Universidade Federal do Maranhão

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

Redução Dimensional do Setor CPT-Par do Modelo Padrão Estendido

Eduardo Santos Carvalho

Orientador: Manoel Messias Ferreira Jr

Co-orientador: Rodolfo Alván Casana Sifuentes

São Luís, Julho de 2011

Redução Dimensional do Setor CPT-Par do Modelo Padrão Estendido

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

Orientador: Manoel Messias Ferreira Jr
Doutor em Física - UFMA

Co-orientador: Rodolfo Alván Casana Sifuentes
Doutor em Física - UFMA

São Luís, Julho de 2011

Carvalho, Eduardo Santos

Redução Dimensional do Setor CPT-Par

do Modelo Padrão Estendido/ Eduardo Santos Carvalho - 2011

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Física

Universidade Federal do Maranhão.

Orientador: Manoel Messias Ferreira Jr

Co-orientador: Rodolfo Alván Casana Sifuentes

1. Teoria Clássica de Campos 2. Violação das simetrias CPT e de Lorentz

3. Redução Dimensional. I Título

CDU

Eduardo Santos Carvalho

Redução Dimensional do Setor CPT-Par do Modelo Padrão Estendido

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

BANCA EXAMINADORA

Manoel Messias Ferreira Jr
Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Rodolfo Alván Casana Sifuentes
Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Paulo Renato Silva de Carvalho
Doutor em Física - Universidade Federal do Piauí (UFPI)

À minha família.

Agradecimentos

À minha família, que sempre acreditou em mim e me deu todo incentivo e apoio sempre. À minha mãe Lindalva, meu irmão Ronald, meu pai Carvalho, meu irmão Daniel e Flávia.

Ao meu orientador Manoel Messias Ferreira Jr, pela excelente orientação e, principalmente, pela paciência que teve comigo nestes dois anos. Sou muito grato.

Ao meu co-orientador Rodolfo Alván Casana Sifuentes, pela co-orientação, pelo incentivo e sobretudo pela cultura matemática que me deu.

À todos os professores do Departamento de Física da UFMA, em especial o professor Antonio Pinto Neto, pelos impagáveis ensinamentos.

Aos meus grandes amigos de mestrado: Kleber Anderson Teixeira da Silva, Roemir Peres Machado, Fabiano Carvalho Simas.

Um agradecimento especial a uma pessoa que admiro muito, Geise Marjore Ferreira Mendes, que muito me incentivou para a realização deste trabalho. Obrigado, de verdade.

À Capes pelo auxílio financeiro.

A mente que se abre a uma nova idéia jamais voltará ao seu tamanho original.

Albert Einstein

Resumo

O setor de gauge abeliano CPT-Par do Modelo Padrão Estendido é representado pelo termo de Maxwell suplementado por $(K_F)^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$, onde o tensor de campo de fundo violador de Lorentz, $(K_F)^{\mu\nu\rho\sigma}$, possui as simetrias do tensor de Riemann e um duplo traço nulo. No presente trabalho é examinada a versão planar dessa teoria, obtida por meio do procedimento de redução dimensional para (1+2) dimensões. A eletrodinâmica planar resultante é composta de um setor de gauge contendo seis coeficientes de violação de Lorentz, um campo escalar regido por um termo cinético não canônico, e um termo de acoplamento que interliga os dois setores. A paridades das componentes dos tensores violadores de Lorentz é analisada. Também são encontradas as equações de movimento da teoria, onde o campo eletromagnético aparece acoplado ao campo escalar. Este acoplamento, no entanto, aparece apenas como um efeito de segunda ordem nas equações de movimento e por isso é descartado. O tensor de energia-momento da teoria é calculado, apresentando contribuições tanto dos setores escalar e de gauge quanto do de acoplamento. A partir deste tensor é encontrada uma densidade de energia positiva definida apenas para pequenas parâmetros de violação. As equações de onda para, os campos $\mathbf{E}$ e B e potenciais A_0 e $\mathbf{A}$, são escritas e resolvidas no regime estacionário, via o método de Green. Observa-se que os parâmetros de violação de Lorentz não alteram o comportamento assimptótico dos campos, mas induzem uma dependência angular não observada na teoria planar de Maxwell. É também observado que cargas estáticas geram campo magnético, assim como correntes estacionárias geram campo elétrico, uma propriedade já presente na teoria original em (1+3) dimensões. A relação de dispersão também é determinada, revelando que os seis parâmetros relacionados ao setor eletromagnético puro não produzem birrefringência. Neste modelo, a birrefringência pode aparecer apenas como um efeito de segunda ordem associado ao tensor de acoplamento que liga os campos escalar e de gauge.

Palavras Chaves: Modelo Padrão Estendido, Violação das Simetrias de Lorentz e CPT, Redução Dimensional.

Abstract

The CPT-even abelian gauge sector of the Standard Model Extension is represented by the Maxwell term supplemented by $(K_F)^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$, where the Lorentz-violating background tensor, $(K_F)^{\mu\nu\rho\sigma}$, possesses the symmetries of the Riemann tensorand a double null trace. In the present work, it is examined the planar version of this theory, obtained by means of a dimensional reduction procedure to (1 + 2) dimensions. The resulting planar electrodynamics is composed of a gauge sector containing six Lorentz-violating coefficients, a scalar field endowed with a noncanonical kinetic term, and a coupling term that links the scalar and gauge sectors. The parity of the components of the Lorentz violating tensors is analyzed, following the definition of the parity operator in (1 +2) dimensions. The equations of motion of the theory are also found, where the electromagnetic field appears coupled to scalar field. This coupling however appears only as a second order effect on the violation coefficients and thus it is neglected. The energy-momentum tensor of the theory is calculated, revealing contributions of scalar, gauge and coupling sectors . From this tensor it is found a positive energy density defined for small violation parameters. The wave equations for the fields $\mathbf{E}$ and B and the potential A_0 and $\mathbf{A}$ are written and solved in the steady state by the method of Green. It is observed that the Lorentz-violating parameters do not alter the asymptotic behavior of the fields but induce an angular dependence not observed in the Maxwell planar theory. It is also observed that electrical charges generate static magnetic field, as well as stationary currents generate electric field, a property already present in the original theory in (1 +3) dimensions. The dispersion relation also is determined, revealing that the six parameters related to the pure electromagnetic sector do not yield birefringence at first order. In this model, the birefringence may appear only as a second order efect associated with the coupling tensor linking the gauge and scalar sectors.

Keywords: Standard Model Extension, CPT and Lorentz Simmetry Violation, Dimensional Reduction.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A simetria de Lorentz e a simetria CPT são, sem dúvida, duas das simetrias mais importantes de toda a Física, e também umas das mais testadas e mais precisamente verificadas dessa ciência. As investigações sobre violação da simetria de Lorentz, entretanto, têm ocupado um bom espaço no cenário físico nos últimos anos, tendo implicado na construção de uma estrutura teórica que permite examinar as consequências desta quebra e estabelecer limites sobre os parâmetros que a controlam. O estudo da simetria de Lorentz foi iniciado com o advento do Eletromagnetismo de Maxwell [1] e foi estabelecida com o advento da teoria da relatividade [2], no início do século anterior, mostrando que a física mantém-se invariante perante as transformações de Lorentz. Quanto à simetria CPT, corresponde à combinação de três simetrias discretas: a conjugação de carga (C), a inversão espacial ou paridade (P) e a inversão temporal (T). A operação de conjugação da carga supõe que, para cada partícula, existe uma anti-partícula com a mesma massa, mas com carga oposta. Já a simetria de paridade caracteriza um sistema que é invariante sob a inversão das coordenadas espaciais. Uma esfera homogênea colocada diante de um espelho, por exemplo, demonstra essa simetria. A inversão temporal, por outro lado, consiste em reverter o sentido de evolução do tempo. Pode-se assistir, por exemplo, um filme qualquer do início ao fim e, em seguida, do fim ao início. Todas as imagens são vistas retrocedendo e contando uma história diferente; neste caso, não há simetria. Porém assistindo-se, particularmente, um filme sobre um taco de sinuca acertando uma bola, que adquire então uma certa velocidade, choca-se contra um lado da mesa de sinuca e retorna para o mesmo ponto de partida, a situação neste caso é diferente. Retrocedendo as imagens desse filme, vê-se exatamente as mesmas cenas e não se tem mais condição de determinar o sentido real do filme. Neste caso, há simetria de inversão temporal.

Na natureza já foram identificadas a violação de modo individual das simetrias C, P, T e até a simetria conjunta CP. Esta última simetria consiste na composição das simetrias de conjugação de carga e de paridade. Ela foi proposta por Landau em 1957 e descoberta em 1964 pelos norte-americanos James Cronin e Val Fitch, os quais foram laureados com o prêmio Nobel de Física em 1980. O mecanismo da quebra espontânea da simetria CP foi proposta pelo físico japonês Yiochiro Nambu quando estudava decaimento de káons, o que lhe valeu o prêmio Nobel de Física em 2008. A quebra espontânea da simetria CP está relacionada ao fato de existir mais matéria do que anti-matéria no Universo, o que consitui um problema em aberto. Apesar de todas essas violações de simetria, não existe até o momento nenhuma comprovação experimental da violação das simetrias PT e CPT.

As modernas Teorias Quânticas de Campos, descrevendo as partículas elementares e suas interações, pertencem ao ferramental teórico do Modelo Padrão da Física das Partículas Elementares, que congrega três das quatro interações fundamentais: a interação eletromagnética, a nuclear fraca e a nuclear forte (somente a interação gravitacional é tratada separadamente, pela teoria da Relatividade Geral). Estas teorias foram construídas incorporando a invariância de Lorentz e a validade do teorema CPT [3, 4]. Apesar de sua estrutura unificadora bem sucedida, o Modelo Padrão não resolve algumas das questões fundamentais da física contemporânea: assimetria entre matéria e anti-matéria, constituição da matéria e energia escura, a conexão da gravitação com a mecânica quântica na escala de Planck (gravitação quântica), o problema da hierarquia das escalas de energia, entre outras. Para entender o problema da hierarquia, deve-se observar que a física do Modelo Padrão é toda dividida em escalas de energia. A mais baixa é a escala eletrofaca, onde a teoria tem sido precisamente testada e comprovada. Ela é da ordem de 100 GeV. A uma energia muitíssimo maior, da ordem de 10^{16} GeV, está a escala de grande unificação, onde as forças forte, fraca e eletromagnética adquirem a mesma intensidade. Ainda mais acima está a escala de energia de Planck, onde a gravidade deve, enfim, estar no mesmo patamar das outras forças. Mas por que essa separação tão imensa das escalas de unificação? E, importante também, o que acontece nesse gigantesco intervalo até elas? Ou ainda, expressando de outra forma, até onde o Modelo Padrão é válido?

É dentro desse contexto de incomplitude do Modelo Padrão e da sua incompatibilidade com a gravitação, que se abre espaço para a elaboração e proposição de novas teorias, denominadas genericamente de "Física além do Modelo Padrão", desenvolvidas também para tratar a física na escala de Planck. Nesta escala de energia, onde impera a gravidade quântica, existe a possibilidade de ocorrer quebra espontânea das simetrias de Lorentz e CPT [5], gerando quantidades tensoriais como valores esperados no vácuo. Este mecanismo de quebra espontânea de simetria ocorre toda vez que uma simetria da teoria (da lagrangeana ou da hamiltoniana) não é respeitada pelos estados fundamentais - vácuos - dessa mesma teoria. Um bom exemplo de sistema onde ocorre tal quebra é um ferromagneto na fase desordenada. Ao passar para a fase ordenada, via quebra espontânea da simetria rotacional, os spins alinham-se numa determinada direção, escolhida aleatoriamente. A Hamiltoniana que descreve o sistema original é invariante sob rotações, porém, após a transição de fase, todos os momentos magnéticos alinham-se numa determinada direção, quebrando a simetria original do sistema. A possibilidade da violação de Lorentz na escala de Planck é importante porque pode revelar novos caminhos para o desenvolvimento de uma teoria da gravitação quântica, promovendo a unificação da interação gravitacional junto à estrutura do Modelo Padrão.

Assim, um possível mecanismo teórico no qual as simetrias de Lorentz e CPT poderiam ser quebradas seria a quebra espontânea. Ou seja, a teoria poderia ser simétrica frente as transformações e as suas soluções de vácuo violariam as simetrias. Essa é uma proposta interessante uma vez que a dinâmica da teoria permanece invariante. Uma outra maneira de implementar a quebra de uma simetria em uma teoria é inserindo termos que violam a simetria desde o início. Esse procedimento é o que se chama de quebra explícita da simetria, uma vez que se parte de uma teoria que possui a violação da simetria em estudo já na Lagrangeana - Hamiltoniana - que descreve o sistema. Essa maneira parece não muito elegante já que se insere os termos de forma ad hoc na Lagrangeana a fim de que esses forneçam a assimetria desejada. Contudo, pode-se interpretar uma quebra explícita de uma simetria como uma teoria efetiva que leva em conta as correções que virão da quebra espontânea proporcionada pelos vácuos. Esses termos que violam as simetrias podem ser obtidos por correções quânticas vindas de um acoplamento entre o setor onde se quer obter a violação e um outro setor que já possui a simetria violada.

Um dos primeiros estudos sobre a conseqüência da violação das simetrias de Lorentz e CPT foi proposto por Carroll-Field-Jackiw (CFJ), no início dos anos 90 [11], modificando a eletrodinâmica de Maxwell via adição na densidade Lagrangeana de um termo do tipo Chern-Simons, $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\left(k_{AF}\right)_{\mu} A_{\nu}F_{\kappa\lambda}$. Nesse termo, o vetor constante $\left(k_{AF}\right)_{\mu}$ é o responsável por fixar um campo de fundo que quebra as simetrias. Posteriormente, Colladay e Kostelecky, influenciados pelos trabalhos de Carroll-Field-Jackiw, elaboraram um modelo teórico denominado Modelo Padrão Estendido, que incorpora termos violadores de Lorentz e CPT em todos os setores de interação do Modelo Padrão [12]. Esses termos são quantidades tensoriais gerados via quebra espontânea de simetria no contexto de uma teoria mais fundamental, definida na escala de energia de Planck; estes são os coeficientes responsáveis pela violação. Há dois termos: um é CPT-ímpar, que viola a simetria CPT, e o outro é CPT-par, que não viola. Ambos são violadores da simetria de Lorentz. O termo CPT-ímpar é o termo de Carroll-Field-Jackiw. Já o termo CPT-par é do tipo $\left(k_F\right)^{\mu\nu\kappa\lambda} F_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda}$, onde tensor $\left(k_F\right)^{\mu\nu\kappa\lambda}$ apresenta as mesmas simetrias que o tensor de Riemann, além de possuir duplo traço nulo, $\left(k_F\right)^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta}$. Importante destacar que a simetria de Lorentz nesse modelo é violada apenas no referencial da partícula, permanecendo intacta no referencial do observador.

Contudo, apesar de todas as justificativas dadas a favor do estudo da violação das simetrias de Lorentz e de CPT tem-se que ter em mente que por mais bonita que seja uma teoria, um possível acesso experimental as afirmações feitas pela teoria deve ser dado. Com isso, poderia-se perguntar se há experimentos em que as predições dos efeitos causados pela violação das simetrias poderiam ser testados ou, pelo menos, se há limites para os termos de violação. Experimentos investigando a violação das simetrias de Lorentz e de CPT em oscilações de neutrinos e káons, comparação de relógios, investigação no setor de múons, testes da QED em armadilhas de Penning são descritos em [13, 14, 15, 16, 17].

Uma característica marcante da eletrodinâmica do MPE é o fato de apresentar o fenômeno da birrefrigência do vácuo [11, 19, 20], no qual a velocidade de fase da luz depende do modo de propagação, causando uma rotação do plano de polarização. Considerando que a birrefrigência cresce linearmente com a distância, a análise deste efeito sob escala cosmológica oferece um bom cenário para a busca de indícios da violação das simetrias. A análise de luz polarizada de fontes astrofísicas distantes [11, 19, 20] tem a vantagem de constituir dados que permitem obter limites severos sobre a magnitude dos parâmetros de violação mais rigorosos que aqueles conseguidos com testes em cavidades ópticas e ressonantes [21]. Nesse contexto, foram também usados dados de polarização da radiação cósmica de fundo, a radiação mais antiga e limpa disponível para observação, para interpor limites sobre parâmetros de quebra [22]. Por outro lado, a radiação Cherenkov em raios cósmicos de altíssima energia [23, 24, 25] também tem sido analisada. Os dados têm restringido severamente a magnitude desses parâmetros de violação, que devem ser inferiores a 10^{-30}.

Todos esses estudos, porém, têm sido realizados em cenários com (1+3) dimensões, o que levanta questões sobre a estrutura de um modelo similar definido em (1+2) dimensões e suas possíveis implicações. Um procedimento adequado para a análise dessas questões é o da redução dimensional, que consiste em transformar uma teoria definida em (1+3) dimensões em uma outra teoria, com uma física diferente, definida em (1+2) dimensões.

Na referência [26] foi realizada a redução dimensional do setor CPT-ímpar do Modelo Padrão Estendido, fornecendo uma eletrodinâmica planar composta pela eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons acoplada a um campo escalar sem massa. Este modelo planar foi estudado em sua consistência e suas soluções clássicas foram determinadas em [27]. A redução dimensional do modelo de Maxwell-Higgs-Carrol-Field-Jackiw, por sua vez, foi realizada em [28].

Nesta dissertação, realiza-se a redução dimensional do setor CPT-par do Modelo Padrão Estendido. Este trabalho está organizado do seguinte modo. No capítulo 2 é realizada uma revisão sobre alguns aspectos essenciais da eletrodinâmica de Maxwell em (1+3) dimensões e em (1+2) dimensões, passando pelas equações de Maxwell, equações de onda, formulação tensorial, e soluções clássicas. É apresentado o procedimento de redução dimensional que permite passar de uma teoria tridimensional para a a bidimensional. Usa-se o exemplo de um fio infinito uniformemente carregado para ilustrar a natureza de soluções eletromagnéticas bidimensionais. No Cap. 3, é apresentada uma breve revisão sobre alguns aspectos da eletrodinâmica CPT-par o Modelo Padrão Estendido. No Cap. 4 é realizada a redução dimensional do setor de gauge CPT-Par do Modelo Padrão Estendido, seguindo novamente a prescrição adotada nas referências [26, 27, 28]. Dessa maneira é obtida uma teoria composta por um setor eletromagnético, um setor escalar com termo cinético não usual e um setor misto, que acopla os campos escalar e de gauge. No setor eletromagnético, a violação de Lorentz é induzida por um tensor de quarta ordem, $Z^{\mu\nu\lambda\kappa}$, que apresenta as mesmas simetrias que o tensor de Riemann e possui cinco componentes independentes. O setor escalar apresenta um termo cinético não canônico, $C^{\mu\lambda}\partial_\mu\varphi\partial_\lambda\varphi$, onde $C^{\mu\lambda}$ é o tensor violador de Lorentz de segunda ordem e simétrico, com seis componentes independentes. O setore escalar e o de gauge são acoplados pelo tensor de terceira ordem $T^{\mu\nu\lambda}$, cujas simetrias implicam oito componentes independentes. Uma vez que o modelo planar é construído e alguns de seus fatos são destacados, é realizado o cálculo do tensor de energia-momento da teoria além de sua relação de dispersão. Também são discutidas as equações de onda dos potenciais e campos e suas respectivas soluções, com seus desvios da eletrodinâmica usual. Em seguida, as conclusões e perspectivas do trabalho são apresentadas. Também são incluídos dois apêndices: um com a discussão de alguns resultados importantes, usados ao longo dos capítulos e que envolvem integrais em (1+2) dimensões (Apêndice A); e outro com a discussão de soluções exatas das equações de onda para os potenciais e campos da teoria planar violadora de Lorentz (Apêndice B).

Capítulo 2

Eletrodinâmica de Maxwell

A teoria do campo eletromagnético foi formulada por Maxwell [1] na segunda metade do século XIX e, desde então, tornou-se um dos pilares da Física. Além de explicar os fenômenos elétricos e magnéticos da matéria, esta teoria estabelece que a radiação eletromagnética propaga-se com a mesma velocidade de propagação da luz, c, identificando assim uma com a outra e, consequentemente, unificando o Eletromagnetismo e a Ótica. Neste capítulo, realiza-se uma breve revisão de alguns aspectos importantes da teoria eletromagnética no mundo tridimensional, e aborda-se também a teoria eletromagnética em sistemas planares, apresentando o procedimento de redução dimensional que possibilita obter a teoria planar a partir do eletromagnetismo em (1+3) dimensões.

2.1 Eletrodinâmica de Maxwell em (1+3) dimensões

A teoria eletromagnética de Maxwell, no vácuo, é regida por quatro equações, sendo duas não-homogêneas

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{2.1}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{E} = \mu_0 \overrightarrow{j}, \tag{2.2}$$

e duas homogêneas

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0, \tag{2.3}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} + \frac{\partial}{\partial t}B = 0, \tag{2.4}$$

onde $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$. Estas equações são invariantes perante as chamadas transformações de Lorentz, o que caracteriza a simetria de Lorentz. Elas também são invariantes perante as transformações CPT: invertendo-se o sentido de evolução do tempo (reversão temporal - T), os eixos espaciais (reversão espacial ou paridade - P) e as cargas e correntes elétricas (conjugação de carga - C), as equações permanecem exatamente as mesmas. Isso caracteriza a simetria CPT. As Eq. (2.1) e (2.3) são, respectivamente, a lei de Gauss elétrica e a lei de Gauss magnética. A Eq. (2.2) é a lei de Ampére-Maxwell e a Eq. (2.4) é a lei de Faraday.

As equações não-homogêneas são compatíveis com a chamada equação da continuidade, que está relacionada com a garantia de conservação da carga elétrica. Isto pode ser visto aplicando-se um divergente nos dois membros da Eq. (2.2)

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \left[\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{E} \right] = \mu_0 \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{j}, \tag{2.5}$$

Lembrando o fato da divergência de um rotacional ser nula, $c^2 = 1/\mu_0 \varepsilon_0$, e a Eq. (2.1), obtém-se a equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{j} = 0. \tag{2.6}$$

Por outro lado, as equações homogêneas permitem definir os campos elétrico e magnético em função dos potenciais escalar A^0 e vetorial $\overrightarrow{A}$:

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}, \tag{2.7}$$

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla} A^0 - \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{A}. \tag{2.8}$$

Escritos dessa forma, fica claro que os campos ficam inalterados perante as chamadas transformação de gauge

$$\overrightarrow{A'} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{\nabla} \Gamma, \quad A'^0 = A^0 - \frac{\partial}{\partial t} \Gamma. \tag{2.9}$$

sendo Γ uma função escalar arbitrária. Tal invariância caracteriza a chamada simetria de gauge do eletromagnetismo. Esta é também, tal como a simetria de Lorentz e CPT, uma das simetrias fundamentais da natureza. Ela está no âmago do eletromagnetismo e das chamadas teorias de gauge. A eletrodinâmica de Maxwell foi a primeira teoria física a apresentar esta simetria em sua estrutura. Após o sucesso de sua aplicação no eletromagnetismo, ela foi encontrada também na Teoria da Relatividade Geral e em outras teorias de campos, tais como a teoria Eletrofraca e a Cromodinâmica Quântica, estendendo assim o conceito de invariância de gauge. Esta simetria ganhou uma enorme importância quando C. N. Yang e Robert Mills, nos anos 50, usaram-na para resolver um problema referente à interação forte, baseada em grupos não-abelianos. Após os trabalhos de Yang-Mills, as teorias de gauge forneceram uma forma unificada para descrever três das quatro interações fundamentais: a eletromagnética, a força fraca e a força forte. Desse modo, o Modelo Padrão da Física de Partículas Elementares é uma teoria de gauge construída sob o grupo de invariância SU(3)×SU(2)×U(1): a Cromodinâmica Quântica, que descreve a interação forte, é baseada no grupo de simetria SU(3), a Flavordinâmica Quântica, que descreve a interação fraca, no grupo SU(2) e a Eletrodinâmica Quântica, que descreve a interação eletromagnética, no grupo U(1).

As equações de Maxwell admitem, ainda, equações de onda para os campos elétrico e magnético. Para encontrá-las é necessário o conhecimento da seguinte identidade para um vetor $\vec{C}$ qualquer:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{C} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{C}\right) - \nabla^2 \vec{C}. \tag{2.10}$$

Sabendo disso, e aplicando o rotacional nos dois membros da Eq. (2.4),

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0, \tag{2.11}$$

e usando as Eqs. (2.1) e (2.2), pode-se encontrar a equação de onda para o campo elétrico:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\nabla}\rho + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{j}. \tag{2.12}$$

Por outro lado, aplicando o rotacional na Eq. (2.2),

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}\right) - \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{E} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{j}, \tag{2.13}$$

e fazendo uso das Eqs. (2.3) e (2.4), encontra-se a equação de onda para o campo magnético:

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} = -\mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{j}. \tag{2.14}$$

Estas duas equações de onda, Eqs. (2.12) e (2.14), no vácuo, ou seja, na ausência de fontes ($\rho = 0$ e $\vec{j} = 0$), representam ondas se propagando com velocidade c, que coincide, como dito acima, com a velocidade de propagação da luz, fato que sugeriu identificar a luz com a radiação eletromagnética e unificou o Eletromagnetismo e a Ótica [1]. Equações semelhantes podem ser obtidas para os potenciais. Reescrevendo as equações não-homogêneas (2.1) e (2.2) em termos deles, encontra-se

$$-\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} A^0 + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{2.15}$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} A^0 + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right) = \mu_0 \vec{j}. \tag{2.16}$$

Organizando de uma forma um pouco diferente, após somar e subtrair $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A^0$ na Eq. (2.15) e agrupar alguns termos num mesmo gradiente na Eq. (2.16), resulta ainda

$$-\nabla^2 A^0 - \frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A^0\right] + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A^0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{2.17}$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A^0\right) - \nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \tag{2.18}$$

Aqui é conveniente fazer uso da liberdade de escolha dos potenciais e trabalhar com o chamado gauge de Lorentz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}A^0 = 0. \tag{2.19}$$

Com isto, as Eqs. (2.17) e (2.18) acima são simplicadas para

$$\nabla^2 A^0 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A^0 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{2.20}$$

$$\nabla^2 \overrightarrow{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overrightarrow{A} = -\mu_0 \overrightarrow{j}. \tag{2.21}$$

que são as duas equações de onda para o potencial escalar e para o potencial vetorial. Estas são as equações que descrevem a propagação das ondas eletromagnéticas, um dos principais pontos da teoria de Maxwell.

É fato conhecido que a teoria de Maxwell admite uma formulação tensorial, na qual as quatro equações de Maxwell podem ser compactadas em apenas duas equações tensoriais: as não-homogêneas em uma e as homogêneas em outra. Isso é possível tomando como ponto de partida a conhecida Lagrangeana de Maxwell (aqui escrita no sistema de unidades naturais, onde $c = 1$)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - j^\alpha A_\alpha, \tag{2.22}$$

onde define-se o tensor do campo eletromagnético

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha, \tag{2.23}$$

e os quadrivetores potencial e corrente eletromagnético

$$A^\mu = \left(A^0, \overrightarrow{A}\right), \quad j^\mu = \left(\rho, \overrightarrow{j}\right). \tag{2.24}$$

O tensor do campo eletromagnético possui ordem 2 e é anti-simétrico por definição, com seus índices variando de 0 a 3. Sendo assim, das suas 16 componentes apenas 6 são independentes, número que coincide com a quantidade de componentes dos campos elétrico e magnético, os quais correspondem de fato a essas componentes independentes.

Usando a métrica de Minkowski $g = (+, - - -)$, pode-se verificar facilmente que as componentes do campo elétrico são dadas pelas componentes $0i$ do tensor campo eletromagnético

$$F_{0i} = \partial_t A_i - \partial_i A_0 = -\partial_t A^i - \partial_i A^0 = E^i. \tag{2.25}$$

Quanto ao campo magnético, é dado pelas componentes puramente espaciais (que variam de 1 a 3), ou seja,

$$F_{lm} = \epsilon_{ilm} B^i. \tag{2.26}$$

o que pode ser facilmente demonstrado lembrando que

$$B^i = \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}\right)^i = -\epsilon^{ijk}\partial_j A_k. \tag{2.27}$$

Contraindo os dois membros desta equação com um tensor de Levi-Civita tridimensional, e usando a definição $\epsilon^{ijk} = -\epsilon_{ijk} = 1$, obtém-se

$$\epsilon_{ilm} B^i = -\epsilon_{ilm} \epsilon^{ijk} \partial_j A_k = -(-1) \left(\delta_l^j \delta_m^k - \delta_m^j \delta_l^k \right) \partial_j A_k = (\partial_l A_m - \partial_m A_l) = F_{lm}, \tag{2.28}$$

que é o resultado desejado.

Os campos elétrico e magnético exibem invariância sob a transformação de gauge (2.9), e o tensor campo eletromagnético também exibe esta invariância

$$F'_{\alpha\beta} = \partial_\alpha (A_\beta - \partial_\beta \Gamma) - \partial_\beta (A_\alpha - \partial_\alpha \Gamma) = F_{\alpha\beta}, \tag{2.29}$$

como era de se esperar.

Com as expressões dadas, pode-se calcular o seguinte termo de contração tensorial, conhecido como termo cinético de Maxwell,

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = F_{0i} F^{0i} + F_{i0} F^{i0} + F_{ij} F^{ij} = 2F_{0i} F^{0i} + F_{ij} F^{ij}. \tag{2.30}$$

Calculando-se termo a termo,

$$2F_{0i} F^{0i} = -2\mathbf{E}^2, \tag{2.31}$$

$$F_{ij} F^{ij} = \epsilon_{aij} B^a \epsilon^{bij} B_b = -2\delta_a^b B^a B_b = -2B^a B_a = 2B^2, \tag{2.32}$$

e o termo de Maxwell é escrito como

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -2 \left(\mathbf{E}^2 - B^2 \right). \tag{2.33}$$

Consequentemente, a lagrangeana da teoria assume a forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(E^2 - B^2 \right) - \rho A^0 + \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{A}. \tag{2.34}$$

A dinâmica desta teoria é dada pela equação de movimento advinda da equação de Euler-Lagrange,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0. \tag{2.35}$$

Calculando os termos separadamente, tem-se para o termo de Maxwell,

$$\frac{\partial \left(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial \left[(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \left(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \right) \right]}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \left(\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu \right) F^{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta} \left(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} \right)$$

$$\frac{\partial \left(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) + (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) = 4F^{\mu\nu}, \tag{2.36}$$

resultado devido à anti-simetria do tensor $F^{\mu\nu}$. Para o termo de fonte, por outro lado, vale

$$\frac{\partial (j^\alpha A_\alpha)}{\partial (A_\nu)} = j^\alpha \delta_\alpha^\nu = j^\nu, \tag{2.37}$$

o que fornece a seguinte equação tensorial

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \tag{2.38}$$

Esta equação é compatível com a equação da continuidade, $\partial_\nu j^\nu = 0$, como se pode verificar derivando os seus dois membros, $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu j^\nu$.

A componente temporal da Eq. (2.38) é dada por, $\partial_i F^{i0} = \partial_i E^i = j^0$, recuperando-se a lei de Gauss

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = \rho. \tag{2.39}$$

A componente temporal espacial é $\partial_0 F^{0j} + \partial_i F^{ij} = -\partial_t E^j - \epsilon^{jil}\partial_i B_l = j^j$, implica na lei de Ampere,

$$(\nabla \times B)^j - \partial_t E^j = j^j, \tag{2.40}$$

Vê-se assim que recupera as equações não-homogêneas de Maxwell no sistema de unidades naturais, onde $c = 1$. As equações homogêneas podem ser encontradas após ser definido o tensor dual do campo eletromagnético,

$$\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \tag{2.41}$$

também antisimétrico. A componente temporal deste tensor é dada por

$$\widetilde{F}^{0j} = \frac{1}{2}\epsilon^{0jlm} F_{lm} = \frac{1}{2}\epsilon^{0jlm}\left(\epsilon_{lmn} B^n\right) = \frac{1}{2}\epsilon^{jlm}\left(\epsilon_{lmn} B^n\right) = \frac{1}{2}\left(-2\delta^j_n B^n\right),$$

$$\widetilde{F}^{0j} = -B^j. \tag{2.42}$$

As componentes espaciais, por outro lado, são dadas por

$$\widetilde{F}^{ij} = \frac{1}{2}\left(\epsilon^{ij0m} F_{0m} + \epsilon^{ijm0} F_{m0}\right) = \epsilon^{ij0m} F_{0m} = \epsilon^{ij0m} E^m,$$

$$\widetilde{F}^{ij} = \epsilon^{ijm} E^m. \tag{2.43}$$

Tanto as componentes temporais, quanto as as espaciais de $\widetilde{F}^{\mu\nu}$, podem ser encontradas a partir do tensor $F^{\mu\nu}$ original, fazendo apenas a chamada transformação de dualidade

$$\overrightarrow{B} \to \overrightarrow{E}, \quad \overrightarrow{E} \to -\overrightarrow{B}. \tag{2.44}$$

Este tensor campo eletromagnético dual, devido à anti-simetria tanto do símbolo de Levi-Civita $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ quanto do tensor campo eletromagnético $F_{\alpha\beta}$, obedece a equação

$$\partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0. \tag{2.45}$$

o que pode ser explicitamente verificado

$$\partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\mu\left(\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha\right)\right) = \frac{1}{2}\partial_\mu\left(2\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta\right) = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta = 0.$$

A componente temporal da Eq. (2.45) é escrita como $\partial_i \widetilde{F}^{i0} = \partial_i B^i = 0$, o que equivale a

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0, \tag{2.46}$$

e as componentes espaciais como

$$\partial_0 \widetilde{F}^{0j} + \partial_i \widetilde{F}^{ij} = \partial_t \left(-B^j\right) + \partial_i \left(\epsilon^{ijm} E^m\right) = -\partial_t B^j - \epsilon^{jim} \partial_i E^m = 0$$

$$(\nabla \times E)^j + \partial_t B^j = 0. \tag{2.47}$$

o que recupera as equações de Maxwell homogêneas, fato que, juntamente com a recuperação das equações não-homogêneas, implica na recuperação de todas as outras propriedades da teoria eletromagnética de Maxwell.

