentials are

$$\begin{aligned}
A_0(\mathbf{r})&=-\frac{1}{2\pi}\left(1-\kappa_{00}+\frac{1}{2}\kappa_{aa}\right)\int d\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\\
&\quad-\frac{1}{4\pi}\kappa_{ab}\int d\mathbf{r}'\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_a(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_b}{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}\rho(\mathbf{r}')\\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\kappa_{0a}\int d\mathbf{r}'J^a(\mathbf{r}')\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\\
&\quad-\frac{1}{2\pi}S_0\int d\mathbf{r}'J(\mathbf{r}')\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|
\end{aligned} \quad (98)$$

and

$$\begin{aligned}
A_j(\mathbf{r})&=\frac{1}{4\pi}\kappa_{0j}\int d\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|-\frac{1}{4\pi}\kappa_{0a}\int d\mathbf{r}'\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_a(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\rho(\mathbf{r}')+\frac{1}{2\pi}\left[\delta_{jb}\left(1+\frac{1}{2}\kappa_{aa}\right)+\frac{1}{2}\kappa_{jb}\right]\\
&\quad\times\int d\mathbf{r}'J^b(\mathbf{r}')\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|+\frac{1}{4\pi}\delta_{jc}\kappa_{ab}\int d\mathbf{r}'\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_a(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_b}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}J^c(\mathbf{r}')-\frac{1}{4\pi}\kappa_{ab}\int d\mathbf{r}'\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_a(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}J^b(\mathbf{r}')\\
&\quad-\frac{1}{4\pi}S_j\int d\mathbf{r}'J(\mathbf{r}')\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|+\frac{1}{4\pi}S_a\int d\mathbf{r}'\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_a(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}J(\mathbf{r}'),
\end{aligned} \quad (99)$$

respectively.

For a pointlike static charge distribution, $\rho(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r}')[J_i(\mathbf{r}') = 0 = J(\mathbf{r}')]$, the scalar potential and the potential vector are

$$A_0(\mathbf{r}) = -\frac{q}{2\pi}\left[\left(1 - \kappa_{00} + \frac{1}{2}\kappa_{aa}\right)\ln r + \frac{1}{2}\kappa_{ab}\frac{r_a r_b}{r^2}\right], \tag{100}$$

$$A_j(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi}\left(\kappa_{0j}\ln r - \kappa_{0a}\frac{r_a r_j}{r^2}\right), \tag{101}$$

respectively. The solution (100) differs from the usual scalar potential generated by a pointlike charge in $(1+2)$ dimensions mainly by the term $\kappa^{ab} r_a r_b / r^2$, which yields an anisotropic behavior for it. The electric field produced by the pointlike charge is

$$E_i(\mathbf{r}) = -\frac{q}{2\pi}\left[\left(1 - \kappa_{00} + \frac{1}{2}\kappa_{aa}\right)\frac{r_i}{r^2} + \kappa_{ib}\frac{r_b}{r^2} - \kappa_{ab}\frac{r_a r_b}{r^4} r_i\right], \tag{102}$$

which, in addition to its radial behavior r^{-1}, presents anisotropies, due to the last two terms $\kappa_{ib} r_b / r^2$ and $\kappa_{ab} r_a r_b r_i / r^4$, produced by the LIV backgrounds, but these Lorentz-violating corrections do not modify the global asymptotic behavior of the electric field in $(1 + 2)$ dimensions: it remains decaying as $1/r$.

From the potential vector (101) we compute the associated magnetic field produced by a pointlike charge,

$$B(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi}\epsilon_{ij}\frac{\kappa_{0i} r_j}{r^2}. \tag{103}$$

Here, we observe that the LIV parameter κ_{0i} engenders an anisotropic magnetic field whose asymptotic behavior goes as r^{-1}. It can be used to impose an upper bound for the κ_{0i} coefficients by using the experimental data concerning the two-dimensional physics.

