



Universidade Federal do Maranhão - UFMA
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia - CCET
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGMAT
Dissertação de Mestrado

Medidas SRB para Atratores Hiperbólicos

PÉRICLES RAFAEL PAVÃO CARVALHO

São Luís - MA

Maio de 2017

Medidas SRB para Atratores Hiperbólicos

PÉRICLES RAFAEL PAVÃO CARVALHO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof^a. Dr^a. Vanessa Ribeiro Ramos.

São Luís-MA

Maio de 2017

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Carvalho, Péricles Rafael Pavão.

Medidas SRB para atratores hiperbólicos / Péricles
Rafael Pavão Carvalho. - 2017.

59 f.

Orientador(a): Vanessa Ribeiro Ramos.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em
Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São
Luís, 2017.

1. Aplicações expansoras. 2. Atratores hiperbólicos.
3. Medidas SRB. I. Ramos, Vanessa Ribeiro. II. Título.

Medidas SRB para Atratores Hiperbólicos

PÉRICLES RAFAEL PAVÃO CARVALHO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 2 de Maio de 2017.

Banca examinadora:

Prof^ª. Dr^ª. Vanessa Ribeiro Ramos (Orientadora)

UFMA

Prof. Dr. Nivaldo Costa Muniz

UFMA

Prof. Dr. Paulo Cesar Rodrigues Pinto Varandas

UFBA

Agradecimentos

Aos meus pais, que fizeram tudo ao seu alcance para me dar o suporte necessário ao longo da minha vida, sempre dando os conselhos corretos e servindo a mim como modelo de caráter.

À minha namorada, Wanessa, por estar sempre ao meu lado, mesmo na distância, me ajudando e me alegrando até nas situações mais difíceis.

Aos meus demais familiares, por todo o carinho.

Ao IMPA e ao PPGMAT, que através do PIC vieram desde cedo despertando minha paixão pela matemática, me dando a oportunidade de participar do PICME, e abrindo assim as portas para o mestrado em matemática.

Em particular, ao professor Nivaldo, que me coordenou durante maior parte do PICME, e me introduziu ao mundo fascinante dos sistemas dinâmicos.

À minha orientadora Vanessa, pela compreensão, pela confiança prestada, e pelo exemplo profissional e pessoal a mim servido.

Aos excelentes professores do departamento de matemática da UFMA: Ivaldo, Marcos, Pedro, Renata, Adecarlos, e todos que contribuíram positivamente no meu aprendizado. Também não posso deixar de citar o professor Paulo Varandas, que aceitou vir de longe para a minha banca, e contribuiu valiosamente com o meu trabalho.

Aos meus colegas do mestrado e a todos que me ajudaram ao longo desse período.

Resumo

Este trabalho inicia-se com a definição de medida SRB, e a apresentação de diversos conceitos da teoria ergódica importantes para o desenvolvimento dos resultados apresentados. É demonstrada a existência e unicidade de medidas SRB para transformações expansoras em variedades compactas e conexas cujo jacobiano é Hölder. Em seguida, apresenta-se a definição de conjuntos hiperbólicos, atratores hiperbólicos e suas respectivas propriedades fundamentais. Como resultado principal, é demonstrada a existência de medidas SRB para atratores hiperbólicos, bem como sua unicidade para o caso de atratores hiperbólicos transitivos, ambos dentro de variedades compactas. Primeiramente, é mostrado que existem medidas invariantes absolutamente contínuas ao longo da folheação instável. Em seguida, verifica-se que a restrição desta medida sob determinados conjuntos possuem a propriedade SRB. Utilizando a transitividade do atrator hiperbólico, mostra-se que existe um único conjunto tal que esta restrição seja uma medida SRB. Conclui-se que o sistema admite uma única medida SRB.

Palavras-chave: Medidas SRB. Aplicações expansoras. Atratores hiperbólicos.

Abstract

This paper begins with the definition of SRB measures, and the introduction of several concepts in ergodic theory necessary for the development of the presented results. We prove the existence and uniqueness of SRB measures for uniformly expanding transformations in compact connected manifolds whose Jacobian is Hölder continuous. Then, we present the definition of hyperbolic sets, hyperbolic attractors and their respective fundamental properties. As a main result, we prove the existence of SRB measures for hyperbolic attractors contained in compact manifolds, and its uniqueness if the hyperbolic attractor is transitive. First, it is shown the existence of invariant measures absolutely continuous along the unstable foliation. Then, we note that the restriction of this measure over certain subsets have the SRB property. Using the transitivity of the hyperbolic attractor, it is shown that there exists a unique subset such that this restriction is an SRB measure. We conclude that the system supports a unique SRB measure.

Keywords: SRB measures. expanding maps. Hyperbolic attractors.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Ramos inversos	19
Figura 2 – Comportamento atrator e repulsor ao redor de um ponto fixo hiperbólico	28
Figura 3 – Ferradura de Smale	29
Figura 4 – Imagem das faixas sob a ferradura de Smale	30
Figura 5 – Folheação instável	33
Figura 6 – Ponto $q = (x, y)$, onde $x \in W_\varepsilon^u(p)$ e $y \in \Sigma_p$	33
Figura 7 – Representação de uma carta folheada	34
Figura 8 – Aplicação de holonomia π de Σ_p^1 em Σ_p^2	35
Figura 9 – Exemplo de construção de classe de acessibilidade	46
Figura 10 – Projecção de $A \cap B_r^u(p_j)$ sobre a folha instável de p	49
Figura 11 – Representação da projecção $\bar{\pi}^s$	50
Figura 12 – Intersecção de $E \cap Z_p \cap \mathcal{R}$ com a classe de acessibilidade A	52

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	PRELIMINARES	12
2.1	Ergodicidade	12
2.2	Tópicos de medida	13
2.3	Medidas SRB	14
3	MEDIDAS SRB PARA APLICAÇÕES EXPANSORAS	18
3.1	Ramos inversos	18
3.2	Lema de distorção	19
3.3	Prova da existência	20
3.4	Ergodicidade e unicidade	22
4	DINÂMICA HIPERBÓLICA	26
4.1	Pontos fixos hiperbólicos	26
4.2	Conjuntos hiperbólicos	28
4.3	Atratores hiperbólicos	30
4.4	Variedades estáveis e instáveis	31
4.5	Cartas folheadas	32
4.6	Aplicações de holonomia local	34
5	MEDIDAS SRB PARA ATRADORES HIPERBÓLICOS	36
5.1	Existência de medidas invariantes absolutamente contínuas	37
5.1.1	Continuidade absoluta ao longo de uma folheação	37
5.1.2	Continuidade absoluta ao longo de \mathcal{F}^u	37
5.1.3	Teorema de existência	38
5.1.4	Lema de distorção	38
5.1.5	Prova da existência	40
5.2	Existência e unicidade da medida SRB	44
5.2.1	Classes de acessibilidade	44

REFERÊNCIAS	56
Índice	57

1 Introdução

A teoria ergódica é o ramo da matemática que associa os conceitos de sistemas dinâmicos com os de teoria da medida. Mais especificamente, trabalha-se com transformações munidas de medidas que são preservadas ao longo do tempo, chamadas de *medidas invariantes*.

O estudo da teoria ergódica foi motivado pelo físico Ludwig Boltzmann, em 1871. Durante sua formulação em fluxos hamiltonianos, Boltzmann precisou assumir que o sistema, quando mantido seu estado natural de movimento, iria em algum momento passar por cada fase que fosse compatível com a equação de energia. Uma consequência disso é o que ficou conhecida como *hipótese ergódica*: o tempo médio em que uma partícula irá passar por um determinado espaço é proporcional ao tamanho do espaço. Ou seja, as médias temporais devem coincidir com as médias espaciais.

Traduzindo para a linguagem matemática atual, podemos dizer que um ponto x cumpre essa hipótese se, para toda função contínua φ , vale:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu \quad (1.1)$$

Onde a parcela esquerda da igualdade representa a média temporal do ponto x sobre a função φ , e a parcela direita representa a média espacial de φ com relação à medida μ . Denominou-se então o sistema como *ergódico* se este atende à expressão 1.1 em μ -quase todo ponto do espaço.

Esta definição, embora matematicamente coerente, em muitos casos não é capaz de representar a ideia física esperada da proposta inicial de Boltzmann, pois a medida μ não necessariamente transmite a noção de volume ao qual estamos acostumados e, portanto, dizer que a hipótese é atendida em μ -quase todo ponto não nos garante que ela é atendida em um conjunto fisicamente relevante. Portanto, é necessário que a expressão 1.1 seja atendida em um conjunto que possua volume real. Este volume real, por sua vez, é representado pela medida de Lebesgue.

Com essa ideia, surge na década de 1970 a noção de *medida física*, introduzida por Sinai, Ruelle e Bowen, e, devido a seus nomes, conhecida atualmente como medida *SRB*. A ideia é que, ao tomarmos um ponto qualquer x do espaço, haja uma probabilidade

não-nula de que este atenda à hipótese ergódica. Dizemos então que a medida μ é SRB se a expressão 1.1 é atendida em um conjunto com medida de Lebesgue positiva.

Desde então, muitos esforços da teoria ergódica foram voltados a determinar a existência de medidas SRB em diversos tipos de sistema. O trabalho de Sinai, Ruelle e Bowen dedicou-se aos difeomorfismo de Anosov, que são casos particulares de conjuntos hiperbólicos, os quais serão apresentados neste trabalho.

No capítulo 2, os conceitos aqui apresentados serão abordados com maior formalidade, e será disponibilizada a base necessária para o entendimento do que será tratado nos capítulos posteriores.

No capítulo 3, será provada a existência e unicidade de medidas SRB para um caso particular de conjunto hiperbólico, onde as transformações são chamadas de expansoras.

No capítulo 4, será introduzida a definição de conjunto hiperbólico e atrator hiperbólico, bem como suas propriedades fundamentais.

Finalmente, no capítulo 5, será demonstrada a existência de medidas SRB para atratores hiperbólicos, e sua unicidade caso este seja transitivo, que é o resultado principal deste trabalho. Verifica-se que a estrutura da demonstração revisita vários elementos utilizados no capítulo 3, mostrando que de fato trata-se de um caso generalizado, embora relativamente mais complexo.

2 Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados que serão utilizados ao longo do texto. Demonstrações podem ser encontradas em [3] e [7].

No que segue, vamos supor que M é uma variedade Riemanniana munida de uma norma $\|\cdot\|$ e $f : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável em M . Dizemos que uma medida μ definida em M é *invariante* para f se:

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E)), \quad \text{para todo conjunto mensurável } E \subset M.$$

2.1 Ergodicidade

Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação mensurável. Dado um conjunto mensurável $E \subset M$, definimos o *tempo de visita médio* de um ponto x em E como:

$$\tau(E, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{X}_E(f^j(x))$$

Onde $\mathcal{X}_E : M \rightarrow \mathbb{R}$ é a *função característica* de E . Isto é:

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E \\ 0, & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

A hipótese ergódica nos pede que o tempo médio de visita seja proporcional ao “tamanho” de E , ou, de forma mais precisa, que exista uma probabilidade μ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{X}_E(f^j(x)) = \mu(E) \tag{2.1}$$

Generalizando a parcela esquerda desta igualdade para qualquer função integrável $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ no lugar de \mathcal{X}_E , obtemos a média temporal da função φ . Antes de introduzirmos este conceito, no entanto, é fundamental nos questionarmos se o limite de fato existe. Birkhoff prova que sim, em μ -quase todo ponto, desde que a probabilidade μ seja invariante para f .

Teorema 2.1 (Teorema ergódico de Birkhoff). Seja μ uma probabilidade invariante para uma aplicação mensurável $f : M \rightarrow M$. Para qualquer função integrável $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, a *média temporal* de φ , definida por:

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$$

Existe em μ -quase todo ponto $x \in M$. Além disso $\tilde{\varphi} : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável satisfazendo:

$$\int \tilde{\varphi} d\mu = \int \varphi d\mu$$

Portanto, a expressão 2.1 faz sentido, e de sua generalização é obtido o conceito de ergodicidade:

Definição 2.2. Seja μ uma probabilidade invariante para f . Dizemos que o sistema (f, μ) é *ergódico*, ou μ é *ergódico* para f , se, para toda função integrável $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, a média temporal $\tilde{\varphi}(x)$ é constante e coincide com a média espacial, isto é:

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu \quad \text{em } \mu\text{-quase todo ponto.}$$

O seguinte teorema nos apresenta algumas formas equivalentes de definir ergodicidade:

Teorema 2.3. Seja μ uma probabilidade invariante para f . Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- a) o sistema (f, μ) é ergódico;
- b) Para toda função integrável $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, a média temporal $\tilde{\varphi} : M \rightarrow \mathbb{R}$ é constante em μ -quase todo ponto;
- c) Se A é um subconjunto invariante para f , isto é, $f^{-1}(A) = A$, temos que $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.

2.2 Tópicos de medida

A seguir são apresentadas algumas medidas recorrentes ao longo texto.

Definição 2.4 (Medida de Lebesgue). Chamaremos de *medida de Lebesgue* a qualquer medida m na σ -álgebra de Borel que é gerada por uma forma de Volume, ou seja, para todo $p \in M$ existe uma forma de volume ω_p em uma vizinhança V_p de p tal que:

$$m(E) = \int_E d\omega_p$$

Para todo conjunto mensurável $E \subset V_p$.

Definição 2.5 (Medida de Dirac). Seja $p \in M$. A *medida de Dirac* em p , denotada por δ_p é definida como:

$$\delta_p(E) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in E \\ 0, & \text{se } p \notin E \end{cases}$$

Definição 2.6 (Medida imagem). Seja μ uma medida qualquer em M . A *medida imagem* de μ por f , denotada por $f_*\mu$, é definida por:

$$f_*\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$$

Para todo conjunto mensurável $E \subset M$.

2.3 Medidas SRB

Definição 2.7. Chama-se *bacia* de μ o conjunto $B(\mu)$ dos pontos $x \in M$ tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} = \mu$$

Onde o limite é tomado na topologia fraca*.

Segue desta definição que a bacia é um conjunto exclusivo de uma medida, no sentido de que cada ponto de M estará contido na bacia de, no máximo, uma única medida. Isto é:

Afirmção 2.8. Se μ e $\bar{\mu}$ são medidas distintas para f , suas bacias não se intersectam.

Demonstração. Suponha que exista $x \in B(\mu) \cap B(\bar{\mu})$. Teríamos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} = \mu \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} = \bar{\mu}$$

Portanto, $\mu = \bar{\mu}$. □

Vamos denotar:

$$\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)}$$

Então, $x \in B(\mu)$ se, e somente se, $\nu_n \rightarrow \mu$ na topologia fraca*. Isto é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi d\nu_n = \int \varphi d\mu \quad \text{para toda função contínua } \varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$$

A parcela esquerda desta expressão pode ser reescrita como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$$

O que nos fornece uma maneira diferente de definir a bacia.

Definição 2.9. Chama-se *bacia* de μ o conjunto $B(\mu)$ dos pontos $x \in M$ tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu \quad \text{para toda função contínua } \varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$$

Segue desta definição que, se μ é ergódica, $\mu(B(\mu)) = 1$. Logo, a ergodicidade de uma medida está diretamente relacionada à medida de sua bacia. No entanto, dizer que a Bacia possui μ -medida total não nos traz grandes informações do ponto de vista físico, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 2.10. Seja $p \in M$, e δ_p a medida de Dirac centrada em p . Suponha que δ_p é ergódica. Logo, $\delta_p(B(\delta_p)) = 1$. Portanto, a única condição necessária para a bacia de δ_p é que ela deve conter p . Trivialmente, isso pode ser atendido com $B(\delta_p) = \{p\}$. Embora do ponto de vista da medida δ_p este conjunto de fato possa ser relevante, do ponto de vista físico ele é desprezível.