2.2 Campos Produzidos por um Fio Infinito

Antes de tratar propriamente da redução dimensional e de sistemas planares, é conveniente encontrar os campos elétrico e magnético produzidos por um fio carregado de extensão infinita, a fim de tecer algumas analogias. Este fio deverá ter uma distribuição linear uniforme de carga λ e deverá ser considerado primeiramente em repouso e depois em movimento uniforme com velocidade $\overrightarrow{v}$ Este resultado constitui um subsídio para o entendimento do significado geométrico do procedimento de redução dimensional, que será discutida no próximo item.

É fato bem conhecido que o campo elétrico produzido por uma carga q em repouso é dado por

$$\overrightarrow{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\widehat{r}, \tag{2.48}$$

e que o campo magnético produzido por essa mesma carga q, quando com velocidade uniforme $\overrightarrow{u}$, é dado por

$$\overrightarrow{B} = q\frac{\mu_0}{4\pi r^2}\overrightarrow{u} \times \widehat{r}, \tag{2.49}$$

Este campo pode ser associado a uma corrente estacionária de intensidade $i = qu$. De acordo com as leis do eletromagnetismo usual, o campo elétrico produzido por um fio infinito com distribuição linear uniforme de carga λ, vale

$$\overrightarrow{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\widehat{r}, \tag{2.50}$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, e $\widehat{r}$ é o versor radial no plano ortogonal ao fio. Este campo tem simetria radial e possui dependência do tipo $1/r$, diferente da dependência do campo elétrico produzido por uma carga pontual em repouso, que é do tipo $1/r^2$. A dependência em $1/r$, aliada ao fato do campo não possuir componente no eixo-z, nem dependência nesta coordenada, abre a possibilidade do mesmo ser interpretado como uma solução bidimensional (dependente apenas das duas coordenadas espaciais definidas no plano, já que não faz nenhuma menção à terceira), a despeito de estar definido em (1+3) dimensões.

Por outro lado, considerando o mesmo fio com uma velocidade uniforme $\overrightarrow{u}$, situação que está associada a uma distribuição superficial de corrente estacionária com densidade, $\overrightarrow{j} = \lambda\overrightarrow{u}$, definida ao longo do plano infinito subtendido pelo movimento do fio. Considerando isso, será produzido o seguinte campo magnético paralelo ao fio (portanto definido ao longo do eixo z)

$$\overrightarrow{B} = \frac{\lambda\mu_0}{2\pi r}\overrightarrow{u} \times \widehat{r}. \tag{2.51}$$

Novamente a dependência é do tipo $1/r$ e não há dependência da coordenada z, tal como observado para o campo elétrico, e também é diferente do campo magnético produzido por uma carga q com velocidade uniforme $\overrightarrow{u}$, que decai com $1/r^2$. Mais uma vez, esta característica pode ser relacionada com a solução de um sistema planar.

Vê-se aqui que o plano de corte ortogonal ao eixo do fio pode ser visto como um sistema onde o campo eletromagnético é bidimensional. No caso do campo magnético, apesar dele estar definido no eixo z, que é perpendicular ao plano, ele não exibe dependência desta coordenada, o que permite com que seja tratado, sem grande perda de informação física, como um escalar nesse plano aqui definido. Observa-se assim um elemento que deve estar presente em uma teoria planar: os campos bidimensionais não podem depender da terceira dimensão espacial. Desta forma, um procedimento de redução dimensional eficiente é aquele em que são eliminadas tanto a terceira componente espacial dos vetores quanto a dependência dos campos e componentes remanescentes dos vetores em termos da terceira componente espacial. Tal procedimento permite obter soluções planares, tais como as observadas nas Eqs. (2.50) e (2.51).

2.3 Redução Dimensional da Teoria de Maxwell

Até aqui tem-se tratado o eletromagnetismo do mundo tridimensional. Agora será tratado o eletromagnetismo dos chamados sistemas planares, definido em (1+2) dimensões. Fazemos isto adotando o procedimento da redução dimensional, que consiste em obter uma versão planar da teoria de Maxwell excluindo-se uma das componentes espaciais, por convenção, a terceira dimensão espacial (eixo-z). Este procedimento de exclusão da terceira dimensão espacial é feito da seguinte forma: aniquilando-se qualquer dependência dos campos em termos desta coordenada e separando-se do corpo dos 4-vetores a terceira componente espacial. A primeira condição é matematicamente traduzida por

$$\partial_3\chi \to 0, \tag{2.52}$$

sendo χ a representaçao de um campo qualquer definido em (1+2) dimensões. Esta condição assegura que nenhuma variável do sistema exiba dependência em relação à dimensão que está sendo extirpada da sistema. A segunda condição é implementada aqui para o 4-potencial do campo eletromagnético,

$$A^{\widehat{\mu}} = (A^{\mu}; \varphi),$$

onde $\varphi = A^{(3)}$ é um campo escalar com dinâmica própria, gerado neste processo. Observe que os índices gregos com chapéu assumem os valores de 0 a 3, $\hat{\mu} = 0, ..., 3$, enquanto os índices gregos sem chapéu assumem os valores de 0 a 2, $\mu = 0, ..., 2$. Estes serão os únicos que irão aparecer na teoria planar. Deste modo, temos:

$$A^{\widehat{\mu}} = \left(A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}; \varphi\right).$$

Este procedimento pode ser aplicado sobre outros 4-vetores de interesse, tal como o 4-vetor corrente:

$$j^{\widehat{\mu}} = (j^{\mu}; J), \tag{2.53}$$

onde J atua como fonte do campo escalar φ. Podemos agora analisar como o procedimento de redução dimensional é aplicado sobre a Lagrangeana da teoria de Maxwell,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} F^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} - j^{\widehat{\mu}} A_{\widehat{\mu}}. \tag{2.54}$$

Iniciamos efetuando todos esses procedimentos sobre o termo cinético de Maxwell,

$$\begin{aligned} F_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} F^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} &= F_{\mu\widehat{\nu}} F^{\mu\widehat{\nu}} + F_{3\nu} F^{3\nu} = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + F_{\mu 3} F^{\mu 3} + F_{3\nu} F^{3\nu}, \\ F_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} F^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} &= F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2F_{\mu 3} F^{\mu 3}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Sabendo que

$$F^{\mu 3} = \partial^{\mu} A^{(3)} - \partial^{3} A^{\mu} = \partial^{\mu} \varphi, \tag{2.56}$$

$$F_{\mu 3} = \partial_{\mu} A_{3} = -\partial_{\mu} \varphi, \tag{2.57}$$

tem-se

$$F_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} F^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 2\partial_{\mu}\varphi \partial^{\mu}\varphi, \tag{2.58}$$

e, consequentemente,

$$-\frac{1}{4} F_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} F^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_{\mu}\varphi \partial^{\mu}\varphi. \tag{2.59}$$

onde já aparece um termo cinético para o campo escalar. Além disso, tem-se

$$j^{\widehat{\mu}}A_{\widehat{\mu}} = j^{\mu}A_{\mu} + j^{(3)}A_3 = j^{\mu}A_{\mu} - J\varphi.$$

Com isso, a lagrangeana original, definida em (1+3) dimensões, torna-se a seguinte lagrangeana reduzida, definida em (1+2) dimensões

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\varphi\partial^{\mu}\varphi - j^{\mu}A_{\mu} + J\varphi. \tag{2.60}$$

Com a definição do tensor campo eletromagnético em (1+2) dimensões, $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$, e do quadrivetor potencial eletromagnético, $A^{\mu} = (A^0, \overrightarrow{A})$, pode-se expressar os campos elétrico e magnético como

$$F_{0i} = \partial_t A_i - \partial_i A_0 = -\partial_t A^i - \partial_i A^0 = E^i, \tag{2.61}$$

$$F_{lm} = -\varepsilon_{lm}B, \tag{2.62}$$

onde $B = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}$ é agora um campo escalar escrito como

$$B = \epsilon_{ij}\partial_i A^j = -\epsilon_{ij}\partial_i A_j = -\left(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1\right) = -F_{12}. \tag{2.63}$$

A expressão (2.62) pode também ser demontrada multiplicando-se a Eq. (2.63) por ε_{lm}, ou seja,

$$\varepsilon_{lm}B = -\varepsilon_{lm}\epsilon^{ij}\partial_i A_j = -\left(\delta^i_l\delta^j_m - \delta^i_m\delta^j_l\right)\partial_i A_j = -\left(\partial_l A_m - \partial_m A_l\right) = -F_{lm}.$$

Vemos assim facilmente que o termo cinético de Maxwell torna-se

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2F_{0i}F^{0i} + F_{ij}F^{ij} = -2(E^2 - B^2), \tag{2.64}$$

exatamente como no caso da teoria tridimensional, sendo $F_{0i}F^{0i} = -E^2$ e $F_{ij}F^{ij} = \epsilon_{ij}\epsilon^{ij}BB = 2B^2$.

Para encontrar as equações de movimento dos campos de gauge, o ponto de partida é equação de Euler-Lagrange

$$\partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}A_{\nu}\right)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\nu}} = 0, \tag{2.65}$$

que fornece a equação tensorial

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = j^{\nu}. \tag{2.66}$$

Abrindo em componentes, tem-se, para a temporal, $\partial_i F^{i0} = j^0$, que corresponde à lei de Gauss

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = \rho. \tag{2.67}$$

Para as componentes espaciais, $\partial_0 F^{0l} + \partial_i F^{il} = j^l$, que conduz à lei de Ampère

$$-\partial_t E^l + \epsilon^{li}\partial_i B = j^l, \tag{2.68}$$

$$\overrightarrow{\nabla}^* B - \partial_t \overrightarrow{E} = \overrightarrow{j}, \tag{2.69}$$

sendo essas as duas equações inomogêneas da teoria reduzida, e sendo $\nabla^{*j} = \epsilon^{ji}\partial_i$ o gradiente dual. Tal como no caso em (1+3) dimensões, estas equações são compatíveis com a equação da continuidade

$$\partial_\nu j^\nu = 0. \tag{2.70}$$

Pode-se encontrar mais uma equação de Maxwell, fazemos uso do dual do tensor do campo eletromagnético em (1+2) dimensões,

$$\widetilde{F}^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}F_{\nu\lambda}, \tag{2.71}$$

que é um 4-vetor cujas componentes temporal e espacial são

$$\widetilde{F}^0 = \frac{1}{2}\epsilon^{0ij}F_{ij} = F_{12} = -B,\ \widetilde{F}^i = \epsilon^{ij0}F_{j0} = -\epsilon^{ij}E^j, \tag{2.72}$$

$$\widetilde{F}^\mu = (-B, -\overrightarrow{E}^*), \tag{2.73}$$

onde $\overrightarrow{E}^*$ é o campo elétrico dual, $(E^*)^i = \epsilon^{ij}E^j$. A terceira equação de Maxwell é dada pela identidade de Bianchi,

$$\partial_\mu \widetilde{F}^\mu = \epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0, \tag{2.74}$$

que em componentes, $\partial_t \widetilde{F}^0 + \partial_i \widetilde{F}^i = \partial_t(-B) + \partial_i\left(-\epsilon^{ij}E^j\right) = 0$, conduz à equação de Faraday,

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} + \partial_t B = 0. \tag{2.75}$$

Para encontrar a equação de movimento para o campo escalar, partimos de

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0, \tag{2.76}$$

que fornece simplesmente

$$\Box\varphi = J, \tag{2.77}$$

onde $\square = \partial^{\mu}\partial_{\mu} = \partial_t^2 - \nabla^2$ é o operador D' Alambertiano. Esta última equação de onda para o campo escalar possui estrutura similar à equação de onda (2.20), válida para o potencial escalar. Dessa forma, governando a dinâmica da teoria reduzida, tem-se um conjunto de quatro equações diferenciais, que são as equações de Maxwell da eletrodinâmica reduzida

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = \rho, \tag{2.78}$$

$$\overrightarrow{\nabla}^* B - \partial_t \overrightarrow{E} = \overrightarrow{j}, \tag{2.79}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} + \partial_t B = 0, \tag{2.80}$$

$$\square\varphi = J. \tag{2.81}$$

Neste conjunto de equações está ausente a lei de Gauss do campo magnético, que em (1+3) dimensões, conforme a Eq. (2.46), é definida como $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0$. O análogo em (1+2) dimensões para a divergência do campo magnético seria identicamente e trivialmente nulo, pois, pela discussão relacionada a Eq. (2.51), o campo magnético escalar de uma teoria definida no plano pode ser interpretado como a componente perpendicular a esse plano de um campo magnético definido nessa direção, e dessa forma sua divergência seria apenas $\partial_3 B^3$, mas, pela prescrição (2.52), tem-se que este valor seria necessariamente nulo. Dessa maneira, um análogo bidimensional da lei de Gauss magnética se torna desnecessário entre as equações de Maxwell planares acima.

Continuando a discussão, sabe-se que o tensor do campo eletromagnético em (1+2) dimensões possui apenas 3 componentes não-nulas. O fato é que estas três componentes não são independentes, uma vez que estão vinculadas entre si pelas 3 equações de Maxwell. Deste modo, a eletrodinâmica planar de Maxwell só possui um grau de liberdade independente (grau de liberdade físico).

Estas equações também permitem obter equações de onda para os campos, de modo semelhante ao caso tridimensional. Para isto, porém, é necessário definir algumas identidades vetoriais, válidas em (1+2) dimensões. Para um vetor $\overrightarrow{L}$ qualquer, e para um escalar ψ qualquer

$$\overrightarrow{\nabla}^* \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{L}\right) = \overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{L}\right) - \nabla^2 \vec{L}, \tag{2.82}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\nabla}^* \psi = -\nabla^2 \psi. \tag{2.83}$$

A Eq. (2.82) pode ser demonstrada sabendo que o produto de dois Levi-Civita bidimensionais é dado por $\epsilon^{ij}\epsilon_{lm} = \delta^i_l \delta^j_m - \delta^i_m \delta^j_l$. Com isso tem-se

$$\begin{aligned} \nabla^{*i}\left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{L}\right) &= \epsilon^{ij}\partial_j\left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{L}\right) = \epsilon^{ij}\partial_j\left(-\epsilon_{lm}\partial^l L^m\right) = -\left(\delta^i_l\delta^j_m - \delta^i_m\delta^j_l\right)\partial_j\partial^l L^m, \\ \nabla^{*i}\left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{L}\right) &= -\left(\partial_j\partial^i L^j - \partial_j\partial^j L^i\right) = \partial_i\left(\partial_j L^j\right) - \partial_j\partial_j L^i. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Quanto à Eq. (2.83), sabendo que o resultado da contração de dois Levi-Civita é $\epsilon^{ij}\epsilon_{lj} = \delta^i_l$, pode-se demonstrar que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\nabla}^* \psi &= -\epsilon^{ij}\partial_i \left(\overrightarrow{\nabla}^* \psi\right)_j = -\epsilon^{ij}\partial_i \left(\epsilon_{jl}\partial^l \psi\right) = \epsilon^{ij}\epsilon_{lj}\partial_i\partial^l\psi = \delta^i_l \partial_i\partial^l\psi = \partial_i\partial^i\psi, \\
\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\nabla}^* \psi &= -\partial_i\partial_i\psi = -\partial_i^2\psi = -\nabla^2\psi.
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Conhecendo essas identidades, pode-se aplicar um gradiente dual na Eq. (2.80),

$$\nabla^{*i}\left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E}\right) + \partial_t \nabla^{*i} B = 0,$$

e usar as Eqs. (2.78) e (2.79),

$$\nabla^i(\rho) - \nabla^2 E^i + \partial_t \left[\partial_t E^i + j^i\right] = 0, \tag{2.86}$$

o que fornece a equação de onda para o campo elétrico

$$\Box \vec{E} = -\nabla\rho - \partial_t \vec{j}. \tag{2.87}$$

De modo semelhante, aplicando-se um rotacional na Eq. (2.79) e usando a Eq. (2.80) obtem-se

$$-\nabla^2 B + \partial_t^2 B = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{j}, \tag{2.88}$$

que é a equação de onda para o campo magnético

$$\Box B = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{j}. \tag{2.89}$$

Equações semelhantes podem ser encontradas para os potenciais escalar e vetor. Reescrevendo a Eq. (2.78) em função destes potenciais e rearranjando os termos, obtém-se

$$-\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla} A^0 + \partial_t \overrightarrow{A}\right) = -\nabla^2 A^0 - \partial_t \left[\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} + \partial_t A^0\right] + \partial_t^2 A^0 = \rho, \tag{2.90}$$

onde foi somado e subtraído o termo $\partial_t^2 A^0$. Utilizando o gauge de Lorentz, $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} + \partial_t A^0 = 0$, resulta

$$\Box A^0 = \rho. \tag{2.91}$$

Da mesma forma, partindo-se da Eq. (2.79), lembrando-se que $B = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}$, e usando a Eq.(2.82), resulta

$$\overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}\right) - \nabla^2 \overrightarrow{A} + \partial_t \left(\overrightarrow{\nabla} A^0 + \partial_t \overrightarrow{A}\right) = \overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} + \partial_t A^0\right) - \nabla^2 \overrightarrow{A} + \partial_t^2 \overrightarrow{A} = \overrightarrow{j}, \tag{2.92}$$

que conduz a

$$\Box \overrightarrow{A} = \overrightarrow{j}. \tag{2.93}$$

Estes são alguns dos principais resultados da eletrodinâmica planar. No entanto, está faltando ainda encontrar o potencial e o campo elétrico produzido por uma carga pontual ($\rho = q\delta\left(r\right)$) nesta eletrodinâmica. Isto pode ser feito usando a Eq. (2.91). Esta equação pode ser resolvida pelo método de Green. De acordo com esse método, apropriado para a resolução de equações diferenciais inomogêneas, a solução tem o formato

$$A^{0}\left(r\right) = \int G\left(r - r'\right)\rho\left(r'\right)d^{2}r', \tag{2.94}$$

sendo $G\left(r - r'\right)$ a função de Green que obedece a equação

$$\nabla^{2}G\left(r - r'\right) = -\delta\left(r - r'\right). \tag{2.95}$$

Já que o sistema em estudo exibe invariância translacional e condições de contorno infinitas, pode-se escrever a função de Green e a função delta como uma transformada de Fourier,

$$G\left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'\right) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{2}}\int \widetilde{G}(p)e^{i\overrightarrow{p}\cdot\left(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'\right)}d^{2}p, \tag{2.96}$$

$$\delta\left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'\right) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{2}}\int e^{i\overrightarrow{p}\cdot\left(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'\right)}d^{2}p, \tag{2.97}$$

o que leva a

$$\widetilde{G}(p) = \frac{1}{\mathbf{p}^{2}}. \tag{2.98}$$

onde $\mathbf{p} = \vec{p}$. Substitui-se agora este resultado na Eq. (2.96), ou seja,

$$G\left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'\right) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{2}}\int \frac{1}{\mathbf{p}^{2}}e^{i\overrightarrow{p}\cdot\left(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'\right)}d^{2}p. \tag{2.99}$$

Esta última integral é dada por

$$\begin{aligned}\int d^{2}p\,\frac{1}{\mathbf{p}^{2}}e^{-ip\cdot R} &= \int_{0}^{\infty}\frac{1}{\mathbf{p}^{2}}pdp\int_{0}^{2\pi}d\phi\; e^{-ipR\cos\phi}\\ &= 2\pi\int_{0}^{\infty}\frac{pdp}{\mathbf{p}^{2}}J_{0}(pR) = 2\pi\int_{0}^{\infty}\frac{dp}{p}J_{0}(pR) = -2\pi\ln R,\end{aligned} \tag{2.100}$$

onde $R = |r - r'|$. Este é um resultado conhecido de Física Matemática e está demonstrado no Apêndice A. De posse desse conhecimento, então, a função de Green do problema é

$$G\left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'\right) = -\frac{1}{2\pi}\ln\left|r - r'\right|, \tag{2.101}$$

e assim o potencial produzido por uma carga pontual, cuja densidade de carga é

$$\rho(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r}'), \tag{2.102}$$

é dado por

$$A^{0}\left(r\right) = -\frac{1}{2\pi}\int \ln\left|r - r'\right|\delta\left(r'\right)d^{2}r', \tag{2.103}$$

$$A^{0}\left(r\right) = -\frac{q}{2\pi}\ln r. \tag{2.104}$$

Consequentemente, o campo elétrico, $\vec{E}\left(\mathbf{r}\right)=-\vec{\nabla}A_0\left(\mathbf{r}\right)$, produzido por essa carga pontual é

$$\overrightarrow{E}=\frac{q}{2\pi r}\widehat{r}. \tag{2.105}$$

É interessante observar que esta solução coincide com a expressão do campo elétrico produzido por um fio infinito uniformemente carregado na eletrodinâmica tridimensional, vide Eq.(2.50). Isto reforça a conexão realizada entre a eletrodinâmica planar e aquela que pode ser definida num plano de corte ortogonal ao fio infinito, delineada em capítulo anterior.

Analogamente, o potencial vetorial produzido por uma carga pontual com velocidade uniforme $\overrightarrow{u}$, associada a uma corrente estacionária

$$\overrightarrow{j}\left(r'\right)=q\overrightarrow{u}\delta(r')\ , \tag{2.106}$$

obedece a Eq. (2.93) estática

$$\nabla^2\overrightarrow{A}=-\overrightarrow{j}. \tag{2.107}$$

Esta equação, de acordo com o método de Green, admite uma solução do tipo

$$\overrightarrow{A}\left(r\right)=\int G\left(r-r'\right)\overrightarrow{j}\left(r'\right)d^2r', \tag{2.108}$$

sendo que a função de Green $G\left(r-r'\right)$ também obedece a Eq.(2.95), e portanto tem a mesma solução (2.101). Dessa forma, o potencial vetorial procurado é

$$\overrightarrow{A}\left(r\right)=-\frac{q\overrightarrow{u}}{2\pi}\ln r, \tag{2.109}$$

Consequentemente, o campo magnético, $B=\nabla\times A=\epsilon^{ij}\partial_iA^j$, é dado por

$$B=\epsilon^{ij}\partial_i\left(-\frac{qu^j}{2\pi}\ln r\right)=\epsilon^{ij}\left(-\frac{qu^j}{2\pi}\right)\frac{r^i}{r^2}=-\frac{q}{2\pi}\frac{\epsilon^{ij}r^iu^j}{r^2}, \tag{2.110}$$

resultado que pode ser escrito como o produto vetorial bidimensional

$$B=\frac{q}{2\pi r}\overrightarrow{u}\times\widehat{r}$$

Esta é mesma expressão para o campo magnético produzido por um fio carregado infinito em movimento uniforme com velocidade $\overrightarrow{u}$, conforme a Eq. (2.51). Isto reforça, mais uma vez, o significado geométrico da redução dimensional, e reforça também a eficácia do procedimento adotado neste capítulo. Este mesmo procedimento, com o qual foi realizada a redução dimensional da eletrodinâmica de Maxwell, será usado nos capítulos seguintes para realizar a redução dimensional da eletrodinâmica CPT-Par do Modelo Padrão Estendido.

Capítulo 3

O Modelo Padrão Estendido (MPE)

No capítulo anterior foi discutida a teoria eletromagnética de Maxwell. Esta teoria, como foi visto, é caracterizada por duas simetrias, CPT e de Lorentz. Estas duas simetrias se tornaram pedras fundamentais na Física e serviram de base para a construção das modernas Teorias Quânticas de Campo, como o a Eletrodinâmica Quântica e o Modelo Padrão da Física de Partículas Elementares. Recentemente, porém, na tentativa de encontrar uma Teoria Quântica da Gravidade, tem-se estudado muito a idéia da quebra espontânea dessas simetrias, CPT e de Lorentz, que seriam violadas na escala de energia de Planck, tornando-se simetrias apenas aproximadas em escalas de energia inferiores. Um dos primeiros estudos sobre a conseqüência da violação das simetrias de Lorentz e CPT foi proposto por Carroll-Field-Jackiw (CFJ) no início dos anos 90 [11], modificando a eletrodinâmica de Maxwell via adição na densidade Lagrangeana de um termo do tipo Chern-Simons, $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}v_\mu\, A_\nu F_{\kappa\lambda}$. Nesse termo, o vetor constante v_μ é o responsável por fixar um campo de fundo que quebra as simetrias. Posteriormente, Colladay e Kostelecky, influenciados pelos trabalhos de Carroll-Field-Jackiw, elaboraram um modelo teórico denominado Modelo Padrão Estendido, que incorpora termos violadores de Lorentz e CPT em todos os setores de interação do Modelo Padrão [12], sendo estes gerados por uma quebra espontânea no contexto de uma teoria definida na escala de energia de Planck. A observação de que as teorias de cordas suportam violações espontâneas da simetria de Lorentz [5] fortalecem esta proposta. É acerca deste modelo que serão feitas algumas considerações prévias, antes de ser realizada sua redução dimensional nos capítulos seguintes.

3.1 O Setor Eletomagnético do MPE

A lagrangeana do setor de gauge do Modelo Padrão Estendido é composta pelo termo usual de Maxwell acrescido de outros dois termos: um é CPT-ímpar, que viola a simetria CPT, e o outro é CPT-par, que não a viola. Ambos são violadores da simetria de Lorentz. Esses termos são gerados via quebra espontânea de simetria no contexto de uma teoria mais fundamental, definida na escala de energia de Planck, e os coeficientes responsáveis pela violação são quantidades tensoriais que fazem o papel dos valores esperados no vácuo gerados na quebra espontânea. A simetria de Lorentz nesse modelo é violada apenas no referencial da partícula, não permanecendo válida no referencial do observador. O termo CPT-ímpar é o termo de Carroll-Field-Jackiw [11], proposto em 1990, sendo este trabalho pioneiro na investigação da vioação de Lorentz. Já o termo CPT-par é do tipo $(K_F)^{\mu\nu\kappa\lambda} F_{\mu\nu} F_{\kappa\lambda}$, onde tensor $(K_F)^{\mu\nu\kappa\lambda}$ apresenta as mesmas simetrias que o tensor de Riemann, além de possuir duplo traço nulo. Dessa forma a lagrangeana deste modelo é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \underbrace{\frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu k\lambda} v_\mu A_\nu F_{k\lambda}}_{\text{CPT-ímpar}} - \underbrace{\frac{1}{4} (K_F)^{\mu\nu\kappa\lambda} F_{\mu\nu} F_{\kappa\lambda}}_{\text{CPT-par}} - j^\mu A_\mu \ . \tag{3.1}$$

Na busca de testes da precisão dos efeitos causados pela violação dessas simetrias ou, pelo menos, na busca de limites superiores para os termos de violação, foram realizados experimentos investigando a violação das simetrias de Lorentz e de CPT em oscilações de neutrinos e káons, comparação de relógios, investigação no setor de múons, testes da QED em armadilhas de Penning, emissão Cherenkov no vácuo , conforme descritos em [13, 14, 15, 16, 17], [18]. Um efeito marcante da eletrodinâmica do MPE é o da birrefrigência do vácuo [11, 19, 20], fenômeno em que o plano de polarização sofre rotação à medida em que a luz se propaga devido ao fato da velocidade de fase da luz depender do modos de propagação direita e esquerda. Considerando que a birrefrigência cresce linearmente com a distância de propagação da luz, a análise deste efeito em escala cosmológica oferece uma boa ferramenta para verificar a violação proposta e, ao mesmo tempo, impor limites superiores nos parâmetros de violação de Lorentz. O primeiro trabalho a usar dados de birrefringência para impor limites superiores à magnitude dos coeficientes de violação da simetria de Lorentz foi o de Carroll-Field-Jackiw [11], em que background de violação foi severamente limitado: $|v_\mu| < 10^{-33} eV$. Na referência [22] foram desenvolvidas ferramentas teóricas para extrair, das observações polarimétricas da radiação cósmica de fundo e da análise dos dados observacionais de galáxias distantes, limites altamente rigorosos para as magnitudes dos parâmetros de violação. Por outro lado, a radiação de Cherenkov em raios cósmicos de altíssima energia também tem sido analisada [23, 24, 25]. Os dados têm restringido severamente a magnitude desses parâmetros de violação, que devem ser possuir um limite de uma parte em 10^{34}.

3.1.1 O Termo CPT-Ímpar

A Lagrangeana de Maxwell-Carrol-Field-Jackiw é composta pelo termo usual de Maxwell acrescido do termo CPT-ímpar

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu k\lambda} v_\mu A_\nu F_{k\lambda} - j^\mu A_\mu \ . \tag{3.2}$$

Este termo é na verdade uma generalização para (1+3) dimensões do termo de Chern-Simons, definido em (1+2) dimensões,

$$\epsilon^{\mu\nu\rho}A_{\mu}F_{\nu\rho}. \tag{3.3}$$

O termo de Chern-Simons está relacionada a entidades conhecidas como ânions, cargas elétricas que produzem fluxo magnético [31],[32], que obedecem uma estatística fracionária e desempenham papel de interesse na física de sistemas planares a baixas temperaturas (envolvendo supercondutividade e o efeito Hall quântico). Na generalização da eletrodinâmica planar de Chern-Simons para (1+3) dimensões, como proposto por Carrol-Field-Jackiw, foi necessária a introdução do vetor fixo $v^{\mu} = \left(v^{0}, v^{i}\right)$, que atua como campo de fundo ("background") responsável pela quebra das simetrias de Lorentz e CPT.

Para encontrar as equações de movimento de Maxwell-Carrol-Field-Jackiw, é necessária a equação de Euler-Lagrange. Calculando alguns termos separadamente, tem-se:

$$\partial_{\mu}\left[\frac{\partial\left(\epsilon^{\alpha\beta k\lambda}v_{\alpha}A_{\beta}F_{k\lambda}\right)}{\partial\left(\partial_{\mu}A_{\nu}\right)}\right] = \partial_{\mu}\left[\frac{\partial\left(2\epsilon^{\alpha\beta k\lambda}v_{\alpha}A_{\beta}\partial_{k}A_{\lambda}\right)}{\partial\left(\partial_{\mu}A_{\nu}\right)}\right] = 2\partial_{\mu}\left[\epsilon^{\alpha\beta k\lambda}v_{\alpha}A_{\beta}\delta_{k}^{\mu}\delta_{\lambda}^{\nu}\right] = 2\partial_{\mu}\left[\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}v_{\alpha}A_{\beta}\right]. \tag{3.4}$$

Este último resultado pode ser reescrito como

$$\partial_{\mu}\left[\frac{\partial\left(\epsilon^{\alpha\beta k\lambda}v_{\alpha}A_{\beta}F_{k\lambda}\right)}{\partial\left(\partial_{\mu}A_{\nu}\right)}\right] = 2\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}v_{\alpha}\partial_{\mu}A_{\beta} = 2\epsilon^{\nu\alpha\mu\beta}v_{\alpha}\partial_{\mu}A_{\beta} = \epsilon^{\nu\alpha\mu\beta}v_{\alpha}F_{\mu\beta}\ , \tag{3.5}$$

Outro termo que pode ser calculado é

$$\frac{\partial\left(\epsilon^{\alpha\beta k\lambda}v_{\alpha}A_{\beta}F_{k\lambda}\right)}{\partial A_{\nu}} = \epsilon^{\alpha\beta k\lambda}v_{\alpha}\delta_{\beta}^{\nu}F_{k\lambda} = \epsilon^{\alpha\nu k\lambda}v_{\alpha}F_{k\lambda} = -\epsilon^{\nu\alpha k\lambda}v_{\alpha}F_{k\lambda}, \tag{3.6}$$

Com isso, a equação de movimento de Maxwell-Carrol-Field-Jackiw torna-se

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\epsilon^{\nu\alpha k\lambda}v_{\alpha}F_{k\lambda} = j^{\nu}, \tag{3.7}$$

A componente temporal desta equação é dada por

$$\partial_{i}F^{i0} - \frac{1}{2}\epsilon^{0ijk}v_{i}F_{jk} = \partial_{i}F^{i0} - \epsilon^{ijk}v^{i}\partial_{j}A^{k} = \partial_{i}F^{i0} - v^{i}\left(\nabla\times A\right)^{i} = j^{0}, \tag{3.8}$$

o que pode ser reescrito como

$$\partial_{i}E^{i} - v^{i}B^{i} = \rho. \tag{3.9}$$

Por outro lado a componente espacial é dada por

$$\partial_{j}F^{ji} + \partial_{0}F^{0i} - \frac{1}{2}\epsilon^{i0lm}v_{0}F_{lm} - \epsilon^{ij0m}v_{j}F_{0m} = j^{i}, \tag{3.10}$$

e pode ser lida como

$$\left(\nabla\times B\right)^{i} - \partial_{t}E^{i} - v_{0}B^{i} + \left(v\times E\right)^{i} = j^{i}. \tag{3.11}$$

Note-se, a partir das Eqs. (3.9) e (3.11), que, nesta eletrodinâmica, os campos elétrico e magnético são produzidos tanto por cargas quanto por correntes elétricas, diferente da eletrodinâmica usual onde as cargas elétricas são fontes apenas de campo elétrico e só as correntes são fontes dos dois tipos de campo.