For a pointlike charge with velocity $\mathbf{u}$, $J^i(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r}')u^i$ $[\rho(\mathbf{r}') = 0 = J(\mathbf{r}')]$, the scalar potential is

$$A_0(\mathbf{r}) = -\frac{q}{2\pi}\kappa_{0a} u_a \ln r, \tag{104}$$

while the vector potential is

$$A_j(\mathbf{r}) = -\frac{q}{2\pi}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\kappa_{aa}\right)u_j + \frac{1}{2}\kappa_{ja}u_a\right]\ln r - \frac{q}{4\pi}\kappa_{ab}u_j\frac{r_a r_b}{r^2} + \frac{q}{4\pi}\kappa_{ab}u_b\frac{r_a r_j}{r^2}. \tag{105}$$

The respective electric and magnetic fields are

$$E_i(\mathbf{r}) = -\frac{q}{2\pi}\kappa_{0a}u_a\frac{r_i}{r^2}, \tag{106}$$

$$B(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\kappa_{aa}\right)\epsilon_{ij}\frac{r_i u_j}{r^2} - \epsilon_{ij}\kappa_{ab}\frac{r_a r_b r_i u_j}{r^4} + \epsilon_{ij}\kappa_{ja}\frac{3r_i u_a - r_a u_i}{r^2}\right]. \tag{107}$$

In this model a pointlike scalar source, $J(\mathbf{r}') = q_s\delta(\mathbf{r}')$ $[\rho(\mathbf{r}') = 0 = J_i(\mathbf{r}')]$, also generates electromagnetic phenomena, whose scalar and vector potentials are given by

$$A_0(\mathbf{r}) = -\frac{q_s}{2\pi}S_0\ln r, \qquad A_j(\mathbf{r}) = -\frac{q_s}{4\pi}S_j\ln r + \frac{q_s}{4\pi}S_a\frac{r_a r_j}{r^2}, \tag{108}$$

leading to the following electric and magnetic field solutions:

$$E_i(\mathbf{r}) = -\frac{q_s}{2\pi}S_0\frac{r_i}{r^2}, \qquad B(\mathbf{r}) = \frac{q_s}{2\pi}\epsilon_{ij}\frac{S_j r_i}{r^2}. \tag{109}$$

B. Static solutions for the pure scalar field

From (91), the stationary solution for the scalar field can be expressed as

$$\phi(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')J(\mathbf{r}') - \frac{1}{2\pi}S_\mu\int d\mathbf{r}' J^\mu(\mathbf{r}')\ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \tag{110}$$

where $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ is the stationary scalar Green's function obtained from Eq. (94), and we attain

$$G(\mathbf{R}) = \frac{1}{2\pi}\left(1 + \eta + \frac{1}{2}\kappa_{aa}\right)\ln R + \frac{1}{4\pi}\kappa_{ab}\frac{R_a R_b}{R^2}. \tag{111}$$

The scalar field generated by a pointlike scalar source, $J(\mathbf{r}') = q_s\delta(\mathbf{r}')$, is

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q_s}{2\pi}\left[\left(1 + \eta + \frac{1}{2}\kappa_{aa}\right)\ln r + \frac{1}{2}\kappa_{ij}\frac{r_i r_j}{r^2}\right]. \tag{112}$$

We thus confirm that the scalar field presents a very similar behavior to that of the scalar potential, given by Eq. (100).

Similarly, the scalar fields produced by a pointlike charged scalar source, $\rho(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r}')$, and a pointlike charge with constant velocity $\mathbf{u}$, $J^i(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r}')u^i$, are

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{q}{2\pi}S_0\ln r, \qquad \phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi}S_i u_i\ln r, \tag{113}$$

respectively, showing similar radial behavior.