Isso mostra que o conceito de ergodicidade, em alguns contextos, não é suficiente para representar a ideia física almejada pela hipótese ergódica. Uma maneira de resolver esse problema é caracterizar as medidas quanto à relevância da sua bacia e, para tal, é introduzida a noção de medida SRB.

Definição 2.11. Seja μ uma probabilidade invariante para f . Dizemos que μ é uma medida *física*, ou *Sinai-Ruelle-Bowen* (SRB) para f se a sua Bacia $B(\mu)$ possui medida de Lebesgue positiva.

Afirmção 2.12. Toda probabilidade invariante, ergódica e absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue é uma medida SRB.

Demonstração. Com efeito, suponha que $m(B(\mu)) = 0$, então por continuidade absoluta teríamos $\mu(B(\mu)) = 0$, contradizendo o fato de μ ser ergódica. \square

Exemplo 2.13. Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma aplicação C^2 tal que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) \neq 0$ e $|f'(x)| < 1$ para todo $x \neq 0$. Seja δ_0 a medida de Dirac centrada no ponto 0. Mostremos que δ_0 é uma medida SRB para f : para todo $\epsilon > 0$, é fácil ver que m -quase todo ponto possui sua órbita atraída para o intervalo $[0, \epsilon)$. Sendo assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{X}_{[0, \epsilon)}(f^j(x)) = 1 \quad \text{para } m\text{-quase todo ponto } x \in [0, 1]$$

Em outras palavras, a média dos iterados de x está se aproximando de zero, de onde podemos afirmar que, para toda função contínua $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) - \varphi(0) \right| < \epsilon \\ \Rightarrow & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \varphi(0) = \int \varphi d\delta_0 \end{aligned}$$

Como queríamos. A partir disso, também é possível deduzir que δ_0 é a única medida SRB de f .

Suponha que M seja compacto. Vamos supor que a aplicação $f : M \rightarrow M$ admita uma medida física μ . Seja m a medida de Lebesgue restrita à bacia $B(\mu)$ e normalizada de forma que se torne uma probabilidade. Partindo da definição de medida SRB, e usando o teorema da convergência dominada temos que, para toda função contínua $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, e m -quase todo ponto $x \in M$:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu \\ \Rightarrow & \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) dm = \int \int \varphi d\mu dm \\ \Rightarrow & \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi d \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j m \right) = \int \varphi d\mu \end{aligned}$$

Isso significa que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j m = \mu \quad \text{na topologia fraca*}.$$

Esse argumento nos sugere que toda medida SRB pode ser obtida pelo limite, ou pelo menos por pontos de acumulação, da sequência formada pela média das medidas

imagem $f_*^j m$. Além disso, o próximo resultado nos mostra que esta medida já apresenta a propriedade fundamental da teoria ergódica.

Teorema 2.14. Todo ponto de acumulação da sequência:

$$\mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j m$$

É uma probabilidade invariante para f .

Logo, o primeiro passo para se determinar a existência de medidas SRB é observar como esta sequência se comporta. Esta será a estratégia adotada ao longo desse texto, tanto para o caso de aplicações expansoras, quanto para atratores hiperbólicos.

3 Medidas SRB para aplicações expansoras

Seja M uma variedade compacta munida de uma norma Riemanniana $\|\cdot\|$ e $f : M \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável.

Definição 3.1. Dizemos que f é *expansora* se existem constantes $C > 0$ e $\sigma > 1$ tais que:

$$\|Df_x^n(v)\| \geq C\sigma^n\|v\| \text{ para todo } x \in M, v \in T_xM, \text{ e } n \geq 1.$$

Trataremos neste capítulo do problema de existência e unicidade de medidas SRB para transformações expansoras. Como referência utilizamos [7]. Nosso objetivo será demonstrar:

Teorema 3.2. Seja $f : M \rightarrow M$ uma transformação diferenciável expansora numa variedade compacta conexa M , e suponha que o jacobiano $x \mapsto \det Df(x)$ é Hölder. Então f admite uma única medida SRB.

3.1 Ramos inversos

Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação expansora C^1 . Como f é um difeomorfismo local, todo ponto $y \in M$ admite um $\rho > 0$ tal que, na bola centrada em y de raio ρ , possa ser admitida uma função inversa C^1 para f que leva y em uma pré-imagem x . Supondo que M é compacto, podemos ainda tomar um ρ independente do ponto y .

Essas aplicações, definidas em bolas de raio ρ , são chamadas de *ramos inversos* de f , e serão denotadas por h . Então, para qualquer elemento x da pré-imagem de y , existe um ramo inverso tal que $h(y) = x$. Além disso, temos que $f \circ h = \text{id}$, e, como f é expansora, segue que, para quaisquer pontos y_1 e y_2 contidos em uma bola de raio ρ , h possui a seguinte propriedade:

$$d(h(y_1), (y_2)) \leq \sigma^{-1}d(y_1, y_2)$$

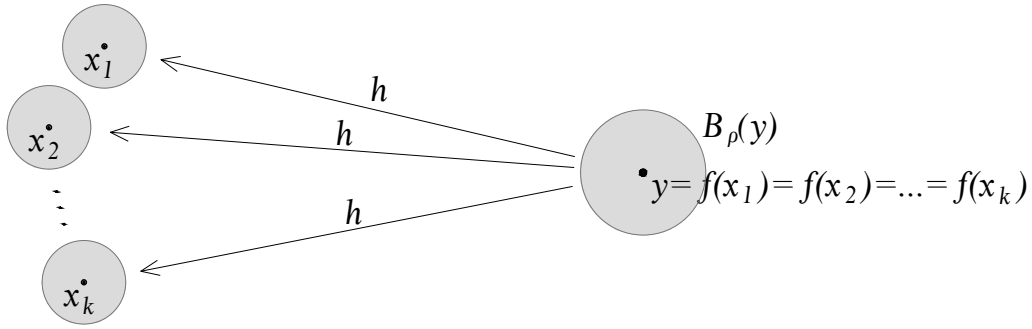


Figura 1 – Ramos inversos

Dado $y \in M$ e $x \in f^{-n}(y)$, sejam h_1, \dots, h_n ramos inversos de f com $h_j(f^{n-j+1}(x)) = f^{n-j}(x)$, para todo $1 \leq j \leq n$, então podemos definir os *ramos inversos* de f^n como: $h^n = h_n \circ \dots \circ h_1$.

3.2 Lema de distorção

Lema 3.3 (Lema de distorção). Seja $y \in M$ e $h^n : B_\rho(y) \rightarrow M$ um ramo inverso qualquer de f^n . Existe $C_1 > 0$ tal que:

$$\frac{1}{C_1} \leq \left| \frac{\det Dh^n(y_1)}{\det Dh^n(y_2)} \right| \leq C_1$$

para todo $y_1, y_2 \in B_\rho(y)$.

Demonstração. Lembramos que $h^n = h_n \circ \dots \circ h_2 \circ h_1$. Logo, pela regra da cadeia:

$$\log |\det Dh^n(y_1)| = \sum_{i=1}^n \log |\det Dh_i(h^{i-1}(y_1))|$$

Note que, por hipótese, $x \mapsto \det Df(x)$ é Hölder. Como f é um difeomorfismo local, segue que $x \mapsto \log |\det Df(x)|$ também é Hölder. O mesmo vale para os ramos inversos h_i no lugar de f . Logo, existem $K, \alpha > 0$ tais que:

$$\log \left| \frac{\det Dh^n(y_1)}{\det Dh^n(y_2)} \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} K d(h^i(y_1), h^i(y_2))^\alpha$$

Como f é expansora, $d(h^i(y_1), h^i(y_2)) \leq \sigma^{-i} d(y_1, y_2) \leq \sigma^{-i} (2\rho)$. Portanto, basta tomar:

$$C_1 = \exp \left(\sum_{i=0}^{\infty} K \sigma^{-i\alpha} (2\rho)^\alpha \right)$$

E a segunda desigualdade está provada. A primeira desigualdade segue invertendo os papéis de y_1 e y_2 . □

Corolário 3.4. Seja $y \in M$. Denote por B a bola de raio ρ centrada em y e seja B_0 um conjunto mensurável contido em B . Existe $C_2 > 0$ tal que:

$$\frac{1}{C_2} \frac{m(B_0)}{m(B)} \leq \frac{m(h^n(B_0))}{m(h^n(B))} \leq C_2 \frac{m(B_0)}{m(B)}$$

Demonstração. Aplicando o teorema da mudança de variáveis, temos:

$$m(h^n(B_0)) = \int_{h^n(B_0)} 1 \, dm = \int_{B_0} |\det Dh^n| \, dm \quad (3.1)$$

Fixando $y_2 \in B$ e tomando $y \in B_0$, temos, pelo lema de distorção:

$$|\det Dh^n(y)| \leq \exp(C_1) |\det Dh^n(y_2)| \quad (3.2)$$

$$|\det Dh^n(y)| \geq \exp(-C_1) |\det Dh^n(y_2)| \quad (3.3)$$

Aplicando 3.2 em 3.1, temos:

$$m(h^n(B_0)) \leq \int_{B_0} \exp(C_1) |\det Dh^n(y_2)| \, dm = \exp(C_1) |\det Dh^n(y_2)| m(B_0)$$

Substituindo B_0 por B em 3.1 e aplicando 3.3:

$$m(h^n(B)) \geq \int_B \exp(-C_1) |\det Dh^n(y_2)| \, dm = \exp(-C_1) |\det Dh^n(y_2)| m(B)$$

Logo:

$$\frac{m(h^n(B_0))}{m(h^n(B))} \leq \frac{\exp(C_1) |\det Dh^n(y_2)| m(B_0)}{\exp(-C_1) |\det Dh^n(y_2)| m(B)} = \exp(2C_1) \frac{m(B_0)}{m(B)}$$

Portanto, basta tomar $C_2 = \exp(2C_1)$, e vale a segunda desigualdade. A primeira desigualdade pode ser demonstrada de maneira análoga. \square

3.3 Prova da existência

Proposição 3.5. Existe $C_3 > 0$ tal que, para todo conjunto mensurável $B_0 \subset M$ e todo $n \geq 1$:

$$(f_*^n m)(B_0) \leq C_3 m(B_0)$$

Demonstração. Suponha inicialmente que $B_0 \subset B$, onde B é a bola de raio ρ centrada em algum ponto $y \in M$. Então:

$$(f_*^n m)(B_0) = m(f^{-n}(B_0)) = \sum_{h^n} m(h^n(B_0))$$

Onde o somatório é feito sobre todos os ramos inversos de f^n em B_0 . Resultado análogo pode ser obtido para B . Analisando a somatória termo a termo, temos que existe um ramo inverso h^n tal que:

$$\frac{m(h^n(B_0))}{m(h^n(B))} \geq \frac{\sum m(h^n(B_0))}{\sum m(h^n(B))} = \frac{(f_*^n m)(B_0)}{(f_*^n m)(B)}$$

Logo, pelo corolário 3.4:

$$\frac{(f_*^n m)(B_0)}{(f_*^n m)(B)} \leq \frac{m(h^n(B_0))}{m(h^n(B))} \leq C_2 \frac{m(B_0)}{m(B)} \Rightarrow (f_*^n m)(B_0) \leq C_2 \frac{(f_*^n m)(B)}{m(B)} m(B_0)$$

Portanto, basta provar que existe uma constante C_3 tal que:

$$C_3 \geq C_2 \frac{(f_*^n m)(B)}{m(B)}$$

Mas $(f_*^n m)(B) \leq (f_*^n m)(M)$ e, como B possui raio fixo ρ , sua m -medida está limitada de zero por uma constante K . Portanto, basta tomar $C_3 \geq C_2 (f_*^n m)(M)/K$, e está provado que vale o resultado para $B_0 \subset B$. Decorre que vale para qualquer $B_0 \subset M$ mensurável, pois este pode ser particionado em vários conjuntos com raio menor que ρ . \square

No que segue, será denotado por μ_n uma subsequência convergente da sequência de medidas $n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j m$ e μ um ponto de acumulação qualquer de μ_n .

Proposição 3.6. A medida μ é invariante e absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue e sua derivada de Radon-Nikodym $d\mu/dm$ é limitada por C_3 .

Demonstração. Do teorema 2.14, segue que μ é invariante. Portanto, resta provar apenas a continuidade absoluta. Seja $B_0 \subset M$ um conjunto mensurável qualquer e, dado $\varepsilon > 0$, seja $K_\varepsilon \subset B_0$ um conjunto compacto tal que:

$$\mu(B_0 \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon \quad \text{e} \quad (C_3 m)(B_0 \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$$

Dado $r > 0$, seja o conjunto $A_\varepsilon^r = \{x \in M; d(x, K_\varepsilon) < r\}$ tal que:

$$\mu(K_\varepsilon \setminus A_\varepsilon^r) < \varepsilon \quad \text{e} \quad (C_3 m)(K_\varepsilon \setminus A_\varepsilon^r) < \varepsilon$$

Seja r_0 um valor limite de r para o qual a hipótese acima seja atendida. É claro que as fronteiras $\{\partial A_\varepsilon^r; 0 < r < r_0\}$ são disjuntas dois a dois, logo, como μ é uma medida finita, o conjunto dos valores de r tal que ∂A_ε^r tenha μ -medida positiva é finito ou enumerável. Portanto, podemos adotar r de forma que $\mu(\partial A_\varepsilon^r) = 0$, ou seja, A_ε^r é um conjunto de continuidade de μ . Daí:

$$\mu(A_\varepsilon^r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A_\varepsilon^r)$$

Mas, pela proposição 3.5, $\mu_n(A_\varepsilon^r) \leq (C_3 m)(A_\varepsilon^r)$. Portanto, $\mu(A_\varepsilon^r) \leq (C_3 m)(A_\varepsilon^r)$. Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, temos que $A_\varepsilon^r \rightarrow B_0$, logo:

$$\mu(B_0) \leq (C_3 m)(B_0)$$

Para todo conjunto $B_0 \subset M$ mensurável, provando a proposição. □

3.4 Ergodicidade e unicidade

Podemos criar uma sequência $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de partições finitas de M de forma que estas atendam às seguintes condições:

- A partição \mathcal{P}_0 é formada por elementos com interior não-vazio, cada um contido em uma bola de raio ρ ;
- Para cada $n \geq 1$, \mathcal{P}_n é formado pelas imagens de cada um dos elementos de \mathcal{P}_0 pelos respectivos ramos inversos de f^n . Portanto, cada elemento de \mathcal{P}_n está contido em uma bola de raio $\sigma^{-n}\rho$.

Lema 3.7. Seja B_0 um conjunto mensurável com medida de Lebesgue positiva. Então existe uma sequência de conjuntos $\bar{P}_n \in \mathcal{P}_n$, com m -medida positiva tais que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(\bar{P}_n \setminus B_0)}{m(\bar{P}_n)} = 0$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno para que exista um conjunto compacto $K_\varepsilon \subset B_0$ tal que $m(B_0 \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$. Seja $\mathcal{P}_n^\varepsilon$ o conjunto de todos os elementos de \mathcal{P}_n que intersectam K_ε . Como o diâmetro de \mathcal{P}_n tende a zero, segue que, para todo $\bar{P}_n \in \mathcal{P}_n^\varepsilon$, $m(\bar{P}_n \setminus K_\varepsilon) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Suponha que, para todo $\bar{P}_n \in \mathcal{P}_n^\varepsilon$, valha:

$$m(K_\varepsilon \cap \bar{P}_n) \leq \frac{m(B_0) - \varepsilon}{m(B_0) + \varepsilon} m(\bar{P}_n) \tag{3.4}$$

Segue que:

$$m(K_\varepsilon) \leq \sum_{\bar{P}_n} m(K_\varepsilon \cap \bar{P}_n) \leq \sum_{\bar{P}_n} \frac{m(B_0) - \varepsilon}{m(B_0) + \varepsilon} m(\bar{P}_n) = \frac{m(B_0) - \varepsilon}{m(B_0) + \varepsilon} m(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$$

Por construção, $m(\mathcal{P}_n^\varepsilon) < m(B_0) + \varepsilon$. Logo:

$$m(K_\varepsilon) \leq m(B_0) - \varepsilon$$

Também por construção, $m(B_0) - \varepsilon < m(K_\varepsilon)$, gerando a contradição $m(K_\varepsilon) < m(K_\varepsilon)$.