3.1.2 O Termo CPT-Par

O setor de gauge CPT-par do Modelo Padrão Estendido tem sido estudado desde 2002, após os trabalhos pioneiros de Kostelecky & Mewes [19, 20]. A lagrangeana deste setor é dada pela expressão

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\left(K_F\right)^{\mu\nu\lambda\kappa} F_{\mu\nu}F_{\lambda\kappa} - j^{\mu}A_{\mu} \ , \tag{3.12}$$

onde o tensor $(K_F)^{\mu\nu\lambda\kappa}$, responsável pela violação de simetria de Lorentz do modelo, exibe as mesmas simetrias que o tensor de Riemann

$$(K_F)^{\mu\nu\lambda\kappa} = -\left(K_F\right)^{\nu\mu\lambda\kappa}, \tag{3.13}$$

$$(K_F)^{\mu\nu\lambda\kappa} = -\left(K_F\right)^{\mu\nu\kappa\lambda}, \tag{3.14}$$

$$(K_F)^{\mu\nu\lambda\kappa} = \left(K_F\right)^{\lambda\kappa\mu\nu}, \tag{3.15}$$

$$(K_F)^{\mu\nu\lambda\kappa} + (K_F)^{\mu\kappa\nu\lambda} + (K_F)^{\mu\lambda\kappa\nu} = 0, \tag{3.16}$$

e um duplo traço nulo

$$(K_F)^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta} = 0. \tag{3.17}$$

Note-se que as duas anti-simetrias reduzem as 256 componentes originais deste tensor a 36 componentes independentes, as quais a simetria reduz para 21. E com as duas últimas propriedades, o duplo traço nulo e a permutação de Bianchi, este tensor é finalmente reduzido a 19 componentes independentes.

Uma característica desta eletrodinâmica é a birrefringêngia da luz no vácuo [19, 20], ou seja, a velocidade de fase da luz depende do modo de propagação, o que provoca uma rotação do plano de polarização. As 19 componentes do tensor $(K_F)^{\mu\nu\lambda\kappa}$ estão divididas em dois subgrupos: dez birrefringentes, e nove não-birrefriengentes. As 10 componentes que provocam birrefringência estão severamente limitadas (em sua magnitude) por observações espectrais e polarimétricas da radiação de objetos cosmológicos distantes [19, 20], em 1 parte em 10^{32}. Já as componentes não-birrefriengentes só podem ser limitadas por testes de laboratório, que estão continuamente sendo propostos e realizados. Um exemplo é o uso da radiação de Cherenkov em UHECR ("ultrahigh energy cosmic rays") [23, 24, 25] para impor limites na casa de 1 parte em 10^{30} aos parâmetros não-birrefringentes.

Conhecidas algumas propriedades do tensor $(K_F)^{\mu\nu\lambda\kappa}$, pode-se reescrever o termo CPT-par na Lagrangeana (3.12) como

$$(K_F)^{\mu\nu\lambda\kappa} F_{\mu\nu}F_{\lambda\kappa} = 4\,(K_F)^{0i0j} F_{0i}F_{0j} + 4\,(K_F)^{0ilm} F_{0i}F_{lm} + (K_F)^{ijlm} F_{ij}F_{lm}. \tag{3.18}$$

Usando as expressões (2.25) e (2.26) para os campos elétrico e magnético, tem-se

$$-\frac{1}{4}\,(K_F)^{\mu\nu\lambda\kappa} F_{\mu\nu}F_{\lambda\kappa} = -\,(K_F)^{0i0j} E^iE^j + \epsilon^{jlm}\,(K_F)^{0ilm} E^iB^j - \frac{1}{4}\epsilon^{ilm}\epsilon^{jpq}\,(K_F)^{lmpq} B^iB^j. \tag{3.19}$$

É necessário atentar aqui para a parametrização do tensor $(K_F)^{\mu\nu\lambda\kappa}$. Suas 19 componentes independentes podem ser convenientemente parametrizadas pelos elementos de três matrizes 3x3, que são:

$$\begin{aligned}
(K_{DE})^{ij} &= -2\,(K_F)^{0i0j}\,, &(3.20)\\
(K_{HB})^{ij} &= \frac{1}{2}\epsilon^{ilm}\epsilon^{jpq}\,(K_F)^{lmpq}\,, &(3.21)\\
(K_{DB})^{ij} &= -\,(K_{HE})^{ji} = \epsilon^{jlm}\,(K_F)^{0ilm}\,. &(3.22)
\end{aligned}$$

Levando em conta as propridades do tensor $(K_F)^{\mu\nu\lambda\kappa}$, as compontes independentes destas matrizes se reduzem a justamente 19. A propriedade de simetria reduz a matriz $(K_{DE})^{ij}$ a 6 componentes e a anti-simetria reduz $(K_{HB})^{ij}$ a também 6 componentes. Com as 9 componentes de $(K_{DB})^{ij}$ tem-se um total de 21 componentes independentes, resultantes da restrição relacionada apenas às propriedades de simetria e anti-simetria. Notando agora que o traço da matriz (K_{DE}) é dado por

$$tr\,(K_{DE}) = -2\,(K_F)^{0i0i} = 2\,(K_F)^{0i}{}_{0i}\ , \tag{3.23}$$

e também que o traço de (K_{HB}) é dado por

$$tr\,(K_{HB}) = \frac{1}{2}\epsilon^{ilm}\epsilon^{ipq}\,(K_F)^{lmpq} = \frac{1}{2}\left(\delta^{lp}\delta^{mq} - \delta^{lq}\delta^{mp}\right)(K_F)^{lmpq} = \frac{1}{2}\left((K_F)^{lmlm} - (K_F)^{lmml}\right), \tag{3.24}$$

ou ainda por

$$tr\,(K_{HB}) = (K_F)^{lmlm} = (K_F)^{lm}{}_{lm}\ , \tag{3.25}$$

tem-se que a soma desses dos dois traços é nula

$$tr\,(K_{HB} + K_{DE}) = 2\,(K_F)^{0i}{}_{0i} + (K_F)^{lm}{}_{lm} = (K_F)^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta} = 0\ , \tag{3.26}$$

o que representa uma restrição e, portanto, reduz em um os elementos independentes entre as matrizes (K_{DE}) e (K_{HB}). Notando ainda que o traço de (K_{DB}) é dado por

$$tr\,(K_{DB}) = \epsilon^{ilm}\,(K_F)^{0ilm} = 2\left(\epsilon^{123}\,(K_F)^{0123} + \epsilon^{231}\,(K_F)^{0231} + \epsilon^{312}\,(K_F)^{0312}\right), \tag{3.27}$$

ou ainda por

$$tr\left(K_{DB}\right)=2\left(\left(K_F\right)^{0123}+\left(K_F\right)^{0231}+\left(K_F\right)^{0312}\right)=0, \tag{3.28}$$

conclui-se finalmente que as propriedades de duplo traço nulo e de permutação reduzem as componentes destras três matrizes a justamente 19.

Com estas matrizes, o termo CPT-Par na Lagrangena (3.12) pode ser ainda escrito como

$$-\frac{1}{4}\left(K_F\right)^{\mu\nu\lambda\kappa}F_{\mu\nu}F_{\lambda\kappa}=\frac{1}{2}E^i\left(K_{DE}\right)^{ij}E^j-\frac{1}{2}B^i\left(K_{HB}\right)^{ij}B^j+E^i\left(K_{DB}\right)^{ij}B^j. \tag{3.29}$$

E, já que o termo de fonte pode ser dado por

$$j^\mu A_\mu=\rho A_0-j^iA^i, \tag{3.30}$$

tem-se a lagrangeana do setor CPT-par da eletrodinâmica do Modelo Padrão Estendido, finalmente, em função dos campos elétrico e magnético,

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(E^2-B^2\right)+\frac{1}{2}E^i\left(K_{DE}\right)^{ij}E^j-\frac{1}{2}B^i\left(K_{HB}\right)^{ij}B^j+E^i\left(K_{DB}\right)^{ij}B^j-\rho A_0+\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{A}. \tag{3.31}$$

Quanto à equação de movimento deste modelo, pode-se encontrá-la usando a Lagrangeana (3.12) e a equação de Euler-Lagrange. Calculando a derivada do termo CPT-par separadamente, tem-se

$$\frac{\partial\left(\left(K_F\right)^{\alpha\beta\lambda\kappa}F_{\alpha\beta}F_{\lambda\kappa}\right)}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}=4\left(K_F\right)^{\mu\nu\lambda\kappa}F_{\lambda\kappa}, \tag{3.32}$$

o que fornece

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}-\left(K_F\right)^{\nu\mu\lambda\kappa}\partial_\mu F_{\lambda\kappa}=j^\nu. \tag{3.33}$$

A componente temporal desta equação fornece

$$\partial_iF^{i0}-\left(K_F\right)^{0i\lambda\kappa}\partial_iF_{\lambda\kappa}=\partial_iF^{i0}-2\left(K_F\right)^{0i0j}\partial_iF_{0j}-\left(K_F\right)^{0ilm}\partial_iF_{lm}=\rho\ , \tag{3.34}$$

Usando-se, primeiramente, as expressões (2.25) e (2.26) das componentes do tensor campo eletromagnético em função dos campos elétrico e magnético, obtem-se

$$\partial_iE^i-2\left(K_F\right)^{0i0j}\partial_iE^j-\left(K_F\right)^{0ilm}\partial_i\left(\epsilon_{lmk}B^k\right)=\rho. \tag{3.35}$$

E usando-se, ainda, as definições das matrizes (3.20) e (3.22) e sabendo que $\left(K_F\right)^{0ilm}\epsilon_{lmk}=\left(K_F\right)^{0ilm}\epsilon^{klm}$, obtem-se finalmente

$$\partial_iE^i+\left(K_{DE}\right)^{ij}\partial_iE^j+\left(K_{DB}\right)^{ik}\partial_iB^k=\rho\ . \tag{3.36}$$

As componentes espaciais, por outro lado, fornecem

$$\partial_\mu F^{\mu i}-\left(K_F\right)^{i\mu\lambda\kappa}\partial_\mu F_{\lambda\kappa}=\partial_0F^{0i}+\partial_jF^{ji}-\left(K_F\right)^{i0\lambda\kappa}\partial_0F_{\lambda\kappa}-\left(K_F\right)^{ij\lambda\kappa}\partial_jF_{\lambda\kappa}=j^i, \tag{3.37}$$

o que é equivalente a

$$\partial_t F^{0i}+\partial_j F^{ji}+\Big(-2\left(K_F\right)^{i0j0}\partial_t F_{j0}-\left(K_F\right)^{i0lm}\partial_t F_{lm}\Big)+\Big(-2\left(K_F\right)^{ij0k}\partial_j F_{0k}-\left(K_F\right)^{ijlm}\partial_j F_{lm}\Big)=j^i. \tag{3.38}$$

Realizando as somas de Einstein usando as definições das matrizes (3.20), (3.21) e (3.22) e reorganizando alguns índices, esta última expressão torna-se

$$\epsilon^{ijk}\partial_j B^k-\partial_t E^i+\Big[\left(K_{DE}\right)^{ij}\partial_t E^j-\left(K_{DB}\right)^{ik}\partial_t B^k\Big]+\epsilon^{ijn}\Big[\left(K_{HE}\right)^{nk}\partial_j E^k-\left(K_{HB}\right)^{nk}\partial_j B^k\Big]=j^i, \tag{3.39}$$

Aqui, deve ser notado que, assim como na teoria de Maxwell-Carrol-Field-Jackiw, nestas equações de movimento para o setor CPT-par, o campo elétrico e o campo magnético estão acoplados, de modo que são produzidos tanto por cargas elétricas estáticas quanto por correntes estacionárias.

Capítulo 4

Redução Dimensional da Eletrodinâmica CPT-Par do MPE

Como foi visto no capítulo anterior, a Lagrangeana do setor de gauge do Modelo Padrão Extendido [12] é composto pelo termo usual de Maxwell, um termo CPT-Ímpar e outro CPT-Par. A redução dimensional do termo de gauge CPT-ímpar (termo de Carroll-Field-Jackiw) foi realizada na Ref.[26], fornecendo uma eletrodinâmica planar composta pela eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons acoplada a um campo escalar sem massa, φ - o remanescente da terceira componente espacial do 4-potencial $\left(A^{(3)} = \varphi\right)$. É interessante notar que o termo de Chern-Simons aparece naturalmente em tal redução. Este modelo planar foi estudado em sua consistência, e suas soluções clássicas foram determinadas na Ref. [27]. A redução dimensional do modelo de Maxwell-Carrol-Field-Jackiw com setor de Higgs foi realizada na Ref. [28], enquanto suas soluções clássicas foram estudadas na Ref.[29].

No presente capítulo, é realizada a redução dimensional do setor de gauge CPT-par do Modelo Padrão Estendido, seguindo a prescrição adotada nas referências [26], [28], isto é, impondo que os campos não apresentem dependência da terceira componente espacial, e convertendo a quarta componente dos 4-vetores em campos escalares. O campo escalar que aparece na eletrodinâmica planar resultante é assim o remanescente da terceira componente espacial do 4-potencial $\left(A^{(3)} = \varphi\right)$. É obtida, assim, uma teoria composta pelo setor eletromagnético, um campo escalar com termo cinético não usual e um termo misto que acopla o setores escalar e de gauge. No setor de gauge, a violação de Lorentz é induzida por um tensor de quarta ordem, $Z^{\mu\nu\lambda\kappa}$, que apresenta as mesmas simetrias do tensor de Riemann e possui 5 componentes independentes. O setor escalar apresenta um termo cinético não-canônico, $C^{\mu\lambda}\partial_{\mu}\varphi\partial_{\lambda}\varphi$, onde $C^{\mu\lambda}$ é um tensor violador de Lorentz de segunda ordem e simétrico, com seis componentes independentes. Os setores escalar e de gauge são acoplados pelo tensor de terceira ordem $T^{\mu\nu\lambda}$, cujas simetrias implicam em oito componentes independentes. É também calculado o tensor de energia-momento e a relação de dispersão. Também são discutidas as equações de onda dos potenciais e campos, sendo obtidas as respectivas soluções estacionárias, com seus desvios da eletrodinâmica usual.

4.1 Redução Dimensional

A fim de estudar este modelo em (1+2) dimensões, realiza-se a redução dimensional, que consiste efetivamente em efetuar as seguintes operações, como estudado no capítulo anterior: i) manter inalteradas as componentes temporal e as duas primeiras espaciais dos 4-vetores; ii) separar a terceira componente espacial do corpo dos 4-vetores e exigir que as novas quantidades, definidas em (1+2) dimensões, não dependam da terceira dimensão espacial: $\partial_3 \rightarrow 0$. Aplicando essa prescrição ao 4-vetor de gauge, $A^{\widehat{\mu}}$, e à 4-corrente, $j^{\widehat{\mu}}$, tem-se

$$
\begin{aligned}
A^{\widehat{\mu}} &= (A^{\mu}, \varphi)\,, && (4.1)\\
j^{\widehat{\mu}} &= (j^{\mu}, J)\,, && (4.2)
\end{aligned}
$$

onde $A^{(3)} = \varphi$ é agora um campo escalar e os índices gregos correm de 0 a 2, isto é, $\mu = 0, 1, 2$. Efetuando essa prescrição nos termos da lagrangeana CPT-par,

$$\mathcal{L}_{1+3} = -\frac{1}{4}F_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}F^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} - \frac{1}{4}\left(K_F\right)^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\lambda}\widehat{\kappa}} F_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}F_{\widehat{\lambda}\widehat{\kappa}} - j^{\widehat{\mu}}A_{\widehat{\mu}},$$

obter-se-á a teoria planar correspondente. Primeiramente tem-se

$$F_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}F^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 2\partial_{\mu}\varphi\partial^{\mu}\varphi.$$

Tem-se ainda

$$
\begin{aligned}
\left(K_F\right)^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\lambda}\widehat{\kappa}} F_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}F_{\widehat{\lambda}\widehat{\kappa}} &= \left(K_F\right)^{\mu\nu\lambda\kappa} F_{\mu\nu}F_{\lambda\kappa} + 2\left(K_F\right)^{\mu\nu\lambda 3} F_{\mu\nu}F_{\lambda 3} + 2\left(K_F\right)^{\mu 3\lambda\kappa} F_{\mu 3}F_{\lambda\kappa} + 4\left(K_F\right)^{\mu 3\lambda 3} F_{\mu 3}F_{\lambda 3},\\
\left(K_F\right)^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\lambda}\widehat{\kappa}} F_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}F_{\widehat{\lambda}\widehat{\kappa}} &= \left(K_F\right)^{\mu\nu\lambda\kappa} F_{\mu\nu}F_{\lambda\kappa} + 4\left(K_F\right)^{\mu\nu\lambda 3} F_{\mu\nu}F_{\lambda 3} + 4\left(K_F\right)^{\mu 3\lambda 3} F_{\mu 3}F_{\lambda 3},\\
\left(K_F\right)^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\lambda}\widehat{\kappa}} F_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}F_{\widehat{\lambda}\widehat{\kappa}} &= \left(K_F\right)^{\mu\nu\lambda\kappa} F_{\mu\nu}F_{\lambda\kappa} - 4\left(K_F\right)^{\mu\nu\lambda 3} F_{\mu\nu}\partial_{\lambda}\varphi + 4\left(K_F\right)^{\mu 3\lambda 3} \partial_{\mu}\varphi\partial_{\lambda}\varphi, \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

onde usamos $F_{\lambda 3} = -\partial_{\lambda}\varphi$. Fazendo as seguinte definições de novos tensores em (1+2) dimensões,

$$
\begin{aligned}
Z^{\mu\nu\lambda\kappa} &= \left[\left(K_F\right)^{\mu\nu\lambda\kappa}\right]_{1+2}, && (4.4)\\
T^{\mu\nu\lambda} &= \left(K_F\right)^{\mu\nu\lambda 3}, && (4.5)\\
C^{\mu\lambda} &= \left(K_F\right)^{\mu 3\lambda 3}, && (4.6)
\end{aligned}
$$

e observando que

$$j^{\widehat{\mu}}A_{\widehat{\mu}} = j^{\mu}A_{\mu} - J\varphi, \tag{4.7}$$

escrever-se finalmente a lagrangeana reduzida

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\varphi\partial^{\mu}\varphi - \frac{1}{4}Z^{\mu\nu\lambda\kappa}F_{\mu\nu}F_{\lambda\kappa} + T^{\mu\nu\lambda}F_{\mu\nu}\partial_{\lambda}\varphi - C^{\mu\lambda}\partial_{\mu}\varphi\partial_{\lambda}\varphi - j^{\mu}A_{\mu} + J\varphi \ , \tag{4.8}$$

onde todos os índices sem chapéu variando de 0 a 2. Esta lagrangeana é composta por um setor de gauge, um setor escalar e um termo de acoplamento, cujas lagrangeanas são:

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z^{\mu\nu\lambda\kappa}F_{\mu\nu}F_{\lambda\kappa} - j^{\mu}A_{\mu}, \tag{4.9}$$

$$\mathcal{L}_{scalar} = \frac{1}{2}\partial_{\mu}\varphi\partial^{\mu}\varphi - C^{\mu\lambda}\partial_{\mu}\varphi\partial_{\lambda}\varphi + J\varphi, \tag{4.10}$$

$$\mathcal{L}_{coupling} = T^{\mu\nu\lambda}F_{\mu\nu}\partial_{\lambda}\varphi. \tag{4.11}$$

O tensor $Z^{\mu\nu\lambda\kappa}$ que aparece aqui é a versão planar do tensor original (K_F), isto é, $Z^{\mu\nu\lambda\kappa} = \left[(K_F)^{\mu\nu\lambda\kappa}\right]_{1+2}$, herdando as seguintes propriedades:

$$Z^{\mu\nu\lambda\kappa} = -Z^{\nu\mu\lambda\kappa}, \tag{4.12}$$

$$Z^{\mu\nu\lambda\kappa} = -Z^{\mu\nu\kappa\lambda}, \tag{4.13}$$

$$Z^{\mu\nu\lambda\kappa} = Z^{\lambda\kappa\mu\nu}, \tag{4.14}$$

$$Z^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta} + 2C^{\alpha}{}_{\alpha} = 0 \ . \tag{4.15}$$

sendo a última, uma consequência da propriedade do duplo traço nulo do tensor (K_F), ou seja,

$$(K_F)^{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}{}_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} = Z^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta} + 2\,(K_F)^{\alpha 3}{}_{\alpha 3} = Z^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta} + 2C^{\alpha}{}_{\alpha} = 0. \tag{4.16}$$

Este tensor exibe, também, a identidade de Bianchi,

$$Z^{\mu\nu\lambda\kappa} + Z^{\mu\kappa\nu\lambda} + Z^{\mu\lambda\kappa\nu} = 0, \tag{4.17}$$

porém não mais como propriedade independente, e sim como consequência das propriedades de simetria e anti-simetria, (4.12 - 4.14). Por causa destas propriedades, a propriedade de permutação é sempre verificada quando há pelo menos um índice repetido. Por exemplo

$$(K_F)^{0012} + (K_F)^{0201} + (K_F)^{0120} = (K_F)^{0201} - (K_F)^{0102} = 0 \ . \tag{4.18}$$

Esta identidade só não será necessariamente verificada, como consequência da simetria e antisimetria, quando todos os índices forem diferentes entre si, como em

$$(K_F)^{0123} + (K_F)^{2013} + (K_F)^{1203} = 0 \ . \tag{4.19}$$

Isto, porém, jamais acontecerá com o tensor $Z^{\mu\nu\lambda\kappa}$, uma vez que ele possui quatro índices e estes só assumem os valores 0, 1 e 2. Logo, a propriedade de permutação não pode ser considerada uma propriedade independente para este tensor, ou seja, não pode ser contada como restrição, não elimina uma componente independente deste tensor.

Na ausência de simetrias, o tensor $Z_{\mu\nu\lambda\kappa}$ possuiria $3^4 = 81$. Devido as suas simetrias, o mesmo possui apenas 5 componentes independentes, a saber:

$$Z_{0ilm} = [Z_{0112}, Z_{0212}],\ Z_{0i0m} = [Z_{0101}, Z_{0202}, Z_{0102}]\,,\ Z_{ijlm} = [Z_{1212}]\,. \tag{4.20}$$

Quanto ao tensor $T^{\mu\nu\lambda}$, o mesmo exibe as propriedades de anti-simetria nos dois primeiros indíces e a propriedade de permutação

$$T^{\mu\nu\lambda} = -T^{\nu\mu\lambda}, \tag{4.21}$$

$$T^{\mu\nu\lambda} + T^{\lambda\mu\nu} + T^{\nu\lambda\mu} = 0, \tag{4.22}$$

o que reduz a 8 suas componentes independentes. Já o tensor $C^{\mu\lambda}$ apresenta simetria em seus índices,

$$C^{\mu\lambda} = C^{\lambda\mu}\ . \tag{4.23}$$

o que implica em 6 componentes independentes. Estes três tensores, $Z^{\mu\nu\lambda\kappa}$, $T^{\mu\nu\lambda}$ e $C^{\mu\lambda}$, juntos, possuem 19 componentes independentes, a mesma quantidade do tensor $(K_F)^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\lambda}\widehat{\kappa}}$ original.

A presença do tensor $C^{\mu\lambda}$ fornece um termo cinético não canônico para o campo escalar. Recentemente, surgiram na literatura [30] alguns trabalhos com propostas de violação de Lorentz envolvendo este termo não-canônico em aplicações com defeitos topológicos, e em modelos análogos para buracos negros sônicos. O tensor $T^{\mu\nu\lambda}$, por sua vez, é responsável pelo acoplamento entre o setor escalar e o setor de gauge da teoria.

A lagrangeana (4.8) é invariante sob a seguinte transformação de gauge local

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda\ , \qquad \phi \rightarrow \phi\ , \tag{4.24}$$

ou seja, ele preserva a simetria de gauge local U(1) do modelo 4-dimensional.

A fim de propor uma efetiva parametrização dos elementos do setor de gauge, é útil escrever o elemento de lagrangeana $Z^{\mu\nu\lambda\kappa}F_{\mu\nu}F_{\lambda\kappa}$ como

$$Z^{\mu\nu\lambda\kappa}F_{\mu\nu}F_{\lambda\kappa} = 4Z^{0i0j}F_{0i}F_{0j} + 4Z^{0ilm}F_{0i}F_{lm} + Z^{ijlm}F_{ij}F_{lm}, \tag{4.25}$$

e, usando as expressões (2.61) e (2.62) para os campos, tem-se

$$Z^{\mu\nu\lambda\kappa}F_{\mu\nu}F_{\lambda\kappa} = 4Z^{0i0j}E^iE^j - 8Z^{0i12}E^iB + 4Z^{1212}B^2. \tag{4.26}$$

Da mesma maneira que ocorre em (1+3) dimensões, pode-se parametrizar as componentes do tensor $Z^{\mu\nu\lambda\kappa}$, observando a expressão (4.26), em termos de uma matriz, um vetor, e um escalar, definidos como:

$$(K_{DE})^{ij} = -2Z^{0i0j}, \tag{4.27}$$

$$L^i = 2Z^{0i12}, \tag{4.28}$$

$$s = 2Z^{1212}. \tag{4.29}$$

As propriedades de simetria e anti-simetria do tensor $Z^{\mu\nu\lambda\kappa}$ implicam que a matriz (K_{DE}) possui 3 componentes independentes, o vetor L possui duas, enquanto o escalar s representa apenas uma componente. Além disso, o duplo traço nulo de $Z^{\mu\nu\lambda\kappa}$, conforme a relação (4.15) com $C^{\mu\lambda} = 0$, fornece a relação

$$Z^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta} = 2Z^{0i}{}_{0i} + 2Z^{12}{}_{12} = -2Z^{0i0i} + 2Z^{1212} = 0 \ , \tag{4.30}$$

ou, escrevendo de outra forma,

$$tr\,(K_{DE}) + s = 0. \tag{4.31}$$

Juntas, estas restrições fornecem cinco componentes independentes, as mesmas do tensor $Z^{\mu\nu\lambda\kappa}$.

Dessa forma, tem-se

$$-\frac{1}{4}Z^{\mu\nu\lambda\kappa}F_{\mu\nu}F_{\lambda\kappa} = \frac{1}{2}E^i\,(K_{DE})^{ij}\,E^j - \frac{1}{2}sB^2 + \left(\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{L}\right)B \ . \tag{4.32}$$

$$\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{2}\left(E^2 - B^2\right) + \frac{1}{2}E^i\,(K_{DE})^{ij}\,E^j - \frac{1}{2}sB^2 + \left(\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{L}\right)B \ . \tag{4.33}$$

Como no modelo quadri-dimensional original, os coeficientes de violação de Lorentz tem paridade definida. Em (1+2) dimensões a paridade atua fazendo $r \to (-x, y)$, de modo que os campos se transformam como $A_0 \to A_0$, $A \to (-A_x, A_y)$, $E \to (-E_x, E_y)$, $B \to -B$. Para maiores detalhes sobre a operação de paridade em (1+2) dimensões, vide as Refs.[31],[32]. Considerando estas transformações na lagrangeana (4.33), conclui-se que os coeficientes $(K_{DE})^{11}$, $(K_{DE})^{22}$, s, L^1 são de paridade par, enquanto $(K_{DE})^{12}$ e L^2 são de paridade ímpar.

A fim de determinar a paridade dos outros parâmetros de violação de Lorentz, é necessário escrever a lagrangeana reduzida (4.8) na sua forma completa em termos dos campos E e B:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - C_{00}\,(\partial_0\varphi)^2 + C_{0i}\,(\partial_0\varphi)\,(\partial_i\varphi) - C_{ij}\,(\partial_i\varphi)\,(\partial_j\varphi)\\ &-(Z_{0i12}E^i)B - \frac{1}{2}\,(k_{DE})_{ij}\,E^iE^j - \frac{1}{2}sB^2 - T_{00i}\partial_0\varphi E^i - \epsilon_{ij}T_{0ij}\partial_0\varphi B + T_{i0j}\partial_i\varphi E^j + \epsilon_{lj}T_{ilj}\partial_i\varphi B.\end{aligned} \tag{4.34}$$

Considerando-se que o campo φ, sob a operação de paridade, comporta-se como um escalar[1], $\varphi \to \varphi$, conclui-se que há mais 8 coeficientes de paridade-par, C^{00}, C^{02}, C^{11}, C^{22}, T^{020}, T^{022},T^{120},

[1] **Note-se que, no caso em que o campo ϕ comporta-se como uma pseudo-escalar $(\phi \to -\phi)$, o comportamento das componentes $T_{00i}, T_{0ij}, T_{i0j}, T_{ilj}$ é revertido sob paridade.**

T^{122}, e 7 paridade-ímpar, C^{01},C^{12}, T^{010}, T^{012}, T^{021}, T^{120}, T^{122}, o que, adicionado às componentes do setor eletromagnético puro, fornece 12 parâmetros de paridade par e 9 de paridade-ímpar, totalizando 21 componentes. Além disso, porém, nota-se que a relação de traço (4.15), completa, é aqui reescrita como

$$Z^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta} + 2C^{\alpha}{}_{\alpha} = tr\left(K_{DE}\right) + s + 2C^{00} - 2C^{ii} = 0, \tag{4.35}$$

Esta equação envolve apenas componentes de paridade-par, enquanto a propriedade de permutação

$$T^{012} + T^{120} + T^{201} = 0, \tag{4.36}$$

é composta apenas pelas de paridade-ímpar (quando os três índices assumem valores distintos). Estas duas relações reduzem o número de componentes independentes 21 para 19, como esperado. Estes resultados estão resumidos na tabela abaixo.

Componentes		n	N
Paridade-par	$C_{00}, C_{02}, C_{11}, C_{22}, L_1, (k_{DE})_{11}, (k_{DE})_{22}, s, T_{002}, T_{101}, T_{202}, T_{112}$	12	11
Paridade-ímpar	$C_{01}, C_{12}, L_2, (k_{DE})_{12}, T_{001}, T_{012}, T_{102}, T_{201}, T_{212}$	9	8
Total		21	19

Tabela 4.1: Classificação da paridade e número de parâmetros violadores de Lorentz pertencente ao modelo planar. O símbolo n designa o número de componentes, enquanto $\mathbb{N}$ designa o número total de componentes independentes.