V. CONCLUSIONS AND PERSPECTIVES

In this work, we have performed the dimensional reduction of the nonbirefringent CPT-even electrodynamics of the standard model extension. Such a procedure generates a planar Lorentz-violating electrodynamics composed of a gauge field and a scalar field linearly coupled by a LIV three-vector S^μ. Both fields have kinetic terms modified by the Lorentz-violating symmetric tensor $\kappa^{\nu\rho}$. This planar model possesses nine independent LV components, including six parity-even and three parity-odd ones, and is therefore simpler than the one in Ref. [38], in which the Lorentz violation is governed by 19 parameters [see Lagrangian (1)].

The evaluation of the energy-momentum tensor has shown that the density of energy of the full theory can be positive definite whenever the LV parameters are sufficiently small. This indicates that the full theory is endowed with energy stability. The same conclusion is valid for both the pure gauge and the pure scalar sectors. A complete study on the dispersion relations was performed. Initially, we evaluated the dispersion relations of the gauge and scalar sectors (regarded as uncoupled) from the vacuum-vacuum amplitude, revealing that, at first order, these two fields are described by the same dispersion relations. Next, we carried out the full dispersion relations, which were exactly computed for some special combinations of the LIV parameters. The coupling vector S^{μ} contributes only at second order for the dispersion relations. All the relations confirm that the planar model is nonbirefringent at any order, whereas the original $(1+3)$-dimensional model is nonbirefringent only at leading order. This fact prevents the use of birefringence data to impose any upper bound on the planar LIV parameters, and closes the possibility of transferring birefringence bounds to the $(1+3)$ parameters [43]. From the dispersion relations we also conclude that the gauge and scalar sectors are stable, but endowed with a causality illness. A more careful analysis about the physical consistency of this model (stability, causality, unitarity) is in progress [44].

We have established the wave equations for the gauge and scalar fields, and we have achieved their stationary solutions, via the Green's function technique, at first order in the LIV coefficients. The Lorentz-violating terms induce an anisotropic character to these stationary solutions which now exhibit an explicit angular dependence. However, the LIV coefficients do not modify the long distance profile of the solutions, keeping the r^{-1} asymptotic behavior of the pure Maxwell planar electrodynamics (a fact compatible with the dimensionless nature of the LIV coefficients). The scalar and vector potentials generated by a pointlike scalar charge were carried out as well, showing that it generates electromagnetic fields. An analogous calculation was accomplished for the scalar sector, demonstrating that it obeys stationary solutions similar to the ones of the scalar potential A_0.

The planar model analyzed here is composed of parity-odd and parity-even terms, and can find applications in both parity-odd systems, such as anyonic and Hall systems, and parity-even frameworks, such as high-T_c superconducting planar systems. At the moment, we are particularly interested in analyzing effects of LIV coefficients in stable vortex configurations, having already verified that the gauge sector represented by Lagrangian $\mathcal{L}_{EM}$, when properly coupled to the Higgs sector endowed with a fourth-order self-interacting potential, supports Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfeld (BPS) solutions. A first study in this direction was recently performed in the context of the $(1+3)$-dimensional CPT-even sector of the SME, revealing the existence of BPS solutions and that the LIV parameter allows us to control the extension of the defect [45]. New developments in the context of the planar model discussed here are being considered, having as a starting point the Lagrangian

$$\mathcal{L}_{1+2} = -\tfrac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\kappa^{\rho\alpha}F_{\rho\sigma}F_{\alpha}{}^{\sigma} + |D_{\mu}\varphi|^2 - U(|\varphi|), \tag{114}$$

where $\kappa^{\rho\alpha}$ is the tensor that appears in Eq. (16), $U(|\varphi|)$ is the self-interacting potential, and $D_{\mu} = \partial_{\mu} - ieA_{\mu}$ is the covariant derivative. In this case, the main goal is the attainment of charged BPS vortex solutions, a result only obtained in the presence of the Chern-Simons term.