Portanto, a expressão 3.4 é inválida. Logo, devem existir $\bar{P}_n \in \mathcal{P}_n^\varepsilon$ tais que:

$$m(K_\varepsilon \cap \bar{P}_n) > \frac{m(B_0) - \varepsilon}{m(B_0) + \varepsilon} m(\bar{P}_n)$$

Logo, para tais elementos:

$$m(\bar{P}_n) > \frac{m(B_0) - \varepsilon}{m(B_0) + \varepsilon} m(\bar{P}_n)$$

O que é válido se, e somente se, $m(\bar{P}_n) > 0$. Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, chegamos à conclusão do lema. \square

Lema 3.8. Seja $A \subset M$ um conjunto invariante tal que $m(A) > 0$. Então existe $P_i \in \mathcal{P}_0$ tal que $m(P_i \setminus A) = 0$.

Demonstração. Seja a sequência $\bar{P}_n \in \mathcal{P}_n$ como no lema 3.7. Como A é invariante, temos que $f^n(\bar{P}_n) \setminus A \subset f^n(\bar{P}_n \setminus A)$, para todo $n \geq 0$. Logo:

$$\frac{m(f^n(\bar{P}_n) \setminus A)}{m(f^n(\bar{P}_n))} \leq \frac{m(f^n(\bar{P}_n \setminus A))}{m(f^n(\bar{P}_n))}$$

Mas, pelo lema de distorção:

$$\frac{m(f^n(\bar{P}_n \setminus A))}{m(f^n(\bar{P}_n))} \leq C_2 \frac{m(\bar{P}_n \setminus A)}{m(\bar{P}_n)}$$

Pelo lema 3.7, a parte direita da expressão acima tende a zero, logo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(f^n(\bar{P}_n) \setminus A)}{m(f^n(\bar{P}_n))} = 0$$

Por definição, cada $f^n(\bar{P}_n)$ é um elemento da partição \mathcal{P}_0 . Como \mathcal{P}_0 possui um número finito de elementos, deve existir um $P_i \in \mathcal{P}_0$ tal que $f^n(\bar{P}_n) = P_i$ para infinitos valores de n . Logo, $m(P_i \setminus A) = 0$. \square

Isso significa que cada conjunto invariante A com $m(A) > 0$ possui medida de Lebesgue total em algum elemento $P_i \in \mathcal{P}_0$. Como existem apenas k elementos em \mathcal{P}_0 , segue que só podem existir no máximo k conjuntos invariantes disjuntos dois a dois com medida de Lebesgue positiva.

Logo, tomando os menores conjuntos invariantes A_i possíveis com medida de Lebesgue positiva, podemos formar uma partição $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_l\}$ de M , com $l \leq k$. Repare que, por tomarmos cada A_i o menor possível, todo conjunto invariante contido em A_i terá medida de Lebesgue nula. Como μ é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue, segue que todo conjunto invariante contido em A_i também terá μ -medida nula e, portanto, a restrição normalizada de μ sobre A_i é uma medida ergódica. Além disso, ela herda a continuidade absoluta de μ .

Corolário 3.9. Seja A um elemento qualquer da partição \mathcal{A} . Então a medida μ_A definida por:

$$\mu_A(E) = \frac{\mu(E \cap A)}{\mu(A)}, \quad \text{para todo conjunto mensurável } E \subset M.$$

é invariante, ergódica e absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue.

Pela afirmação 2.12, μ_A é uma medida SRB, para todo $A \in \mathcal{A}$. Isso prova a existência, mas não a unicidade da medida SRB. Naturalmente, uma condição necessária para isso é que a partição \mathcal{A} tenha apenas um elemento. Este resultado pode ser obtido como consequência do próximo lema.

Lema 3.10. Seja $A \subset M$ um conjunto invariante, e $A^c = M \setminus A$ seu complementar. Então $m(A) = 0$ ou $m(A^c) = 0$.

Demonstração. Suponha que A tenha medida não nula, e seja P_i como no lema 3.8. Denote por P o interior de P_i .

Afirmção 3.11. Existe $k \geq 1$ tal que $f^k(P) = M$.

Demonstração. Como P é aberto, podemos tomar $p \in P$ e $r > 0$ tal que a m -bola de raio r centrada em p está contida em P . Fixado $n \geq 0$, suponha que exista um ponto $x \in M$ tal que $x \notin f^n(P)$. Como M é compacto, podemos tomar uma família de m pontos $\{x = x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m = f^n(p)\}$ tal que:

$$d(x_i, x_{i+1}) \leq \rho, \quad \text{para todo } 1 \leq i < m$$

Aplicando ramos inversos, temos:

$$d(h^n(x_i), h^n(x_{i+1})) \leq \sigma^{-n} d(x_i, x_{i+1}), \quad \text{para todo } 1 \leq i < m$$

Mas:

$$d(h^n(x), p) \leq \sum_{i=1}^{m-1} d(h^n(x_i), h^n(x_{i+1})) \leq \sum_{i=1}^{m-1} \sigma^{-n} d(x_i, x_{i+1}) \leq (m-1)\sigma^{-n}\rho$$

Como $x \notin f^n(P)$, segue que $h^n(x) \notin P$. Logo, $d(h^n(x), p) > r$. O que implica que:

$$r < (m-1)\sigma^{-n}\rho \tag{3.5}$$

Como M é compacto, podemos assumir que o valor de m é limitado. Logo, existe um k tal que, para $n > k$, a inequação 3.5 irá falhar e, portanto, não existirá $x \in M$ tal que $x \notin f^n(P)$. Portanto, $M = f^n(P)$. \square

Seja k como na afirmação 3.11, e tome $n \geq k$. Então:

$$m(A^c) = m(M \setminus A) = m(f^n(P) \setminus f^n(A)) \leq m(f^n(P \setminus A)) \geq m(P \setminus A)$$

Mas segue do lema 3.8 que $m(P \setminus A) = 0$. Logo, $m(A^c) = 0$. \square

Corolário 3.12. A medida μ é invariante, ergódica e absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue.

Demonstração. Já foi provado que μ é invariante e absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue (proposição 3.6), portanto resta provar apenas a ergodicidade.

Seja A um elemento qualquer da partição \mathcal{A} . Como $m(A) > 0$, segue do lema 3.10 que $m(A^c) = 0$, onde A^c é o conjunto complementar de A . Por continuidade absoluta, segue que $\mu(A^c) = 0$. Logo, A possui medida μ total e, portanto, $\mu_A = \mu$. Segue do corolário 3.9 que μ é ergódica. \square

Corolário 3.13. μ é a única medida SRB para f em M .

Demonstração. Pela afirmação 2.12, o corolário 3.12 implica que μ é SRB. Além disso, como a bacia $B(\mu)$ é um conjunto invariante com medida de Lebesgue positiva, segue do lema 3.10 que ela possui medida de Lebesgue total. Suponha que $\bar{\mu}$ seja uma medida SRB diferente de μ . Logo, pela afirmação 2.8, suas bacias não podem se intersectar. Portanto, como $B(\mu)$ tem medida de Lebesgue total, segue que $B(\bar{\mu})$ tem medida de Lebesgue nula, contradizendo o fato de $\bar{\mu}$ ser SRB. \square

4 Dinâmica hiperbólica

No capítulo anterior, definimos espaços munidos de aplicações que, do ponto de vista dinâmico, comportam-se de maneira uniformemente expansora. Neste capítulo, trataremos de um caso um pouco mais geral: os chamados *conjuntos hiperbólicos*, que podem expandir-se apenas em uma determinada direção e, transversalmente a esta, sofrer contração. Veremos que espaços munidos de transformações expansoras são nada mais que um caso particular dos conjuntos hiperbólicos. Os resultados apresentados aqui podem ser encontrados em [1], [5], [6] e [8].

4.1 Pontos fixos hiperbólicos

No que segue, seja M uma variedade Riemanniana munida de uma norma $\|\cdot\|$ e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^1 .

Definição 4.1. Seja $p \in M$ um ponto fixo para f . Dizemos que p é um *ponto fixo hiperbólico* se a sua derivada Df_p não possui autovalor com módulo igual a 1.

A definição acima logo se traduz no significado dinâmico abordado na introdução deste capítulo, como irá mostrar a próxima proposição.

Proposição 4.2. Seja p um ponto fixo hiperbólico, e suponha que todos os autovalores de Df_p tenham módulo menor que 1. Então existem $C > 0$ e $\lambda \in (0, 1)$ tal que:

$$\|Df_p^n(v)\| \leq C\lambda^n\|v\|, \quad \text{para todo } n \geq 0 \text{ e } v \in T_pM.$$

Demonstração. Como todos os autovalores têm módulo menor que 1, existe $k > 0$ tal que $\|Df_p^k\| < 1$. Para qualquer $n \geq 0$, podemos escrever $n = s + rk$, onde $0 \leq s < k$. Portanto:

$$\|Df_p^n\| = \|Df_p^s\| \cdot \|Df_p^k\|^r = \frac{\|Df_p^s\|}{\|Df_p^k\|} \cdot \|Df_p^k\|^{r+1} = \frac{\|Df_p^s\|}{\|Df_p^k\|} \cdot (\|Df_p^k\|^{1/k})^{rk+k} \quad (4.1)$$

Como $k > s$, temos que $rk + k > rk + s = n$. Logo, como $\|Df_p^k\|^{1/k} < 1$:

$$(\|Df_p^k\|^{1/k})^{rk+k} \leq (\|Df_p^k\|^{1/k})^n$$

Aplicando em 4.1:

$$\|Df_p^n\| \leq \frac{\|Df_p^s\|}{\|Df_p^k\|} \cdot (\|Df_p^k\|^{1/k})^n$$

Portanto, basta tomar:

$$C = \frac{\text{máx}\{\|Df_p^s\|; 0 \leq s < k\}}{\|Df_p^k\|} \quad \text{e} \quad \lambda = \|Df_p^k\|^{1/k}$$

E verifica-se o resultado desejado. \square

Conclui-se que autovalores de módulo menor que 1 estão associados à contração. De maneira análoga, pode ser mostrado que autovalores de módulo maior que 1 estão associados à expansão, isto é, se todos os autovalores de Df_p possuem módulo maior que 1, existem $C > 0$ e $\sigma > 1$ tal que, para todo $n \geq 0$ e $v \in T_pM$:

$$\|Df_p^n(v)\| \geq C\sigma^n\|v\| \quad (4.2)$$

O que é nada mais que a definição de aplicação expansora vista no capítulo anterior. De maneira equivalente, uma vez trabalhando-se com a função inversa f^{-n} no lugar de f^n , podemos substituir a constante σ por $\lambda \in (0, 1)$, de forma que a expressão 4.2 pode ser apresentada numa forma similar à da proposição 4.2:

$$\|Df_p^{-n}(v)\| \leq C\lambda^n\|v\| \quad \text{para todo } n \geq 0 \text{ e } v \in T_pM$$

Pela definição 4.1, pontos fixos hiperbólicos podem ter autovalores com módulo menor que 1 ou maior que 1, logo estes caracterizam-se pela possibilidade de ter comportamento atrator e repulsor ao mesmo tempo. Com isso em mente, a definição de hiperbolicidade pode ser vista de outro ângulo:

Corolário 4.3. Um ponto fixo $p \in M$ é hiperbólico se, e somente se, o seu espaço tangente pode ser escrito na forma $T_pM = E^s(p) \oplus E^u(p)$, onde os subespaços $E^s(p)$ e $E^u(p)$ são invariantes pela derivada Df_p , e existem $C > 0$ e $\lambda \in (0, 1)$ tais que:

- a) $\|Df_p^n(v)\| \leq C\lambda^n\|v\| \quad \forall v \in E^s(p), n \geq 0;$
- b) $\|Df_p^{-n}(v)\| \leq C\lambda^{-n}\|v\| \quad \forall v \in E^u(p), n \geq 0.$

O subespaço $E^s(p)$, chamado de *subespaço estável*, associa-se aos autovalores com módulo menor que 1 e, portanto, define a direção cujo comportamento é atrator ao redor de p . Já $E^u(p)$, chamado de *subespaço instável*, associa-se aos autovalores com módulo maior que 1, e define a direção com comportamento repulsor.

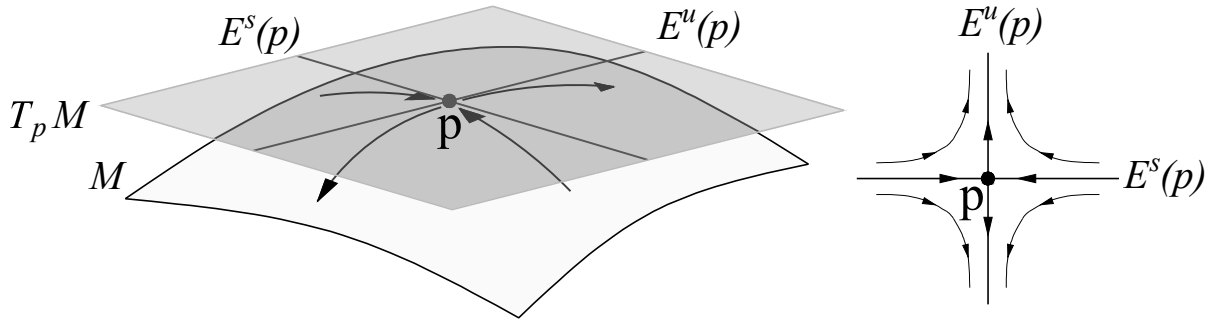


Figura 2 – Comportamento atrator e repulsor ao redor de um ponto fixo hiperbólico

4.2 Conjuntos hiperbólicos

Como de praxe, a definição acima pode ser estendida para conjuntos mais gerais que um ponto. No entanto, será abandonada a forma inicial em que foi definido o conceito de hiperbolicidade, e será aproveitada diretamente a forma equivalente deduzida no corolário 4.3, que usaremos a partir de então nos resultados obtidos.

Definição 4.4. Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto compacto invariante por f . Λ é dito *hiperbólico* se, para cada $x \in \Lambda$, o espaço tangente $T_x M$ pode ser escrito na forma $E^s(x) \oplus E^u(x)$, onde os subespaços $E^s(x)$ e $E^u(x)$ são invariantes pela derivada Df_x , variam continuamente com relação a x , e existem $C > 0$ e $\lambda \in (0, 1)$ tais que:

- a) $\|Df_x^n(v)\| \leq C\lambda^n \|v\| \quad \forall v \in E^s(x), n \geq 0;$
- b) $\|Df_x^{-n}(v)\| \leq C\lambda^{-n} \|v\| \quad \forall v \in E^u(x), n \geq 0.$

A seguir exibimos dois exemplos de conjuntos hiperbólicos; No primeiro deles o conjunto hiperbólico é o espaço ambiente e por este motivo o sistema dinâmico é denominado um *Difeomorfismo de Anosov*. O segundo exemplo descreve a construção de um conjunto hiperbólico não-trivial realizável em qualquer variedade compacta. Este exemplo é devido a Steven Smale e é conhecido por *Ferradura de Smale*.