4.1.1 Equações de Movimento

A fim de obter as soluções clássicas dessa eletrodinâmica planar, são necessárias as equações de movimento da teoria, tanto para os campos de gauge, quanto para o campo escalar. Essas equações podem ser encontradas a partir da lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z^{\mu\nu\lambda\kappa}F_{\mu\nu}F_{\lambda\kappa} + T^{\mu\nu\lambda}F_{\mu\nu}\partial_{\lambda}\varphi + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\varphi\partial^{\mu}\varphi - C^{\mu\lambda}\partial_{\mu}\varphi\partial_{\lambda}\varphi - j^{\mu}A_{\mu} + J\varphi \ , \tag{4.37}$$

e da equação de Euler-Lagrange para o campo correspondente. Para os campos de gauge, parte-se da equação de Euler-Lagrange (2.35). Calculando os termos separadamente, as novas contribuições são:

$$\frac{\partial\left(Z^{\alpha\beta\lambda\kappa}F_{\alpha\beta}F_{\lambda\kappa}\right)}{\partial\left(\partial_{\mu}A_{\nu}\right)} = 4Z^{\mu\nu\lambda\kappa}\partial_{\lambda}A_{\kappa} + 4Z^{\alpha\beta\mu\nu}\partial_{\alpha}A_{\beta} = 8Z^{\mu\nu\lambda\kappa}\partial_{\lambda}A_{\kappa} = 4Z^{\mu\nu\lambda\kappa}F_{\lambda\kappa}, \tag{4.38}$$

$$\frac{\partial\left(T^{\alpha\beta\lambda}F_{\alpha\beta}\partial_{\lambda}\varphi\right)}{\partial\left(\partial_{\mu}A_{\nu}\right)} = 2T^{\alpha\beta\lambda}\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta}\partial_{\lambda}\varphi = 2T^{\mu\nu\lambda}\partial_{\lambda}\varphi. \tag{4.39}$$

Estes resultados, juntamente com outros já conhecidos, conduzem à seguinte equação de movimento para o campo de gauge da teoria

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - Z^{\nu\mu\lambda\kappa}\partial_\mu F_{\lambda\kappa} + 2T^{\nu\mu\lambda}\partial_\mu\partial_\lambda\varphi = j^\nu. \tag{4.40}$$

É importante notar que, nesta equação, o campo de gauge aparece acoplado ao campo escalar. Para encontrar a equação de movimento do campo escalar, parte-se da equação de Euler-Lagrange (2.76), calculando inicialmente alguns dos seus termos:

$$\frac{\partial\left(T^{\alpha\nu\lambda}F_{\alpha\nu}\partial_\lambda\varphi\right)}{\partial\left(\partial_\mu\varphi\right)} = T^{\alpha\nu\lambda}F_{\alpha\nu}\delta^\mu_\lambda = T^{\alpha\nu\mu}F_{\alpha\nu}, \tag{4.41}$$

$$\frac{\partial\left(C^{\alpha\lambda}\partial_\alpha\varphi\partial_\lambda\varphi\right)}{\partial\left(\partial_\mu\varphi\right)} = C^{\mu\lambda}\partial_\lambda\varphi + C^{\alpha\mu}\partial_\alpha\varphi = 2C^{\mu\lambda}\partial_\lambda\varphi. \tag{4.42}$$

Esses termos, juntamente com alguns cálculos prévios, fornecem a equação de movimento para o campo escalar

$$\Box\varphi + T^{\alpha\nu\mu}\partial_\mu F_{\alpha\nu} - 2C^{\mu\lambda}\partial_\mu\partial_\lambda\varphi = J\ . \tag{4.43}$$

Esta equação, tal como a Eq. (4.40), acopla o campo escalar ao campo de gauge. Na ausência do termo de acoplamento $\left(T^{\mu\nu\lambda} = 0\right)$, entretanto, os setores escalar e de gauge tornam-se desacoplados e classicamente governados pelas equações

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - Z^{\nu\mu\lambda\kappa}\partial_\mu F_{\lambda\kappa} = j^\nu, \tag{4.44}$$

$$\Box\varphi - 2C^{\mu\lambda}\partial_\mu\partial_\lambda\varphi = J\ . \tag{4.45}$$

A principal razão para negligenciar o tensor $T^{\mu\nu\lambda}$ é que ele aparece como uma contribuição de segunda ordem nas equações definidas apenas em termos do campo de gauge ou do campo escalar. A fim de verificar isso, pode-se escrever o campo escalar na Eq. (4.43), na ausência de fontes, em função dos campos de gauge

$$\varphi = -\frac{1}{(\Box - 2C^{\mu\lambda}\partial_\mu\partial_\lambda)}T^{\alpha\nu\mu}\partial_\mu F_{\alpha\nu}\ , \tag{4.46}$$

e substituí-lo na Eq. (4.40)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - Z^{\nu\mu\lambda\kappa}\partial_\mu F_{\lambda\kappa} - \frac{2}{(\Box - 2C^{\rho\tau}\partial_\rho\partial_\tau)}T^{\nu\mu\lambda}T^{\alpha\beta\gamma}\partial_\mu\partial_\lambda\partial_\gamma F_{\alpha\beta} = j^\nu. \tag{4.47}$$

Tal equação difere da equação desacoplada (4.44) apenas por um termo de segunda ordem no tensor $T^{\mu\nu\lambda}$, justificando a escolha adotada $\left(T^{\mu\nu\lambda} = 0\right)$. Um procedimento similar mostra que este mesmo tensor contribui para a Eq. (4.43), desacoplada, apenas em segunda ordem também. Assim, os setores escalar e de gauge obedecem equações de movimento desacopladas, em primeira ordem em $T^{\mu\nu\lambda}$, confirmando a validade das Eqs. (4.44) e (4.45).

A componente temporal, $\nu = 0$, da Eq. (4.44) fornece a primeira equação de Maxwell modificada

$$\partial_i F^{i0} - Z^{0i\lambda\kappa}\partial_i F_{\lambda\kappa} = \partial_i F^{i0} - 2Z^{0i0j}\partial_i F_{0j} - 2Z^{0i12}\partial_i F_{12} = j^0,$$

$$\partial_i E^i + (K_{DE})^{ij}\,\partial_i E^j - L^i\partial_i(-B) = \rho, \tag{4.48}$$

Esta é a lei de Gauss modificada, que pode ser reescrita como

$$\partial_i\left[\left(\delta^{ij} + (K_{DE})^{ij}\right)E^j\right] + L^i\partial_i B = \rho\ . \tag{4.49}$$

As componentes $\nu = i$, por outro lado, fornecem a segunda equação de Maxwell modificada

$$\partial_\mu F^{\mu i} - Z^{i\mu\lambda\kappa}\partial_\mu F_{\lambda\kappa} = \partial_t F^{0i} + \partial_j F^{ji} - Z^{i0\lambda\kappa}\partial_t F_{\lambda\kappa} - Z^{ij\lambda\kappa}\partial_j F_{\lambda\kappa} = j^i, \tag{4.50}$$

que é equivalente a

$$\partial_t F^{0i} + \partial_j F^{ji} + \left(-2Z^{i0j0}\partial_t F_{j0} - 2Z^{i012}\partial_t F_{12}\right) + \left(-2Z^{ij0k}\partial_j F_{0k} - 2Z^{ij12}\partial_j F_{12}\right) = j^i. \tag{4.51}$$

Fazendo-se uso da expressão (2.62) para o campo magnético, e a expressão (2.61) para o campo elétrico, além das (4.27), (4.28) e (4.29) para os parâmetros violadores de Lorentz, esta equação pode ser reescrita como

$$-\partial_t E^i + \epsilon^{ij}\partial_j B - (K_{DE})^{ij}\,\partial_t E^j - L^i\partial_t B - \epsilon^{ij}L^k\partial_j E^k + s\epsilon^{ij}\partial_j B = j^i, \tag{4.52}$$

ou ainda

$$(1+s)\,\epsilon^{ij}\partial_j B - \partial_t\left[\left(\delta^{ij} + (K_{DE})^{ij}\right)E^j\right] - (\partial_t B)\,L^i - \epsilon^{ij}\partial_j\left(L^k E^k\right) = j^i. \tag{4.53}$$

A terceira equação de Maxwell advém da identidade de Bianchi, $\partial_\mu \widetilde{F}^\mu = 0$, implicando na lei de Faraday planar

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} + \partial_t B = 0\ . \tag{4.54}$$

Dessa forma, governando a dinâmica da teoria, há um conjunto de quatro equações diferenciais

$$\partial_i\left[\left(\delta^{ij} + (K_{DE})^{ij}\right)E^j\right] + L^i\partial_i B = \rho, \tag{4.55}$$

$$(1+s)\,\epsilon^{ij}\partial_j B - \partial_t\left[\left(\delta^{ij} + (K_{DE})^{ij}\right)E^j\right] - (\partial_t B)\,L^i - \epsilon^{ij}\partial_j\left(L^k E^k\right) = j^i, \tag{4.56}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} + \partial_t B = 0, \tag{4.57}$$

$$\Box\varphi - 2C^{\mu\lambda}\partial_\mu\partial_\lambda\varphi = J\ . \tag{4.58}$$

4.2 Tensor de Energia-Momento

Outro aspecto relevante da teoria é o cálculo do tensor de energia-momento, que pode ser encontrado a partir da Lagrangeana planar (4.8), através da expressão

$$\Theta^{\beta\rho} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\beta A_\alpha\right)}\partial^\rho A_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\beta \phi\right)}\partial^\rho \phi - g^{\beta\rho}\mathcal{L}. \tag{4.59}$$

Usa-se, primeiramente, as expressões (4.38) e (4.39) a fim de obter

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\beta A_\alpha\right)} = -\frac{1}{4}\left(4F^{\beta\alpha}\right) - \frac{1}{4}\left(4Z^{\beta\alpha\lambda\kappa}F_{\lambda\kappa}\right) + 2T^{\beta\alpha\lambda}\partial_\lambda\phi = -F^{\beta\alpha} - Z^{\beta\alpha\lambda\kappa}F_{\lambda\kappa} + 2T^{\beta\alpha\lambda}\partial_\lambda\phi, \tag{4.60}$$

e depois usa-se as expressões (4.41) e (4.42) para encontrar

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\beta \phi\right)} = T^{\mu\nu\beta}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(2\partial^\beta\phi\right) - 2C^{\beta\lambda}\partial_\lambda\phi = T^{\mu\nu\beta}F_{\mu\nu} + \partial^\beta\phi - 2C^{\beta\lambda}\partial_\lambda\phi. \tag{4.61}$$

Com isso, o tensor de energia-momento da teoria torna-se

$$\Theta^{\beta\rho} = \left[-F^{\beta\alpha} - Z^{\beta\alpha\lambda\kappa}F_{\lambda\kappa} + 2T^{\beta\alpha\lambda}\partial_\lambda\phi\right]\partial^\rho A_\alpha + \left[T^{\mu\nu\beta}F_{\mu\nu} + \partial^\beta\phi - 2C^{\beta\lambda}\partial_\lambda\phi\right]\partial^\rho\phi - g^{\beta\rho}\mathcal{L}. \tag{4.62}$$

Substitui-se agora a derivada do campo de gauge, $\partial^\rho A_\alpha = F^\rho{}_\alpha + \partial_\alpha A^\rho$, na expressão (4.62),

$$\Theta^{\beta\rho} = \left[-F^{\beta\alpha} - Z^{\beta\alpha\lambda\kappa}F_{\lambda\kappa} + 2T^{\beta\alpha\lambda}\partial_\lambda\phi\right]\left(F^\rho{}_\alpha + \partial_\alpha A^\rho\right) + \left[T^{\mu\nu\beta}F_{\mu\nu} + \partial^\beta\phi - 2C^{\beta\lambda}\partial_\lambda\phi\right]\partial^\rho\phi - g^{\beta\rho}\mathcal{L}. \tag{4.63}$$

Neste ponto, analisa-se o termo

$$f^{\beta\rho} = \left[-F^{\beta\alpha} - Z^{\beta\alpha\lambda\kappa}F_{\lambda\kappa} + 2T^{\beta\alpha\lambda}\partial_\lambda\phi\right]\left(\partial_\alpha A^\rho\right), \tag{4.64}$$

que pode ser reescrito como

$$f^{\beta\rho} = A^\rho\left[\partial_\alpha F^{\beta\alpha} + Z^{\beta\alpha\lambda\kappa}\partial_\alpha F_{\lambda\kappa} - 2T^{\beta\alpha\lambda}\partial_\alpha\partial_\lambda\phi\right], \tag{4.65}$$

a menos de um termo de divergência toral, $\partial_\alpha\left\{\left[-F^{\beta\alpha} - Z^{\beta\alpha\lambda\kappa}F_{\lambda\kappa} + 2T^{\beta\alpha\lambda}\partial_\lambda\phi\right]A^\rho\right\}$, que sabidamente não contribui para o cálculo da energia do sistema. A equação de movimento (4.40), sem fontes, revela que este termo não precisa ser levado em conta neste cálculo. Dessa maneira, o tensor assume a forma

$$\Theta^{\beta\rho} = \left[-F^{\beta\alpha} - Z^{\beta\alpha\lambda\kappa}F_{\lambda\kappa} + 2T^{\beta\alpha\lambda}\partial_\lambda\phi\right]F^\rho{}_\alpha + \left[T^{\mu\nu\beta}F_{\mu\nu} + \partial^\beta\phi - 2C^{\beta\lambda}\partial_\lambda\phi\right]\partial^\rho\phi - g^{\beta\rho}\mathcal{L}. \tag{4.66}$$

É interessante calcular a componente Θ^{00} do tensor de energia-momento, uma vez que esta componente corresponde à densidade de energia da teoria em estudo, sendo dada por

$$\Theta^{00} = \left[-F^{0i} - Z^{0i\lambda\kappa}F_{\lambda\kappa} + 2T^{0i\lambda}\partial_\lambda\phi\right]F^0{}_i + \left[T^{\mu\nu0}F_{\mu\nu} + \partial^0\phi - 2C^{0\lambda}\partial_\lambda\phi\right]\partial^0\phi - \mathcal{L}. \tag{4.67}$$

Esta quantidade pode ser separada em três contribuições, correspondentes ao setor de gauge, ao setor escalar, e ao termo de acoplamento, apresentadas abaixo:

$$\Theta^{00}_{gauge} = \left[-F^{0i} - Z^{0i\lambda\kappa}F_{\lambda\kappa}\right] F^{0}{}_{i} - \mathcal{L}_{EM}, \tag{4.68}$$

$$\Theta^{00}{}_{scalar} = \left[\partial^{\beta}\phi - 2C^{\beta\lambda}\partial_{\lambda}\phi\right] \partial^{\rho}\phi - \mathcal{L}_{scalar}, \tag{4.69}$$

$$\Theta^{00}_{coupling} = \left[2T^{\beta\alpha\lambda}\partial_{\lambda}\phi\right] F^{\rho}{}_{\alpha} \left[T^{\mu\nu 0}F_{\mu\nu}\right] \partial^{0}\phi - \mathcal{L}_{coupling}, \tag{4.70}$$

onde obviamente vale a soma:

$$\Theta^{00} = \Theta^{00}{}_{gauge} + \Theta^{00}{}_{coupling} + \Theta^{00}{}_{scalar}, \tag{4.71}$$

e as lagrangeanas, $\mathcal{L}_{EM}$, $\mathcal{L}_{scalar}, \mathcal{L}_{coupling}$, estão dadas nas Eqs.(4.9, 4.10, 4.11), sendo tomadas aqui na ausência de fontes. Calculando cada uma destas contribuições, resulta:

$$\Theta^{00}{}_{gauge} = \frac{1}{2}\left(E^{2} + B^{2}\right) + \frac{1}{2}E^{i}\left(K_{DE}\right)^{ij}E^{j} + \frac{1}{2}sB^{2}, \tag{4.72}$$

$$\Theta^{00}{}_{coupling} = 2\left(T^{12i}B - T^{0ji}E^{j}\right)\partial_{i}\varphi, \tag{4.73}$$

$$\Theta^{00}{}_{scalar} = \frac{1}{2}\left(1 - 2C^{00}\right)\left(\partial_{0}\varphi\right)^{2} + \frac{1}{2}\left(\delta^{ij} + C^{ij}\right)\partial_{i}\varphi\partial_{j}\varphi. \tag{4.74}$$

Verifica-se nesta expressões que a densidade de energia é positiva se os parâmetros de violação de Lorentz forem suficientes pequenos.

4.3 Soluções Clássicas

Nesta seção são examinados os efeitos dos parâmetros de violação de Lorentz sobre as soluções clássicas no regime estacionário, obtidas via método de Green. Da mesma forma que na teoria quadri-dimensional original, nessa teoria planar as correntes estacionárias e as cargas estáticas produzem tanto campo elétrico quanto magnético. As soluções estacionárias revelam que os coeficientes de violação de Lorentz não modificam o comportamento assimptótico da eletrodinâmica planar de Maxwell, porém induzem termos não radiais com dependência angular.

4.3.1 Equações de Onda

O campo escalar aparece totalmente desacoplado na Eq. (4.58), e portanto pode ser resolvido diretamente. Quanto aos campos elétrico e magnético é necessário desacoplá-los um do outro entre as Eqs. (4.55), (4.56) e (4.57). Para isso, pode-se usar as seguintes identidades para um vetor $\overrightarrow{L}$ e um escalar L quaisquer, que já foram inclusive utilizadas anteriormente em (2.82) e (2.83),

$$\overrightarrow{\nabla}^{*}\left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{L}\right) = \overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{L}\right) - \nabla^{2}\overrightarrow{L}, \tag{4.75}$$

$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{\nabla}^{*}L=-\nabla^{2}L\ . \tag{4.76}$$

Inicia-se aplicando o operador $(1+s)\,\epsilon^{ij}\partial_j$ sobre a Eq. (4.57),

$$(1+s)\,\epsilon^{ij}\partial_j\left[\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{E}+\partial_t B\right]=0, \tag{4.77}$$

o que, usando as identidades (4.75) e (4.76), fornece

$$(1+s)\left[\nabla^{i}\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E}\right)-\nabla^{2}E^{i}\right]+\partial_t\left[(1+s)\,\epsilon^{ij}\partial_j B\right]=0\ . \tag{4.78}$$

Com a Eq. (4.56), resulta

$$(1+s)\left[\nabla^{i}\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E}\right)-\nabla^{2}E^{i}\right]+\left\{\left[\left(\delta^{ij}+(K_{DE})^{ij}\right)\partial_t^{2}E^{j}\right]+\left(\partial_t^{2}B\right)L^{i}+\epsilon^{ij}\partial_j\partial_t\left(L^{k}E^{k}\right)+\partial_t j^{i}\right\}=0\ , \tag{4.79}$$

ou ainda

$$(1+s)\left[\nabla^{i}\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E}\right)-\nabla^{2}E^{i}\right]+\partial_t^{2}E^{i}+\partial_t^{2}\left[(K_{DE})^{ij}E^{j}\right]-\partial_t\left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{E}\right)L^{i}+\epsilon^{ij}\partial_j\left(\overrightarrow{L}\cdot\partial_t\overrightarrow{E}\right)=-\partial_t j^{i}, \tag{4.80}$$

e tem-se assim uma equação de onda para o setor elétrico desacoplado do setor magnético.

Pode-se usar ainda a Eq. (4.56) e fazer

$$\epsilon^{ji}\partial_j\left\{\epsilon^{il}\partial_l\left[(1+s)\,B\right]-\partial_t\left[\left(\delta^{il}+(K_{DE})^{il}\right)E^{l}\right]-(\partial_t B)\,L^{i}-\epsilon^{il}\partial_l\left(L^{k}E^{k}\right)\right\}=\epsilon^{ji}\partial_j j^{i}, \tag{4.81}$$

o que fornece

$$-(1+s)\,\nabla^{2}B+\partial_t^{2}B-\epsilon^{ji}\partial_t\partial_j\left[(K_{DE})^{il}E^{l}\right]+\epsilon^{ij}L^{i}\partial_j\partial_t B+\nabla^{2}\left(L^{k}E^{k}\right)=\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{j}, \tag{4.82}$$

que é a equação de onda para o setor magnético ainda não desacoplado do setor elétrico.

No que segue, pode-se encontrar ainda equações de onda para os potenciais. Sabendo-se que os campos elétrico e magnético são dados pelas expressões (2.25) e (2.26), e usando as equações de Mawxell modificadas (4.55) e (4.56), tem-se

$$\partial_i\left[\left(\delta^{ij}+(K_{DE})^{ij}\right)\left(-\partial_j A^{0}-\partial_t A^{j}\right)\right]+L^{i}\partial_i\left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}\right)=\rho, \tag{4.83}$$

$$(1+s)\,\epsilon^{ij}\partial_j\left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}\right)+\partial_t\left[\left(\delta^{ij}+(K_{DE})^{ij}\right)\left(\partial_j A^{0}+\partial_t A^{j}\right)\right]-\left[\partial_t\left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}\right)\right]L^{i}+\epsilon^{ij}\partial_j\left[L^{k}\left(\partial_k A^{0}+\partial_t A^{k}\right)\right]=j^{i}. \tag{4.84}$$

No caso estacionário, estas equações são reduzidas a

$$-\left(\delta^{ij}+(K_{DE})^{ij}\right)\left(\partial_i\partial_j A^{0}\right)+L^{i}\partial_i\left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}\right)=\rho\ , \tag{4.85}$$

$$(1+s)\,\epsilon^{ij}\partial_j\left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}\right)+\epsilon^{ij}\partial_j\left(L^{k}\partial_k A^{0}\right)=j^{i}. \tag{4.86}$$

Multiplicando a Eq. (4.86) por ϵ^{il},

$$\delta^{lj}\left[(1+s)\,\partial_j\left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}\right)+\partial_j\left(L^k\partial_k A^0\right)\right]=(1+s)\,\partial_l\left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}\right)+\partial_l\left(L^k\partial_k A^0\right)=-\epsilon^{li}j^i, \quad (4.87)$$

$$(1+s)\,\partial_i\left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}\right)+\partial_i\left(L^k\partial_k A^0\right)=-\epsilon^{ij}j^j, \quad (4.88)$$

e multiplicando por L^i, tem-se

$$L^i\partial_i\left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}\right)=-\frac{1}{(1+s)}\left[\left(L^i\partial_i\right)^2 A^0+\epsilon^{ij}L^i j^j\right]\ . \quad (4.89)$$

Substituindo isto na expressão estacionária (4.85) e regrupando-se, resulta, finalmente,

$$\left[\nabla^2+\left(K_{DE}\right)^{ij}\partial_i\partial_j+\frac{1}{(1+s)}\left(L^i\partial_i\right)^2\right]A^0=-\left(\rho+\frac{1}{(1+s)}\epsilon^{ij}L^i j^j\right)\ , \quad (4.90)$$

que é uma equação desacoplada para o potencial escalar A^0.

Para o potencial vetor $\overrightarrow{A}$ não é possível encontrar uma equação desacoplada, o que não impossibilita sua resolução. Com o uso da identidade (4.76), a Eq. (4.86) fornece a expressão

$$(1+s)\left[\nabla^i\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}\right)-\nabla^2 A^i\right]+\epsilon^{ij}\partial_j\left(L^k\partial_k A^0\right)=j^i. \quad (4.91)$$

Pode-se fazer uso do gauge de Coulomb, $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}=0$ (equivalente ao gauge de Lorentz na situação estática), o qual é compatível com a equação de movimento (4.44), que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\partial_\mu\left(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu\right)-Z^{\nu\mu\lambda\kappa}\partial_\mu\left(\partial_\lambda A_k-\partial_k A_\lambda\right)&=j^\nu\\ \Box A^\nu-\partial^\nu\left(\partial_\mu A^\mu\right)-Z^{\nu\mu\lambda\kappa}\partial_\mu\left(\partial_\lambda A_k-\partial_k A_\lambda\right)&=j^\nu,\end{aligned} \quad (4.92)$$

De fato, adotando o gauge de Lorentz, $\partial_\mu A^\mu=0$ (ou, na situação estática, o gauge de Coulomb, $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}=0$), a equação de onda para o quadripotencial se torna

$$\Box A^\nu-Z^{\nu\mu\lambda\kappa}\partial_\mu\left(\partial_\lambda A_k-\partial_k A_\lambda\right)=j^\nu, \quad (4.93)$$

que é equivalente às Eqs. (4.83) e (4.84). Fazendo uso, então, do gauge de Coulomb na Eq. (4.91), obtem-se

$$-(1+s)\,\nabla^2 A^i+\epsilon^{ij}\partial_j\left(L^k\partial_k A^0\right)=j^i, \quad (4.94)$$

Contraindo esta expressão com $\epsilon^{ji}\partial_j$ e usando a identidade (4.76) (ou a demonstração (2.84)), obtém-se

$$-(1+s)\,\nabla^2\left(\epsilon^{ji}\partial_j A^i\right)-\nabla^2\left(L^k\partial_k A^0\right)=\epsilon^{ji}\partial_j j^i, \quad (4.95)$$

o que fornece, finalmente, a equação para o potencial vetor $\overrightarrow{A}$

$$\nabla^2 \left(\epsilon^{ji}\partial_j A^i\right) = -\frac{1}{(1+s)}\left[\epsilon^{ji}\partial_j j^i + \nabla^2\left(L^k\partial_k A^0\right)\right] \ , \tag{4.96}$$

que pode ainda ser escrito como

$$\nabla^2 B = -\frac{1}{(1+s)}\left[\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{j} + \nabla^2\left(\overrightarrow{L}\cdot\overrightarrow{\nabla}A^0\right)\right], \tag{4.97}$$

$$\nabla^2 B = -\frac{1}{(1+s)}\left[\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{j} - \nabla^2\left(\overrightarrow{L}\cdot\overrightarrow{E}\right)\right], \tag{4.98}$$

Estas duas últimas equações permitem obter a solução para o campo magnético a partir da solução já encontrada para o setor elétrico.

4.3.2 Soluções das Equações de Onda

Nesta seção, resolve-se as equações para os setores elétrico e magnético, obtendo soluções estacionárias em primeira ordem nos parâmetros de violação de Lorentz. Desta forma, um bom ponto de partida são as equações diferenciais para os potenciais escalar e vetor (ou para o campo magnético), Eqs. (4.90) e (4.98). Em primeira ordem, a Eq. (4.90) é escrita como

$$\left[\nabla^2 + \left(K_{DE}\right)^{ij}\partial_i\partial_j\right]A^0 = -\left(\rho + \epsilon^{ij}L^i j^j\right), \tag{4.99}$$

Estas equações podem ser resolvidas pelo método de Green. De acordo com esse método, já conhecido desde o Capítulo 2, para a primeira equação, por exemplo, tem-se uma solução do tipo

$$A^0(r) = \int G\left(r-r'\right)\left(\rho + \epsilon^{ij}L^i j^j\right)d^2r' \ , \tag{4.100}$$

onde a função de Green, $G(r-r')$, obedece a equação

$$\left[\nabla^2 + \left(K_{DE}\right)^{ij}\partial_i\partial_j\right]G\left(r-r'\right) = -\delta\left(r-r'\right) \ . \tag{4.101}$$

Lembrando-se que a função de Green satisfaz a Eq. (2.96), tem-se

$$\widetilde{G}(p) = \frac{1}{\left[\mathbf{p}^2 + \left(K_{DE}\right)^{ij}p^ip^j\right]} \ , \tag{4.102}$$

onde $\mathbf{p}^2 = \vec{p}^2$. Considerando apenas contribuições de primeira ordem nos parâmetros de violação, vale

$$\widetilde{G}(p) = \frac{1}{\mathbf{p}^2}\left(1 - \left(K_{DE}\right)^{ij}\frac{p^ip^j}{\mathbf{p}^2}\right) \ . \tag{4.103}$$

Assim, efetuando a transformada de Fourier, tem-se

$$G(r-r') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \left(\frac{1}{\mathbf{p}^2} - (K_{DE})^{ij} \frac{p^i p^j}{\mathbf{p}^2} \right) e^{-ip\cdot(r-r')} d^2p \ . \tag{4.104}$$

Conforme o desenvolvimento que pode ser encontrado no Apêndice A, sabe-se que

$$\int d^2p \ \frac{1}{\mathbf{p}^2} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} = -2\pi \ln R \ , \tag{4.105}$$

onde $\mathbf{R} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Além disso, é necessário usar o resultado

$$\int d^2p \ \frac{p_i p_j}{\mathbf{p}^4} e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = 2\pi \left(-\frac{\delta_{ij}}{2} \ln R - \frac{1}{2} \frac{R_j R_i}{R^2} \right), \tag{4.106}$$

que também pode ser encontrado no Apêndice A. E assim a função de Green (4.104) torna-se

$$G(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)} \left[-\ln R - (K_{DE})^{ij} \left(-\frac{\delta_{ij}}{2} \ln R - \frac{1}{2} \frac{R_j R_i}{R^2} \right) \right], \tag{4.107}$$

$$G(\mathbf{R}) = -\frac{1}{(2\pi)} \left[\left(1 - \frac{(K_{DE})^{ii}}{2} \right) \ln R - \frac{(K_{DE})^{ij}}{2} \frac{R_j R_i}{R^2} + \frac{(K_{DE})^{ii}}{4} \right], \tag{4.108}$$

onde $\mathbf{R} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ e os termos envolvendo os coeficientes $(k_{DE})^{ij}$ são correções da violação de Lorentz à função de Green planar usual, $\ln R$.

O potencial escalar é então escrito como

$$A_0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi} \int \left[\left(1 - \frac{(K_{DE})^{ii}}{2} \right) \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - \right.$$
$$\left. - \frac{(K_{DE})^{ij}}{2} \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^i (\mathbf{r}-\mathbf{r}')^j}{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2} \right] [\rho + \epsilon^{mn} L^m j^n] d^2\mathbf{r}'.$$

Para uma distribuição de carga pontual, $\rho(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r}')$, este potencial escalar assume a forma

$$A_0(\mathbf{r}) = -\frac{q}{2\pi} \left\{ [1 - \frac{(K_{DE})^{ii}}{2}] \ln r - \frac{(K_{DE})^{ij}}{2} \frac{r_i r_j}{r^2} \right\}. \tag{4.109}$$

Este resultado difere do usual principalmente devido ao termo $(k_{DE})^{ij} r_i r_j / r^2$, que apresenta dependência angular (enquanto sua magnitude permanece constante para $r = cte$). Partindo do potencial escalar, encontra-se o campo elétrico, $E^l(\mathbf{r}) = -(\nabla A_0(\mathbf{r}))^l$, dado abaixo

$$E^l(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi} \left[[1 - \frac{(K_{DE})^{ii}}{2}] \frac{r^l}{r^2} - \frac{1}{r^2} \left((K_{DE})^{lj} r_j - \frac{(K_{DE})^{ij} r_i r_j}{r^2} r^l \right) \right] \ . \tag{4.110}$$

Note-se que o campo elétrico, produzido neste caso por uma carga pontual, decai como $1/r$, como usualmente ocorre em (1+2) dimensões, de forma que a violação da simetria de Lorentz não altera o comportamento assintótico. Este campo, além de apresentar termos de comportamento radial, exibe também não radiais, com dependência angular, tais como $(k_{DE})^{li} r_i$ e $(k_{DE})^{ij} r_i r_j$.

Tomando $r_i = r\cos\theta_i$, $r_j = r\cos\theta_j$, tem-se $(k_{DE})^{ij} r_i r_j/r^2 = (k_{DE})^{ij}\cos\theta_i\cos\theta_j$, e o campo elétrico passa a manisfetar explicitamente sua dependência angular:

$$\mathbf{E}^l(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi}\left[[1 - \frac{1}{2}(k_{DE})^{ii} + (k_{DE})^{ij}\cos\theta_i\cos\theta_j]\frac{r^l}{r^2} - \frac{1}{r^2}(k_{DE})^{lj} r_j\right]. \tag{4.111}$$

Por outro lado, uma corrente estacionária associada a uma carga pontual com velocidade uniforme $\overrightarrow{u}$, apresenta densidade $\overrightarrow{j}(r') = q\overrightarrow{u}\delta(r')$, o que conduz ao potencial escalar

$$A_0(\mathbf{r}) = -\frac{q}{2\pi(1+s)}\epsilon_{im}L^i u^m\left[\left(1 - \frac{(K_{DE})^{ii}}{2}\right)\ln r - \frac{(K_{DE})^{ij}}{2}\frac{r_i r_j}{r^2}\right]. \tag{4.112}$$

Em primeira ordem nos parâmetros de violação de Lorentz, este potencial é reduzido a apenas

$$A_0(\mathbf{r}) = -\frac{q}{2\pi}\left(\overrightarrow{L}\times\overrightarrow{u}\right)\ln r\ . \tag{4.113}$$

Consequentemente, o campo elétrico é dado por

$$E^i(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi}\left(\overrightarrow{L}\times\overrightarrow{u}\right)\frac{r^i}{r^2}\ . \tag{4.114}$$

Lembrando que o produto vetorial em duas dimensões é um escalar, esse campo elétrico, portanto, está alinhado com a direção radial. Este é um resultado novo que não está presente na eletrodinâmica usual. Aqui, correntes elétricas também contribuem para a produção de campo elétrico. Obviamente, para parâmetros de violação de Lorentz nulos, recupera-se o resultado usual, $E^i(\mathbf{r}) = 0$.