Another straightforward investigation consists in scrutinizing the canonical structure of the planar electrodynamics governed by Lagrangian (114) in the absence of the Higgs sector, by determining the canonical commutation relations and the quantization rules. Such an analysis will yield information about the quantum mechanics of charged interacting particles in this environment, which can be relevant to analyze the modifications induced by the Lorentz-violating terms on the Landau quantization problem.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors are grateful to FAPEMA, CAPES, and CNPq (Brazilian research agencies) for invaluable financial support. The authors also acknowledge the Instituto de Física Teórica staff for kind hospitality during the realization of this work.

APPENDIX: THE $a_k^{(n)}$ COEFFICIENTS

$$a_4^{(1)} = 2\kappa_{00}, \tag{A1}$$

$$a_4^{(2)} = (\kappa_{00})^2 + k_{00}\,\mathrm{tr}(\kappa_{ij}) - \mathbf{S}^2 - [\mathrm{tr}(\kappa_{ij})]^2 + \det(\kappa_{ij}), \quad \mathbb{K} = [\kappa_{ij}], \tag{A2}$$

$$a_4^{(3)} = -\kappa_{00}\mathbf{S}^2 - \kappa_{00}(\mathrm{tr}\kappa_{ij})^2 - \kappa_{ij}S_iS_j + [(\kappa_{00})^2 + (\det\mathbb{K}) + \mathbf{S}^2]\,\mathrm{tr}(\kappa_{ij}). \tag{A3}$$

$$a_3^{(1)} = -4(\kappa_{0i}p_i), \tag{A4}$$

$$a_3^{(2)} = 2S_0(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}) + 2(\kappa_{0i}\kappa_{ij}p_j) - 6\kappa_{00}(\kappa_{0i}p_i), \tag{A5}$$

$$a_3^{(3)} = -2(\kappa_{00})^2(\kappa_{0i}p_i) + 2(\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})[k_{00}S_0 - S_0(\mathrm{tr}\mathbb{K}) + (S_j\kappa_{0j})] + 2S_0(\kappa_{ij}S_ip_j) + 2(\kappa_{ia}\kappa_{0a})(\kappa_{ib}p_b) \tag{A6}$$

$$a_2^{(1)} = 2(\kappa_{ij}p_ip_j) - 2k_{00}\mathbf{p}^2, \tag{A7}$$

$$a_2^{(2)} = (\kappa_{00})^2\mathbf{p}^2 + 2\kappa_{00}(\epsilon_{ia}\kappa_{ab}\epsilon_{bj}p_ip_j) - (S_0)^2\mathbf{p}^2 + (S_i)^2\mathbf{p}^2 + (\epsilon_{ij}S_ip_j)^2 + 4(\kappa_{0i}p_i)^2 - (\epsilon_{ij}\kappa_{0i}p_j)^2 + (\mathbb{K}^2)_{ij}p_ip_j - 2(\epsilon_{ia}\kappa_{ab}\epsilon_{bj}p_ip_j)(\mathrm{tr}\mathbb{K}), \tag{A8}$$

$$a_2^{(3)} = (\kappa_{00})^3\mathbf{p}^2 - (\kappa_{00})^2[2\mathbf{p}^2(\mathrm{tr}\mathbb{K}) - \kappa_{ij}p_ip_j] + \kappa_{00}[2(\epsilon_{ij}S_ip_j)^2 - \kappa_{ia}\kappa_{aj}p_ip_j + 4(\kappa_{0i}p_i)^2 + 2(\mathrm{tr}\mathbb{K})^2\mathbf{p}^2] - \kappa_{00}(S_0)^2\mathbf{p}^2 - (S_0)^2(\epsilon_{ia}\kappa_{ab}\epsilon_{bj}p_ip_j) - 2S_0[(\kappa_{0i}p_i)(S_jp_j) + \mathbf{p}^2(\kappa_{0i}S_i)] + \mathbf{p}^2(\epsilon_{ia}\kappa_{ab}\epsilon_{bj}S_iS_j) - (S_k)^2(\kappa_{ij}p_ip_j) - 2(\kappa_{0a}p_a)(\kappa_{0i}\kappa_{ij}p_j) - (\kappa_{0k})^2(\kappa_{ij}p_ip_j) - \mathbf{p}^2(\kappa_{0i}\kappa_{ij}\kappa_{0j}) - (\mathbb{K}^3)_{ij}p_ip_j - 2\mathbf{p}^2(\mathrm{tr}\mathbb{K})\det(\mathbb{K}), \tag{A9}$$