Exemplo 4.5 (Difeomorfismo de Anosov). Considere o toro bidimensional \mathbb{T}^2 dado pelo quociente $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$. Seja $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o isomorfismo linear definido pela matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sendo inteiros os coeficientes de A e o seu determinante igual a 1 segue que A induz um difeomorfismo do toro $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ tal que $Df(x) = A$, para todo $x \in \mathbb{T}^2$. Como os autovalores de A são $\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$ e $\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$ então os autoespaços E_{λ_1} e E_{λ_2} associados a estes autovalores decompõem o fibrado tangente de \mathbb{T}^2 em subfibrados estável e instável, respectivamente. Portanto, o espaço ambiente \mathbb{T}^2 é um conjunto hiperbólico para o difeomorfismo f .

Observe que este exemplo pode ser construído em um toro n -dimensional: considere $A \in SL(n, \mathbb{Z})$ uma matriz inversível $n \times n$ com coeficientes inteiros e determinante igual a 1. Então A induz um difeomorfismo de Anosov f no toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ se, e somente se, cada autovalor de A tem parte real em módulo diferente de 1.

Exemplo 4.6 (Ferradura de Smale). Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo do plano cuja imagem do quadrado $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ é como na figura abaixo.

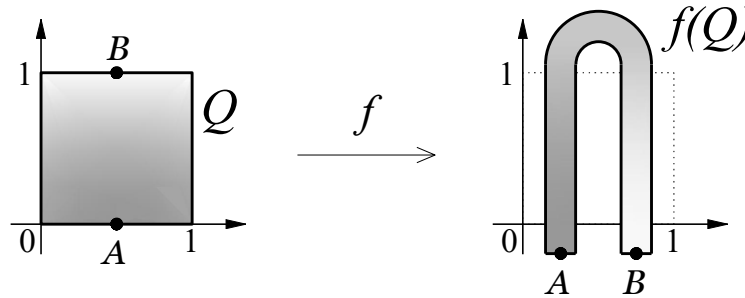


Figura 3 – Ferradura de Smale

Esse difeomorfismo estica verticalmente o quadrado e o contrai horizontalmente formando um retângulo; o qual será dobrado em forma de uma ferradura e reposicionado sobre o quadrado Q .

Sejam $R_1 = [0, 1] \times [5/8, 7/8]$ e $R_2 = [0, 1] \times [1/8, 3/8]$ dois retângulos em Q . Suponha que a restrição do difeomorfismo a cada retângulo seja afim e que a taxa de contração e de expansão seja, respectivamente, menor que $1/4$ e maior que 4. Vamos analisar os iterados futuros de f do quadrado que permanecem no quadrado.

Note que os pontos do complementar $(R_1 \cup R_2)^c$ são enviados pela dinâmica fora de Q . Além disso, cada restrição $f|_{R_1}$ e $f|_{R_2}$ é uma transformação afim. Logo, o conjunto dos pontos que estão no quadrado e permanecem nele pelo primeiro iterado da dinâmica $Q \cap f(Q) = f(R_1) \cup f(R_2)$ são duas faixas verticais como mostra a seguinte figura.

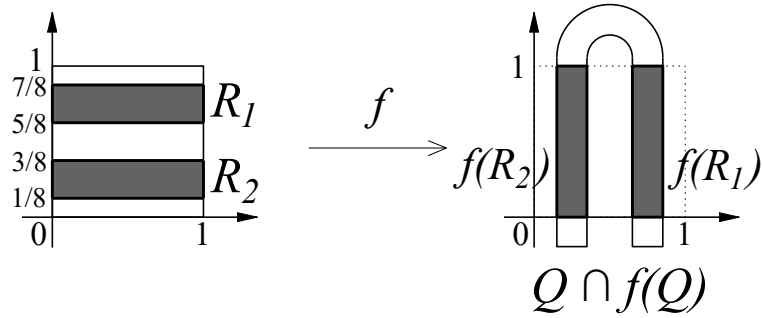


Figura 4 – Imagem das faixas sob a ferradura de Smale

No segundo iterado $Q \cap f(Q) \cap f^2(Q) = f(f(Q) \cap R_1) \cup f(f(Q) \cap R_2)$ teremos quatro faixas verticais e, procedendo indutivamente, teremos no n -ésimo iterado futuro 2^n faixas verticais. Assim podemos concluir que o conjunto dos pontos cuja órbita positiva permanece no quadrado

$$\bigcap_{n \geq 0} f^n(Q) = C_1 \times [0, 1]$$

é formado pelo produto cartesiano entre um conjunto de Cantor C_1 e o intervalo $[0, 1]$. Em outras palavras, é um Cantor de linhas verticais.

De maneira análoga, analisando os iterados do passado da dinâmica em Q , observamos que os pontos com órbita negativa no quadrado

$$\bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(Q) = [0, 1] \times C_2.$$

formam um conjunto de Cantor de linhas horizontais.

Considere agora Λ o conjunto dos pontos cuja órbita positiva e negativa permanece no quadrado:

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(Q).$$

Por definição Λ é compacto e invariante pelo difeomorfismo. Da construção temos que as retas horizontais são uniformemente contraídas e que as retas verticais são uniformemente expandidas, deste modo concluímos que Λ é um conjunto hiperbólico. O sistema dinâmico (f, Λ) é denominado *Ferradura de Smale*.

4.3 Atratores hiperbólicos

Definição 4.7. Um conjunto hiperbólico Λ é chamado de *atrator hiperbólico* para $f : M \rightarrow M$ se existe uma vizinhança aberta U de Λ tal que $\overline{f(U)} \subset U$ e $\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^n(U)$.

Definição 4.8. Dizemos que um atrator hiperbólico Λ é *transitivo* se, dados $p, q \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$, existir um ponto $x \in \Lambda$ e $n \in \mathbb{Z}$ tais que:

$$d(p, x) < \varepsilon \quad \text{e} \quad d(q, f^n(x)) < \varepsilon$$

Isto significa que, para cada par de pontos $p, q \in \Lambda$, existe uma sequência de pontos $x_j \in \Lambda$ e de tempos $n_j \in \mathbb{Z}$ tais que:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = p \quad \text{e} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_j}(x_j) = q$$

4.4 Variedades estáveis e instáveis

Definição 4.9. Dado um ponto $p \in M$, chama-se *variedade estável* de p o conjunto $W^s(p)$ definido por:

$$W^s(p) = \{q \in M; \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(p), f^n(q)) = 0\}$$

Analogamente, a *variedade instável* de p , denotada por $W^u(p)$ é definida por:

$$W^u(p) = \{q \in M; \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^{-n}(p), f^{-n}(q)) = 0\}$$

Afirmção 4.10. Se um ponto q está contido na variedade estável de p , então as médias temporais de p e q coincidem, isto é:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(p)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(q)), \quad \forall \text{ função contínua } \varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$$

Demonstração. Por definição, $q \in W^s(p) \Rightarrow d(f^n(p), f^n(q)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. Logo, por continuidade, $d(\varphi(f^n(p)), \varphi(f^n(q))) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. \square

Este resultado pode ser facilmente estendido para pontos p e q contidos em uma mesma variedade instável, adotando-se as médias temporais de f^{-1} .

Definição 4.11. Dado um ponto $p \in M$ e $\varepsilon > 0$, chama-se ε -*variedade estável local* de p o conjunto $W_\varepsilon^s(p)$ definido por:

$$W_\varepsilon^s(p) = \{q \in W^s(p); d(f^n(p), f^n(q)) \leq \varepsilon, \forall n \geq 0\}$$

Analogamente, a ε -*variedade instável local* de p , denotada por $W_\varepsilon^u(p)$ é definida por:

$$W_\varepsilon^u(p) = \{q \in W^u(p); d(f^{-n}(p), f^{-n}(q)) \leq \varepsilon, \forall n \geq 0\}$$

Nota-se que, a princípio, as definições de variedades estáveis e instáveis, $W^u(p)$ e $W^s(p)$, não estão associadas com o de subespaços estáveis e instáveis, $E^u(p)$ e $E^s(p)$. A relação entre os dois conceitos é obtida pelo resultado que será postulado a seguir.

Teorema 4.12 (Teorema da variedade Estável). Seja Λ um conjunto hiperbólico para um difeomorfismo C^r $f : M \rightarrow M$, e seja um ponto $p \in \Lambda$. Então $W^s(p)$ é uma subvariedade imersa C^r em M , com $T_p W^s(p) = E^s(p)$. Além disso, existe $\varepsilon > 0$ tal que:

- a) $W_\varepsilon^s(p)$ é uma subvariedade imersa C^r em M , com $T_p W_\varepsilon^s(p) = E^s(p)$;
- b) $W^s(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_\varepsilon^s(f^n(p)))$;
- c) $W^s(p)$ varia continuamente com relação a p .

Este último item nos diz que todo ponto $p \in \Lambda$ admite uma vizinhança $V_p \subset \Lambda$ e uma aplicação $\Phi_p : V_p \rightarrow \text{Im}^r(W_\varepsilon^s(p), M)$ contínua, onde $\text{Im}^r(W_\varepsilon^s(p), M)$ é o conjunto das imersões C^r de $W_\varepsilon^s(p)$ em M , com as seguintes propriedades:

- $\Phi_p(p)$ é a inclusão de $W_\varepsilon^s(p)$ em M ;
- Para todo $x \in V_p$, $\Phi_p(x)$ é uma imersão C^r tal que $\Phi_p(x)(W_\varepsilon^s(p)) = W_\varepsilon^s(x)$.

Todos os resultados acima podem ser estendidos de maneira análoga para os conjuntos instáveis $W^u(p)$ e instáveis locais $W_\varepsilon^u(p)$, substituindo-se f por f^{-1} .

4.5 Cartas folheadas

Definição 4.13. Uma *folheação* de um conjunto $\Lambda \subset M$ é uma família de subvariedades imersas C^r de M , disjuntas dois a dois, chamadas de *folhas*, tais que:

- a) Cada folha intersecta Λ ;
- b) Todo ponto $p \in \Lambda$ está contido em alguma folha.

Seja \mathcal{F} uma folheação qualquer, e denote por $\mathcal{F}(p)$ a folha de \mathcal{F} que contém o ponto p . Então, dizemos que \mathcal{F} é *invariante* para f se $f(\mathcal{F}(p)) = \mathcal{F}(f(p))$.

Definição 4.14. Seja Λ um atrator hiperbólico. A *folheação instável* de Λ , denotada por \mathcal{F}^u , é formada pela família das variedades instáveis de pontos em Λ . Analogamente, a *folheação estável*, denotada por \mathcal{F}^s , é formada pela família das variedades estáveis de pontos em Λ .

Teorema 4.15. Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico para um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ C^r . Então a folheação instável \mathcal{F}^u é invariante para f , e suas folhas são subvariedades C^r imersas. Além disso, \mathcal{F}^u é *contínua*, no sentido do teorema 4.12. Isto é, todo ponto $p \in \Lambda$ admite uma vizinhança $V_p \subset \Lambda$ e uma aplicação $\Phi_p : V_p \rightarrow \text{Im}^r(W_\varepsilon^u(p), M)$ contínua, onde $\text{Im}^r(W_\varepsilon^u(p), M)$ é o conjunto das imersões C^r de $W_\varepsilon^u(p)$ em M , com as seguintes propriedades:

- $\Phi_p(p)$ é a inclusão de $W_\varepsilon^u(p)$ em M ;
- Para todo $x \in V_p$, $\Phi_p(x)$ é uma imersão C^r tal que $\Phi_p(x)(W_\varepsilon^u(p)) = W_\varepsilon^u(x)$.

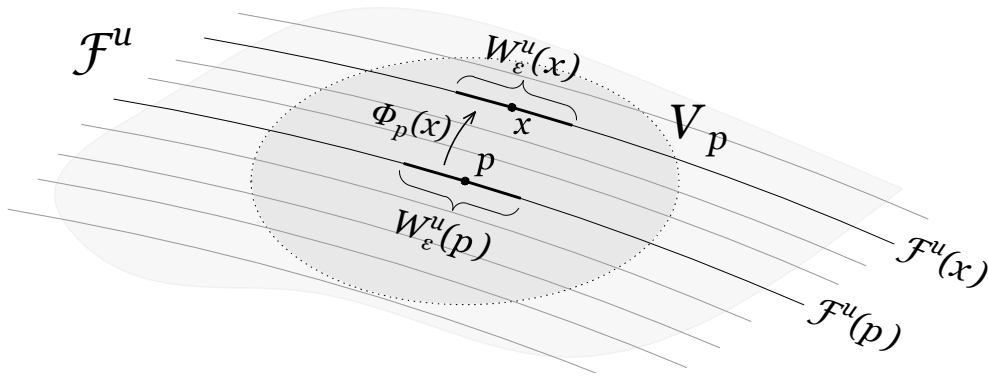


Figura 5 – Folheação instável

Seja $p \in \Lambda$ qualquer, e $W_\varepsilon^u(p)$ sua variedade instável local. Seja Σ_p uma subvariedade de Λ com a mesma dimensão de $E^s(p)$, de forma que Σ_p seja transversal à $W_\varepsilon^u(p)$, isto é:

$$T_p \Sigma_p \oplus E^u(p) = T_p M$$

Podemos tomar Σ_p pequeno o suficiente para que este intersecte cada folha instável em apenas um ponto. Assim, em uma certa vizinhança de p , cada ponto pode ser representado como o produto cartesiano entre um elemento de $W_\varepsilon^u(p)$ e um elemento de Σ_p .

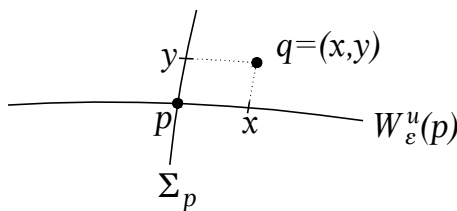


Figura 6 – Ponto $q = (x, y)$, onde $x \in W_\varepsilon^u(p)$ e $y \in \Sigma_p$

Pelo teorema 4.15, p admite uma vizinhança V_p , que será tomada compacta, e uma aplicação $\Phi_p : V_p \rightarrow Im^r(W_\varepsilon^u(p), M)$ onde, para cada $x \in V_p$, $\Phi_p(x)$ é uma imersão levando $W_\varepsilon^u(p)$ em $W_\varepsilon^u(x)$.

Denota-se $W_p = W_\varepsilon^u(p) \cap V_p$ e $S_p = \Sigma_p \cap V_p$ e associa-se a p uma vizinhança compacta formada pelo produto cartesiano $W_p \times S_p$.

Definição 4.16. Seja $p \in \Lambda$. Uma *carta folheada* para a folheação instável \mathcal{F}^u em p é uma aplicação $\phi_p : W_p \times S_p \rightarrow \Lambda$ definida por:

$$\phi_p(x, y) = \Phi_p(y)(x)$$

Denota-se por Z_p a imagem $\phi_p(W_p \times S_p)$.

Lembrando que $\Phi_p(y)$ é uma aplicação que leva $W_\varepsilon^u(p)$ em $W_\varepsilon^u(y)$. Logo, a imagem $\phi_p(x, y)$ de um ponto $(x, y) \in (W_p, S_p)$ irá assumir valores em $W_\varepsilon^u(y)$. Como $\Phi_p(p)$ é a inclusão de $W_\varepsilon^u(p)$ em M , em particular, $\phi_p(x, p) = x$.