Para discutir as soluções de primeira ordem associadas ao setor magnético, pode-se usar como ponto de partida a Eq. (4.98) escrita na forma

$$\nabla^2\left[B - \left(\overrightarrow{L}\cdot\overrightarrow{E}\right)\right] = -(1-s)\nabla\times\overrightarrow{j}\ . \tag{4.115}$$

A solução desta equação é dada por

$$B(\mathbf{r}) - \left(\overrightarrow{L}\cdot\overrightarrow{E}\right) = \int G_B(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\left[-(1-s)\epsilon_{im}\partial_i J^m(\mathbf{r}')\right]d^2r', \tag{4.116}$$

onde a função de Green $G_B(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ do campo magnético satisfaz $\nabla^2 G_B(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$. Tomando a transformada de Fourier, decorre $\tilde{G}_B(p) = -1/p^2$, cuja função de Green é

$$G_B(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|. \tag{4.117}$$

Consequentemente, na expressão para o campo magnético

$$B(\mathbf{r}) = \left(\overrightarrow{L}\cdot\overrightarrow{E}\right) - \frac{(1-s)}{2\pi}\int\ln\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|[\epsilon_{im}\partial_i J^m(\mathbf{r}')]d^2r'. \tag{4.118}$$

A integral no membro direito pode ser resolvida reescrevendo-a na forma

$$\int \ln\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|[\epsilon_{im}\partial_i J^m(\mathbf{r}')]d^2r' = \int \partial_i \left\{\ln\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|\left[\epsilon_{im}J^m(\mathbf{r}')\right]\right\}d^2r' - \int \partial_i\left(\ln\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|\right)[\epsilon_{im}J^m(\mathbf{r}')]d^2r' \tag{4.119}$$

o que fornece

$$\int \ln\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|[\epsilon_{im}\partial_i J^m(\mathbf{r}')]d^2r' = \underbrace{\left[\ln\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|\epsilon_{im}J^m(\mathbf{r}')\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int \epsilon_{im}\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^i}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^2}[J^m(\mathbf{r}')]d^2r'.$$

Com isso, o campo magnético da teoria torna-se

$$B(\mathbf{r}) = \left(\overrightarrow{L}\cdot\overrightarrow{E}\right) + \frac{(1-s)}{2\pi}\int \epsilon_{im}\frac{(r-r')^i}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^2}[J^m(\mathbf{r}')]d^2r'. \tag{4.120}$$

Para uma carga pontual, cujo campo elétrico é dado pela Eq. (4.110), o campo magnético vale

$$B(\mathbf{r}) = \left(\overrightarrow{L}\cdot\overrightarrow{E}\right) = \frac{q}{2\pi}L^l\left[[1-\frac{(k_{DE})^{ii}}{2}]\frac{r^l}{r^2} - \frac{1}{r^2}\left((k_{DE})^{lj}r_j - \frac{(k_{DE})^{ij}r_ir_j}{r^2}r^l\right)\right]. \tag{4.121}$$

que em primeira ordem nos parâmetros de violação resume-se a

$$B(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi}\frac{\mathbf{L}\cdot\mathbf{r}}{r^2}\ . \tag{4.122}$$

Vê-se assim que, nesta teoria planar, uma carga elétrica estática também produz campo magnético, além de campo elétrico. Na ausência dos parâmetros de violação, obviamente recupera-se $B(\mathbf{r}) = 0$. Este resultado pode ser usado para estabelecer um limite superior sobre a magnitude dos coeficientes L^l.

Por outro lado, para uma corrente estacionária associada a uma carga pontual com velocidade uniforme $\mathbf{u}$, cujo campo elétrico é dado pela Eq. (4.114), tem-se em primeira ordem

$$B(\mathbf{r}) = \frac{(1-s)}{2\pi}\int \epsilon_{im}\frac{(r-r')^i}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^2}[qu^m\delta(\mathbf{r}')]d^2\mathbf{r}',$$

o que fornece

$$B(\mathbf{r}) = \frac{q(1-s)}{2\pi}\frac{\epsilon_{im}r^iu^m}{r^2} = \frac{q(1-s)}{2\pi}\frac{\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{u}}{r^2}. \tag{4.123}$$

Nesta seção, os potenciais e campos associados a cargas pontuais e a correntes estacionárias foram encontrados todos em primeira ordem nos parâmetros de violação de Lorentz. Entretanto, pode-se encontá-los de forma exata, conforme será feito no Apêndice B. Mesmo nessa situção, o que se verifica é que os campos continuam exibindo uma dependência do tipo $1/r$, ou seja, os parâmetros de violação de Lorentz não alteram a ordem de magnitude dos campos, emboram façam-nos exibir termos com dependência angular.

4.4 Relação de Dispersão

Outro ponto importante a ser analisado diz-se respeito às relações de dispersão do setor eletromagnético, a partir das quais é possível extrair informações acerca da propagação das ondas eletromagnéticas nesta teoria, tais como velocidade de fase, velocidade grupo, birrefrigência, etc... Como esta eletrodinâmica planar só possui um grau de liberdade independente (grau de liberdade físico), só há uma relação de dispersão física a ser determinada, que pode ser encontrada tanto em termos do setor magnético quanto do setor elétrico.

Para obter a relação de dispersão da teoria, é necessário ter a equação de onda desacoplada para para o campo elétrico ou para o campo magnético. Já foi encontrada uma equação de onda desacoplada para o campo elétrico, a Eq. (4.80)

$$(1+s)\left[\nabla^i\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E}\right)-\nabla^2E^i\right]+\partial_t^2E^i+\partial_t^2\left[\left(K_{DE}\right)^{ij}E^j\right]-\partial_t\left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{E}\right)L^i+\epsilon^{ij}\partial_j\left(\overrightarrow{L}\cdot\partial_t\overrightarrow{E}\right)=-\partial_t j^i. \tag{4.124}$$

O membro esquerdo desta equação, no entanto, mais especificamente o termo $\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E}\right)$, apresenta dependência explícita da fonte ρ, conforme a Eq. (4.55). Isto deve ser evitado, o que pode ser feito usando a própria Eq. (4.55), ou uma variante dela,

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E}=\rho-L^m\partial_mB-\left(K_{DE}\right)^{mn}\partial_mE^n, \tag{4.125}$$

a qual fornece, a partir da Eq. (4.124),

$$\begin{aligned}-(1+s)\nabla^i\left(L^m\partial_mB\right)-(1+s)\nabla^i\left[\left(K_{DE}\right)^{mn}\partial_mE^n\right]-(1+s)\nabla^2E^i+\partial_t^2E^i+\\+\partial_t^2\left[\left(K_{DE}\right)^{ij}E^j\right]-\partial_t\left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{E}\right)L^i+\epsilon^{ij}\partial_j\left(\overrightarrow{L}\cdot\partial_t\overrightarrow{E}\right)=-\partial_t j^i-(1+s)\nabla^i\rho.\end{aligned} \tag{4.126}$$

Nesta equação o campo elétrico não está desacoplado, pois nela ainda figura o campo magnético. Pode-se resolver este problema usando a Eq. (4.56), que, multiplicada por ϵ^{il}, pode ser escrita como

$$-(1+s)\partial_mB+\partial_t\left[\epsilon^{mk}\left(\delta^{kj}+\left(K_{DE}\right)^{kj}\right)E^j\right]+\left(\partial_tB\right)\epsilon^{mk}L^k+\partial_m\left(L^kE^k\right)=-\epsilon^{mk}j^k. \tag{4.127}$$

Esta expressão, quando substituída na Eq. (4.126), fornece

$$\begin{aligned}\nabla^i\left\{L^m\left\{-\partial_t\left[\epsilon^{mk}\left(\delta^{kj}+\left(K_{DE}\right)^{kj}\right)E^j\right]-\left(\partial_tB\right)\epsilon^{mk}L^k-\partial_m\left(L^kE^k\right)-\epsilon^{mk}j^k\right\}\right\}-\\-(1+s)\nabla^i\left[\left(K_{DE}\right)^{mn}\partial_mE^n\right]-(1+s)\nabla^2E^i+\partial_t^2E^i+\partial_t^2\left[\left(K_{DE}\right)^{ij}E^j\right]-\\-\partial_t\left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{E}\right)L^i+\epsilon^{ij}\partial_j\left(\overrightarrow{L}\cdot\partial_t\overrightarrow{E}\right)=-\partial_t j^i-(1+s)\nabla^i\rho.\end{aligned} \tag{4.128}$$

Sabendo que $L^m\epsilon^{mk}L^k=0$, e reunindo os termos de fonte no membro direito, tem-se finalmente a equação

$$\nabla^i \left\{ L^m \left\{ -\partial_t \left[\epsilon^{mk} \left(\delta^{kj} + (K_{DE})^{kj} \right) E^j \right] - \partial_m \left(L^k E^k \right) \right\} \right\} - (1+s) \nabla^i \left[(K_{DE})^{mn} \partial_m E^n \right] -$$
$$- (1+s) \nabla^2 E^i + \partial_t^2 E^i + \partial_t^2 \left[(K_{DE})^{ij} E^j \right] - \partial_t \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} \right) L^i + \epsilon^{ij} \partial_j \left(\overrightarrow{L} \cdot \partial_t \overrightarrow{E} \right) = 0, \quad (4.129)$$

onde o campo elétrico está totalmente desacoplado e as fontes foram tomadas como nulas ($\rho = 0$ e $\overrightarrow{j} = 0$), uma vez que a relação de dispersão é escrita para uma equação de onda no vácuo. Alterando alguns índices mudos, a Eq. (4.129) torna-se

$$\nabla^i \left\{ L^j \left\{ -\partial_t \left[\epsilon^{jl} \left(\delta^{lm} + (K_{DE})^{lm} \right) E^m \right] - \partial_j \left(L^l E^l \right) \right\} \right\} - (1+s) \nabla^i \left[(K_{DE})^{jl} \partial_j E^l \right] -$$
$$- (1+s) \nabla^2 E^i + \partial_t^2 \left\{ \left[\delta^{ij} + (K_{DE})^{ij} \right] E^j \right\} - \partial_t \left(\epsilon^{lm} \partial_l E^m \right) L^i + \epsilon^{ij} \partial_j \left(L^l \partial_t E^l \right) = 0. \quad (4.130)$$

Para encontrar a relação de dispersão propriamente dita é necessário propor uma solução do tipo onda plana para o campo elétrico

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_0 e^{i\left(\omega t - k^i r^i\right)}. \quad (4.131)$$

Tal campo elétrico, substituído na Eq. (4.130), fornece

$$\left\{ -\omega k^i \left[L^j \epsilon^{jl} \left(\delta^{lk} + (K_{DE})^{lk} \right) \right] + k^i k^j L^j L^k + (1+s) \left[k^i k^j (K_{DE})^{jk} + k^2 \delta^{ik} \right] - \right.$$
$$\left. -\omega^2 \left(\delta^{ik} + (K_{DE})^{ik} \right) - \omega k^l \epsilon^{lk} L^i + \omega k^j \epsilon^{ij} L^k \right\} E^k = 0. \quad (4.132)$$

Trocando a ordem de alguns índices, obtém-se

$$\left\{ k^i \left[\omega \left(\delta^{kl} + (K_{DE})^{kl} \right) \epsilon^{lj} L^j + k^j L^j L^k + (1+s) k^j (K_{DE})^{jk} \right] + (1+s) \overrightarrow{k}^2 \delta^{ik} - \right.$$
$$\left. -\omega^2 \left(\delta^{ik} + (K_{DE})^{ik} \right) + \omega \epsilon^{kl} k^l L^i + \omega \epsilon^{ij} k^j L^k \right\} E^k = 0. \quad (4.133)$$

Este resultado pode ser escrito como $\mathbb{D}\overrightarrow{E} = 0$, ou seja,

$$\mathbb{D}^{ik} E^k = 0, \quad (4.134)$$

sendo

$$\mathbb{D}^{ik} = k^i \left[\omega \left(\delta^{kl} + (K_{DE})^{kl} \right) \epsilon^{lj} L^j + k^j L^j L^k + (1+s) k^j (K_{DE})^{jk} \right] +$$
$$+ (1+s) \overrightarrow{k}^2 \delta^{ik} - \omega^2 \left(\delta^{ij} + (K_{DE})^{ik} \right) + \omega \epsilon^{kl} k^l L^i + \omega \epsilon^{ij} k^j L^k. \quad (4.135)$$

As Eqs. (4.134) só admitem solução não trivial se det $\mathbb{D}$ =0. Porém, antes de calcular este determinante, convém isolar as contribuições violadoras de Lorentz na expressão (4.135). Para isso, é necessário fazer, primeiramente,

$$\mathbb{D}^{ik} = \Big\{k^i\left[\omega\left(\delta^{kl} + (K_{DE})^{kl}\right)\epsilon^{lj}L^j + k^jL^jL^k + (1+s)\,k^j\,(K_{DE})^{jk}\right] + \\ + s\overrightarrow{k}^2\delta^{ik} - \omega^2\,(K_{DE})^{ik} + \omega\epsilon^{kl}k^lL^i + \omega\epsilon^{ij}k^jL^k + \left(\overrightarrow{k}^2 - \omega^2\right)\delta^{ik}\Big\}, \quad (4.136)$$

e depois

$$\mathbb{D}^{ik} = \left(\overrightarrow{k}^2 - \omega^2\right)\Bigg\{\frac{1}{\left(\overrightarrow{k}^2 - \omega^2\right)}\Big\{k^i\left[\omega\left(\delta^{kl} + (K_{DE})^{kl}\right)\epsilon^{lj}L^j + k^jL^jL^k + (1+s)\,k^j\,(K_{DE})^{jk}\right] + \\ + s\overrightarrow{k}^2\delta^{ik} - \omega^2\,(K_{DE})^{ik} + \omega\epsilon^{kl}k^lL^i + \omega\epsilon^{ij}k^jL^k\Big\} + \delta^{ik}\Bigg\}, \quad (4.137)$$

o que pode ainda ser reescrito como

$$\mathbb{D}^{ik} = \left(\overrightarrow{k}^2 - \omega^2\right)\left(\delta^{ik} + \mathbb{X}^{ik}\right), \quad (4.138)$$

sendo

$$\mathbb{X}^{ik} = \frac{1}{\left(\overrightarrow{k}^2 - \omega^2\right)}\Big\{k^i\left[\omega\left(\delta^{kl} + (K_{DE})^{kl}\right)\epsilon^{lj}L^j + k^jL^jL^k + (1+s)\,k^j\,(K_{DE})^{jk}\right] + \\ + s\overrightarrow{k}^2\delta^{ik} - \omega^2\,(K_{DE})^{ik} + \omega\epsilon^{kl}k^lL^i + \omega\epsilon^{ij}k^jL^k\Big\}. \quad (4.139)$$

Dessa forma tem-se, para o determinante da matriz $\mathbb{D}$, 2×2, a expressão

$$\det\mathbb{D} = \left(\overrightarrow{k}^2 - \omega^2\right)^2\det\left(I + \mathbb{X}\right), \quad (4.140)$$

a qual, usando-se a identidade para uma matriz $\mathbb{A}$ qualquer

$$\det\mathbb{A} = e^{tr\,\ln\mathbb{A}}, \quad (4.141)$$

pode ser escrita como

$$\det\mathbb{D} = \left(\overrightarrow{k}^2 - \omega^2\right)^2 e^{tr\,\ln(I+\mathbb{X})}. \quad (4.142)$$

Se os parâmetros violadores de Lorentz forem bem pequenos, então os elementos $\mathbb{X}^{ik}$ serão também bastante pequenos e, em uma expansão de $\ln\left(I + \mathbb{X}\right)$ em série de potências, pode-se considerar apenas contribuições de primeira ordem nesses elementos $\mathbb{X}^{ik}$, ou seja

$$\ln\left(I + \mathbb{X}\right) = \sum_{N=1}^{\infty}(-1)^{1+N}\frac{\mathbb{X}^N}{N} \simeq \mathbb{X}. \quad (4.143)$$

Com isso a expressão (4.142) pode ser escrita como

$$\det\mathbb{D} = \left(\overrightarrow{k}^2 - \omega^2\right)^2 e^{tr\mathbb{X}}. \quad (4.144)$$

Considera-se agora mais uma expansão em primeira ordem nos elementos $\mathbb{X}^{ik}$, como

$$\det \mathbb{D} = \left(\overrightarrow{k}^2 - \omega^2\right)^2 (1 + tr\mathbb{X}). \tag{4.145}$$

Com o traço de $\mathbb{X}$ sendo dado por

$$tr\mathbb{X} = \frac{1}{\left(\overrightarrow{k}^2 - \omega^2\right)} \left\{k^i \left[\omega \left(\delta^{il} + (K_{DE})^{il}\right) \epsilon^{lj} L^j + k^j L^j L^i + (1+s)\, k^j \,(K_{DE})^{ji}\right] + \right.$$

$$\left. + s\overrightarrow{k}^2 \delta^{ii} - \omega^2 (K_{DE})^{ii} + \omega\epsilon^{il} k^l L^i + \omega\epsilon^{ij} k^j L^i \right\}, \tag{4.146}$$

e reescrevendo-se alguns termos e efetuando-se algumas contrações, obtem-se a expressão

$$tr\mathbb{X} = \frac{1}{\left(\overrightarrow{k}^2 - \omega^2\right)} \left\{-\omega\epsilon^{jl} L^j \left(\delta^{li} + (K_{DE})^{li}\right) k^i + \left(\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{L}\right)^2 + (1+s)\,(K_{DE})^{ij} k^i k^j + \right.$$

$$\left. + 2s\overrightarrow{k}^2 - \omega^2 tr\,(K_{DE}) + 2\omega\epsilon^{ij} k^j L^i \right\}, \tag{4.147}$$

e a seguinte relação de dispersão

$$\det \mathbb{D} = \left(\overrightarrow{k}^2 - \omega^2\right)^2 \left\{1 + \frac{1}{\left(\overrightarrow{k}^2 - \omega^2\right)} \left[-\omega\epsilon^{jl} L^j \left(\delta^{li} + (K_{DE})^{li}\right) k^i + \left(\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{L}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (1+s)\,(K_{DE})^{ij} k^i k^j + 2s\overrightarrow{k}^2 - \omega^2 tr\,(K_{DE}) + 2\omega\epsilon^{ij} k^j L^i \right]\right\} = 0, \tag{4.148}$$

que, em primeira ordem, fornece a equação

$$\left(\overrightarrow{k}^2 - \omega^2\right)^2 \left\{1 + \frac{1}{\left(\overrightarrow{k}^2 - \omega^2\right)} \left[-\omega\epsilon^{jl} L^j k^l + (K_{DE})^{ij} k^i k^j + 2s\overrightarrow{k}^2 - \omega^2 tr\,(K_{DE}) + 2\omega\epsilon^{ij} k^j L^i\right]\right\} = 0, \tag{4.149}$$

ou, reorganizando alguns termos,

$$\left(\overrightarrow{k}^2 - \omega^2\right) \left\{\left(\overrightarrow{k}^2 - \omega^2\right) - \omega\epsilon^{jl} L^j k^l + (K_{DE})^{ij} k^i k^j + 2s\overrightarrow{k}^2 - \omega^2 tr\,(K_{DE}) + 2\omega\epsilon^{ij} k^j L^i\right\} = 0, \tag{4.150}$$

ou ainda

$$\left(\overrightarrow{k}^2 - \omega^2\right) \left\{\left(\overrightarrow{k}^2 - \omega^2\right) + \omega\epsilon^{jl} L^j k^l + (K_{DE})^{ij} k^i k^j + 2s\overrightarrow{k}^2 - \omega^2 tr\,(K_{DE})\right\} = 0. \tag{4.151}$$

As relações de dispersão da teoria, procuradas desde o início desta seção, são as soluções desta equação. Uma primeira solução é dada por

$$\left(\overrightarrow{k}^2 - \omega^2\right) = 0, \tag{4.152}$$

que é equivalente a

$$\omega = \mp |k|. \tag{4.153}$$

Esta é a relação de dispersão usual da teoria eletromagnética de Maxwell, que no presente caso é não física.

Uma segunda solução de (4.151) é dada por

$$\left(\overrightarrow{k}^2 - \omega^2\right) + \omega\epsilon^{jl}L^jk^l + (K_{DE})^{ij}\, k^ik^j + 2s\overrightarrow{k}^2 - \omega^2 tr\,(K_{DE}) = 0, \tag{4.154}$$

que certamente diverge da relação usual. A solução procurada, neste caso, é

$$\omega = -\frac{1}{2\left[1 + tr\,(K_{DE})\right]}\left[-\epsilon^{jl}L^jk^l \pm \sqrt{\left(\epsilon^{jl}L^jk^l\right)^2 + 4\left(1 + tr\,(K_{DE})\right)\left(\overrightarrow{k}^2 + (K_{DE})^{ij}\, k^ik^j + 2s\overrightarrow{k}^2\right)}\right]. \tag{4.155}$$

Reorganizando os termos no radicando, e considerando apenas as contribuições de primeira ordem nos parâmetros de violação, obtém-se

$$\begin{aligned}\omega = &-\frac{1}{2\left[1 + tr\,(K_{DE})\right]}\Big\{-\epsilon^{jl}L^jk^l \pm 2\,|k|\,\{1+ \\ &+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4\overrightarrow{k}^2}\left(\epsilon^{jl}L^jk^l\right)^2 + \frac{1}{\overrightarrow{k}^2}\left(1 + tr\,(K_{DE})\right)\left((K_{DE})^{ij}\, k^ik^j + 2s\overrightarrow{k}^2\right) + tr\,(K_{DE})\right]\Big\}\Big\},\end{aligned} \tag{4.156}$$

que, escrita mais uma vez em primeira ordem, torna-se

$$\omega = -\frac{1}{2\left[1 + tr\,(K_{DE})\right]}\left\{-\epsilon^{jl}L^jk^l \pm 2\,|k|\left\{1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\overrightarrow{k}^2}\left((K_{DE})^{ij}\, k^ik^j + 2s\overrightarrow{k}^2\right) + tr\,(K_{DE})\right]\right\}\right\}. \tag{4.157}$$

Expandindo agora o termo $\frac{1}{[1+2tr(K_{DE})]}$, obtém-se finalmente

$$\omega = \mp\,|k|\left\{1 + s - \frac{1}{2}tr\,(K_{DE}) + \frac{1}{2}\,(K_{DE})^{ij}\,\frac{k^ik^j}{\overrightarrow{k}^2} \mp \frac{1}{2}\frac{\epsilon^{jl}L^jk^l}{|k|}\right\}, \tag{4.158}$$

que é, finalmente, a relação de dispersão da teoria. Nesta relação, nota-se que os modos se propagam com a mesma velocidade de fase, o que significa que os seis parâmetros de violação de Lorentz da eletrodinâmica planar, s, $(K_{DE})^{ij}$, L^i , comportam-se como componentes não birrefringentes a primeira ordem.

Na verdade, ao invés do cálculo do determinante (4.140) ter sido feito com a aproximação (4.143), ele poderia ter sido feito de forma exata, $\det D = D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21}$, **fornecendo a relação de dispersão exata**

$$\det\mathbb{D} = \left(\overrightarrow{k}^2 - \omega^2\right)\Big\{\omega^2\left[1 + \mathrm{tr}(K_{DE}) + \det(K_{DE})\right] + 2\omega[\left(\overrightarrow{L}\times\overrightarrow{k}\right) - (K_{DE})_{ij}\, k_iL_j^*] - [(1+s)\,\overrightarrow{k}^2 + (1+s)\,(K_{DE} \tag{4.159}$$

A relação de dispersão física permite a solução

$$\omega = -\frac{\left(\overrightarrow{L}\times\overrightarrow{k}\right) - (K_{DE})_{ij}\, k_iL_j^*}{1 + \mathrm{tr}(K_{DE}) + \det(K_{DE})} \pm \frac{\left[\overrightarrow{k}^2 + (K_{DE})_{ij}\, k_ik_j\right]^{1/2}\Big\{(1+s)\left[1 + \mathrm{tr}(K_{DE}) + \det(K_{DE})\right] + \overrightarrow{L}^2 - (K_{DE})_{ij}\, L}{1 + \mathrm{tr}(K_{DE}) + \det(K_{DE})} \tag{4.160}$$

A primeira ordem, esta expressão coincide com (4.158)

$$\mathbf{p}_0 = \pm\left|\mathbf{p}\right|[\mathbf{1}+\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathbf{k}_{DE})-(k_{DE})_{ij}\frac{p_i p_j}{2\mathbf{p}^2}\mp\frac{(\mathbf{L}\times\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|}]. \tag{4.161}$$

Dessa forma, nota-se que os seis parâmetros de violação de Lorentz da eletrodinâmica planar, s, $(K_{DE})^{ij}$, L^i **, comportam-se como componentes não birrefringentes a qualquer ordem. As componentes birrefringentes da teoria planar devem estar contidas, desse modo, no tensor** $T^{\mu\nu\lambda}$**. Como esse tensor modifica as equações de movimento a segunda ordem, a birrefringência aparece apenas como um efeito de segunda ordem nos parâmetros de violação de Lorentz.**

Da relação (4.158), pode-se ainda encontrar a velocidade de grupo

$$u_g = 1 + s - \frac{1}{2}tr\left(K_{DE}\right) + \frac{1}{2}\left(K_{DE}\right)^{ij}\widehat{k}^i\widehat{k}^j \mp \frac{1}{2}\epsilon^{jl}L^j\widehat{k}^l, \tag{4.162}$$

mostrando que essa eletrodinâmica pode violar a causalidade. Para realizar uma análise completa da consistência desta teoria (estabilidade, causalidade e unitariedade) deve-se efetuar uma análise detalhada usando o propagador de Feynman, o que está sendo reservado como perspectiva futura.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Na presente dissertação foi realizada a redução dimensional do setor eletromagnético CPT-par do Modelo Padrão Estendido. Após uma breve introdução no Capítulo 1, o Capítulo 2 foi iniciado com uma discussão das principais propriedades da Eletrodinâmica de Maxwell em (1+3) dimensões, após o que foram calculados os campos elétrico e magnético produzidos por um fio carregado de extensão infinita, a fim de tecer algumas analogias. A dependência em $1/r$ encontrada, aliada ao fato do campo não possuir componente no eixo-z, nem dependência nesta coordenada, abriu a possibilidade do mesmo ser interpretado como uma solução bidimensional (dependente apenas das duas coordenadas espaciais definidas no plano de corte ortogonal ao eixo do fio). Assim, um procedimento de redução dimensional eficiente foi proposto como sendo aquele em que são separadas a terceira componente espacial dos vetores e em que os novos vetores e componentes remanescentes não exibem dependência em termos dessa terceira componente espacial. Esse procedimento foi realizado sobre a teoria eletromagnética de Maxwell sendo obtida uma teoria reduzida, cujas soluções clássicas foram encontrados pelo método de Green. A dependência do tipo $1/r$ dessas soluções estava em acordo com a analogia feita com o fio infinito.

A seguir, no Capítulo 3, foram discutidos os principais fatos do setor de gauge do Modelo Padrão Estendido. Este modelo, proposto por Colladay e Kostelecky [12], a partir dos trabalhos iniciais de Carrol-Field-Jackiw [11], é composto pela termo usual de Maxwell suplementado pelo termo CPT-ímpar de Maxwell-Carrol-Field-Jackiw, $\epsilon^{\mu\nu k\lambda}v_{\mu}A_{\nu}F_{k\lambda}$, além do termo CPT-Par, $(K_F)^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda}$. Estes dois termos foram discutidos separadamente. Foi destacado que o termo CPT-Ímpar é uma generalização em (1+3) dimensões do termo de Chern-Simons, $\epsilon^{\mu\nu\rho}A_{\mu}F_{\nu\rho}$, que está definido em (1+2) dimensões, e que desempenha papel de interesse na física de sistemas planares a baixas temperaturas (envolvendo supercondutividade e o efeito hall quântico). Nesta generalização, como proposto por Carrol-Field-Jackiw, foi necessária a introdução do vetor fixo $v^{\mu}=\left(v^{0},v^{i}\right)$, que atua como campo de fundo ("background") responsável pela quebra das simetrias de Lorentz e CPT. Quanto ao termo CPT-par, foram destacadas as propriedades do tensor $((K_F)^{\mu\nu\kappa\lambda})$, que exibe as mesmas simetrias do tensor de Riemann além de possuir duplo-traço nulo, o que lhe fornece 19 componentes independentes. Dessas, dez provocam a birrefringência e nove não. Todas as componentes birrefringentes estão severamente restritas pelos dados astrofísicos no nível de 1 parte em 10^{32} [19, 20], e 1 parte em 10^{30} para as não-birrefringentes [23, 24, 25]. As equações de movimento, tanto para o setor CPT-ímpar de Maxwell-Carrol-Field-Jackiw quanto para o setor CPT-Par, foram encontradas, notando-se que, em ambas, o campo elétrico e o campo magnético aparecem acoplados, sendo produzidos tanto por cargas elétricas estáticas quanto por correntes estacionárias.

No capítulo 4 foi realizada a redução dimensional do setor de gauge CPT-par do Modelo Padrão Estendido, seguindo a prescrição que foi adotada nas referências [26],[28], e discutida no Capítulo 2, isto é, impondo que os campos não apresentem dependência da terceira componente espacial, e convertendo a quarta componente dos 4-vetores em campos escalares. Assim, o remanescente da terceira componente espacial do 4-potencial $\left(A^{(3)} = \varphi\right)$ aparece na eletrodinâmica planar resultante como um escalar com dinâmica própria. Foi obtida, dessa forma, uma teoria composta pelo setor eletromagnético, um campo escalar com termo cinético não usual e um termo misto que acopla o setores escalar e de gauge. No setor de gauge, a violação de Lorentz foi induzida por um tensor de quarta ordem, $Z^{\mu\nu\lambda\kappa}$, que apresenta as mesmas simetrias do tensor de Riemann e possui 5 componentes independentes. O setor escalar apresenta um termo cinético não-canônico, $C^{\mu\lambda}\partial_\mu\varphi\partial_\lambda\varphi$, onde $C^{\mu\lambda}$ é um tensor violador de Lorentz (de segunda ordem), simétrico, com seis componentes independentes. Os setores escalar e de gauge foram acoplados pelo tensor de terceira ordem $T^{\mu\nu\lambda}$, cujas simetrias implicam em oito componentes independentes. A paridade dessas componentes foi discutida, considerando-se o campo φ como um escalar, ou seja, tranformando-se como $\varphi \rightarrow \varphi$ sob operação de paridade. Foram encontradas 4 componentes paridade-par para o setor eletromagnético puro $((K_{DE})^{11}$, $(K_{DE})^{22}$, s, $L^1)$ e mais oito referentes aos setores escalar e de acoplamento (C^{00}, C^{02}, C^{11}, C^{22}, T^{020}, T^{022},T^{120}, T^{122}), totalizando 12 componentes paridade-par que estão restritas pela relação (4.35). Foram encontradas também mais 9 componentes paridade-ímpar, sendo duas referentes ao setor de gauge puro $((K_{DE})^{12}$, $L^2)$, e mais 7 relacionadas com os outros setores (C^{01}, C^{12}, T^{010}, T^{012}, T^{021}, T^{120}, T^{122}), as quais estão restritas pela relação (4.36). As equações de movimento da teoria reduzida foram obtidas usando a lagrangeana (4.8). Assim como no setor CPT-par em (1+3) dimensões, na teoria reduzida de (1+2) dimensões o campo elétrico e o campo magnético aparecem acoplados, de modo que são produzidos tanto por cargas elétricas estáticas quanto por correntes estacionárias. Ambos aparecem acoplados, ainda, ao campo escalar da teoria, através do tensor $(T^{\mu\nu\lambda})$, que contribui apenas em segunda ordem às equações de movimento, sendo por isso desconsiderado. Foi também calculado o tensor de energia-momento da teoria, que possui contribuições dos três setores: gauge, escalar e de acoplamento. A partir deste tensor foi encontrada uma densidade de energia positiva, que é definida para pequenos parâmetros de violação de Lorentz. Foram discutidas ainda as equações de onda, tanto para os campos elétrico e magnético quanto para os potenciais escalar e vetor. Foram obtidas as respectivas soluções estacionárias, com seus desvios da eletrodinâmica usual. Encontrou-se assim que, para uma carga pontual, os campos produzidos, que no caso desta eletrodinâmica foram tanto campo elétrico quanto magnético, decaem como $1/r$, como usualmente ocorre em (1+2) dimensões, de forma que a violação da simetria de Lorentz não altera o comportamento assintótico. Estes campos, no entanto, exibem também não radiais, com dependência angular. O mesmo acontece com os campo produzidos por correntes estacionárias, que, neste caso, também geram tanto campo elétrico quanto campo magnético. Foi também calculada a relação de dispersão da teoria, revelando que os seis parâmetros de violação de Lorentz relacionados ao setor eletromagnético não determinam birrefringência, que neste modelo está associada as componentes do tensor de acoplamento $(T^{\mu\nu\lambda})$, e apenas como um efeito de segunda ordem. Finalmente, foi calculada a velocidade de grupo, mostrando que essa teoria planar pode exibir violação da causalidade.

Entre as perspectivas futuras para este trabalho, estão a análise mais cuidadosa da consistência física do modelo, como a estabilidade, a causalidade e a unitariedade, o que pode ser realizado atravé do propagador de gauge de Feynman. Uma outra perspectiva é a análise de defeitos topológicos tipo vórtices neste modelo planar.

Apêndice A

Algumas Identidades Importantes em (1+2)-Dimensões

Nos desenvolvimentos realizados anteriormente, alguns resultados foram utilizados sem demonstração. Esses resultados, a partir de agora, serão todos discutidos neste Apêndice.