$$a_1^{(1)} = 4\mathbf{p}^2(\kappa_{0i}p_i), \tag{A10}$$

$$a_1^{(2)} = 2\mathbf{p}^2[\kappa_{00}(\kappa_{0i}p_i) - (\kappa_{0i}\kappa_{ij}p_j) - S_0(S_ip_i)] - 4(\kappa_{0a}p_a)(\kappa_{ij}p_ip_j), \tag{A11}$$

$$a_1^{(3)} = -2\mathbf{p}^2(\kappa_{00})^2(\kappa_{0i}p_i) - 2\kappa_{00}(\epsilon_{ia}\kappa_{aj}p_ip_j)(\epsilon_{bc}\kappa_{0b}p_c) + 2\mathbf{p}^2(S_0)^2(\kappa_{0i}p_i) + 2S_0(S_ip_i)(\kappa_{ij}p_ip_j) - 2\mathbf{p}^2S_0(\epsilon_{ia}\kappa_{ab}\epsilon_{bj}S_ip_j) + 2(\kappa_{ij}p_ip_j)(\kappa_{ij}\kappa_{0i}p_j) - 2\mathbf{p}^2(S_i\kappa_{0i})(S_ip_i) + 2(S_ip_i)^2(\kappa_{0j}p_j) + 2(\mathrm{tr}\mathbb{K})(\epsilon_{ia}\kappa_{aj}p_ip_j)(\epsilon_{bc}\kappa_{0b}p_c) + 2(\kappa_{0i}p_i)(\epsilon_{bc}\kappa_{0b}p_c)^2, \tag{A12}$$

$$a_0^{(1)} = -2\mathbf{p}^2(\kappa_{ij}p_ip_j),$$
$$a_0^{(2)} = -(\kappa_{00})^2\mathbf{p}^4 + \mathbf{p}^4\kappa_{00}(\mathrm{tr}\mathbb{K}) + (S_0)^2\mathbf{p}^4 - \mathbf{p}^4(\mathrm{tr}\mathbb{K})^2 - \mathbf{p}^2(\epsilon_{ij}S_ip_j)^2 + \mathbf{p}^2(\epsilon_{ij}\kappa_{0i}p_j)^2 + (\kappa_{ij}p_ip_j)^2 + \mathbf{p}^2(\mathrm{tr}\mathbb{K})(\kappa_{ij}p_ip_j), \tag{A13}$$

$$a_0^{(3)} = \mathbf{p}^4(\kappa_{00})^2(\mathrm{tr}\mathbb{K}) - \mathbf{p}^2\kappa_{00}[\mathbf{p}^2(\mathrm{tr}\mathbb{K})^2 + (\epsilon_{ij}S_ip_j)^2 + (\epsilon_{ij}\kappa_{0i}p_j)^2] - \mathbf{p}^4(S_0)^2(\mathrm{tr}\mathbb{K}) + (\kappa_{ij}p_ip_j)(\epsilon_{ij}S_ip_j)^2 + 2S_0(\epsilon_{ij}S_ip_j)(\epsilon_{ij}\kappa_{0i}p_j) - (\kappa_{ij}p_ip_j - \mathbf{p}^2\mathrm{tr}\mathbb{K})(\epsilon_{ij}\kappa_{0i}p_j)^2 - (\kappa_{ij}p_ip_j)(\kappa_{ij}p_ip_j - \mathbf{p}^2\,\mathrm{tr}\mathbb{K})(\mathrm{tr}\mathbb{K}). \tag{A14}$$