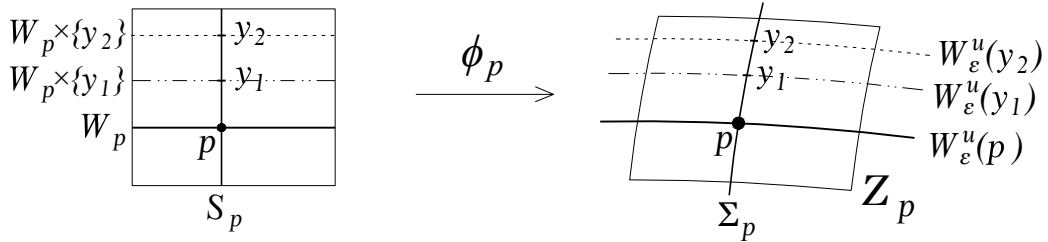


Figura 7 – Representação de uma carta folheada

A definição 4.16 pode ser estendida naturalmente para a folheação estável \mathcal{F}^s . Neste texto, as cartas folheadas de \mathcal{F}^s serão denotadas por $\phi'_p : W'_p \times S'_p \rightarrow Z'_p$, para diferenciar das cartas folheadas de \mathcal{F}^u .

4.6 Aplicações de holonomia local

Sejam Σ_p^1 e Σ_p^2 subvariedades imersas em Z_p transversais a \mathcal{F}^u , com dimensões coincidentes à $E^s(p)$.

Seja o ponto $y_1 \in \Sigma_p^1$ e suponha que a folha instável $\mathcal{F}^u(y_1)$ intersecta Σ_p^2 em um ponto y_2 . Então podemos definir naturalmente uma projeção π que leva y_1 a y_2 .

Definição 4.17. Seja $\tilde{\Sigma}_p^1$ o conjunto dos pontos y de Σ_p^1 tais que $\mathcal{F}^u(y)$ intersecta Σ_p^2 . Então a aplicação $\pi : \tilde{\Sigma}_p^1 \rightarrow \Sigma_p^2$ definida por:

$$\pi(y) = \mathcal{F}^u(y) \cap \Sigma_p^2$$

É chamada *aplicação de holonomia local* de Σ_p^1 em Σ_p^2 .

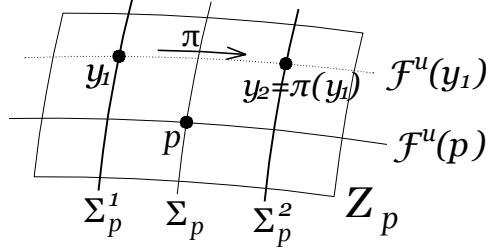


Figura 8 – Aplicação de holonomia π de Σ_p^1 em Σ_p^2

Teorema 4.18. Seja Λ um atrator hiperbólico para um difeomorfismo C^2 . Então:

- a) Existem constantes $K, \alpha > 0$ tais que qualquer aplicação de holonomia local de \mathcal{F}^u é (K, α) -Hölder;
- b) A decomposição $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$ é Hölder.

Teorema 4.19 (Continuidade absoluta de \mathcal{F}^u). Seja Λ um atrator hiperbólico para um difeomorfismo C^2 , \mathcal{F}^u a folheação instável de Λ , e Σ_p^1, Σ_p^2 duas subvariedades imersas transversais à \mathcal{F}^u . Então existe uma constante C_0 tal que, para cada aplicação de holonomia local π de Σ_p^1 em Σ_p^2 :

$$\frac{1}{C_0} m_{\Sigma_p^1}(B) \leq m_{\Sigma_p^2}(\pi(B)) \leq C_0 m_{\Sigma_p^1}(B), \quad \text{para todo conjunto } B \subset \Sigma_p^1 \text{ mensurável.}$$

Onde $m_{\Sigma_p^1}$ e $m_{\Sigma_p^2}$ representam a medida de Lebesgue restrita a Σ_p^1 e Σ_p^2 , respectivamente.

Demonstrações podem ser encontradas em [2]

5 Medidas SRB para atratores hiperbólicos

Como resultado principal deste trabalho, será demonstrada a existência e unicidade de medidas SRB para atratores hiperbólicos transitivos quando a transformação f é um difeomorfismo de classe C^2 . Para tal, utiliza-se a mesma abordagem do capítulo 3: Parte-se de uma sequência de medidas μ_n cujo ponto de acumulação μ sabe-se ser invariante para f , e um possível candidato a medida SRB. Demonstra-se então que μ é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue, porém, desta vez não é utilizado o sentido usual de continuidade absoluta, mas sim o de continuidade absoluta ao longo de uma folheação, definido na seção 5.1. Neste contexto, demonstra-se que a medida μ é absolutamente contínua ao longo da folheação instável do atrator hiperbólico.

Em seguida, o atrator hiperbólico é decomposto em classes de equivalência, denominadas classes de acessibilidade, e mostra-se que a medida μ restrita a certas classes é ergódica. As medidas definidas por essa restrição são, então, invariantes, ergódicas e absolutamente contínuas com relação à medida de Lebesgue (ao longo da folheação instável). Portanto, utilizando um argumento análogo ao da afirmação 2.12, demonstra-se que elas são SRB.

Por fim, decorre da transitividade que existe uma única classe de acessibilidade com medida μ positiva e, portanto, μ é ergódica e SRB. Além disso, a bacia de qualquer outra medida SRB deverá conter a bacia de μ , mostrando portanto sua unicidade.

Este resultado foi demonstrado inicialmente em 1972, por Sinai, para o caso específico em que o atrator hiperbólico é um difeomorfismo de Anosov ([9]). Em 1975, Ruelle e Bowen demonstraram para o caso geral de atratores hiperbólicos ([4]). O processo, que foi descrito resumidamente acima, será mostrado com mais detalhes nas seções subsequentes, e seguirá Viana ([8]) como principal referência. O teorema principal enuncia-se formalmente como segue:

Teorema 5.1. Seja $\Lambda \subset M$ um atrator hiperbólico transitivo para um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ de classe C^2 . Então f admite uma única medida SRB em Λ .

5.1 Existência de medidas invariantes absolutamente contínuas

5.1.1 Continuidade absoluta ao longo de uma folheação

Considere M o espaço dado pelo produto cartesiano de dois espaços métricos compactos W e S . Seja μ uma medida qualquer definida em M , e ν uma medida de probabilidade definida em W .

Seja a medida μ_ν definida em M como:

$$\mu_\nu(W_0 \times S_0) = \mu(W \times S_0) \cdot \nu(W_0), \quad \text{para todos } W_0 \subset W \text{ e } S_0 \subset S \text{ mensuráveis.}$$

E seja \mathcal{F} a folheação horizontal sobre M definida por:

$$\mathcal{F} = \{W \times \{p\}; p \in S\}$$

Definição 5.2. Dizemos que μ é *absolutamente contínua* com relação a ν ao longo de \mathcal{F} se esta é absolutamente contínua com relação a μ_ν .

Pelo teorema de Radon-Nikodým, a definição acima diz que existe uma função mensurável f definida em M tal que:

$$\mu(E) = \int_E f d\mu_\nu, \quad \text{para todo conjunto mensurável } E \subset M.$$

Isto é, μ é absolutamente contínua com relação a ν ao longo de \mathcal{F} se, e somente se, existe uma função mensurável f definida em M tal que:

$$\mu(E) = \int_E f(x, y) d\nu(x) \hat{\mu}(y), \quad \text{para todo conjunto mensurável } E \subset M.$$

Onde $\hat{\mu}$ é a medida em S definida por:

$$\hat{\mu}(S_0) = \mu(W \times S_0), \quad \text{para todo conjunto mensurável } S_0 \subset P$$

5.1.2 Continuidade absoluta ao longo de \mathcal{F}^u

Utilizando a noção abstrata introduzida no item anterior, será definida a noção de continuidade absoluta ao longo da folheação instável de um atrator hiperbólico.

No que segue, seja Λ um atrator hiperbólico, \mathcal{F}^u sua folheação instável e μ uma medida definida em Λ .

Para um ponto $p \in \Lambda$ qualquer, tome uma carta folheada $\phi_p : W_p \times S_p \rightarrow Z_p$ para \mathcal{F}^u em p . Sobre o conjunto $W_p \times S_p$, definimos a folheação:

$$\mathcal{F}_p^u = \{W_p \times \{y\}; y \in S_p\}$$

Definição 5.3. Dizemos que μ é *absolutamente contínua* ao longo de \mathcal{F}^u se, para todo $p \in \Lambda$, existe uma carta folheada $\phi_p : W_p \times S_p \rightarrow Z_p$ para \mathcal{F}^u em p tal que a medida imagem $\phi_p^* \mu$ é absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue ao longo de \mathcal{F}_p^u .

Onde a medida imagem $\phi_p^* \mu$ é definida em $W_p \times S_p$ por:

$$\phi_p^* \mu(E) = \mu(\phi_p(E)), \text{ para todo } E \subset W_p \times S_p \text{ mensurável.}$$

5.1.3 Teorema de existência

O teorema enunciado a seguir carrega a primeira parte do resultado principal deste capítulo, mostrando a existência de medidas invariantes absolutamente contínuas ao longo de \mathcal{F}^u para conjuntos hiperbólicos. Sua demonstração será feita nos itens posteriores desta seção.

Teorema 5.4. Seja m_U a medida de Lebesgue induzida em um subconjunto compacto U de alguma folha de \mathcal{F}^u . Então todo ponto de acumulação (na topologia fraca*) da sequência

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j m_U$$

é uma medida invariante e absolutamente contínua ao longo de \mathcal{F}^u .

5.1.4 Lema de distorção

Os lemas apresentados a seguir têm como objetivo fazer uma importante caracterização do comportamento distorcional da sequência de medidas $f_*^j m_U$.

No que segue, denotaremos por m^u a medida de Lebesgue restrita a cada uma das folhas de \mathcal{F}^u . Assim, quando se falar sobre a medida de Lebesgue de um conjunto contido em uma folha instável, entende-se pela medida m^u deste conjunto. Portanto, a medida m_U definida anteriormente é uma restrição de m^u ao subconjunto compacto U contido na respectiva folha instável.

Definição 5.5. A distância $d^u(x, y)$ entre dois pontos x, y de uma mesma folha instável é dada pelo comprimento da curva C^1 por partes na folha ligando x a y .

Denota-se por $B_r^u(p)$ a d^u -bola de raio r centrada em p , ou seja, o conjunto formado pelos pontos q cuja distância $d^u(p, q)$ é menor que r . Além disso, $B_r(p)$ é a m -bola de raio r centrada em p , onde m denota a medida de Lebesgue.

Lema 5.6 (Lema de distorção). Dado $a > 0$, existe $C_3 > 0$ tal que:

$$\left| \frac{\det(Df^{-j}(y_1)|E^u(y_1))}{\det(Df^{-j}(y_2)|E^u(y_2))} \right| \leq C_3$$

para todo $j \geq 1$ e qualquer $y_1, y_2 \in \Lambda$ tais que $d^u(y_1, y_2) \leq a$.

Demonstração. A prova é análoga à do lema de distorção para o caso de transformações expansoras. Escrevemos, pela regra da cadeia:

$$\log |\det(Df^{-j}(x)|E^u(x))| = \sum_{i=1}^j \log |\det(Df^{-i}(f^{-i+1}(x))|E^u(f^{-i+1}(x)))| \quad (5.1)$$

Pelo teorema 4.18, a aplicação $x \mapsto \log |\det(Df^{-i}(x)|E^u(x))|$ é (K, α) -Hölder, para algum $0 < \alpha \leq 1$. Logo, decorre da equação 5.1 que:

$$\log \left| \frac{\det(Df^{-j}(y_1)|E^u(y_1))}{\det(Df^{-j}(y_2)|E^u(y_2))} \right| \leq \sum_{i=0}^{j-1} K d^u(f^{-i}(y_1), f^{-i}(y_2))^\alpha \quad (5.2)$$

Como a derivada Df é uniformemente expansiva ao longo de E^u , existe uma constante $C > 0$ e $\lambda \in (0, 1)$ tais que:

$$d^u(f^{-i}(y_1), f^{-i}(y_2)) \leq C \lambda^i d^u(y_1, y_2) \quad (5.3)$$

Aplicando 5.3 em 5.2 temos, portanto:

$$\log \left| \frac{\det(Df^{-j}(y_1)|E^u(y_1))}{\det(Df^{-j}(y_2)|E^u(y_2))} \right| \leq \sum_{i=0}^{j-1} K (C \lambda^i d^u(y_1, y_2))^\alpha$$

Mas, por hipótese, $d^u(y_1, y_2) \leq a$. Logo, basta tomar:

$$C_3 = \sum_{i=0}^{\infty} K (C \lambda^i a)^\alpha$$

Como $0 < \lambda < 1$, o valor de C_3 definido acima é finito, e atende à expressão desejada. \square

Corolário 5.7. Dado $a > 0$, existe $C_2 > 0$ tal que:

$$\frac{1}{C_2} \frac{m_{f^j(U)}(B_0)}{m_{f^j(U)}(B)} \leq \frac{f_*^j m_U(B_0)}{f_*^j m_U(B)} \leq C_2 \frac{m_{f^j(U)}(B_0)}{m_{f^j(U)}(B)}$$

Para todo domínio B de $f^n(U)$ contido em uma bola de d^u -raio a , todo conjunto mensurável $B_0 \subset B$, e $j \geq 1$.

Demonstração. Observe que:

$$f_*^j m_U(B_0) = m_U(f^{-j}(B_0)) = \int_{f^{-j}(B_0)} 1 \, dm_U$$

Aplicando o teorema da mudança de variáveis, temos:

$$f_*^j m_U(B_0) = \int_{B_0} |\det(Df^{-j}|E^u)| \, dm_{f^j(U)} \quad (5.4)$$

Fixando $y_2 \in B$ e tomando $y \in B_0$, temos, pelo lema de distorção:

$$|\det Df^{-j}|E^u(y)| \leq \exp(C_3) |\det Df^{-j}|E^u(y_2)| \quad (5.5)$$

$$|\det Df^{-j}|E^u(y)| \geq \exp(-C_3) |\det Df^{-j}|E^u(y_2)| \quad (5.6)$$

Aplicando 5.5 em 5.4, temos:

$$\begin{aligned} f_*^j m_U(B_0) &\leq \int_{B_0} \exp(C_3) |\det Df^{-j}|E^u(y_2)| \, dm_{f^j(U)} = \\ &\exp(C_3) |\det Df^{-j}|E^u(y_2)| m_{f^j(U)}(B_0) \end{aligned}$$

Substituindo B_0 por B em 5.4 e aplicando 5.6:

$$\begin{aligned} f_*^j m_U(B) &\geq \int_B \exp(-C_3) |\det Df^{-j}|E^u(y_2)| \, dm_{f^j(U)} = \\ &\exp(-C_3) |\det Df^{-j}|E^u(y_2)| m_{f^j(U)}(B) \end{aligned}$$

Logo:

$$\frac{f_*^j m_U(B_0)}{f_*^j m_U(B)} \leq \frac{\exp(C_3) |\det Df^{-j}|E^u(y_2)| m_{f^j(U)}(B_0)}{\exp(-C_3) |\det Df^{-j}|E^u(y_2)| m_{f^j(U)}(B)} = \exp(2C_3) \frac{m_{f^j(U)}(B_0)}{m_{f^j(U)}(B)}$$

Portanto, basta tomar $C_2 = \exp(2C_3)$, e vale a segunda desigualdade. A primeira desigualdade pode ser demonstrada de maneira análoga. \square

5.1.5 Prova da existência

Seja μ_n uma subsequência convergente de $n^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j m_U$, e μ o respectivo ponto de acumulação. Seja $\phi_p : W_p \times S_p \rightarrow Z_p$ uma carta folheada escolhida de forma que a fronteira de Z_p tenha medida μ nula.

A fim de provar o teorema 5.4, vamos provar, portanto, que $\phi_p^* \mu$ é absolutamente contínua ao longo de \mathcal{F}_p^u .

Seja γ um componente conexo de $f^j(U) \cap Z_p$. Dizemos que γ cruza Z_p se existir $y \in S_p$ tal que γ possa ser escrito como $\phi_p(W_p \times \{y\})$.