Basicamente foram três os resultados usados. Dois deles estão implícitos na identidade (2.100) ou na (4.105):

$$\int d^2\mathbf{p}\ \frac{1}{\mathbf{p}^2}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} = \int_0^\infty \frac{1}{\mathbf{p}^2}pdp\int_0^{2\pi} d\phi\ e^{-ipR\cos\phi} = 2\pi\int_0^\infty \frac{pdp}{\mathbf{p}^2}J_0(pR) = 2\pi\int_0^\infty \frac{dp}{p}J_0(pR) = -2\pi\ln R, \tag{A.1}$$

a qual pressupõe, primeiramente,

$$\int_0^{2\pi} d\phi\ e^{-ipR\cos\phi} = (2\pi)\,J_0(pR). \tag{A.2}$$

Este é um resultado conhecido de Física Matemática. Uma forma simples de demonstrá-lo consiste em usar a expansão de Jacobi-Anger para $e^{iz\cos\phi}$ em termos de funções de Bessel, ou seja:

$$e^{iz\cos\phi} = \sum_m i^m J_m(z)e^{im\phi}. \tag{A.3}$$

Com ele pode-se concluir que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} d\phi\ e^{iz\cos\phi} &= \int_0^{2\pi} d\phi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m J_m(z)e^{im\phi}\\ &= J_0(z)\underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} + \left[\sum_{m=-\infty}^{-1} i^m J_m(z)\underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi e^{im\phi}}_{0} + \sum_{m=1}^{\infty} i^m J_m(z)\underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi e^{im\phi}}_{0}\right],\end{aligned} \tag{A.4}$$

o que fornece

$$\int_0^{2\pi} d\phi\ e^{iz\cos\phi} = (2\pi)\,J_0(z). \tag{A.5}$$

O mesmo vale para $\int_0^{2\pi} d\phi\; e^{-iz\cos\phi}$, ou seja:

$$\int_0^{2\pi} d\phi\; e^{-iz\cos\phi} = (2\pi)\, J_0(z). \tag{A.6}$$

Um segundo resultado utilizado, também implícito em (A.1), foi a integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{dp}{p} J_0(pR) = -\ln R. \tag{A.7}$$

Ela pode ser demonstrada da seguinte forma. Identificando-a com uma função $f(R)$ por enquanto desconhecida tem-se

$$\int_0^{\infty} \frac{dp}{p} J_0(pR) = f(R). \tag{A.8}$$

Derivando em relação a R, encontra-se:

$$\partial_R \int_0^{\infty} \frac{dp}{p} J_0(pR) = \int_0^{\infty} \frac{dp}{p} \partial_R J_0(pR) = -\int_0^{\infty} \frac{dp}{p} p J_1(pR) \; = -\int_0^{\infty} dp J_1(pR) = -\frac{1}{R} = \partial_R f(R), \tag{A.9}$$

onde foram usados $\partial_x J_0(x) = -J_1(x)$ e $\int_0^{\infty} dp J_1(pR) = \frac{1}{R}$, pois sabe-se que:

$$\int_0^{\infty} dp J_m(pR) = \frac{1}{R},\;\; para\; m \text{ inteiro e } R > 0\;. \tag{A.10}$$

Dessa forma, tem-se a equação:

$$\partial_R f(R) = -\frac{1}{R}\;, \tag{A.11}$$

cuja solução é dado por

$$f(R) = -\ln R, \tag{A.12}$$

ou, lembrando quem é a função $f(R)$:

$$\int_0^{\infty} \frac{dp}{p} J_0(pR) = -\ln R. \tag{A.13}$$

Quanto ao terceiro resultado, é conveniente discutir primeiramente a integral (A.35):

$$\int_0^{\infty} \frac{J_1(pR)}{p^2} dp = -\frac{R}{2}\ln R + \frac{R}{4}. \tag{A.14}$$

Ela pode ser demonstrada partindo da relação:

$$\partial_x J_1(x) = J_0(x) - \frac{J_1(x)}{x}\;, \tag{A.15}$$

ou de uma variante sua

$$\frac{J_1(x)}{x^2} = \frac{J_0(x)}{x} - \frac{\partial_x J_1(x)}{x}\;.$$

Fazendo $pR = x$, obtem-se:

$$\int_0^{\infty} \frac{J_1(pR)}{p^2} dp = \int_0^{\infty} \frac{J_1(x)}{x^2/R^2} \frac{dx}{R} = R\int_0^{\infty} \frac{J_1(x)}{x^2} dx. \tag{A.16}$$

Dessa forma, pode-se fazer

$$\int_0^\infty \frac{J_1(x)}{x^2}dx = \int_0^\infty \left(\frac{J_0(x)}{x} - \frac{\partial_x J_1(x)}{x}\right)dx = -\ln R - \int_0^\infty \frac{\partial_x J_1(x)}{x}dx. \tag{A.17}$$

Para calcular a integral no segundo membro é necessário realizar uma integração por partes, onde se deve fazer:

$$\partial_x J_1(x)dx = du, v = 1/x. \tag{A.18}$$

Dessa forma, obtem-se

$$\int_0^\infty \frac{\partial_x J_1(x)}{x}dx = \left[\frac{J_1(x)}{x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{J_1(x)}{x^2}\right)dx = 0 - \left[\frac{J_1(x)}{x}\right]_0 + \int_0^\infty \frac{J_1(x)}{x^2}dx. \tag{A.19}$$

Aqui, para calcular o termo $\left[\frac{J_1(x)}{x}\right]_0$, é necessário expandir a função $J_1(x)$ próximo a origem:

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + ... \tag{A.20}$$

Com isto tem-se

$$\left[\frac{J_1(x)}{x}\right]_0 = \frac{1}{2}\ , \tag{A.21}$$

e portanto

$$\int_0^\infty \frac{\partial_x J_1(x)}{x}dx = -\frac{1}{2} + \int_0^\infty \frac{J_1(x)}{x^2}dx. \tag{A.22}$$

Dessa forma, a partir da Eq. (A.17), obtem-se:

$$\int_0^\infty \frac{J_1(x)}{x^2}dx = -\ln R - \left(-\frac{1}{2} + \int_0^\infty \frac{J_1(x)}{x^2}dx\right) = -\ln R + \frac{1}{2} - \int_0^\infty \frac{J_1(x)}{x^2}dx, \tag{A.23}$$

o que é equivalente a

$$\int_0^\infty \frac{J_1(x)}{x^2}dx = -\frac{1}{2}\ln R + \frac{1}{4}\ , \tag{A.24}$$

e, consequentemente, a integral procurada se torna

$$\int_0^\infty \frac{J_1(pR)}{p^2}dp = R\int_0^\infty \frac{J_1(x)}{x^2}dx = R\left(-\frac{1}{2}\ln R + \frac{1}{4}\right) = -\frac{R}{2}\ln R + \frac{R}{4}\ . \tag{A.25}$$

Uma demonstração alternativa, analogamente ao que foi feito acima na Eq. (A.8), é identificar a integral procurada com uma função $g(R)$ por enquanto desconhecida

$$\int_0^\infty \frac{J_1(pR)}{p^2}dp = g(R). \tag{A.26}$$

Derivando em relação a R, obtem-se:

$$\partial_R \int_0^\infty \frac{J_1(pR)}{p^2}dp = \int_0^\infty \frac{\partial_R J_1(pR)}{p^2}dp = \int_0^\infty \frac{pJ_1'(pR)}{p^2}dp = \int_0^\infty \frac{J_1'(pR)}{p}dp. \tag{A.27}$$

Usando a relação (A.15), esta expressão se torna

$$\partial_R \int_0^\infty \frac{J_1(pR)}{p^2}dp = \int_0^\infty \frac{\left[J_0(pR) - \frac{J_1(pR)}{pR}\right]}{p}dp = \int_0^\infty \frac{J_0(pR)}{p}dp - \frac{1}{R}\int_0^\infty \frac{J_1(pR)}{p^2}dp, \tag{A.28}$$

o que, usando o resultado (A.7), equivale a expressão

$$\partial_R \int_0^\infty \frac{J_1(pR)}{p^2} dp = -\ln R - \frac{1}{R} \int_0^\infty \frac{J_1(pR)}{p^2} dp, \tag{A.29}$$

e obtem-se assim a seguinte equação diferencial

$$g' = -\frac{1}{R} g - \ln R, \tag{A.30}$$

que pode ser reescrita como

$$g' + \frac{g}{R} = \frac{1}{R} (gR)' = -\ln R, \tag{A.31}$$

ou ainda como

$$(gR)' = -R \ln R. \tag{A.32}$$

Para encontrar a solução desta equação é necessário integrar os seus dois membros, sendo que o segundo membro pode ser integrado por partes, fazendo-se

$$u = \ln R; \quad dv = -RdR.$$

Dessa forma obtem-se

$$gR = \int (-R \ln R)\, dR + c = -\frac{R^2}{2} \ln R + \int \frac{R^2}{2} \frac{1}{R} dR + c = -\frac{R^2}{2} \ln R + \frac{R^2}{4} + c, \tag{A.33}$$

ou ainda

$$g = -\frac{R}{2} \ln R + \frac{R}{4} + \frac{c}{R}.$$

Para que esta solução fique dimensionalmente correta, é necessário escolher $c = 0$, e o resultado passa a coincidir com o anterior, Eq. (A.25), ou seja:

$$g(R) = \frac{R}{4} - \frac{R}{2} \ln R. \tag{A.34}$$

Realiza-se agora o cálculo da seguinte transformada de Fourier:

$$\int d^2p \; \frac{p_i p_j}{\mathbf{p}^4} e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}, \tag{A.35}$$

Inicia-se usando-se os procedimentos usuais

$$\begin{aligned} \int d^2p \; \frac{p_i p_j}{\mathbf{p}^4} e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} &= -\partial_i \partial_j \int_0^\infty \frac{1}{p^4} p dp \int_0^{2\pi} d\phi \; e^{-ipR\cos\phi}, \\ &= -\partial_i \partial_j \int_0^\infty 2\pi \frac{1}{p^3} J_0(pR) dp = -2\pi \int_0^\infty \frac{1}{p^3} \partial_i \partial_j J_0(pR) dp, \end{aligned} \tag{A.36}$$

Para calcular as derivadas $\partial_i \partial_j J_0(pR)$ que aparecem na integral (A.36) é necessária a identidade

$$\partial_x J_0(x) = -J_1(x)\ . \tag{A.37}$$

Com ela pode-se concluir que

$$\partial_j J_0(pR) = -pJ_1(pR)\partial_j R = -pJ_1(pR)\frac{R_j}{R} = -p\frac{R_j}{R}J_1(pR)\ , \tag{A.38}$$

e ainda que

$$\partial_i\partial_j J_0(pR) = -p\left[\frac{\delta_{ij}}{R}J_1(pR) - \frac{R_jR_i}{R^3}J_1(pR) + \frac{R_j}{R}\partial_i J_1(pR)\right]\ . \tag{A.39}$$

Agora para calcular a derivada $\partial_i J_1(pR)$ é necessária a identidade

$$\partial_x J_1(x) = J_0(x) - \frac{J_1(x)}{x}\ . \tag{A.40}$$

Com ela tem-se

$$\partial_i J_1(pR) = p\frac{R_i}{R}[J_0(pR) - \frac{J_1(pR)}{pR}] = p\frac{R_i}{R}J_0(pR) - \frac{R_i}{R^2}J_1(pR)\ , \tag{A.41}$$

e consequentemente

$$\partial_i\partial_j J_0(pR) = -p\left[\frac{\delta_{ij}}{R}J_1(pR) - \frac{R_jR_i}{R^3}J_1(pR) + \frac{R_j}{R}\left(p\frac{R_i}{R}J_0(pR) - \frac{R_i}{R^2}J_1(pR)\right)\right]\ , \tag{A.42}$$

o que pode ser escrito como

$$\partial_i\partial_j J_0(pR) = -p\left[\frac{\delta_{ij}}{R}J_1(pR) - \frac{R_jR_i}{R^3}J_1(pR) + p\frac{R_jR_i}{R^2}J_0(pR) - \frac{R_iR_j}{R^3}J_1(pR)\right]\ . \tag{A.43}$$

Inserindo este resultado na integral (A.36), tem-se

$$\begin{aligned}\int d^2p\ \frac{p_ip_j}{p^4}e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = 2\pi\int_0^\infty \frac{1}{p^2}\left[\frac{\delta_{ij}}{R}J_1(pR) - \frac{R_jR_i}{R^3}J_1(pR) + \right.\\ \left. +p\frac{R_jR_i}{R^2}J_0(pR) - \frac{R_iR_j}{R^3}J_1(pR)\right]dp\ ,\end{aligned} \tag{A.44}$$

ou ainda

$$\int d^2p\ \frac{p_ip_j}{p^4}e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = 2\pi\left[\left(\frac{\delta_{ij}}{R} - 2\frac{R_jR_i}{R^3}\right)\int_0^\infty \frac{J_1(pR)}{p^2}dp + \frac{R_iR_j}{R^2}\int_0^\infty \frac{J_0(pR)}{p}dp\right]\ . \tag{A.45}$$

Aqui é necessário um outro resultado importante, discutido anteriormente neste próprio apêndice,

$$\int_0^\infty \frac{J_1(pR)}{p^2}dp = -\frac{R}{2}\ln R + \frac{R}{4}\ . \tag{A.46}$$

Usando-o na integral (A.45), obtém-se

$$\begin{aligned}\int d^2p\ \frac{p_ip_j}{p^4}e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} &= 2\pi\left[\left(\frac{\delta_{ij}}{R} - 2\frac{R_jR_i}{R^3}\right)\left(-\frac{R}{2}\ln R + \frac{R}{4}\right) + \frac{R_iR_j}{R^2}(-\ln R)\right] &\text{(A.47)}\\ &= 2\pi\left[\left(-\frac{\delta_{ij}}{2}\ln R + \frac{R_jR_i}{R^2}\ln R - \frac{1}{2}\frac{R_jR_i}{R^2} + \frac{\delta_{ij}}{4}\right) - \frac{R_iR_j}{R^2}\ln R\right] &\text{(A.48)}\end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$\int d^2p\ \frac{p_ip_j}{p^4}e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = 2\pi\left(-\frac{\delta_{ij}}{2}\ln R - \frac{1}{2}\frac{R_jR_i}{R^2}\right)\ . \tag{A.49}$$

Apêndice A

Soluções Exatas

O cálculo dos potenciais e campos eletromagnéticos no Capítulo 4 foi realizado levando em conta apenas contribuições de primeira ordem nos parâmetros de violação. Neste apêndice serão mostradas soluções exatas para tais campos, adotando um procedimento de solução diferente do adotado no Capítulo 4.

As equações a serem resolvidas são

$$\left[\nabla^2 + (K_{DE})^{ij}\,\partial_i\partial_j + \frac{1}{(1+s)}\left(L^i\partial_i\right)^2\right]A^0 = -\left(\rho + \frac{1}{(1+s)}\epsilon^{ij}L^i j^j\right), \tag{A.1}$$

$$\nabla^2 B = -\frac{1}{(1+s)}\left[\nabla\times j - \left(\overrightarrow{L}\cdot\overrightarrow{E}\right)\right]. \tag{A.2}$$

Isto pode ser feito pelo método de Green. De acordo com esse método, relembrando, para a primeira equação, por exemplo, tem-se uma solução do tipo

$$A^0(r) = \int G\left(r-r'\right)\left[\rho\left(r'\right) + \frac{1}{(1+s)}\overrightarrow{L}\times\overrightarrow{j}\left(r'\right)\right]d^2r', \tag{A.3}$$

sendo $G(r-r')$ a função de Green que obedece a equação

$$\left[\nabla^2 + (K_{DE})^{ij}\,\partial_i\partial_j + \frac{1}{(1+s)}\left(L^i\partial_i\right)^2\right]G\left(r-r'\right) = -\delta\left(r-r'\right). \tag{A.4}$$

Efetuando uma transformada de Fourier nos dois membros desta equação obtem-se

$$\left[-p^2 - \left(K^{ij}_{DE}\right)p^ip^j - \frac{1}{(1+s)}\left(p^iL^i\right)\left(p^jL^j\right)\right]\widetilde{G}(p) = -\frac{1}{(2\pi)^2}\ , \tag{A.5}$$

sendo $\widetilde{G}(p)$ a função de Green de $G(r-r')$. Esta Eq. (A.5) pode ser reescrita como

$$\left[-p_i\left[\delta^{ij} + (K_{DE})^{ij} + L^iL^j\right]p_j\right]\widetilde{G} = -\frac{1}{(2\pi)^2}\ , \tag{A.6}$$

ou ainda como

$$\widetilde{G} = \frac{1}{(2\pi)^2\,p^iM^{ij}p^j}, \tag{A.7}$$

sendo M^{ij} a matriz 2×2

$$\mathbb{M}^{ij} = (\delta + K_{DE})^{ij} + \frac{1}{(1+s)} L^i L^j \tag{A.8}$$

Assim, efetuando uma transformada de Fourier inversa na Eq. (A.7), obtém-se

$$G = \int \widetilde{G} e^{-ip\cdot(r-r')} d^2p = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{p^i \mathbb{M}^{ij} p^j} e^{-ip\cdot(r-r')} d^2p. \tag{A.9}$$

Aqui, ao invés de realizar uma expansão no integrando e considerar apenas contribuições de primeira ordem nos parâmetros de violação, como foi feito anteriormente no Capítulo 4, ao invés disso pode-se resolver esta integral usando a identidade

$$\frac{1}{p^i \mathbb{M}^{ij} p^j} = \int_0^\infty e^{-sp^i \mathbb{M}^{ij} p^j} ds, \tag{A.10}$$

o que fornece

$$G = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-sp^i \mathbb{M}^{ij} p^j} e^{-ip\cdot(r-r')} d^2p ds = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-sp^T \mathbb{M} p - ip^T (r-r')} d^2p ds. \tag{A.11}$$

Esta integral, por sua vez, pode ser resolvida exatamente. Para resolvê-la é necessário primeiramente completar a forma quadrática no integrando. Isto pode ser feito da seguinte forma

$$-sp^T \mathbb{M} p - ip^T \left(r - r'\right) = -s \left(p - p_c\right)^T \mathbb{M} \left(p - p_c\right) + A, \tag{A.12}$$

sendo p_c e A constantes a serem descobertas. Note-se aqui que

$$\begin{aligned} -s\left(p-p_c\right)^T \mathbb{M}\left(p-p_c\right) &= -sp^T \mathbb{M} p + sp^T \mathbb{M} p_c + sp_c^T \mathbb{M} p - sp_c^T \mathbb{M} p_c \\ &= -sp^T \mathbb{M} p + 2sp^T \mathbb{M} p_c - sp_c^T \mathbb{M} p_c \ , \end{aligned} \tag{A.13}$$

e que, para uma constante $p_c = -\frac{i}{2s} \mathbb{M}^{-1} \left(r - r'\right)$, esta forma quadrática (A.13) se torna

$$-sp^T \mathbb{M} p + 2sp^T \mathbb{M} \left(-\frac{i}{2s} \mathbb{M}^{-1} \left(r-r'\right)\right) - s \left(-\frac{i}{2s} \mathbb{M}^{-1} \left(r-r'\right)\right)^T \mathbb{M} \left(-\frac{i}{2s} \mathbb{M}^{-1} \left(r-r'\right)\right), \tag{A.14}$$

o que é equivalente a

$$-sp^T \mathbb{M} p - ip^T \left(r-r'\right) + \frac{1}{4s} \left(\mathbb{M}^{-1} \left(r-r'\right)\right)^T \mathbb{M} \left(\mathbb{M}^{-1} \left(r-r'\right)\right), \tag{A.15}$$

ou ainda a

$$-sp^T \mathbb{M} p - ip^T \left(r-r'\right) + \frac{1}{4s} \left(r-r'\right)^T \left(\mathbb{M}^{-1}\right)^T \left(r-r'\right). \tag{A.16}$$

Com isso conclui-se, a partir da Eq. (A.12), que a constante A é dada por

$$A = -\frac{1}{4s} \left(r-r'\right)^T \left(\mathbb{M}^{-1}\right)^T \left(r-r'\right), \tag{A.17}$$

ou, já que $\mathbb{M}$ é simétrica, conforme a Eq. (A.8),

$$A = -\frac{1}{4s} \left(r-r'\right)^T \mathbb{M}^{-1} \left(r-r'\right), \tag{A.18}$$

e a função de Green (A.11) se torna

$$G = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-s\left(p+\frac{i}{2s}\mathbb{M}^{-1}(r-r')\right)^T \mathbb{M}\left(p+\frac{i}{2s}\mathbb{M}^{-1}(r-r')\right) - \frac{1}{4s}(r-r')^T\mathbb{M}^{-1}(r-r')} d^2p ds. \tag{A.19}$$

Aqui há duas integrações para serem realizadas, uma na variável p e outra na variável s. A integração em p fornece o resultado bastante conhecido

$$\int e^{-s\left(p+\frac{i}{2s}\mathbb{M}^{-1}(r-r')\right)^T \mathbb{M}\left(p+\frac{i}{2s}\mathbb{M}^{-1}(r-r')\right) - \frac{1}{4s}(r-r')^T\mathbb{M}^{-1}(r-r')} d^2p = \frac{\pi}{s\sqrt{\det \mathbb{M}}} e^{-\frac{1}{4s}(r-r')^T\mathbb{M}^{-1}(r-r')}, \tag{A.20}$$

tornando a integral (A.19) igual a

$$G = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\pi}{\sqrt{\det \mathbb{M}}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{4s}(r-r')^T\mathbb{M}^{-1}(r-r')}}{s} ds. \tag{A.21}$$

A integração em s, por sua vez, fornece o resultado também bastante conhecido

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{4s}(r-r')^T\mathbb{M}^{-1}(r-r')}}{s} ds &= \lim_{\varepsilon\to 0} K_0\left(2\epsilon\sqrt{\frac{(r-r')^T\,\mathbb{M}^{-1}\,(r-r')}{4}}\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} K_0\left(\epsilon\sqrt{(r-r')^T\,\mathbb{M}^{-1}\,(r-r')}\right), \end{aligned} \tag{A.22}$$

o que é equivalente a

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{4s}(r-r')^T\mathbb{M}^{-1}(r-r')}}{s} ds = -\lim_{\varepsilon\to 0} \ln\left(\epsilon\sqrt{(r-r')^T\,\mathbb{M}^{-1}\,(r-r')}\right). \tag{A.23}$$

Dessa forma, a função de Green (A.19) se torna finalmente

$$G = -\frac{1}{4\pi\sqrt{\det \mathbb{M}}} \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\left(\epsilon\sqrt{(r-r')^T\,\mathbb{M}^{-1}\,(r-r')}\right), \tag{A.24}$$

ou

$$G = -\frac{1}{4\pi\sqrt{\det \mathbb{M}}} \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\left(\epsilon\sqrt{(r-r')^i\,(\mathbb{M}^{-1})^{ij}\,(r-r')^j}\right), \tag{A.25}$$

Para o potencial escalar, então, tem-se a solução

$$A^0 = \int \left(-\frac{1}{4\pi\sqrt{\det \mathbb{M}}}\right) \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\left(\epsilon\sqrt{(r-r')^i\,(\mathbb{M}^{-1})^{ij}\,(r-r')^j}\right) \left(\rho + \frac{1}{(1+s)}\overrightarrow{L}\times\overrightarrow{j}\right) d^2r'. \tag{A.26}$$

Para uma carga pontual, cuja densidade é dada por

$$\rho = q\delta\left(r'\right), \tag{A.27}$$

o potencial produzido se torna

$$A^0 = -\frac{q}{4\pi\sqrt{\det \mathbb{M}}} \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\left(\epsilon\sqrt{r^i\,(\mathbb{M}^{-1})^{ij}\,r^j}\right). \tag{A.28}$$

Por outro lado, para uma corrente estacionária associada a uma carga pontual com velocidade uniforme $\overrightarrow{v}$, cuja densidade é dada por

$$\overrightarrow{j} = q\overrightarrow{v}\delta\left(r'\right), \tag{A.29}$$

tem-se o potencial

$$A^0 = -\frac{q}{4\pi\left(1+s\right)\sqrt{\det\mathbb{M}}}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left(\epsilon\sqrt{r^i\left(\mathbb{M}^{-1}\right)^{ij}r^j}\right)\left(\overrightarrow{L}\times\overrightarrow{v}\right). \tag{A.30}$$

Com isso pode-se encontrar o campo elétrico produzido por fontes pontuais:

$$E^i = \frac{q}{4\pi\sqrt{\det\mathbb{M}}}\nabla^i\ln\left(\sqrt{r^m\left(\mathbb{M}^{-1}\right)^{mn}r^n}\right) \tag{A.31}$$

$$= \frac{q}{4\pi\sqrt{\det\mathbb{M}}}\frac{\frac{1}{2}2\left(\mathbb{M}^{-1}\right)^{ij}r^j}{\left(r^m\left(\mathbb{M}^{-1}\right)^{mn}r^n\right)} = \frac{q}{4\pi\sqrt{\det\mathbb{M}}}\frac{\left(\mathbb{M}^{-1}\right)^{ij}r^j}{\left(r^m\left(\mathbb{M}^{-1}\right)^{mn}r^n\right)}, \tag{A.32}$$

para a carga q, e

$$E^i = \frac{q}{4\pi\left(1+s\right)\sqrt{\det\mathbb{M}}}\left(\overrightarrow{L}\times\overrightarrow{v}\right)\frac{\left(\mathbb{M}^{-1}\right)^{ij}r^j}{\left(r^m\left(\mathbb{M}^{-1}\right)^{mn}r^n\right)}, \tag{A.33}$$

para a corrente estacionária, divergindo da eletrodinâmica usual onde este campo seria nulo. Apesar disto, vê-se nestas expressões, Eqs. (A.31) e (A.33), que a violação de Lorentz não altera a ordem de magnitude do campo elétrico, mesmo quando calculado exatamente. Aqui continua sendo

$$E \backsim \frac{1}{r}, \tag{A.34}$$

da mesma forma que na eletrodinâmica usual, embora apareça uma dependência angular em $r^T\mathbb{M}^{-1}r$ e o campo não seja mais radial, estando na direção de $M^{-1}\overrightarrow{r}$. Quando os parâmetros de violação são desprezíveis, no entanto, recupera-se os resultados usuais

$$\overrightarrow{E} = \frac{q}{4\pi}\frac{\overrightarrow{r}}{r^Tr} = \frac{q}{4\pi}\frac{\overrightarrow{r}}{r^2}, \tag{A.35}$$

$$\overrightarrow{E} = 0.$$

Agora, para o campo magnético tem-se a equação (A.2), aqui reescrita como

$$\nabla^2\left[B-\left(\overrightarrow{L}\cdot\overrightarrow{E}\right)\right] = -\frac{1}{(1+s)}\nabla\times\overrightarrow{j}, \tag{A.36}$$

que apresenta, segundo o método de Green, uma solução na forma

$$B-\left(\overrightarrow{L}\cdot\overrightarrow{E}\right) = \int G\left[\frac{1}{(1+s)}\epsilon^{im}\partial_i j^m\right]d^2r', \tag{A.37}$$

sendo G a função de Green a qual obedece a equação

$$\nabla^2 G = -\delta\left(r-r'\right).$$

Após uma transformada de Fourier tem-se

$$-p^2\widetilde{G} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \ ,$$

ou

$$\widetilde{G} = \frac{1}{(2\pi)^2 p^2} \ , \tag{A.38}$$

o que, após uma transformada de Fourier inversa, fornece

$$G = \int \widetilde{G} e^{-ip\cdot(r-r')} d^2p = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{p^2} e^{-ip\cdot(r-r')} d^2p \ . \tag{A.39}$$

Sabendo, analogamente a identidade (A.20), que

$$\frac{1}{p^2} = \int_0^\infty e^{-sp^2} ds, \tag{A.40}$$

a função de Green se torna

$$G = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-sp^2} e^{-ip\cdot(r-r')} d^2p ds = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-sp^2 - ip\cdot(r-r')} d^2p ds. \tag{A.41}$$

O expoente no integrando, mais uma vez de forma análoga ao que foi feito anteriormente, pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} -sp^2 - ip\cdot(r-r') &= -s\left(p + \frac{i}{2s}(r-r')\right)^2 + s\left(\frac{i}{2s}(r-r')\right)^2 \\ &= -s\left(p + \frac{i}{2s}(r-r')\right)^2 - \frac{1}{4s}(r-r')^2 \ , \end{aligned} \tag{A.42}$$

e com isso tem-se a integral

$$G = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-s\left(p+\frac{i}{2s}(r-r')\right)^2 - \frac{1}{4s}(r-r')^2} d^2p ds = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{\pi}{s} e^{-\frac{1}{4s}(r-r')^2} ds = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{4s}(r-r')^2}}{s} ds, \tag{A.43}$$

cujo resultado é análogo a identidade (A.22), fornecendo

$$G = \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon\to 0} K_0\left(2\epsilon\sqrt{\frac{(r-r')^2}{4}}\right) = \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon\to 0} K_0\left(\epsilon\left|r-r'\right|\right), \tag{A.44}$$

e a função de Green procurada se torna, então,

$$G = -\frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\left(\epsilon\left|r-r'\right|\right) . \tag{A.45}$$

Com tudo isso, conclui-se que o campo magnético nesta eletrodinâmica é dado por

$$B - \left(\overrightarrow{L}\cdot\overrightarrow{E}\right) = \int \left(-\frac{1}{4\pi}\right) \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\left(\epsilon\left|r-r'\right|\right) \left[\frac{1}{(1+s)} \epsilon^{im} \partial_i j^m\right] d^2r', \tag{A.46}$$

A integral no membro direito pode ser resolvida reescrevendo-a como

$$\int \partial_i \left\{ \ln\left(\epsilon \left|r - r'\right|\right) \left[\epsilon^{im} j^m\right] \right\} d^2 r' - \int \partial_i \left[\ln\left(\epsilon \left|r - r'\right|\right)\right] \left[\epsilon^{im} j^m\right] d^2 r' \tag{A.47}$$

o que fornece

$$\int \ln\left(\epsilon \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|\right) \left[\epsilon_{im} \partial_i j^m(\mathbf{r}')\right] d^2\mathbf{r}' = \underbrace{\left[\ln\left(\epsilon \left|r - r'\right|\right) \epsilon_{im} j^m(\mathbf{r}')\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int \epsilon_{im} \frac{\left(r - r'\right)^i}{\left|r - r'\right|^2} [j^m(\mathbf{r}')] d^2\mathbf{r}'. \tag{A.48}$$

Com isso o campo magnético da teoria se torna

$$B(\mathbf{r}) = \frac{1}{(1+s)} \left(\overrightarrow{L} \cdot \overrightarrow{E}\right) + \frac{1}{2\pi(1+s)} \int \epsilon_{im} \frac{\left(r - r'\right)^i}{\left|r - r'\right|^2} [j^m(\mathbf{r}')] d^2\mathbf{r}'. \tag{A.49}$$

Para uma carga pontual, representada pela densidade (A.27) e campo elétrico (A.31), tem-se

$$\begin{aligned} B(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(1+s)} \left(\overrightarrow{L} \cdot \overrightarrow{E}\right) \\ &= \frac{L^i}{(1+s)} \left[\frac{q}{4\pi\sqrt{\det \mathbb{M}}} \frac{\left(\mathbb{M}^{-1}\right)^{ij} r^j}{\left(r^m \left(\mathbb{M}^{-1}\right)^{mn} r^n\right)} \right] = \frac{q}{4\pi(1+s)\sqrt{\det \mathbb{M}}} . \frac{L^i \left(\mathbb{M}^{-1}\right)^{ij} r^j}{r^m \left(\mathbb{M}^{-1}\right)^{mn} r^n} \ , \end{aligned} \tag{A.50}$$

que é a contribuição de uma carga elétrica para o campo magnético, resultado, conforme já discutido, que se afasta da eletrodinâmica usual. Na ausência dos parâmetros de violação, no entanto, recupera-se

$$B(\mathbf{r}) = 0, \tag{A.51}$$

que é o resultado usual. Por outro lado, para uma corrente estacionária associada a uma carga pontual com velocidade uniforme $\mathbf{v}$, representada pela densidade (A.29) e campo elétrico (A.33), o campo magnético é dado por

$$\begin{aligned} B(\mathbf{r}) = \frac{L^i}{(1+s)} &\left[\frac{q}{4\pi(1+s)\sqrt{\det \mathbb{M}}} \left(\overrightarrow{L} \times \overrightarrow{v}\right) \frac{\left(\mathbb{M}^{-1}\right)^{ij} r^j}{\left(r^m \left(\mathbb{M}^{-1}\right)^{mn} r^n\right)} \right] + \\ &+ \frac{1}{2\pi(1+s)} \int \epsilon_{im} \frac{\left(r - r'\right)^i}{\left|r - r'\right|^2} [q v^m \delta(\mathbf{r}')] d^2\mathbf{r}', \end{aligned} \tag{A.52}$$

o que fornece a expressão exata

$$B(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi(1+s)^2\sqrt{\det \mathbb{M}}} \left(\overrightarrow{L} \times \overrightarrow{v}\right) \left[\frac{L^i \left(\mathbb{M}^{-1}\right)^{ij} r^j}{r^m \left(\mathbb{M}^{-1}\right)^{mn} r^n} \right] + \frac{q}{2\pi(1+s)} \frac{\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v}}{r^2} \ , \tag{A.53}$$

Vê-se que também o campo magnético não tem sua ordem de magnitude alterada, pois tem-se ainda

$$B \sim \frac{1}{r} \tag{A.54}$$

mesmo quando calculado de forma exata, e da mesma forma que o campo elétrico também aparece dependência angular, neste caso em $\left(\overrightarrow{L}\cdot\frac{\mathbb{M}^{-1}\overrightarrow{r}}{r^{T}\mathbb{M}^{-1}r}\right)$ e $\left(\frac{\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{v}}{r^{2}}\right)$. Além disso, na ausência de violação recupera-se o resultado

$$B\left(\mathbf{r}\right)=\frac{q}{2\pi}\frac{\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{v}}{r^{2}}\ , \tag{A.55}$$

Referências Bibliográficas

[1] J. C. Maxwell, Treatise on electricity and magnetism, 3rd edition, 2 vols., Dover publications, New York (1954).