[1] V. A. Kostelecky and S. Samuel, Phys. Rev. Lett. **63**, 224 (1989); **66**, 1811 (1991); Phys. Rev. D **39**, 683 (1989); **40**, 1886 (1989); V. A. Kostelecky and R. Potting, Nucl. Phys. **B359**, 545 (1991); Phys. Lett. B **381**, 89 (1996); Phys. Rev. D **51**, 3923 (1995).

[2] D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997); **58**, 116002 (1998); S. R. Coleman and S. L. Glashow, Phys. Rev. D**59**, 116008 (1999).

[3] S. M. Carroll, G. B. Field, and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).

[4] A. P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo, and J. A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **67**, 085021 (2003); A. P. Baeta Scarpelli and J. A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **73**, 105020 (2006).

[5] C. Adam and F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. **B607**, 247 (2001); **B657**, 214 (2003).

[6] A. A. Andrianov and R. Soldati, Phys. Rev. D **51**, 5961 (1995); Phys. Lett. B **435**, 449 (1998); A. A. Andrianov, R. Soldati, and L. Sorbo, Phys. Rev. D **59**, 025002 (1998); A. A. Andrianov, D. Espriu, P. Giacconi, and R. Soldati, J. High Energy Phys. 09 (2009) 057; J. Alfaro, A. A. Andrianov, M. Cambiaso, P. Giacconi, and R. Soldati, Int. J. Mod. Phys. A **25**, 3271 (2010); V. Ch. Zhukovsky, A. E. Lobanov, and E. M. Murchikova, Phys. Rev. D **73**, 065016 (2006).

[7] M. S. Berger and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **65**, 091701 (2002); H. Belich, J. L. Boldo, L. P. Colatto, J. A. Helayel-Neto, and A. L. M. A. Nogueira, Phys. Rev. D **68**, 065030 (2003); A. P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo, L. P. Colatto, J. A. Helayel-Neto, and A. L. M. A. Nogueira, Nucl. Phys. B, Proc. Suppl. **127**, 105 (2004).

[8] R. Lehnert and R. Potting, Phys. Rev. Lett. **93**, 110402 (2004); Phys. Rev. D **70**, 125010 (2004); B. Altschul, Phys. Rev. D **75**, 105003 (2007); C. Kaufhold and F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. **B734**, 1 (2006).

[9] J. M. Fonseca, A. H. Gomes, and W. A. Moura-Melo, Phys. Lett. B **671**, 280 (2009).

[10] R. Casana, M. M. Ferreira, Jr., and J. S. Rodrigues, Phys. Rev. D **78**, 125013 (2008); J. A. de Sales, T. Costa-Soares, and V. J. Vasquez Otoya, arXiv:1106.4604.

[11] A. H. Gomes, J. M. Fonseca, W. A. Moura-Melo, and A. R. Pereira, J. High Energy Phys. 05 (2010) 104.

[12] M. Frank and I. Turan, Phys. Rev. D **74**, 033016 (2006); O. G. Kharlanov and V. Ch. Zhukovsky, Phys. Rev. D **81**, 025015 (2010).

[13] N. M. Barraz, Jr., J. M. Fonseca, W. A. Moura-Melo, and J. A. Helayël-Neto, Phys. Rev. D **76**, 027701 (2007).

[14] M. D. Seifert, Phys. Rev. Lett. **105**, 201601 (2010); Phys. Rev. D **82**, 125015 (2010).