Sejam γ_i^c os componentes de $f^j(U) \cap Z_p$ que cruzam Z_p , e γ_i^{nc} os componentes que não cruzam. Denota-se:

$$\Gamma_j^c = \bigcup_i \gamma_i^c \quad \text{e} \quad \Gamma_j^{nc} = \bigcup_i \gamma_i^{nc}$$

Isto é, a medida $f_*^j m_U$ em Z_p pode ser decomposta em duas parcelas: uma restrita ao conjunto Γ_j^c , e outra restrita ao conjunto Γ_j^{nc} . Assim, podemos definir:

$$\mu_n^c = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j m_U|_{\Gamma_j^c} \quad \text{e} \quad \mu_n^{nc} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j m_U|_{\Gamma_j^{nc}}$$

E, portanto, a restrição de μ_n a Z_p pode ser escrita como:

$$\mu_n|_{Z_p} = \mu_n^c + \mu_n^{nc}$$

Lema 5.8. A sequência de medidas $\phi_p^* \mu_n^c$ converge para $\phi_p^* \mu$ na topologia fraca*.

Demonstração. Seja B um conjunto mensurável de $W_p \times S_p$ que é um conjunto de continuidade de $\phi_p^* \mu$, isto é, sua fronteira ∂B possui medida $\phi_p^* \mu$ nula. Temos que $\partial \phi_p(B) \subset \partial Z_p \cup \phi_p(\partial B)$. Isso implica que $\mu(\partial \phi_p(B)) \leq \mu(\partial Z_p) + \mu(\phi_p(\partial B))$. Nossa hipótese para escolha da carta folheada garante que $\mu(\partial Z_p) = 0$, e, por B ser um conjunto de continuidade de $\phi_p^* \mu$, temos que $\mu(\phi_p(\partial B)) = 0$. Logo, $\mu(\partial \phi_p(B)) = 0$. Portanto, $\phi_p(B)$ é um conjunto de continuidade de μ . Logo, $\mu_n(\phi_p(B)) \rightarrow \mu(\phi_p(B))$ quando $n \rightarrow \infty$. Decompondo μ_n , temos:

$$\mu(\phi_p(B)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^c(\phi_p(B)) + \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^{nc}(\phi_p(B)) \quad (5.7)$$

Afirmção 5.9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^{nc}(Z_p) = 0$

Demonstração. Por definição, Γ_j^{nc} está contido em $\phi_p(W_p \times \{y\})$, para algum $y \in S_p$. No entanto, como Γ_j^{nc} não cruza Z_p , essa inclusão é restrita e, portanto, existe p_j em $\phi_p(W_p \times \{y\})$ tal que $p_j \in \partial f^j(U)$. Logo, existe δ_j tal que $\Gamma_j^{nc} \subset B_{\delta_j}^u(p_j)$.

Como a derivada Df é uniformemente expansiva ao longo de E^u , a medida d^u possui a seguinte propriedade, válida para quaisquer x e y em uma mesma folha instável, e qualquer $j \geq 1$:

$$d^u(f^{-j}(x), f^{-j}(y)) \leq C \lambda^j d^u(x, y)$$

Assim, podemos afirmar que:

$$f^{-j}(\Gamma_j^{nc}) \subset f^{-j}(B_{\delta_j}^u(p_j)) \subset B_{\delta_0}^u(p_0)$$

Onde $\delta_0 = C\lambda^j\delta_j$ e $p_0 \in \partial U$. Daí, temos que:

$$f_*^j m_U(\Gamma_j^{nc}) = m_U(f^{-j}(\Gamma_j^{nc})) \leq m_U(B_{\delta_0}^u(p_0))$$

Como $\lambda < 1$, temos que $\delta_0 = C\lambda^j\delta_j \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$. Assim, $B_{\delta_0}^u(p_0) \rightarrow p_0$ e, portanto, $m_U(B_{\delta_0}^u(p_0)) \rightarrow m_U(\partial U) = 0$. Assim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^{nc}(Z_p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j m_U(\Gamma_j^{nc}) = 0$$

□

Dando prosseguimento à demonstração do lema 5.8, utilizando a afirmação 5.9, a equação 5.7 resume-se a:

$$\mu(\phi_p(B)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^c(\phi_p(B)) \Rightarrow \phi_p^* \mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_p^* \mu_n^c(B)$$

Como isso vale para qualquer conjunto de continuidade B , segue que $\phi_p^* \mu_n^c$ converge para $\phi_p^* \mu$ na topologia fraca*. □

Lema 5.10. Existe $C_1 > 1$ tal que, para qualquer $p \in \Lambda$, e quaisquer conjuntos mensuráveis $W_0 \subset W_p$ e $S_0 \subset S_p$:

$$\frac{\phi_p^* \mu_j^c(W_0 \times S_0)}{\phi_p^* \mu_j^c(W_p \times S_0)} \leq C_1 \frac{m^u(W_0)}{m^u(W_p)}$$

Demonstração. Podemos escrever:

$$\phi_p^* \mu_j^c(W_0 \times S_0) = \mu_j^c(\phi_p(W_0 \times S_0)) = \sum_{\gamma} \mu_j(\phi_p(W_0 \times S_0) \cap \gamma)$$

Onde o somatório é feito sobre os componentes γ de $f^i(U) \cap Z_p$ que cruzam Z_p e intersectam $\phi_p(W_0 \times S_0)$. Como $\mu_j = j^{-1} \sum_{i=0}^{j-1} f_*^i m_U$, temos que:

$$\phi_p^* \mu_j^c(W_0 \times S_0) = \frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{\gamma} f_*^i m_U(\phi_p(W_0 \times S_0) \cap \gamma) \quad (5.8)$$

Substituindo W_0 por W_p , temos:

$$\phi_p^* \mu_j^c(W_p \times S_0) = \frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{\gamma} f_*^i m_U(\phi_p(W_p \times S_0) \cap \gamma) \quad (5.9)$$

Como γ cruza Z_p , existe $y \in S_p$ tal que $\gamma = \phi_p(W_p \times \{y\})$. Então γ intersecta $\phi_p(W_0 \times S_0)$ se, e somente se, $y \in S_0$. Neste caso:

$$\phi_p(W_p \times S_0) \cap \gamma = \phi_p(W_p \times S_0) \cap \phi_p(W_p \times \{y\}) = \phi_p(W_p \times \{y\}) = \gamma$$

Substituindo este resultado na equação 5.9, temos:

$$\phi_p^* \mu_j^c(W_p \times S_0) = \frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{\gamma} f_*^i m_U(\gamma) \quad (5.10)$$

Portanto, das equações 5.8 e 5.10:

$$\frac{\phi_p^* \mu_j^c(W_0 \times S_0)}{\phi_p^* \mu_j^c(W_p \times S_0)} = \frac{\sum_{i=0}^{j-1} \sum_{\gamma} f_*^i m_U(\phi_p(W_0 \times S_0) \cap \gamma)}{\sum_{i=0}^{j-1} \sum_{\gamma} f_*^i m_U(\gamma)}$$

Logo, para provarmos o lema, precisamos verificar que existe $C_1 > 0$ tal que:

$$\frac{\sum_{i=0}^{j-1} \sum_{\gamma} f_*^i m_U(\phi_p(W_0 \times S_0) \cap \gamma)}{\sum_{i=0}^{j-1} \sum_{\gamma} f_*^i m_U(\gamma)} \leq C_1 \frac{m^u(W_0)}{m^u(W_p)}$$

Analisando os somatórios termo a termo, verifica-se que é suficiente mostrar que, para cada γ de $f^i(U) \cap Z_p$ que cruza Z_p e intersecta $\phi_p(W_0 \times S_0)$, vale:

$$\frac{f_*^i m_U(\phi_p(W_0 \times S_0) \cap \gamma)}{f_*^i m_U(\gamma)} \leq C_1 \frac{m^u(W_0)}{m^u(W_p)} \quad (5.11)$$

De fato, como $\gamma = \phi_p(W_p \times \{y\})$, este intersecta $\phi_p(W_0 \times S_0)$ se, e somente se, $y \in S_0$.

Neste caso:

$$\phi_p(W_0 \times S_0) \cap \gamma = \phi_p(W_0 \times \{y\})$$

Logo:

$$\frac{f_*^i m_U(\phi_p(W_0 \times S_0) \cap \gamma)}{f_*^i m_U(\gamma)} = \frac{f_*^i m_U(\phi_p(W_0 \times \{y\}))}{f_*^i m_U(\phi_p(W_p \times \{y\}))}$$

Mas, pelo corolário 5.7, existe $C_2 > 0$ tal que:

$$\frac{f_*^i m_U(\phi_p(W_0 \times \{y\}))}{f_*^i m_U(\phi_p(W_p \times \{y\}))} \leq C_2 \frac{m_{f^i(U)}(\phi_p(W_0 \times \{y\}))}{m_{f^i(U)}(\phi_p(W_p \times \{y\}))}$$

Denote por $\phi_{p,y} : W_p \times \{y\} \rightarrow \gamma$ a restrição $\phi_p|_{W_p \times \{y\}}$. É fácil ver que $\phi_{p,y}$ é um difeomorfismo, logo, pelo teorema da mudança de variáveis:

$$m_{f^i(U)}(\phi_p(W_0 \times \{y\})) = \int_{\phi_p(W_0 \times \{y\})} 1 dm_{f^i(U)} = \int_{W_0} |\det D\phi_{p,y}| dm^u$$

E assim, pelo teorema do valor médio, existe $x_1 \in W_0$ tal que:

$$m_{f^i(U)}(\phi_p(W_0 \times \{y\})) = \int_{W_0} |\det D\phi_{p,y}(x_1, y)| dm^u = |\det D\phi_{p,y}(x_1, y)| m^u(W_0)$$

Isso vale de maneira análoga para W_p no lugar de A , com um ponto $x_2 \in W_p$ no lugar de x_1 . Logo, existem $x_1, x_2 \in W_p$ tais que:

$$\frac{f_*^i m_U(\phi_p(W_0 \times S_0) \cap \gamma)}{f_*^i m_U(\gamma)} \leq C_2 \frac{m_{f^i(U)}(\phi_p(W_0 \times \{y\}))}{m_{f^i(U)}(\phi_p(W_p \times \{y\}))} = C_2 \frac{|\det D\phi_{p,y}(x_1, y)| m^u(W_0)}{|\det D\phi_{p,y}(x_2, y)| m^u(W_p)}$$

Fica claro então que devemos adotar C_1 tal que:

$$C_1 \geq C_2 \frac{|\det D\phi_{p,y}(x_1, y)|}{|\det D\phi_{p,y}(x_2, y)|}$$

E vale a desigualdade 5.11. Além disso, como $\phi_{p,y}$ varia continuamente com relação a y , é fácil notar que C_1 não depende de y . Por compacidade, C_1 também não depende de p , logo este pode ser tomado constante dependendo apenas de f , provando assim o lema. \square

Corolário 5.11. A medida imagem $\phi_p^*\mu$ é absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue ao longo de \mathcal{F}_p^u , ou seja, μ é absolutamente contínua ao longo de \mathcal{F}^u .

Demonstração. Pela definição 5.2, devemos provar que $\phi_p^*\mu$ é absolutamente contínua com relação a $(\phi_p^*\mu)_m$, onde a medida $(\phi_p^*\mu)_m$ é definida da seguinte forma:

$$(\phi_p^*\mu)_m(W_0 \times S_0) = \phi_p^*\mu(W_p \times S_0) \cdot \frac{m^u(W_0)}{m^u(W_p)}$$

Para quaisquer $W_0 \subset W_p$ e $S_0 \subset S_p$ mensuráveis. Considerando que $W_0 \times S_0$ é um aberto de $W_p \times S_p$, temos, pelo lema 5.8:

$$\phi_p^*\mu(W_0 \times S_0) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \phi_p^*\mu_j^c(W_0 \times S_0)$$

Aplicando a segunda desigualdade do lema 5.10:

$$\phi_p^*\mu(W_0 \times S_0) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} C_1 \cdot \phi_p^*\mu_j^c(W_p \times S_0) \cdot \frac{m^u(W_0)}{m^u(W_p)}$$

Considerando que S_0 seja um conjunto de continuidade de $\phi_p^*\mu_j^c$, ou seja, sua fronteira tenha medida nula, podemos assumir que:

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \phi_p^*\mu_j^c(W_p \times S_0) = \phi_p^*\mu(W_p \times S_0)$$

Assim:

$$\phi_p^*\mu(W_0 \times S_0) \leq C_1 \cdot \phi_p^*\mu(W_p \times S_0) \cdot \frac{m^u(W_0)}{m^u(W_p)} = C_1 \cdot (\phi_p^*\mu)_m(W_0 \times S_0)$$

Logo, $(\phi_p^*\mu)_m(W_0 \times S_0) = 0$ implica que $\phi_p^*\mu(W_0 \times S_0) = 0$, como desejado. \square

5.2 Existência e unicidade da medida SRB

5.2.1 Classes de acessibilidade

Definição 5.12. Dizemos que um ponto $x \in M$ é *regular* se:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^{-j}(x)), \quad \forall \text{ função contínua } \varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$$

Isto é, a média temporal de x coincide para f e f^{-1} .

Denote por \mathcal{R} o conjunto dos pontos regulares de M .

Definição 5.13. Sejam $p, q \in \mathcal{R}$. Dizemos que $p \approx q$ se existem um inteiro $n \geq 1$, pontos regulares $p = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = q$ e inteiros k_1, \dots, k_n tais que $x_i \in W^u(f^{k_i}(x_{i-1}))$ ou $x_i \in W^s(f^{k_i}(x_{i-1}))$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Isto significa que os pontos p e q comunicam-se por meio das variedades estáveis ou instáveis de iterados. Logo, pontos

Verifica-se que \approx estabelece uma relação de equivalência em \mathcal{R} , cujas classes de equivalência são denominadas *classes de acessibilidade*. De fato:

- a) \approx é *reflexiva*: basta tomar $n = 1$ e $k_1 = 0$.
- b) \approx é *simétrica*: suponha que $p \approx q$. Então existem $n \geq 1$, pontos regulares $p = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y$ e inteiros k_1, \dots, k_n que cumprem a hipótese da definição 5.13. Para concluir que $q \approx p$, basta adotar o mesmo valor de n e inverter a ordem dos pontos z_i e inteiros k_i .
- c) \approx é *transitiva*: Suponha que $p \approx q$ e $q \approx r$. Então, associados à primeira equivalência, existem um inteiro $n \geq 1$, pontos regulares $p = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = q$ e inteiros k_1, \dots, k_n . Associado à segunda equivalência, existem um inteiro $m \geq 1$, pontos regulares $q = y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_m = r$ e inteiros l_1, \dots, l_m . Para concluir que $p \approx r$ basta verificar que o inteiro $n + m$, os pontos regulares $p = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y_0 = q, y_1, \dots, y_{m-1}, y_m = r$ e os inteiros $k_1, \dots, k_n, l_1, \dots, l_m$ cumprem a hipótese da definição 5.13

Verifica-se que dois pontos de uma mesma variedade estável ou instável estão trivialmente na mesma classe de acessibilidade. Também trivialmente, dois pontos iterados entre si (ou seja, da mesma órbita) estão na mesma classe de acessibilidade. Logo, as classes podem ser construídas por qualquer composição dessas duas equivalências básicas. Por exemplo, as variedades estáveis e instáveis de qualquer iterado de um ponto p pertencem à mesma classe de acessibilidade de p , assim como a variedade estável de qualquer ponto q contido na variedade instável de p . A figura 9 ilustra o que foi dito.