[2] A. Einstein, Ann. Phys. (Leipzig) 322, 891 (1905); reprinted in 14, 194 (2005).

[3] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, Volume I, Cambridge University.

[4] R. F. Streater and A. S. Wightman, PCT, Spin and Statistics, and All That, Princeton University Press (2000); F. Strocchi, Selected Topics on the General Properties of Quantum Field Theory, Lecture Notes in Physics, Vol. 51, World Scientific Publishing Company (1993).

[5] V. A. Kostelecky and S. Samuel, Phys. Rev. Lett. 63, 224 (1989); 66, 1811 (1991); Phys. Rev. D 39, 683 (1989); 40, 1886 (1989); V. A. Kostelecky and R. Potting, Nucl. Phys. B 359, 545 (1991); Phys. Lett. B 381, 89 (1996); V. A. Kostelecky and R. Potting, Phys. Rev. D 51, 3923 (1995).

[6] R. A. Alpher, R. Herman and G. A. Gamow, Phys. Rev. 74, 1198 (1948); R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. S. Roll and D. T. Wilkinson, Astrophys. J. 142, 414 (1965); A. A. Penzias, R. W. Wilson, Astrophys. J. 142, 419 (1965).

[7] G. Hinshaw, M. R. Nolta, C. L. Bennett et al., Astrophys. J. 464, L17 (1996); J. C. Mather et al., Astrophys. J. 420, 439 (1994); E. L. Wright et al., Astrophys. J. 396, L13 (1992); http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/.

[8] G. Hinshaw, M. R. Nolta, C. L. Bennett et al., Astrophys. J. Supplement Series 170, 288 (2007); A. Kogut et al., Astrophys. J. Supplement Series 148, 161 (2003).

[9] Planck Science Team, PLANCK BLUEBOOK, available on line, http://www.rssd.esa.int/Planck/

[10] M. Szopa, R. Hofmann, F. Giacosa, M. Schwarz, Eur. Phys. J. C 54, 655 (2008); M. Szopa and R. Hofmann, JCAP 03, 001 (2008).

[11] S. Carroll, G. Field and R. Jackiw, Phys. Rev. D 41, 1231 (1990).

[12] D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D 55, 6760 (1997); D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D 58, 116002 (1998).

[13] L.B. Auerbach et al., Phys. Rev. D 72, 076004 (2005).

[14] H. Nguyen et al., http://arxiv.org/abs/hep-ex/0112046; Y.B. Hsiung et al., Nucl. Phys. Proc. Suppl. 86, 312 (2000).

[15] P. Wolf, F. Chapelet, S. Bize, A. Clairon, Phys. Rev. Lett. 96, 060801 (2006); P. Wolf, F. Chapelet, S. Bize, A. Clairon, http://arxiv.org/abs/hep-ph/0509329; P. Wolf et al., http://arxiv.org/abs/physics/0506168; F. Cane et al., Phys. Rev. Lett. 93, 230801 (2004); D.F. Phillips et al., Phys. Rev. D 63, 111101 (2001); M.A. Humphrey et al., Phys. Rev. A 68, 063807 (2004); D. Bear et al., Phys. Rev. Lett. 85, 5038 (2000).

[16] V.W. Hughes et al., Phys. Rev. Lett. 87, 111804 (2001).

[17] H. Dehmelt et al., Phys. Rev. Lett. 83, 4694 (1999); R. Mittleman et al., Phys. Rev. Lett. 83, 2166 (1999); G. Gabrielse et al., Phys. Rev. Lett. 82, 3198 (1999).

[18] R. Lehnert and R. Potting, Phys. Rev. Lett. **93**, 110402 (2004); R. Lehnert and R. Potting, Phys. Rev. D **70**, 125010 (2004); B. Altschul, Phys. Rev. D **75**, 105003 (2007); C. Kaufhold and F.R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B **734, 1** (2006); C. Kaufhold and F.R. Klinkhamer, Phys. Rev. D **76**, 025024 (2007).

[19] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **87**, 251304 (2001).

[20] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D **66**, 056005 (2002).

[21] D. Bear et al., Phys. Rev. Lett. 85, 5038 (2000); M. A. Humphrey et al., Phys. Rev. A 68, 063807 (2003); F. Cane et al., Phys. Rev. Lett. 93, 230801 (2004); P. Wolf et al., Phys. Rev. Lett. 96, 060801 (2006); B. R. Heckel et al., Phys. Rev. Lett. 97, 021603 (2006).

[22] V. A. Kostelecky and Matthew Mewes, Phys. Rev. Lett. 99, 011601 (2007); Arthur Lue, Limin Wang and Marc Kamionkowski, Phys. Rev. Lett. 83, 1506 (1999).

[23] B. Altschul, Nucl. Phys. B **796**, 262 (2008); B. Altschul, Phys. Rev. Lett. **98**, 041603 (2007).

[24] F.R. Klinkhamer and M. Risse, Phys. Rev. D **77**, 016002 (2008); F.R. Klinkhamer and M. Risse, Phys. Rev. D **77**, 117901 (A) (2008).

[25] F. R. Klinkhamer and M. Schreck, Phys. Rev. D **78**, 085026 (2008).

[26] H. Belich, M.M. Ferreira Jr., J.A. Helayel-Neto, M.T.D. Orlando, Phys. Rev. D **67**,125011 (2003); Erratum-ibid., Phys. Rev. **D** 69, 109903 (2004).

[27] H. Belich, M.M. Ferreira Jr., J.A. Helayel-Neto, M.T.D. Orlando, Phys. Rev. D **68**, 025005 (2003).

[28] H. Belich, M.M. Ferreira Jr., J.A. Helayel-Neto, Eur. Phys. J. C 38, 511 (2005);

[29] H. Belich Jr., T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr. J.A. Helayël-Neto, Eur. Phys. J. C 42, 127 (2005).

[30] D. Bazeia, M. M. Ferreira Jr., A. R. Gomes, R. Menezes, Physica **D 239**, 947 (2010); M.N. Barreto, D. Bazeia, R. Menezes, Phys.Rev. **D 73**, 065015 (2006); A. de Souza Dutra, R. A. C. Correa, Phy. Rev.

[31] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, Ann. Phys. (NY) 140, 372 (1982).

[32] Gerald V. Dunne, arXiv:hep-th/9902115.

PHYSICAL REVIEW D **84,** 045008 (2011)

Dimensional reduction of the *CPT*-even electromagnetic sector of the standard model extension

Rodolfo Casana, Eduardo S. Carvalho, and Manoel M. Ferreira, Jr.

Departamento de Física, Universidade Federal do Maranhão (UFMA),
Campus Universitário do Bacanga, São Luís-MA, 65085-580, Brazil
(Received 5 March 2011; published 5 August 2011)

The CPT-even Abelian gauge sector of the standard model extension is represented by the Maxwell term supplemented by $(K_F)_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}$, where the Lorentz-violating background tensor, $(K_F)_{\mu\nu\rho\sigma}$, possesses the symmetries of the Riemann tensor. In the present work, we examine the planar version of this theory, obtained by means of a typical dimensional reduction procedure to $(1+2)$ dimensions. The resulting planar electrodynamics is composed of a gauge sector containing six Lorentz-violating coefficients, a scalar field endowed with a noncanonical kinetic term, and a coupling term that links the scalar and gauge sectors. The dispersion relation is exactly determined, revealing that the six parameters related to the pure electromagnetic sector do not yield birefringence at any order. In this model, the birefringence may appear only as a second order effect associated with the coupling tensor linking the gauge and scalar sectors. The equations of motion are written and solved in the stationary regime. The Lorentz-violating parameters do not alter the asymptotic behavior of the fields but induce an angular dependence not observed in the Maxwell planar theory.

DOI: 10.1103/PhysRevD.84.045008 PACS numbers: 11.10.Kk, 11.30.Cp, 12.60.−i

I. INTRODUCTION

Lorentz symmetry has been considered as a fundamental cornerstone of physics since the establishment of the special theory of relativity. The inquiry about to what extent this is an exact symmetry of nature constitutes the scope of most investigations in Lorentz violation nowadays. The motivation for such studies is that the observation of Lorentz symmetry small violations in current low-energy phenomena could indicate new routes for developing theories at the Planck scale. The standard model extension (SME) [1,2] is a theoretical framework that incorporates Lorentz-violating coefficients to the standard model and to general relativity and has served as a suitable tool for constructing interesting approaches in this area.

The gauge sector of the SME embraces 23 Lorentz-violating coefficients that yield some unconventional phenomena such as vacuum birefringence and Cherenkov radiation. The coefficients are usually classified in accordance with some criteria. One criterion is the possible violation of the CPT symmetry, being the parameters CPT odd or CPT even. The Carroll-Field-Jackiw term [3] is the CPT-odd term of the SME, composed of four parameters, that engenders a parity-odd and birefringent electrodynamics whose properties were largely examined in connection with many diverse issues: consistency aspects and modifications induced in QED [4–6], supersymmetry [7], generation by radiative correction [8], vacuum Cherenkov radiation emission [9], electromagnetic propagation in waveguides [10], Casimir effect [11], finite-temperature contributions and Planck distribution [12,13], anisotropies of the cosmic microwave background radiation [14], classical electrodynamics solutions [15], and dimensional reduction [16–18].

The CPT-even gauge sector of the SME has been studied since 2002, after the pioneering contributions by Kostelecky and Mewes [19,20]. This sector is represented by the 19 components of the fourth-rank tensor, $(K_F)_{\alpha\nu\rho\varphi}$, endowed with the same symmetries of the Riemann tensor, and a double null trace. The 19 components are grouped in two subclasses: the ten birefringent ones, which are severely constrained by astrophysical tests of birefringence, and the nine nonbirefringent ones. This latter group can be constrained by laboratory tests, which are continuously being proposed and realized. Recently, an interesting study revealed that the nonbirefringent components can be constrained to the level of 1 part in 10^{17} considering that they contribute to the birefringence at subleading order [21]. High-quality cosmological spectropolarimetry data [22] have been employed to impose stringent upper bounds (as tight as 10^{-37}) on the ten birefringent Lorentz invariance violating (LIV) parameters. On the other hand, the Cherenkov radiation [23] and the absence of emission of Cherenkov radiation by ultrahigh energy cosmic rays [24,25] have been used to impose upper bounds on the nonbirefringent components. Photon-fermion vertex corrections induced by the LIV coefficients [26–29] have been employed to state upper bounds on these coefficients as well.

The dimensional reduction of the CPT-odd gauge term of the standard model extension was performed in Ref. [16], yielding a planar electrodynamics composed of the Maxwell-Chern-Simons electrodynamics coupled with a massless scalar field—the remanent of the third spacial component of the four-potential ($A^{(3)}=\phi$). It is interesting to note that the Chern-Simons term appears naturally in such reduction. This planar model was studied in its consistency (stability, causality, and unitarity) and had its classical solutions determined in Ref. [17]. The dimensional reduction of the Abelian-Higgs Maxwell-Carroll-Field-Jackiw model was performed in Ref. [18].

In the present work, we realize the dimensional reduction of the CPT-even gauge sector of the SME to $(1+2)$ dimensions following the prescription adopted in Refs. [16,18], that is, freezing the third spatial component in such a way that the fields cannot exhibit any dependence on it. The arising scalar field is the remanent of the third spacial component of the four-potential ($A^{(3)} = \phi$). We obtain a planar theory composed of the electromagnetic sector, a scalar massless field with noncanonical kinetic term, and a mixing term that couples the scalar and gauge sectors. In the gauge sector, Lorentz violation is induced by a fourth-rank tensor, $Z_{\mu\nu\lambda\kappa}$, endowed with the symmetries of the Riemann tensor, which renders six independent components. The scalar sector presents an additional noncanonical kinetic term, $C_{\mu\lambda}\partial^{\mu}\phi\partial^{\lambda}\phi$, where $C_{\mu\lambda}$ is a Lorentz-violating symmetric second-rank tensor with six independent components. The scalar and gauge sectors are coupled by the third-rank tensor, $T_{\mu\lambda\kappa}$, whose symmetries imply eight independent components. The traceless condition, coming from the $(1+3)$-dimensional model, reduces the number of independent parameters to 19. Once the planar model and its structural features are set up, we examine the effects of the Lorentz-violating parameters in the electromagnetic classical solutions (in the stationary regime), using the Green's method. As in the original four-dimensional counterpart, stationary currents and static charge are able to create both magnetic and electric fields in this planar theory. The stationary solutions reveal that Lorentz-violating coefficients do not modify the asymptotic radial behavior of the Maxwell planar electrodynamics, but are able to generate terms with angular dependence. The dispersion relation stemming from the pure gauge sector allows one to notice that the planar electrodynamics is free from birefringence, which is implied only at second order by the components of the tensor $T_{\mu\lambda\kappa}$.

This work is organized as follows. In Sec. II, we briefly present general features of the CPT-even electrodynamics of the SME. In Sec. III, we perform the dimensional reduction procedure that leads to the planar theory of interest. In Sec. IV, we study this planar theory focusing on the equations of motion. In Sec. V, the dispersion relation is exactly carried out. In Sec. VI, we evaluate the classical stationary solutions for electric and magnetic fields, remarking on the deviations induced by the Lorentz-violating terms. In Sec. VII, we present our conclusions and final remarks.

II. THE PARAMETRIZATION OF THE *CPT*-EVEN GAUGE SECTOR OF SME IN (1 + 3) DIMENSIONS

The CPT-even sector of the Lorentz-violating electrodynamics of the SME photon sector is represented by the following Lagrangian:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{4}(K_F)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\lambda\kappa} - J_{\hat{\mu}}A^{\hat{\mu}}, \quad (1)$$

where the indices with the hat, $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$, run from 0 to 3, $F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ is the usual electromagnetic field tensor, $A^{\hat{\mu}}$ is the four-potential, and $(K_F)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}}$ is a renormalizable, dimensionless coupling which has the same symmetries as the Riemann tensor:

$$\begin{aligned}(K_F)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}} &= -(K_F)_{\hat{\nu}\hat{\mu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}},\\ (K_F)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}} &= -(K_F)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}},\\ (K_F)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}} &= (K_F)_{\hat{\lambda}\hat{\kappa}\hat{\mu}\hat{\nu}},\end{aligned} \quad (2)$$

$$(K_F)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}} + (K_F)_{\hat{\mu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}\hat{\nu}} + (K_F)_{\hat{\mu}\hat{\kappa}\hat{\nu}\hat{\lambda}} = 0, \quad (3)$$

and a double null trace, $(K_F)^{\hat{\mu}\hat{\nu}}{}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0$. The equation of motion is

$$\partial_{\hat{\nu}}F^{\hat{\nu}\hat{\mu}} - (K_F)^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}}\partial_{\hat{\nu}}F_{\hat{\lambda}\hat{\kappa}} = 0. \quad (4)$$

The tensor $(K_F)_{\alpha\nu\rho\varphi}$ has 19 independent components, from which nine do not yield birefringence. A very useful parametrization for addressing this theory is the one presented in Refs. [19,20], in which these 19 components are contained in four 3×3 matrices:

$$\begin{aligned}(\tilde{\kappa}_{e+})^{jk} &= \tfrac{1}{2}(\kappa_{\mathrm{DE}} + \kappa_{\mathrm{HB}})^{jk},\\ (\tilde{\kappa}_{e-})^{jk} &= \tfrac{1}{2}(\kappa_{\mathrm{DE}} - \kappa_{\mathrm{HB}})^{jk} - \tfrac{1}{3}\delta^{jk}(\kappa_{\mathrm{DE}})^{ii},\\ \kappa_{\mathrm{tr}} &= \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(\kappa_{\mathrm{DE}}),\end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}(\tilde{\kappa}_{o+})^{jk} &= \tfrac{1}{2}(\kappa_{\mathrm{DB}} + \kappa_{\mathrm{HE}})^{jk},\\ (\tilde{\kappa}_{o-})^{jk} &= \tfrac{1}{2}(\kappa_{\mathrm{DB}} - \kappa_{\mathrm{HE}})^{jk},\end{aligned} \quad (6)$$

where $\tilde{\kappa}_e$ and $\tilde{\kappa}_o$ designate parity-even and parity-odd matrices, respectively. The 3×3 matrices κ_{DE}, κ_{HB}, κ_{DB}, and κ_{HE} are defined in terms of the (K_F)-tensor components:

$$(\kappa_{\mathrm{DE}})^{jk} = -2(K_F)^{0j0k}, \qquad (\kappa_{\mathrm{HB}})^{jk} = \tfrac{1}{2}\epsilon^{jpq}\epsilon^{klm}(K_F)^{pqlm}, \quad (7)$$

$$(\kappa_{\mathrm{DB}})^{jk} = -(\kappa_{\mathrm{HE}})^{kj} = \epsilon^{kpq}(K_F)^{0jpq}. \quad (8)$$

The matrices κ_{DE}, κ_{HB} contain together 11 independent components while κ_{DB}, κ_{HE} possess together 8 components, which sums the 19 independent elements of the tensor $(K_F)_{\alpha\nu\rho\varphi}$. From these 19 coefficients, 10 are sensitive to birefringence and 9 are nonbirefringent. These latter ones are contained in the matrices $\tilde{\kappa}_{o+}$ and $\tilde{\kappa}_{e-}$. The analysis of birefringence data reveals the coefficients of the matrices $\tilde{\kappa}_{e+}$, and $\tilde{\kappa}_{o-}$ are bounded to the level of 1 part in 10^{32} [19,20] and 1 part in 10^{37} [22].

III. THE DIMENSIONAL REDUCTION OF THE *CPT*-EVEN SECTOR

In order to study this model in $(1+2)$ dimensions, one realizes its dimensional reduction, which consists effectively of adopting the following ansatz over any 4-vector: (i) one keeps the temporal and also the first two spatial components unaffected; (ii) one freezes the third spacial dimension by splitting it from the body of the new 3-vector and requires that the new quantities (χ), defined in $(1+2)$ dimensions, do not depend on the third spacial dimension $\partial_3\chi \rightarrow 0$. This procedure was performed for the Carroll-Field-Jackiw electrodynamics in Ref. [16]. Applying this prescription to the gauge 4-vector, A^μ, one has

$$A^{\hat{\nu}} \rightarrow (A^\nu; \phi), \tag{9}$$

where $A^{(3)} = \phi$ is now a scalar field and the Greek indices without a hat run from 0 to 2, that is, $\mu = 0$, 1, and 2. Carrying out this prescription for the terms of Lagrangian (1), one then obtains

$$\begin{aligned} F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} &= F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2F_{\mu3}F^{\mu3} \\ &= F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 2\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} (K_F)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\lambda}\hat{\kappa}} &= Z_{\mu\nu\lambda\kappa}F^{\mu\nu}F^{\lambda\kappa} + 2Z_{\mu3\lambda\kappa}F^{\mu3}F^{\lambda\kappa} \\ &\quad + 2Z_{\mu\nu\lambda3}F^{\mu\nu}F^{\lambda3} + 4Z_{\mu3\lambda3}F^{\mu3}F^{\lambda3}, \end{aligned} \tag{11}$$

where $Z_{\mu\nu\lambda\kappa}$ is the planar version of the original (K_F) tensor, that is, $Z_{\mu\nu\lambda\kappa} = [(K_F)_{\mu\nu\lambda\kappa}]_{1+2}$. It fulfills the following symmetry properties:

$$Z_{\mu\nu\lambda\kappa} = Z_{\lambda\kappa\mu\nu}, \quad Z_{\mu\nu\lambda\kappa} = -Z_{\nu\mu\lambda\kappa}, \quad Z_{\mu\nu\lambda\kappa} = -Z_{\mu\nu\kappa\lambda}, \tag{12}$$

$$Z_{\mu\nu\lambda\kappa} + Z_{\mu\lambda\kappa\nu} + Z_{\mu\kappa\nu\lambda} = 0. \tag{13}$$

These symmetries imply $Z_{\mu\nu\lambda3}F^{\mu\nu}F^{\lambda3} = Z_{\mu3\lambda\kappa}F^{\mu3}F^{\lambda\kappa}$, leading to

$$\begin{aligned} (K_F)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\lambda}\hat{\kappa}} &= Z_{\mu\nu\lambda\kappa}F^{\mu\nu}F^{\lambda\kappa} + 4Z_{\mu3\lambda\kappa}F^{\mu3}F^{\lambda\kappa} \\ &\quad + 4Z_{\mu3\lambda3}F^{\mu3}F^{\lambda3}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} (K_F)_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\kappa}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\lambda}\hat{\kappa}} &= Z_{\mu\nu\lambda\kappa}F^{\mu\nu}F^{\lambda\kappa} - 4T_{\mu\lambda\kappa}\partial^\mu\phi F^{\lambda\kappa} \\ &\quad + 4C_{\mu\lambda}\partial^\mu\phi\partial^\lambda\phi, \end{aligned} \tag{15}$$

where $F^{\mu3} = \partial^\mu\phi$, and we have defined new second-rank and third-rank tensors

$$T_{\mu\lambda\kappa} = (K_F)_{3\mu\lambda\kappa}, \qquad C_{\mu\lambda} = (K_F)_{\mu3\lambda3}.$$

With it, the dimensionally reduced Lagrangian is

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(1+2)} &= -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \tfrac{1}{4}Z_{\mu\nu\lambda\kappa}F^{\mu\nu}F^{\lambda\kappa} + \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \\ &\quad - C_{\mu\lambda}\partial^\mu\phi\partial^\lambda\phi + T_{\mu\lambda\kappa}\partial^\mu\phi F^{\lambda\kappa} - J_\mu A^\mu - J\phi. \end{aligned} \tag{16}$$

The presence of the tensor $C_{\mu\lambda}$ provides a noncanonical kinetic term for the scalar field. Some attempts of proposing Lorentz-violating constructions for topological defects with a term such as this are already known in the literature [30]. This term has recently been used to study acoustic black holes with Lorentz violation in $(1+2)$ dimensions [31] and also the Bose-Einstein condensation of a bosonic ideal gas [32]. The tensor $T_{\mu\lambda\kappa}$, in turn, is responsible for the coupling between the scalar and gauge sectors in this planar theory. These two tensors satisfy the following symmetries:

$$C_{\mu\lambda} = C_{\lambda\mu}, \tag{17}$$

$$T_{\mu\lambda\kappa} = -T_{\mu\kappa\lambda}. \tag{18}$$

$$T_{\mu\lambda\kappa} + T_{\lambda\kappa\mu} + T_{\kappa\mu\lambda} = 0. \tag{19}$$

The (double) traceless property of the K_F tensor is now read as

$$Z_{\mu\nu}{}^{\mu\nu} + 2C^\alpha{}_\alpha = 0. \tag{20}$$

By the relations (17)–(19), we conclude that the tensors $C_{\mu\lambda}$, $Z_{\mu\nu\lambda\kappa}$, and $T_{\mu\lambda\kappa}$ contain six, six, and eight independent components, respectively, comprising 20 parameters. The relation (20) states a constraint between them, remaining19 independent components, the same number of the tensor K_F (before the dimensional reduction).

The reduced model (16) is invariant under the following local gauge transformation:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\Lambda, \qquad \phi \rightarrow \phi, \tag{21}$$

in such a way that it preserves the $U(1)$ local gauge symmetry of the four-dimensional model. The full Lagrangian of this model is written as

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - C_{00}(\partial_0\phi)^2 \\ &\quad + C_{0i}(\partial_0\phi)(\partial_i\phi) - C_{ij}(\partial_i\phi)(\partial_j\phi) - (Z_{0i12}E^i)B \\ &\quad - \tfrac{1}{2}(k_{\mathrm{DE}})_{ij}E^iE^j - \tfrac{1}{2}sB^2 - T_{00i}\partial_0\phi E^i \\ &\quad - \epsilon_{ij}T_{0ij}\partial_0\phi B + T_{i0j}\partial_i\phi E^j + \epsilon_{lj}T_{ilj}\partial_i\phi B. \end{aligned} \tag{22}$$

As in the original four-dimensional model, the Lorentz-violating coefficients have definite parity. In $(1+2)$ dimensions, the parity operator acts doing $r \rightarrow (-x, y)$, so that the fields go as

$$A_0 \rightarrow A_0, \quad A \rightarrow (-A_x, A_y), \quad E \rightarrow (-E_x, E_y), \quad B \rightarrow -B. \tag{23}$$

TABLE I. Parity classification and number of Lorentz-violating parameters belonging to the planar model. The symbol N designates the number of components, while $\mathbb{N}$ designates the total of independent components.

Components		N	$\mathbb{N}$
Parity even	$C_{00}, C_{02}, C_{11}, C_{22}, L_1, (k_{\rm DE})_{11}, (k_{\rm DE})_{22}, s, T_{002}, T_{101}, T_{202}, T_{112}$	12	11
Parity odd	$C_{01}, C_{12}, L_2, (k_{\rm DE})_{12}, T_{001}, T_{012}, T_{102}, T_{201}, T_{212}$	9	8
Total		21	19

For more details, see Ref. [33]. We consider that the field ϕ behaves as a scalar, $\phi \rightarrow \phi$. This allows one to conclude that this planar model possesses 12 parity-even components, and 9 parity-odd ones, as shown in Table I. Further, we see that the trace relation (20) involves only parity-even coefficients, whereas the relation (19) embraces only parity-odd parameters (when the indices of the tensor $T_{\kappa\mu\lambda}$ assume three different values, $T_{012} + T_{120} + T_{201} = 0$). These two relations reduce the number of independent components from 21 to 19, as expected. The fact that the components of the vectors (Z_{0i12}, T_{00i}) transform distinctly is a consequence of the way the vectors $\mathbf{r}$, $\mathbf{A}$, and $\mathbf{E}$ behave under parity.[1]

If one neglects the coupling between the scalar and gauge sectors ($T_{\mu\lambda\kappa} = 0$), one has a planar theory composed by the usual Maxwell electrodynamics modified by the term $Z_{\mu\nu\lambda\kappa}F^{\mu\nu}F^{\lambda\kappa}$ and a scalar field endowed with a noncanonical kinetic term, whose properties will be examined. The planar Lagrangian density of the electromagnetic sector is

$$\mathcal{L}_{\rm EM(1+2)} = -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \tfrac{1}{4}Z_{\mu\nu\lambda\kappa}F^{\mu\nu}F^{\lambda\kappa} - J_\mu A^\mu, \quad (24)$$

which represents a gauge-invariant theory (in the absence of external currents). We should note that the planar tensor $Z_{\mu\nu\lambda\kappa}$ would have $3^4 = 81$ components in the absence of the symmetries. The symmetries properties, however, reduce them to only six independents components:

$$\begin{aligned} Z_{0ilm} &= [Z_{0112}, Z_{0212}], \\ Z_{0i0m} &= [Z_{0101}, Z_{0202}, Z_{0102}], \\ Z_{ijlm} &= [Z_{1212}]. \end{aligned} \quad (25)$$

It is interesting to note that the permutation symmetry (13) is now just a complementary relation, not implying a new constraint on the components of the tensor $Z_{\mu\nu\lambda\kappa}$. This planar tensor does not share the double traceless condition of the tensor (K_F) anymore. Instead it holds Eq. (20) that states a relation between its components and the ones of the tensor $C_{\mu\lambda}$. For this reason, when the gauge and scalar sector are considered together, both contribute only 11 components.

[1]Note that in the case the field ϕ behaves similar to a pseudoscalar ($\phi \rightarrow -\phi$), the behavior of the components T_{00i}, T_{0ij}, T_{i0j}, T_{ilj} is reversed under parity.

In order to propose an effective parametrization for gauge sector elements, it is helpful to write the Lagrangian element, $Z_{\mu\nu\lambda\kappa}F^{\mu\nu}F^{\lambda\kappa}$, in terms of the electric and magnetic fields,

$$Z_{\mu\nu\lambda\kappa}F^{\mu\nu}F^{\lambda\kappa} = 4Z_{0i12}E^iB + 4Z_{0i0j}E^iE^j + 4Z_{1212}B^2, \quad (26)$$

where it was used $F^{0i} = -E^i$, $F^{12} = F_{12} = -B$. We should remember that in $(1+2)$ dimensions the magnetic field is a scalar. Thus, the two elements Z_{0ilm} can be read as elements of a 2-vector,

$$2Z_{0ilm} = 2Z_{0i12} = L_i, \qquad L^i = 2Z^{0i12}, \quad (27)$$

with $\mathbf{L} = (L_1, L_2)$. The three elements Z_{0i0j} are written as elements of a symmetric 2×2 matrix

$$2Z_{0i0j} = (k_{\rm DE})_{ij} = (k_{\rm DE})_{ji}, \quad (28)$$

whose components are

$$k_{\rm DE} = 2\begin{bmatrix} Z_{0101} & Z_{0102} \\ Z_{0102} & Z_{0202} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Finally, the single element Z_{ijlm} plays the role of a scalar,

$$2Z_{ijlm} = 2Z_{1212} = s. \quad (30)$$

Using the new definitions, the planar pure electromagnetic Lagrangian (24) takes the form

$$\mathcal{L}_{\rm EM(1+2)} = \tfrac{1}{2}\mathbf{E}^2 - \tfrac{1}{2}(k_{\rm DE})_{ij}E^iE^j - \tfrac{1}{2}(1+s)B^2 + (\mathbf{L}\cdot\mathbf{E})B, \quad (31)$$

where it used the contraction

$$Z_{\mu\nu\lambda\kappa}F^{\mu\nu}F^{\lambda\kappa} = -4(\mathbf{L}\cdot\mathbf{E})B + 2E^i(k_{\rm DE})_{ij}E^j + 2sB^2. \quad (32)$$

Another relevant aspect concerns the evaluation of the canonical energy-momentum tensor for the planar Lagrangian, (24), carried out from the usual form $\Theta^{\beta\rho} = [\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\beta A_\alpha)]\partial^\rho A_\alpha - g^{\beta\rho}\mathcal{L}$, and leading to the result,

$$\Theta^{\beta\rho} = -(F^{\beta\alpha} + Z^{\beta\alpha\lambda\kappa}F_{\lambda\kappa})\partial^\rho A_\alpha - g^{\beta\rho}\mathcal{L}. \quad (33)$$

The energy density,

$$\Theta^{00}_{\rm EM} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + B^2) - \tfrac{1}{2}(k_{\rm DE})^{ij}E^iE^j + \tfrac{1}{2}sB^2, \quad (34)$$

is obtained by using Gauss's law. It is interesting to mention that the same result is achieved via the construction of the density of Hamiltonian, $H = \pi^\alpha \dot{A}_\alpha - L$, where $\pi^\alpha = \partial L/\partial(\partial_0 A_\alpha)$ is the conjugate momentum,

$$\pi^\alpha = -F^{0\alpha} - Z^{0\alpha\lambda\kappa}F_{\lambda\kappa}. \tag{35}$$

In components, we have $\pi^0 = 0$ and $\pi^i = E^i - (k_{\rm DE})^{ij}E^j + L^i B$. The pure gauge model has two first class constraints, π^0 and $\partial_i \pi^i$, the latter one being Gauss's law. The Hamiltoninan analysis implies the same energy density of Eq. (34). These outcomes show that the energy density can be regarded as positive definite, once the Lorentz-violating parameters are sufficiently small.

IV. WAVE EQUATIONS FOR THE PLANAR ELECTRODYNAMICS

In order to obtain the classical solutions of the planar electrodynamics represented by the Lagrangian (16), we should write the equations motion. In a general way, such equations are given by

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} - Z^{\beta\alpha\lambda\kappa}\partial_\alpha F_{\lambda\kappa} - 2T^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\mu\phi = J^\beta, \tag{36}$$

$$\Box\phi + T^{\alpha\lambda\kappa}\partial_\alpha F_{\lambda\kappa} - 2C^{\alpha\lambda}\partial_\alpha\partial_\lambda\phi = -J. \tag{37}$$

In the absence of the coupling term ($T^{\mu\alpha\beta} = 0$), the gauge and scalar sectors become decoupled and classically governed by the following equations:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} - Z^{\beta\alpha\lambda\kappa}\partial_\alpha F_{\lambda\kappa} = J^\beta, \tag{38}$$

$$\Box\phi - 2C^{\alpha\lambda}\partial_\alpha\partial_\lambda\phi = -J. \tag{39}$$

The main reason for neglecting the tensor $T_{\mu\lambda\kappa}$ is that it appears as a second order contribution in the equations defined in terms only of the gauge field or the scalar field. In order to verify it, we isolate the scalar field in Eq. (37), in the absence of scalar sources, $J = 0$, writing

$$\phi = -\frac{T^{\alpha\lambda\kappa}\partial_\alpha}{\Box - 2C^{\alpha\lambda}\partial_\alpha\partial_\lambda}F_{\lambda\kappa}. \tag{40}$$

Replacing Eq. (40) in Eq. (36), there appears

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} - Z^{\beta\alpha\lambda\kappa}\partial_\alpha F_{\lambda\kappa} + \frac{4T^{\mu\alpha\beta}T^{\theta\lambda\kappa}\partial_\alpha\partial_\mu\partial_\theta}{\Box - 2C^{\rho\tau}\partial_\rho\partial_\tau}F_{\lambda\kappa} = J^\beta. \tag{41}$$

Such expression differs from the decoupled equation (38) by a second order term in the tensor $T^{\mu\alpha\beta}$, justifying the vanishing choice ($T^{\mu\alpha\beta} = 0$) adopted. A similar procedure shows that the tensor $T^{\mu\alpha\beta}$ contributes on the decoupled equation (39) only at second order, as well. Hence, the gauge and scalar sectors fulfill decoupled equations of motion at first order, confirming the validity of Eqs. (38) and (39).