[15] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **87**, 251304 (2001).
[16] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D **66**, 056005 (2002).
[17] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **97**, 140401 (2006).
[18] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D **80**, 015020 (2009).
[19] B. Altschul, Nucl. Phys. **B796**, 262 (2008); Phys. Rev. Lett. **98**, 041603 (2007); C. Kaufhold and F. R. Klinkhamer, Phys. Rev. D **76**, 025024 (2007).
[20] F. R. Klinkhamer and M. Risse, Phys. Rev. D **77**, 016002 (2008); **77**, 117901 (2008).
[21] F. R. Klinkhamer and M. Schreck, Phys. Rev. D **78**, 085026 (2008).
[22] Q. Exirifard, Phys. Lett. B **699**, 1 (2011).
[23] F. R. Klinkhamer and M. Schreck, Nucl. Phys. **B848**, 90 (2011).
[24] R. Casana, M. M. Ferreira, Jr., A. R. Gomes, and F. E. P. Santos, Phys. Rev. D **82**, 125006 (2010).
[25] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, Ann. Phys. (N.Y.) **140**, 372 (1982).
[26] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **48**, 1144 (1982); **49**, 957 (1982); F. Wilczek and A. Zee, Phys. Rev. Lett. **51**, 2250 (1983).
[27] D. C. Tsui, H. L. Stormer, and A. C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982).
[28] R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983); F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **51**, 605 (1983); B. I. Halperin, Phys. Rev. Lett. **52**, 1583 (1984); **52**, 2390 (1984).
[29] D. Arovas, J. R. Schrieffer, and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **53**, 722 (1984).
[30] S. K. Paul and A. Khare, Phys. Lett. B **174**, 420 (1986); **177**, 453 (1986).
[31] R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **60**, 2677 (1988); Science **242**, 525 (1988).
[32] F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity* (World Scientific, Singapore, 1990).
[33] A. Khare, *Fractional Statistics and Quantum Theory* (World Scientific, Singapore, 2005), 2nd ed.
[34] A. Lerda, *Anyons: Quantum Mechanics of Particles with Fractional Statistics*, Lectures in Physics m14 (Springer-Verlag, Berlin, 1992).
[35] Z. F. Ezawa, *Quantum Hall Effects* (World Scientific, Singapore, 2000).
[36] R. Jackiw and E. J. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **64**, 2234 (1990); R. Jackiw, K. Lee, and E. J. Weinberg, Phys. Rev. D **42**, 3488 (1990); J. Hong, Y. Kim, and P. Y. Pac, Phys. Rev. Lett. **64**, 2230 (1990); S. Bolognesi and S. B. Gudnason, Nucl. Phys. **B805**, 104 (2008).
[37] Gerald V. Dunne, *Self-Dual Chern-Simons Theories*, Lectures Notes in Physics (Springer-Verlag, Heidelberg, 1995); arXiv:hep-th/9902115.
[38] R. Casana, E. S. Carvalho, and M. M. Ferreira, Jr., Phys. Rev. D **84**, 045008 (2011).
[39] B. Altschul, Phys. Rev. Lett. **98**, 041603 (2007).
[40] M. N. Barreto, D. Bazeia, and R. Menezes, Phys. Rev. D **73**, 065015 (2006); D. Bazeia, M. M. Ferreira, Jr., A. R. Gomes, and R. Menezes, Physica D (Amsterdam) **239**, 942 (2010); A. de Souza Dutra and R. A. C. Correa, Phys. Rev. D **83**, 105007 (2011).
[41] M. A. Anacleto, F. A. Brito, and E. Passos, Phys. Lett. B **694**, 149 (2010); **703**, 609 (2011).
[42] A. Ferrero and B. Altschul, Phys. Rev. D **84**, 065030 (2011).
[43] Note that the $(1 + 3)$-dimensional parameters are birefringent at subleading order, which can be used to impose some upper bounds (see Ref. [22]).
[44] R. Casana, M. M. Ferreira, Jr., and R. P. M. Moreira, arXiv:1111.1222.
[45] R. Casana, C. M. Cantanhede, M. M. Ferreira, Jr., and E. da Hora, arXiv:1109.2931.