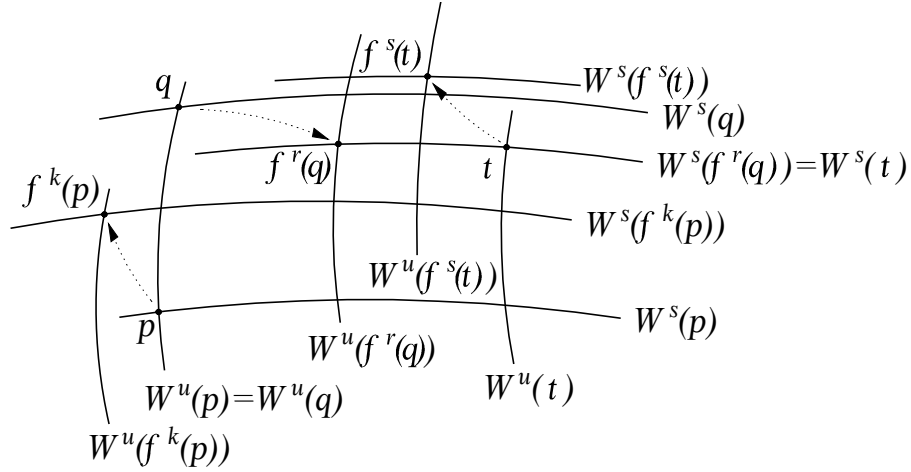


Figura 9 – Exemplo de construção de classe de acessibilidade

Lema 5.14. Se dois pontos p e q estão na mesma classe de acessibilidade, suas médias temporais coincidem em qualquer dada função contínua $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Demonstração. Como foi comentado anteriormente, se p e q estão na mesma classe de acessibilidade, estes podem ser acessados pelos conjuntos estável ou instável de iterados, portanto basta provar que pontos iterados e pontos que pertencem ao mesmo conjunto estável ou instável possuem médias temporais coincidentes. Esta afirmação é imediata para pontos iterados, e, como foi provado na afirmação 4.10, pontos de um mesmo conjunto estável ou instável possuem a mesma média temporal para f e f^{-1} , respectivamente. Por fim, como a classe de acessibilidade é definida em \mathcal{R} , os pontos x_i são regulares, as médias temporais para f e f^{-1} coincidem. \square

Corolário 5.15. Seja A uma classe de acessibilidade e μ uma medida invariante para f tal que $\mu(A) > 0$. Então a medida μ_A definida por:

$$\mu_A(E) = \frac{\mu(E \cap A)}{\mu(A)}, \quad \text{para todo conjunto mensurável } E \subset M.$$

é ergódica e pode ser escrita de maneira independente a μ .

Demonstração. Como foi provado no lema 5.14, as médias temporais dos pontos em uma classe de acessibilidade A são constantes, isto é, o valor:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$$

É constante para todo $x \in A$. Logo, como $\mu_A(A)$ é não-nulo, tem-se que a média temporal é constante em μ_A -quase todo ponto. Portanto, como resultado do teorema 2.3, μ_A é ergódica.

Assim, $B(\mu_A)$ possui medida total em μ_A e, mais ainda, é igual a A . Seja um ponto $x \in B(\mu_A) = A$. Então, por definição de bacia:

$$\mu_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)}$$

O que demonstra a parte final do corolário. \square

Lema 5.16. Existe $r > 0$ tal que, para toda classe de acessibilidade A que intersecta alguma folha instável em um conjunto de medida m^u maior que zero, existe $p \in \Lambda$ tais que m^u -quase todo ponto de $B_r^u(p)$ está contido na variedade estável de algum ponto de A .

Demonstração. Seja F a intersecção entre a classe de acessibilidade A e a folha instável, com $m^u(F) > 0$, como na hipótese.

Afirmção 5.17. Dado $r > 0$, existe uma sequência p_j de pontos contidos em $f^j(F)$ tal que:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{m^u(B_r^u(p_j) \setminus f^j(F))}{m^u(B_r^u(p_j))} = 0$$

Demonstração. Pelo corolário 5.7, existe $C_2 > 0$ tal que:

$$\frac{m^u(B_r^u(p_j) \setminus f^j(F))}{m^u(B_r^u(p_j))} \leq C_2 \frac{m^u(f^{-j}(B_r^u(p_j)) \setminus F)}{m^u(f^{-j}(B_r^u(p_j)))}$$

Portanto, basta provar que existe $p_j \in f^j(F)$ tal que:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{m^u(f^{-j}(B_r^u(p_j)) \setminus F)}{m^u(f^{-j}(B_r^u(p_j)))} = 0 \quad (5.12)$$

Para cada $j \geq 1$, seja P_j um conjunto finito de pontos em $f^j(F)$ tal que:

- Os conjuntos $B_r^u(x)$ são dois a dois disjuntos, para todo $x \in P_j$;
- Os conjuntos $B_{2r}^u(x)$ formam uma cobertura de $f^j(F)$.

Vamos provar que existe uma sequência $(p_j)_{j \geq 1}$, onde cada p_j é tomado em P_j , que cumpre a equação 5.12. De fato, suponha que não exista. Então há um $\delta > 0$ tal que, para todo $j \geq 1$ e todo $p_j \in P_j$:

$$m^u(f^{-j}(B_r^u(p_j)) \setminus F) \geq \delta m^u(f^{-j}(B_r^u(p_j)))$$

Como os conjuntos $B_r^u(p_j)$ são disjuntos, isso implica que:

$$m^u\left(\bigcup_{p_j \in P_j} f^{-j}(B_r^u(p_j)) \setminus F\right) \geq \delta m^u\left(\bigcup_{p_j \in P_j} f^{-j}(B_r^u(p_j))\right)$$

Como $B_r^u(p_j)$ está contido em uma folha instável, $f^{-j}(B_r^u(p_j))$ tende a diminuir seu diâmetro exponencialmente quando $j \rightarrow \infty$. Além disso, por construção, $f^{-j}(p_j)$ está contido em F . Logo, dada qualquer vizinhança de F , existe um j suficientemente grande tal que $f^{-j}(B_r^u(p_j))$ está contido nessa vizinhança. Isso significa que:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} m^u\left(\bigcup_{p_j \in P_j} f^{-j}(B_r^u(p_j)) \setminus F\right) = 0$$

Logo:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} m^u\left(\bigcup_{p_j \in P_j} f^{-j}(B_r^u(p_j))\right) = 0 \quad (5.13)$$

Mas, novamente utilizando o corolário 5.7, temos que existe $C_2 > 0$ tal que:

$$m^u(f^{-j}(B_r^u(p_j))) \geq \frac{1}{C_2} \frac{m^u(B_r^u(p_j))}{m^u(B_{2r}^u(p_j))} m^u(f^{-j}(B_{2r}^u(p_j)))$$

E, pelo teorema 4.15, a folheação \mathcal{F}^u é contínua e possui folhas C^2 , logo existe α tal que:

$$\frac{m^u(B_r^u(p_j))}{m^u(B_{2r}^u(p_j))} \leq \alpha$$

Para todo $p_j \in \Lambda$. Daí, existe uma constante $\beta = \alpha/C_2$ tal que:

$$m^u(f^{-j}(B_r^u(p_j))) \geq \beta m^u(f^{-j}(B_{2r}^u(p_j)))$$

O que implica:

$$m^u\left(\bigcup_{p_j \in P_j} f^{-j}(B_r^u(p_j))\right) \geq \beta m^u\left(\bigcup_{p_j \in P_j} f^{-j}(B_{2r}^u(p_j))\right)$$

Por construção, $\bigcup_{p_j \in P_j} B_{2r}^u(p_j)$ cobre $f^j(F)$. Logo, $\bigcup_{p_j \in P_j} f^{-j}(B_{2r}^u(p_j))$ cobre F e, portanto:

$$m^u\left(\bigcup_{p_j \in P_j} f^{-j}(B_r^u(p_j))\right) \geq \beta m^u(F)$$

Contradizendo o limite 5.13 e mostrando, portanto, que existe uma sequência $p_j \in P_j$ atendendo à expressão 5.12. \square

Voltando à demonstração do lema: como a classe de acessibilidade A é um conjunto invariante, temos que $f^j(F) \subset A$ para todo j . Aplicando isso na afirmação 5.17:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{m^u(B_r^u(p_j) \setminus A)}{m^u(B_r^u(p_j))} = 0$$

Seja $\phi'_{p_j} : S'_{p_j} \times W'_{p_j} \rightarrow Z'_{p_j}$ uma carta folheada de \mathcal{F}^s no ponto p_j , e seja $r > 0$ de forma que, para qualquer ponto $p \in \Lambda$, $B_r^u(p)$ está contido em Z'_p . Logo, em particular, $B_r^u(p_j) \subset Z'_{p_j}$ para todo p_j como na afirmação 5.17.

Por compacidade, podemos assumir que a sequência p_j converge para um ponto $p \in \Lambda$ e, portanto, $B_r^u(p_j)$ converge para $B_r^u(p) \subset Z'_p$. Segue que, para j suficientemente grande, $B_r^u(p_j)$ está contido em Z'_p . Seja $\pi(A \cap B_r^u(p_n))$ a projeção de $A \cap B_r^u(p_n)$ sobre a folha instável de p por uma aplicação de holonomia local, como mostra a figura 10.

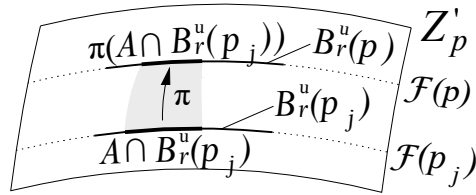


Figura 10 – Projeção de $A \cap B_r^u(p_j)$ sobre a folha instável de p .

É fácil ver que $\pi(B_r^u(p_j) \setminus A) = B_r^u(p) \setminus \pi(A \cap B_r^u(p_j))$ para todo j suficientemente grande.

Logo, pelo teorema 4.19, existe C_0 tal que:

$$\frac{m^u(B_r^u(p) \setminus \pi(A \cap B_r^u(p_j)))}{m^u(B_r^u(p))} \leq C_0 \frac{m^u(B_r^u(p_j) \setminus A)}{m^u(B_r^u(p_j))}$$

Como a parte direita da desigualdade tende a 0 quando $j \rightarrow \infty$ e a medida m^u de $B_r^u(p)$ está limitada de zero por uma constante, segue que $m^u(B_r^u(p) \setminus \pi(A \cap B_r^u(p_j))) \rightarrow 0$. Seja $\Pi = \bigcup_j \pi(A \cap B_r^u(p_j))$ para j suficientemente grande. Então:

$$m^u(B_r^u(p) \setminus \Pi) = 0 \tag{5.14}$$

Pela definição de π , todo ponto de Π está na variedade estável de algum ponto de A , e a equação 5.14 mostra que m^u -quase todo ponto de $B_r^u(p)$ está contido em Π , como queríamos. \square

Lema 5.18. Dado $r > 0$, existe $s > 0$ tal que, para qualquer classe de acessibilidade A e qualquer $p \in \Lambda$ cumprindo as condições do lema 5.16, temos:

- a) m -quase todo ponto de $B_s(p)$ está contido na variedade estável de algum ponto de A ;
- b) m^u -quase todo ponto de $F \cap B_s(p)$ está contido na variedade estável de algum ponto de A , para qualquer folha instável F de \mathcal{F}^u .

Demonstração. Tome s pequeno o suficiente de forma que, para todo $p \in \Lambda$, exista uma carta folheada $\phi'_p : S'_p \times W'_p \rightarrow Z'_p$ da folheação estável tal que $B_s(p) \subset Z'_p$.

Seja $\pi^s : S'_p \times W'_p \rightarrow W'_p$ a projeção canônica e seja $\bar{\pi}^s = \phi'_p \circ \pi^s \circ (\phi'_p)^{-1}$. Então, reduzindo s se necessário, podemos admitir que $\bar{\pi}^s(B_s(p)) \subset B_r^u(p)$. Logo, pelo lema 5.16, m^u -quase todo ponto de $\bar{\pi}^s(B_s(p))$ está na variedade estável de algum ponto de A .

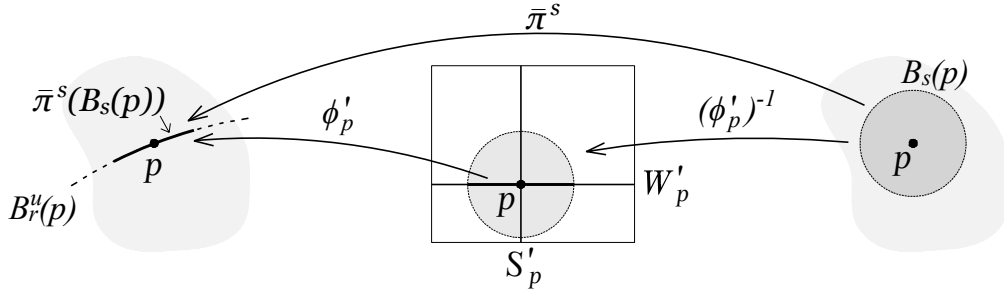


Figura 11 – Representação da projeção $\bar{\pi}^s$.

Afirmção 5.19. Seja V um disco imerso em $B_s(p)$ transversal à \mathcal{F}^s no sentido de que $T_x V \oplus E^s(x) = T_x M$ para todo $x \in V$. Então m_V -quase todo ponto de V está na variedade estável de algum ponto de A .

Demonstração. Seja $\pi : V \rightarrow S'_p$ uma aplicação de holonomia local de \mathcal{F}^s . Pela escolha de s , temos que $\pi(V) \subset B_r^u(p)$. Pelo teorema 4.19, $\pi(V)$ deve ter medida de Lebesgue não nula. Logo, pelo lema 5.16, m_V -quase todo ponto de $\pi(V)$ está na variedade estável de algum ponto de A . Como cada ponto $v \in V$ está na mesma variedade estável de $\pi(v)$, segue que m_V -quase todo ponto de V está na variedade estável de algum ponto de A . \square

Para demonstrar o item a), seja $\bar{\mathcal{F}}^u$ uma folheação C^1 de $B_s(p)$ formada por discos transversais à \mathcal{F}^s . Pela afirmação 5.19, cada folha de $\bar{\mathcal{F}}^u$ está Lebesgue quase todo ponto na variedade estável de algum ponto de A . Mas, conforme constatado acima, esta propriedade também vale para $\bar{\pi}^s(B_s(p))$, que é transversal à $\bar{\mathcal{F}}^u$. Logo, pelo teorema de Fubini, m -quase todo ponto de $B_s(p)$ está contido na variedade estável de algum ponto de A .

Como F é transversal a \mathcal{F}^s , o item b) do lema é uma consequência imediata da afirmação 5.19. \square

Corolário 5.20. Existe apenas uma quantidade finita de classes de acessibilidade que intersectam alguma folha instável num conjunto de medida m^u maior que zero.

Demonstração. Suponha que exista uma quantidade infinita de classes de acessibilidade distintas A_i cumprindo esta condição. Então, pelo lema 5.18, existirá $s > 0$ e duas sequências de pontos p_i e a_i tais que m -quase todo ponto de $B_s(p_i)$ está contido na variedade estável de $a_i \in A_i$. Por compacidade, a sequência p_i possui alguma subsequência convergente. Logo, para valores de k e l suficientemente grandes, as bolas $B_s(p_k)$ e $B_s(p_l)$ irão se intersectar em um conjunto com medida de Lebesgue positiva. Portanto, existirá um ponto p nesta intersecção que estará contido simultaneamente nas variedades estáveis de $a_k \in A_k$ e $a_l \in A_l$. Isso significa que a_k e a_l estão na mesma classe de acessibilidade e, portanto, $A_k = A_l$, contradizendo o fato de que as classes são distintas. \square

Corolário 5.21. Seja μ uma medida invariante e absolutamente contínua ao longo de \mathcal{F}^u . Então, μ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mu = \sum_i \mu(A_i) \mu_{A_i}$$

Onde cada A_i é uma classe de acessibilidade como no corolário 5.20, onde $\mu(A_i) > 0$, e μ_{A_i} é a restrição normalizada sobre A_i , definida conforme o corolário 5.15.