In terms of the electric and magnetic fields, Eq. (38) yields

$$\partial_i E^i - (k_{\rm DE})_{ij}\partial_i E^j + L^i\partial_i B = \rho, \tag{42}$$

$$(1+s)\epsilon^{il}\partial_l B - \partial_t E^i + (k_{\rm DE})^{ij}\partial_t E^j - \epsilon^{il}\partial_l(L^j E^j) - L^i\partial_t B = J^i, \tag{43}$$

which correspond to modified forms for Gauss's law and Ampère's law. Besides these equations, there is the Bianchi identity, $\partial_\mu F^{\mu *} = 0$, where $F^{\mu *} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\nu\alpha}$ is the dual of the electromagnetic field tensor in (1 + 2) dimensions, which is a 3-vector, $F^{\mu *} = (-B, -\mathbf{E}^*)$. The symbol (*) designates the dual of a 2-vector: $(E^i)^* = \epsilon_{ij}E^j$, so that $\mathbf{E}^* = (E_y, -E_x)$. Here, one has adopted the following convention: $\epsilon_{012} = \epsilon^{012} = \epsilon_{12} = \epsilon^{12} = 1$, $F^{12} = F_{12} = -B$, and $F_{0i} = E^i$. As is well known, Bianchi identity corresponds to Faraday's law,

$$\partial_t B + \nabla \times \mathbf{E} = 0. \tag{44}$$

Equations (42)–(44) are the modified Maxwell equations corresponding to Lagrangian (24). Multiplying Eq. (43) by ϵ_{ip}, we have

$$(1+s)\partial_p B - \epsilon_{ip}\partial_t E^i + \epsilon_{ip}(k_{\rm DE})^{ij}\partial_t E^j - \partial_p(L^j E^j) - \epsilon_{ip}L^i\partial_t B = \epsilon_{ip}J^i. \tag{45}$$

The stationary version of this equation is

$$n\partial_i B - 2\partial_i(L^j E^j) + L^p\partial_p E^i = -\epsilon_{ip}J^p, \tag{46}$$

where $n = (1+s)$. Applying the operator ∂_i on Eq. (46), it turns out that

$$n\nabla^2 B - 2\nabla^2(L^j E^j) + L^p\partial_p\partial_i E^i = -\epsilon_{ip}\partial_i J^p, \tag{47}$$

$$n\nabla^2 B + (L^j\partial_j)\nabla^2 A_0 = -\epsilon_{ip}\partial_i J^p. \tag{48}$$

Multiplying Eq. (42) by n and replacing Eq. (46) for it, it is possible to achieve a decoupled expression for the electric field,

$$\partial_i E^i - (k_{\rm DE})_{ij}\partial_i E^j + \frac{1}{n}L^i L^q\partial_i E^q = \rho + \frac{1}{n}\epsilon_{\rm im}L^i J^m. \tag{49}$$

The dependence on the current in the nonhomogeneous part indicates that this planar model inherits a feature from the four-dimensional model: stationary currents may engender both magnetic and electric fields. These modified Maxwell equations exhibit an analogous form to the Maxwell ones of the four-dimensional theory, respecting the structure of differential operators in three and two spatial dimensions. A point of difference is that in the stationary original theory, the coupling between the scalar and magnetic sector is established only by the parity-odd coefficients. In this planar theory, the coupling is implemented by the parity-odd and parity-even coefficients (L^i).

In the Lorentz gauge, $\partial_\mu A^\mu = 0$, the wave equations for the 3-potential can be derived from

$$\Box A^\beta - 2Z^{\beta\alpha\lambda\kappa}\partial_\alpha\partial_\lambda A_\kappa = J^\beta. \tag{50}$$

For $\beta = 0$ and $\beta = i$, we derive the equations for A^0 and A^i, namely:

$$\Box A^0 + (k_{\rm DE})^{ij}\partial_i\partial_j A_0 + L^i\partial_i B = \rho, \tag{51}$$

$$\Box A^i - \epsilon^{il}L^j\partial_l\partial_0 A_j + (k_{\rm DE})^{ij}\partial_0^2 A_j - (k_{\rm DE})^{ij}\partial_0\partial_j A_0 + \epsilon_{il}\partial_l(L^p\partial_p)A_0 + s\epsilon^{ip}\partial_p B - L^i\partial_0 B = J^i, \tag{52}$$

whose stationary versions are

$$\nabla^2 A^0 - (k_{\rm DE})^{ij}\partial_i\partial_j A_0 - L^i\partial_i B = -\rho, \tag{53}$$

$$\nabla^2 A^i - \epsilon_{il}\partial_l(L^p\partial_p)A_0 - s\epsilon^{ip}\partial_p B = -J^i. \tag{54}$$

Using Eq. (46), the expression (51) for the scalar potential can be decoupled as

$$\left[\nabla^2 - (k_{\rm DE})^{ji}\partial_i\partial_j + \frac{1}{n}(L^jL^i\partial_i\partial_j)\right]A_0 = -\rho - \frac{1}{n}\epsilon_{\rm im}L^iJ^m. \tag{55}$$

This expression can also be obtained starting from the differential equation for the electric field, Eq. (49), by replacing $E^j = -\partial_j A_0$. Considering that in the stationary regime it holds $\partial_i A^i = 0$, Eq. (54) is written as

$$(1+s)\nabla^2 A^i - \epsilon^{il}\partial_l(L^p\partial_p)A_0 = -J^i. \tag{56}$$

This latter equation confirms that currents act as a source for both the electric and magnetic fields. On the other hand, it is possible to show that charges generate both electric and magnetic fields as well.

The magnetic field can be read from Eq. (48), $\nabla^2[nB + (L^j\partial_j)A_0] = -\epsilon_{ip}\partial_i J^p$, leading to

$$B(\mathbf{r}) = -\frac{1}{n}(L^j\partial_j)A_0(\mathbf{r}) - \int G_B(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\left[\frac{1}{n}\epsilon_{\rm im}\partial_i J^m(\mathbf{r}')\right]d^2\mathbf{r}', \tag{57}$$

where the magnetic Green function satisfies

$$\nabla^2 G_B(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{58}$$

In the momentum space, $\tilde{G}(\mathbf{p}) = -1/\mathbf{p}^2$, implying $G_B(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi}\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, so that the magnetic field is written as

$$B(\mathbf{r}) = \frac{1}{n}L^jE^j(\mathbf{r}) - \frac{1}{2\pi}\frac{1}{n}\int \ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|[\epsilon_{\rm im}\partial_i J^m(\mathbf{r}')]d^2\mathbf{r}'. \tag{59}$$

In the absence of currents, a simple relation holds between the magnetic and electric fields:

$$B(\mathbf{r}) = \frac{1}{n}(\mathbf{L}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r})). \tag{60}$$

V. DISPERSION RELATIONS

An issue of interest is the complete wave equations which lead to the dispersion relations of this planar electrodynamics. In order to study it, we search for the wave equation for the electric field. We take the time derivate of Eq. (43), and replace the Bianchi identity $\partial_t B = -(\epsilon_{mn}\partial_m E^n)$ in it. After some manipulation, one obtains a wave equation for the electric field at the form $M_{ij}E^j = 0$, where

$$M_{ij} = [-n\partial_j\partial_i + n\delta_{ij}\nabla^2 - [\delta_{ij}\partial_t^2 - (k_{\rm DE})^{ij}\partial_t^2] + L_j\partial_t\epsilon_{il}\partial_l - L_i\epsilon_{mj}\partial_t\partial_m]. \tag{61}$$

In the momentum space, it follows as

$$M_{ij} = [np_jp_i - n\delta_{ij}\mathbf{p}^2 + [\delta_{ij}p_0^2 - (k_{\rm DE})_{ij}p_0^2] + L_j\epsilon_{il}p_0p_l - L_i\epsilon_{mj}p_0p_m]. \tag{62}$$

The dispersion relation is achieved imposing $\det\mathbb{M} = 0$. Evaluating the components,

$$M_{11} = [np_1^2 - n\mathbf{p}^2 + p_0^2 - (k_{\rm DE})_{11}p_0^2 + 2L_1p_0p_2], \tag{63}$$

$$M_{22} = [np_2^2 - n\mathbf{p}^2 + p_0^2 - (k_{\rm DE})_{22}p_0^2 - 2L_2p_0p_1], \tag{64}$$

$$M_{12} = M_{21} = np_1p_2 - (k_{\rm DE})_{12}p_0^2 + L_2p_0p_2 - L_1p_0p_1, \tag{65}$$

one can write and factor the determinant, $\det\mathbb{M} = M_{11}M_{22} - (M_{12})^2$, obtaining an exact dispersion relation:

$$\det\mathbb{M} = p_0^2\{p_0^2[1 - \mathrm{tr}(k_{\rm DE}) + \det(k_{\rm DE})] + 2p_0[\mathbf{L}\times\mathbf{p} + (k_{\rm DE})_{ij}p_iL_j^*] - [n\mathbf{p}^2 - n(k_{\rm DE})_{ij}p_ip_j + (\mathbf{L}\cdot\mathbf{p})^2]\} = 0. \tag{66}$$

This physical dispersion relation yields the solution

$$p_0 = \frac{1}{D}[\mathbf{L}\times\mathbf{p} + (k_{\rm DE})_{ij}p_iL_j^* \pm \Omega], \tag{67}$$

where

$$D = [1 - \mathrm{tr}(k_{\rm DE}) + \det(k_{\rm DE})], \tag{68}$$

$$\Omega = \sqrt{[\mathbf{L}\times\mathbf{p} + (k_{\rm DE})_{ij}p_iL_j^*]^2 + D[n\mathbf{p}^2 - (k_{\rm DE})_{ij}p_ip_j + (\mathbf{L}\cdot\mathbf{p})^2]}. \tag{69}$$

From relation (67), we notice that both modes propagate with the same phase velocity, which implies absence of birefringence. To understand it, we should take the right (p_{0+}) and the left (p_{0-}) modes, corresponding to the $\pm$ signals in Eq. (67), propagating in the same sense. Hence, we should take the left (p_{0-}) mode with reversed momentum ($\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$),

$$p_{0-}(-\mathbf{p}) = \frac{1}{D}[-\mathbf{L} \times \mathbf{p} - (k_{\mathrm{DE}})_{ij} p_i L_j^* - \Omega], \tag{70}$$

meaning propagation to the right. We should note that it coincides with the right mode,

$$p_{0+}(\mathbf{p}) = \frac{1}{D}[\mathbf{L} \times \mathbf{p} + (k_{\mathrm{DE}})_{ij} p_i L_j^* + \Omega], \tag{71}$$

with a reversed global signal. These relations provide the same phase velocity. This situation is analogous to the one of the parity-odd dispersion relation of the *CPT*-even original model, discussed in Eqs. (36)–(44) of Ref. [34], which yields no birefringence. Such discussion reveals that the six Lorentz-violating parameters of the electromagnetic sector, s, $(k_{\mathrm{DE}})_{ij}$, and L^i, behave as nonbirefringent components (at any order). Hence, the birefringent components of this planar theory should be contained in the coupling tensor $T_{\mu\lambda\kappa}$. As this tensor modifies the equations of motion at second order, the birefringence is manifest only as a second order effect in the Lorentz-violating parameters. At first order, Eq. (67) implies the following physical dispersion relation:

$$p_0 = |\mathbf{p}|\left[1 + \frac{s}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{tr}(k_{\mathrm{DE}}) - (k_{\mathrm{DE}})_{ij}\frac{p_i p_j}{2\mathbf{p}^2} \pm \frac{(\mathbf{L} \times \mathbf{p})}{|\mathbf{p}|}\right]. \tag{72}$$

From Eq. (72), we can also evaluate the group velocity,

$$u_g = \left[1 + \frac{s}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{tr}(k_{\mathrm{DE}}) - (k_{\mathrm{DE}})_{ij}\frac{\hat{p}_i \hat{p}_j}{2} \pm \epsilon_{ij} L^i \hat{p}^j\right], \tag{73}$$

showing that this electrodynamics could spoil causality. In order to perform a complete analysis on the consistency of this theory (stability, causality, and unitarity), one should carry out a detailed analysis via the Feynman gauge propagator, which is being regarded as a future perspective.

VI. CLASSICAL STATIONARY SOLUTIONS

In this section, we solve the equations for the electromagnetic and scalar sectors, obtaining stationary solutions at first order in the Lorentz-violating parameters.

A. The electrostatic and magnetostatic

A good starting point to study the stationary solutions for the pure electromagnetic sector is the differential equation for the scalar potential, Eq. (55), which at first order is read as

$$\left[\nabla^2 - (k_{\mathrm{DE}})^{ij}\partial_i\partial_j + \frac{1}{n}(L^j L^i \partial_i \partial_j)\right] A_0 = -\rho - \frac{1}{n}\epsilon_{\mathrm{im}} L^i J^m. \tag{74}$$

The solution for this equation can be achieved by means of the Green method, which allows one to write

$$A_0(\mathbf{r}) = -\int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')[\rho(\mathbf{r}') + \frac{1}{n}\epsilon_{\mathrm{im}} L^i J^m(\mathbf{r}')] d^2\mathbf{r}', \tag{75}$$

where $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ is the Green's function, which fulfills the first order equation

$$[\nabla^2 - (k_{\mathrm{DE}})^{ij}\partial_i\partial_j] G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{76}$$

In Fourier space it holds

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2\mathbf{p}\,\tilde{G}(\mathbf{p}) \exp[-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')], \tag{77}$$

whose replacement in Eq. (76) leads to

$$\begin{aligned}\tilde{G}(\mathbf{p}) &= -\frac{1}{\mathbf{p}^2 - (k_{\mathrm{DE}})^{ji} p_i p_j} \\ &= -\frac{1}{\mathbf{p}^2}\left[1 + (k_{\mathrm{DE}})^{ji}\frac{p_i p_j}{\mathbf{p}^2} + \cdots\right],\end{aligned} \tag{78}$$

and we have evaluated $\tilde{G}(\mathbf{p})$ at first order in the Lorentz-violating parameters, due to its usual smallness. Performing the Fourier integrations, we achieve the following Green function:

$$G(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)}\left[\left(1 + \frac{1}{2}(k_{\mathrm{DE}})^{ii}\right)\ln R + \frac{1}{2}(k_{\mathrm{DE}})^{ij}\frac{R_i R_j}{R^2}\right], \tag{79}$$

where $\mathbf{R} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ and the terms involving the coefficients $(k_{\mathrm{DE}})^{ij}$ are corrections to usual planar Green function, $\ln R$. Here, it was used in the following transforms:

$$\begin{aligned}\int d^2\mathbf{p}\frac{1}{\mathbf{p}^2}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} &= -2\pi \ln R, \\ \int d^2\mathbf{p}\frac{p_i p_j}{\mathbf{p}^4}e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} &= -2\pi\left(\frac{\delta_{ij}}{2}\ln R + \frac{1}{2}\frac{R_j R_i}{R^2}\right).\end{aligned} \tag{80}$$

The scalar potential is then written as

$$\begin{aligned}A_0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi}\int\bigg[\bigg(1 &+ \frac{1}{2}(k_{\mathrm{DE}})^{ii}\bigg)\ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \\ &+ \frac{1}{2}(k_{\mathrm{DE}})^{ij}\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_j}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}\bigg] \\ &\times\left[\rho(\mathbf{r}') + \frac{1}{n}\epsilon_{\mathrm{im}} L^i J^m(\mathbf{r}')\right] d^2\mathbf{r}',\end{aligned} \tag{81}$$

which at first order in the Lorentz-violating parameters is

$$A_0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi}\int\bigg[\bigg(1+\frac{1}{2}(k_{\rm DE})^{ii}\bigg)\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| + \frac{1}{2}(k_{\rm DE})^{ij}\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_j}{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}\bigg]\rho(\mathbf{r}')d^2\mathbf{r}' - \frac{1}{2\pi}\epsilon_{\rm im}L^i\int \ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|J^m(\mathbf{r}')d^2\mathbf{r}', \quad (82)$$

where $n^{-1}\sim(1-s)$. For a pointlike charge distribution $[J^m(\mathbf{r}')=0]$, $\rho(\mathbf{r}')=q\delta(\mathbf{r}')$, one achieves the scalar potential

$$A_0(\mathbf{r}) = -\frac{q}{2\pi}\bigg\{\bigg[1+\frac{1}{2}(k_{\rm DE})^{ii}\bigg]\ln r + \frac{1}{2}(k_{\rm DE})^{ij}\frac{r_ir_j}{r^2}\bigg\}. \quad (83)$$

This scalar potential differs from the usual planar behavior by the term $(k_{\rm DE})^{ij}r_ir_j/r^2$, which represents a directional factor whose magnitude remains constant with distance. In fact, supposing $r_i = r\cos\theta_i$, $r_j = r\cos\theta_j$, one has $(k_{\rm DE})^{ij}r_ir_j/r^2 = (k_{\rm DE})^{ij}\cos\theta_i\cos\theta_j$. This shows that the Lorentz-violating corrections are unable to modify the asymptotic behavior of the electric field. Hence, the implied electric field,

$$\mathbf{E}^l(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi}\bigg\{\bigg[1+\frac{1}{2}(k_{\rm DE})^{ii}\bigg]\frac{r^l}{r^2} + \frac{1}{r^2}\bigg((k_{\rm DE})^{lj}r_j - \frac{(k_{\rm DE})^{ij}r_ir_j}{r^2}r^l\bigg)\bigg\}, \quad (84)$$

$$\mathbf{E}^l(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi}\bigg\{\bigg[1+\frac{1}{2}(k_{\rm DE})^{ii} - (k_{\rm DE})^{ij}\cos\theta_i\cos\theta_j\bigg]\frac{r^l}{r^2} + \frac{1}{r^2}(k_{\rm DE})^{lj}r_j\bigg\}, \quad (85)$$

decays as $1/r$, as it occurs in the Maxwell theory in $(1+2)$ dimensions. This field has a radial behavior except for the Lorentz-violating contribution $(k_{\rm DE})^{li}r_i$, which constitutes the qualitative difference induced by Lorentz violation.

In this theory, a pointlike charge, $[J^m(\mathbf{r}')=0,\ \rho(\mathbf{r}')=q\delta(\mathbf{r}')]$, yields a non-null magnetic field, that in accordance with Eq. (57), at first order is $B(\mathbf{r}) = (\mathbf{L}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}))$. It then yields

$$B(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi}\frac{\mathbf{L}\cdot\mathbf{r}}{r^2}. \quad (86)$$

This field decays with $1/r$ and does not present radial symmetry. It possesses an angular dependence that reflects the direction of the vector $\mathbf{r}$ in relation to the background vector $\mathbf{L}$. In this case, the modulation factor is $|\mathbf{L}|\cos\beta$, with β being the angle between $\mathbf{r}$ and $\mathbf{L}$.

A stationary current associated with a pointlike charge with uniform velocity $\mathbf{u}$, $\mathbf{J}(\mathbf{r}')=q\mathbf{u}\delta(\mathbf{r}')$, $[\rho(\mathbf{r}')=0]$, yields the scalar potential:

$$A_0(\mathbf{r}) = -\frac{q}{2\pi}(\mathbf{L}\times\mathbf{u})\ln r, \quad (87)$$

whose electric field is

$$E^i(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi}\bigg[(\mathbf{L}\times\mathbf{u})\frac{r^i}{r^2}\bigg]. \quad (88)$$

Once the vector product engenders a scalar in two dimensions, this electric field results aligned with the radial direction, without angular dependence. The scalar $(\mathbf{L}\times\mathbf{u})$ acts as a modulation factor sensitive to the angle between the vectors $\mathbf{L}$, $\mathbf{u}$, which can vary from zero (for $\mathbf{L}//\mathbf{u}$) to the maximum $|\mathbf{L}||\mathbf{u}|$ (for $\mathbf{L}\perp\mathbf{u}$). The magnetic field associated with this current density, $[\mathbf{J}(\mathbf{r}')=q\mathbf{u}\delta(\mathbf{r}')$, $\rho(\mathbf{r}')=0]$, is attained from Eq. (59),

$$B(\mathbf{r}) = -\frac{q}{2\pi}(1-s)\frac{\epsilon_{\rm im}r_iu^m}{r^2} = \frac{q}{2\pi}(1-s)\frac{\mathbf{r}\times\mathbf{u}}{r^2}, \quad (89)$$

where the Lorentz-violating contribution has the same form of Maxwell usual solution.

B. The pure scalar sector

A solution for the scalar field can easily be constructed. At first order, the scalar field evolution is governed by Eq. (39), which in the stationary limit is given by

$$(\nabla^2 + 2C^{ij}\partial_i\partial_j)\phi = J. \quad (90)$$

Green's function for this equation satisfies $[\nabla^2 + 2C^{ij}\partial_i\partial_j]G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, while the solution is written as

$$\phi(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')J(\mathbf{r}')d^2\mathbf{r}'. \quad (91)$$

Following the procedure developed for the scalar field, we obtain

$$\tilde{G}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{\mathbf{p}^2}\bigg[1 - 2C^{ij}\frac{p_ip_j}{\mathbf{p}^2}\bigg], \quad (92)$$

the same structure Green's function for the scalar potential, Eq. (78). So, we attain as Green's function a result very similar to Eq. (76),

$$G(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)}\bigg[(1-C^{ii})\ln R - C^{ij}\frac{R_jR_i}{R^2}\bigg]. \quad (93)$$

The scalar field is given as

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\int\bigg[(1-C^{ii})\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| - C^{ij}\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_j}{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}\bigg]J(\mathbf{r}')d^2\mathbf{r}'. \quad (94)$$

The scalar field generated by a pointlike scalar source, $J(\mathbf{r}')=q\delta(\mathbf{r}')$, is

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi}\bigg[(1-C^{ii})\ln r - C^{ij}\frac{r_ir_j}{r^2}\bigg]. \quad (95)$$

We thus confirm that the scalar field presents a very similar behavior to the one of the scalar potential, given by Eq. (83).

VII. CONCLUSIONS AND REMARKS

In this work, we have performed the dimensional reduction of the *CPT*-even gauge sector of the SME, attaining a planar model enclosing both gauge and scalar sectors, coupled by a third-rank tensor stemming from the dimensional reduction. The symmetries of the planar Lorentz-violating tensors have been scrutinized, and the number of independent components were evaluated. The parity of these components was determined considering the field ϕ as a scalar, but it can also be examined supposing that ϕ behaves as a pseudoscalar (inheriting the behavior of the component $A^{(3)}$). In the sequel, we have taken the coupling tensor as null and examined the equations of motion for the electromagnetic and scalar sectors. These equations were solved by Green's method in the stationary regime.

One parallel should be made with the dimensional reduction of the Maxwell-Carroll-Field-Jackiw electrodynamics in Ref. [16]. In that case, it was obtained a planar model composed of the Maxwell-Chern-Simons electrodynamics, a scalar field and a coupling term, where the Lorentz violation was controlled by a 3-vector background, $v^{\mu} = (v_0, v)$. The stationary classical solutions of this model revealed that the background altered the asymptotic behavior of the fields. Indeed, while the Maxwell-Chern-Simons solutions decay exponentially for $r \to \infty$, the Lorentz-violating solutions exhibited a $1/r$ behavior for $r \to \infty$. In the dimension reduction of the *CPT*-even sector, the presence of Lorentz-violating terms does not alter the long distance profile of the solutions, keeping the asymptotic behavior of the pure Maxwell planar electrodynamics, $1/r$. It is noted, however, that the Lorentz-violating parameters induce an angular dependence in the field solutions. The canonical energy-momentum tensor was carried out, leading to an energy density which is positive definite for small Lorentz-violating parameters.

The dispersion relation of the planar Abelian gauge model was exactly evaluated, revealing that the six Lorentz-violating parameters related to the electromagnetic sector do not yield birefringence. This means that the pure electrodynamics stemming from Lagrangian (31) presents no birefringence at any order. Such effect, however, may be engendered by some components of the coupling tensor $T_{\mu\lambda\kappa}$, as a second order effect. Finally, the group velocity evaluation shows that this planar theory could be endowed with causality illness. A more careful analysis on the physical consistency of this model (stability, causality, unitarity) is under progress. Another point of interest is the investigation of topological defects, such stable vortex configurations, in this theoretical framework.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors are grateful to FAPEMA, CAPES, and CNPq (Brazilian research agencies) for invaluable financial support. We also acknowledge J. A. Helayel-Neto for interesting and useful discussions and the IFT (Instituto de Física Teórica) staff for the kind hospitality during the realization of this work.

[1] D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997); **58**, 116002 (1998); S. R. Coleman and S. L. Glashow, Phys. Rev. D **59**, 116008 (1999); **59**, 116008 (1999).

[2] V. A. Kostelecky and S. Samuel, Phys. Rev. Lett. **63**, 224 (1989); **66**, 1811 (1991); Phys. Rev. D **39**, 683 (1989); **40**, 1886 (1989); V. A. Kostelecky and R. Potting, Nucl. Phys. **B359**, 545 (1991); Phys. Lett. B **381**, 89 (1996); Phys. Rev. D **51**, 3923 (1995).

[3] S. M. Carroll, G. B. Field, and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).

[4] A. P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo, and J. A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **67**, 085021 (2003); A. P. Baeta Scarpelli and J. A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **73**, 105020 (2006).

[5] C. Adam and F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. **B607**, 247 (2001); **B657**, 214 (2003).

[6] A. A. Andrianov and R. Soldati, Phys. Rev. D **51**, 5961 (1995); Phys. Lett. B **435**, 449 (1998); A. A. Andrianov, R. Soldati, and L. Sorbo, Phys. Rev. D **59**, 025002 (1998); A. A. Andrianov, D. Espriu, P. Giacconi, and R. Soldati, J. High Energy Phys. 09 (2009) 057; J. Alfaro, A. A. Andrianov, M. Cambiaso, P. Giacconi, and R. Soldati, Int. J. Mod. Phys. A **25**, 3271 (2010); V. Ch. Zhukovsky, A. E. Lobanov, and E. M. Murchikova, Phys. Rev. D **73**, 065016 (2006).

[7] M. S. Berger and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **65**, 091701 (2002); H. Belich, J. L. Boldo, L. P. Colatto, J. A. Helayel-Neto, and A. L. M. A. Nogueira, Phys. Rev. D **68**, 065030 (2003); A. P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo, L. P. Colatto, J. A. Helayel-Neto, and A. L. M. A. Nogueira, Nucl. Phys. B, Proc. Suppl. **127**, 105 (2004).

[8] R. Jackiw and V. A. Kostelecký, Phys. Rev. Lett. **82**, 3572 (1999); J. M. Chung and B. K. Chung, Phys. Rev. D **63**, 105015 (2001); J. M. Chung, Phys. Rev. D **60**, 127901 (1999); G. Bonneau, Nucl. Phys. **B593**, 398 (2001); M. Perez-Victoria, Phys. Rev. Lett. **83**, 2518 (1999); J. High Energy Phys. 04 (2001) 032; O. A. Battistel and G. Dallabona, Nucl. Phys. **B610**, 316 (2001); J. Phys. G **28**,

L23 (2002); **27**, L53 (2001); A. P. B. Scarpelli, M. Sampaio, M. C. Nemes, and B. Hiller, Phys. Rev. D **64**, 046013 (2001); T. Mariz, J. R. Nascimento, E. Passos, R. F. Ribeiro, and F. A. Brito, J. High Energy Phys. 10 (2005) 019; F. A. Brito, J. R. Nascimento, E. Passos, and A. Petrov, J. High Energy Phys. 06 (2007) 016; B. Altschul, Phys. Rev. D **70**, 101701 (2004); A. P. B. Scarpelli, M. Sampaio, M. C. Nemes, and B. Hiller, Eur. Phys. J. C **56**, 571 (2008); Oswaldo M. Del Cima, J. M. Fonseca, D. H. T. Franco, and O. Piguet, Phys. Lett. B **688**, 258 (2010); T. Mariz, Phys. Rev. D **83**, 045018 (2011).

[9] R. Lehnert and R. Potting, Phys. Rev. Lett. **93**, 110402 (2004); Phys. Rev. D **70**, 125010 (2004); B. Altschul, Phys. Rev. D **75**, 105003 (2007); C. Kaufhold and F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. **B734**, 1 (2006).

[10] A. H. Gomes, J. M. Fonseca, W. A. Moura-Melo, and A. R. Pereira, J. High Energy Phys. 05 (2010) 104.

[11] M. Frank and I. Turan, Phys. Rev. D **74**, 033016 (2006); O. G. Kharlanov and V. Ch. Zhukovsky, Phys. Rev. D **81**, 025015 (2010).

[12] J. M. Fonseca, A. H. Gomes, and W. A. Moura-Melo, Phys. Lett. B **671**, 280 (2009).

[13] R. Casana, M. M. Ferreira, Jr., and J. S. Rodrigues, Phys. Rev. D **78**, 125013 (2008).

[14] J.-Q. Xia, Hong Li, X. Wang, and X. Zhang, Astron. Astrophys. **483**, 715 (2008); J.-Q. Xia, H. Li, and X. Zhang, Phys. Lett. B **687**, 129 (2010); B. Feng, M. Li, J.-Q. Xia, X. Chen, and X. Zhang, Phys. Rev. Lett. **96**, 221302 (2006); P. Cabella, P. Natoli, and J. Silk, Phys. Rev. D **76**, 123014 (2007).

[15] R. Casana, M. M. Ferreira, and C. E. H. Santos, Phys. Rev. D **78**, 105014 (2008).

[16] H. Belich, M. M. Ferreira, Jr., J. A. Helayel-Neto, and M. T. D. Orlando, Phys. Rev. D **67**, 125011 (2003); **69**, 109903(E) (2004).

[17] H. Belich, M. M. Ferreira, Jr., J. A. Helayel-Neto, and M. T. D. Orlando, Phys. Rev. D **68**, 025005 (2003).

[18] H. Belich, M. M. Ferreira, Jr., and J. A. Helayel-Neto, Eur. Phys. J. C **38**, 511 (2005).

[19] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **87**, 251304 (2001).

[20] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D **66**, 056005 (2002).

[21] Q. Exirifard, Phys. Lett. B **699**, 1 (2011).

[22] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **97**, 140401 (2006).

[23] B. Altschul, Nucl. Phys. **B796**, 262 (2008); Phys. Rev. Lett. **98**, 041603 (2007); C. Kaufhold and F. R. Klinkhamer, Phys. Rev. D **76**, 025024 (2007).

[24] F. R. Klinkhamer and M. Risse, Phys. Rev. D **77**, 016002 (2008); **77**, 117901 (2008).

[25] F. R. Klinkhamer and M. Schreck, Phys. Rev. D **78**, 085026 (2008).

[26] V. A. Kostelecky and A. G. M. Pickering, Phys. Rev. Lett. **91**, 031801 (2003); B. Altschul, Phys. Rev. D **70**, 056005 (2004).

[27] C. D. Carone, M. Sher, and M. Vanderhaeghen, Phys. Rev. D **74**, 077901 (2006); B. Altschul, Phys. Rev. D **79**, 016004 (2009).

[28] M. A. Hohensee, R. Lehnert, D. F. Phillips, and R. L. Walsworth, Phys. Rev. D **80**, 036010 (2009); M. A. Hohensee, R. Lehnert, D. F. Phillips, and R. L. Walsworth, Phys. Rev. Lett. **102**, 170402 (2009); B. Altschul, Phys. Rev. D **80**, 091901(R) (2009).

[29] J.-P. Bocquet *et al.*, Phys. Rev. Lett. **104**, 241601 (2010).

[30] M. N. Barreto, D. Bazeia, and R. Menezes, Phys. Rev. D **73**, 065015 (2006); D. Bazeia, M. M. Ferreira, Jr., A. R. Gomes, and R. Menezes, Physica (Amsterdam) **239D**, 942 (2010); A. de Souza Dutra and R. A. C. Correa, Phys. Rev. D **83**, 105007 (2011).

[31] M. A. Anacleto, F. A. Brito, and E. Passos, Phys. Lett. B **694**, 149 (2010); M. A. Anacleto, F. A. Brito, and E. Passos, arXiv:1101.2891.

[32] R. Casana and K. A. T. da Silva, arXiv:1106.5534.

[33] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, Ann. Phys. (N.Y.) **140**, 372 (1982); Gerald V. Dunne, arXiv:hep-th/9902115.

[34] R. Casana, M. M. Ferreira, Jr., A. R. Gomes, and P. R. D. Pinheiro, Phys. Rev. D **80**, 125040 (2009).