Demonstração. Conforme visto no corolário 5.15, as medidas μ_{A_i} são ergódicas, e dadas por $\mu(E) = \mu(E \cap A_i) / \mu(A_i)$, para todo conjunto mensurável $E \subset \Lambda$. Assim, devemos provar que:

$$\mu(E) = \sum_i \mu(E \cap A_i), \text{ para todo conjunto mensurável } E \subset \Lambda.$$

Para isso, basta provar que $E \subset \bigcup_i A_i$, a menos de um conjunto com medida μ nula. Ou seja, $\bigcup_i A_i$ deve ter μ -medida total para as classes de acessibilidade A_i obtidas conforme o corolário 5.15.

Seja E um conjunto mensurável tal que $\mu(E) > 0$. Por compacidade, podemos obter uma cobertura finita Z_{p_i} de Λ formada por imagens de cartas folheadas $\phi_{p_i} : W_{p_i} \times S_{p_i} \rightarrow Z_{p_i}$. Assim, $0 < \mu(E) \leq \sum_i \mu(E \cap Z_{p_i})$. Logo, existe ao menos um ponto p e uma carta folheada $\phi_p : W_p \times S_p \rightarrow Z_p$ tal que $\mu(E \cap Z_p) > 0$. Como o conjunto dos pontos regulares \mathcal{R} possui medida μ total, temos que $\mu(E \cap Z_p \cap \mathcal{R}) > 0$, ou seja, $\phi_p^* \mu(\phi^{-1}(E \cap Z_p \cap \mathcal{R})) > 0$. No que segue, denotaremos o conjunto $\phi^{-1}(E \cap Z_p \cap \mathcal{R})$ por \bar{E} .

Afirmção 5.22. Existe $y \in S_p$ tal que $W_p \times \{y\}$ intersecta \bar{E} em um conjunto com medida m^u positiva.

Demonstração. Pelo corolário 5.11, a medida $\phi_p^* \mu$ é absolutamente contínua ao longo de \mathcal{F}_p^u , ou seja, $\phi_p^* \mu$ é absolutamente contínua com relação a $(\phi_p^* \mu)_m$, onde a medida $(\phi_p^* \mu)_m$ é definida da seguinte forma:

$$(\phi_p^* \mu)_m(W_0 \times S_0) = \phi_p^* \mu(W_p \times S_0) \cdot m^u(W_0)$$

Para quaisquer $W_0 \subset W_p$ e $S_0 \subset S_p$ mensuráveis. A intersecção de $W_p \times \{y\}$ com \bar{E} pode ser representada por $W_y \times \{y\}$, para algum conjunto $W_y \subset W_p$. Suponha então que $m^u(W_y \times \{y\}) = 0$ para todo $y \in S_p$. Neste caso, teríamos, para todo $y \in S_p$:

$$(\phi_p^* \mu)_m(W_y \times \{y\}) = \phi_p^* \mu(W_y \times \{y\}) \cdot m^u(W_y) = 0$$

E daí, por continuidade absoluta, $\phi_p^* \mu(W_y \times \{y\}) = 0$ para todo $y \in S_p$. Em particular:

$$\phi_p^* \mu(\phi^{-1}(E \cap Z_p \cap \mathcal{R})) \leq \sum_{y \in S_p} \phi_p^* \mu(W_y \times \{y\}) = 0$$

Contradizendo o fato de $\phi_p^* \mu(\phi^{-1}(E \cap Z_p \cap \mathcal{R})) > 0$. □

Seja $y \in S_p$ como na afirmação 5.22. Então $m^u(\bar{E} \cap (W_p \times \{y\})) > 0$ implica que:

$$m^u(\phi_p(\bar{E}) \cap \phi_p(W_p \times \{y\})) = m^u((E \cap Z_p \cap \mathcal{R}) \cap \phi_p(W_p \times \{y\})) > 0 \tag{5.15}$$

Como $\phi_p(W_p \times \{y\})$ está contido em uma variedade instável, segue que ele está contido em uma classe de acessibilidade A . Mas, pela expressão 5.15, A está intersectando a folha instável de $\phi_p(W_p \times \{y\})$ em um conjunto com medida m^u maior que zero.

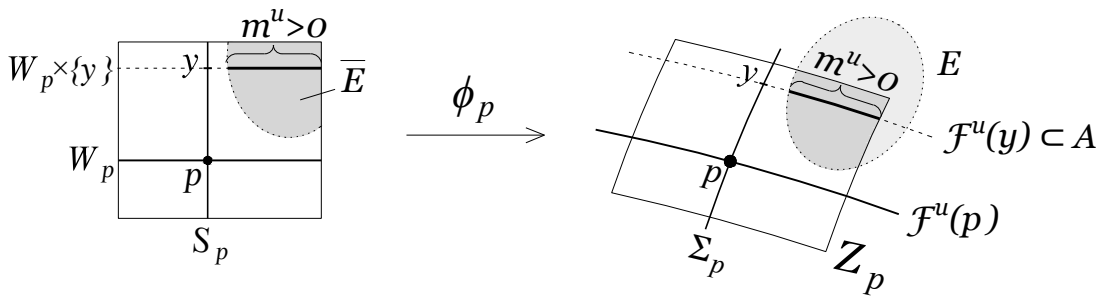


Figura 12 – Intersecção de $E \cap Z_p \cap \mathcal{R}$ com a classe de acessibilidade A

Logo, nós provamos que, se E é um conjunto mensurável com $\mu(E) > 0$, ele intersecta alguma classe de acessibilidade A_i como no corolário 5.20. Portanto, como o conjunto

$$\Lambda \setminus \bigcup_i A_i$$

não intersecta as classes de acessibilidade A_i , ele possui medida μ nula. Logo, $\bigcup_i A_i$ possui medida μ total, como queríamos. □

Lema 5.23. Seja uma classe de acessibilidade A que intersecta alguma folha instável em um conjunto de medida m^u maior que zero. Então, para qualquer $p \in \Lambda$, existe $r > 0$ tal que m^u -quase todo ponto de $B_r^u(p)$ está contido na variedade estável de algum ponto de A .

Demonstração. Seja $\phi'_p : S'_p \times W'_p \rightarrow Z'_p$ uma carta folheada de \mathcal{F}^s no ponto p . Conforme visto na demonstração do lema 5.16, a escolha de $r > 0$ é feita de forma que $B_r^u(p) \subset Z'_p$. Pelo item b) do lema 5.18, existem $s > 0$ e $q \in \Lambda$ tais que m^u -quase todo ponto de $F \cap B_s(q)$ está contido na variedade estável de algum ponto de A , pra qualquer folha instável F de \mathcal{F}^u .

Aqui, utiliza-se finalmente a hipótese de que Λ é transitivo. Esta suposição garante que exista uma sequência de pontos $x_j \in \Lambda$ e de tempos $n_j \in \mathbb{Z}$ tais que:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = q \quad \text{e} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_j}(x_j) = p$$

Logo, para j suficientemente grande:

$$B_{s/2}(x_j) \subset B_s(q) \quad \text{e} \quad B_r^u(f^{n_j}(x_j)) \subset Z'_p.$$

Seja F uma folha instável intersectando x_j . Então $B_{s/2}^u(x_j) \subset F \cap B_s(q)$. Logo, m^u -quase todo ponto de $B_{s/2}^u(x_j)$ está contido na variedade estável de algum ponto de A . Mas, para j suficientemente grande, podemos afirmar que:

$$B_r^u(f^{n_j}(x_j)) \subset f^{n_j}(B_{s/2}^u(x_j))$$

Como A é invariante, m^u -quase todo ponto de $f^{n_j}(B_{s/2}^u(x_j))$ está contido na variedade estável de algum ponto de A , e, assim, m^u -quase todo ponto de $B_r^u(f^{n_j}(x_j))$ está contido na variedade estável de algum ponto de A . Portanto:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{m^u(B_r^u(f^{n_j}(x_j)) \setminus A)}{m^u(B_r^u(f^{n_j}(x_j)))} = 0$$

Logo, estamos sob as mesmas condições obtidas na demonstração do lema 5.16, e podemos utilizar o mesmo resultado: Como $f^{n_j}(x_j) \rightarrow p$, segue que m^u -quase todo ponto de $B_r^u(p)$ está contido na variedade estável de algum ponto de A . \square

Corolário 5.24. Existe uma única classe de acessibilidade A que intersecta alguma variedade instável em um conjunto de medida m^u maior que zero.

Demonstração. Pelo teorema 5.4 e corolário 5.21, existe ao menos uma classe de acessibilidade sob essas condições. Para provar a unicidade, suponha que existam duas classes A_1 e A_2 cumprindo as hipóteses. Pelo lema 5.23, dado qualquer $p \in \Lambda$, m^u -quase todo ponto de $B_r^u(p)$ estará contido nas variedades estáveis de pontos $a_1 \in A_1$ e $a_2 \in A_2$. Logo, existirá ao menos um ponto contido em $W^s(a_1) \cap W^s(a_2)$, o que implica que a_1 e a_2 estão na mesma classe de acessibilidade, e, portanto, $A_1 = A_2$. \square

Corolário 5.25. μ é uma medida invariante, ergódica e absolutamente contínua ao longo de \mathcal{F}^u .

Demonstração. Como foi provado no teorema 5.4, a medida μ definida por:

$$\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j m_U$$

é invariante e absolutamente contínua ao longo de \mathcal{F}^u . Portanto, resta provar a ergodicidade. Pelo corolário 5.21, μ pode ser escrito como $\sum_i \mu(A_i) \mu_{A_i}$ para as classes de acessibilidade A_i com $\mu(A_i) > 0$. Mas, pelo corolário 5.24, existe uma única classe de acessibilidade A com μ -medida positiva. Logo $\mu = \mu_A$. Pelo corolário 5.15, μ_A é ergódica, logo μ é ergódica. \square

O que nos leva à demonstração do teorema 5.1:

Corolário 5.26. μ é a única medida SRB para f em Λ .

Demonstração. Como foi provado no corolário 5.25, $\mu = \mu_A$, onde A é a classe de acessibilidade obtida no corolário 5.24. Logo, pelo corolário 5.15:

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(a)}$$

para todo $a \in A$. Logo, $A \subset B(\mu)$. Mais ainda, pelos lemas 5.18 e 5.23, temos que, para todo $p \in \Lambda$, Lebesgue quase todo ponto de $B_s(p)$ está na variedade estável de algum ponto $a \in A$. Como na variedade estável as médias temporais coincidem, segue que Lebesgue quase todo ponto de $B_s(\Lambda)$ está contido na bacia $B(\mu)$, e o mesmo vale para Lebesgue quase todo ponto de $f^{-n}(B_s(\Lambda))$, onde $n \geq 0$. Isto é, seja:

$$\Omega_s = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(B_s(\Lambda))$$

Então $\Omega_s \subset B(\mu)$, a menos de um conjunto com medida de Lebesgue nula. Em particular, $m(B(\mu)) \geq m(\Omega_s) \geq m(B_s(\Lambda)) > 0$, mostrando que μ é SRB. Resta, portanto, mostrar a unicidade.

Afirmção 5.27. Não é restrição supor que $B_s(\Lambda)$ está contido em uma vizinhança U de Λ como na definição 4.7. Neste caso, Ω_s coincide com o conjunto $B(\Lambda)$, definido por:

$$B(\Lambda) = \{x \in M; \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), \Lambda) = 0\}$$

Demonstração. Seja $x \in B(\Lambda)$. Então, para n suficientemente grande, $f^n(x)$ está suficientemente próximo de Λ de forma que está contido na vizinhança $B_s(\Lambda)$. Portanto, $x \in f^{-n}(B_s(\Lambda)) \subset \Omega_s$.

Seja $x \in \Omega_s$. Então existe $k \geq 0$ tal que $x \in f^{-k}(B_s(\Lambda)) \subset f^{-k}(U)$. Logo, $f^n(x) \in f^{n-k}(U)$, de onde:

$$d(f^n(x), \Lambda) \leq d(f^{n-k}(U), \Lambda)$$

Mas, pela definição 4.7, $d(f^{n-k}(U), \Lambda) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Logo, $d(f^n(x), \Lambda) \rightarrow 0$ e, portanto, $x \in B(\Lambda)$. \square

O conjunto $B(\Lambda)$ é chamado de *bacia* de Λ .

Segue da afirmação 5.27 que $B(\Lambda) = \Omega_s \subset B(\mu)$ a menos de um conjunto com medida de Lebesgue nula. Suponha que $\bar{\mu}$ seja uma medida SRB diferente de μ . Então $B(\bar{\mu}) \subset B(\mu)$ a menos de um conjunto com medida de Lebesgue nula. Pela afirmação 2.8, as bacias $B(\bar{\mu})$ e $B(\mu)$ não podem se intersectar. Logo, $B(\bar{\mu})$ é um conjunto com medida de Lebesgue nula, e, portanto, $\bar{\mu}$ não é SRB. \square

Referências

- [1] KATOK, Anatole; HASSELBLATT, Boris. **Introduction to the modern theory of dynamical systems**. Cambridge: Cambridge University Press, c1995. (Encyclopedia of mathematics and its applications)
- [2] M. Brin; D. Ruelle. **Partially hyperbolic dynamical systems**. Izv. Acad. Nauk SSSR, 1974.
- [3] MAÑÉ, R. **Teoria Ergódica**. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1983.
- [4] BOWEN, Rufus; RUELLE, David. **The ergodic theory of Axiom A flows**. Inventiones Math, v. 29, n. 3, p. 181-202, 1975.
- [5] SAMBARINO, M. **Hiperbolicidad y estabilidad**. XXII Escuela Venezolana de Matemáticas, Chile, 2009.
- [6] SHUB, M. **Global Stability of Dynamical Systems**. Springer, Berlin, 1987.
- [7] VIANA, Marcelo; OLIVEIRA, Klerley. **Fundamentos da Teoria Ergódica**. Rio de Janeiro: SBM, 2014. 545p.
- [8] VIANA, Marcelo. **Lecture notes on attractors and physical measures**. XII ELAN, Monografias del IMCA, Lima, 1999.
- [9] SINAI, Yakov G. **Gibbs measures in ergodic theory**. Russian Mathematical Surveys, v. 27, n. 4, p. 21-69, 1972.

Índice

- $B(\Lambda)$
 bacia de um atrator hiperbólico, 53
- $B(\mu)$
 bacia de uma medida, 13, 14
- $B_r(p)$
 m -bola, 37
- $B_r^u(p)$
 d^u -bola, 37
- $E^s(p)$
 subespaço estável, 26
- $E^u(p)$
 subespaço instável, 26
- S_p , 33
- $W^s(p)$
 variedade estável, 30
- $W^u(p)$
 variedade instável, 30
- W_p , 33
- $W_\varepsilon^s(p)$
 variedade estável local, 30
- $W_\varepsilon^u(p)$
 variedade instável local, 30
- Z_p , 33
- Γ_j^c
 união dos componentes conexos que cruzam, 39
- Γ_j^{nc}
 união dos componentes conexos que não cruzam, 39
- Φ_p , 31, 32
- \approx
 relação de acessibilidade, 43
- δ_p
 medida de Dirac, 13
- γ_i^c
 componente conexo que cruza, 39
- γ_i^{nc}
 componente conexo que não cruza, 39
- \mathcal{A} , 22
- $\mathcal{F}(p)$
 folha contendo um ponto, 31
- \mathcal{F}^s
 folheação estável, 31
- \mathcal{F}^u
 folheação instável, 31
- \mathcal{F}_p^u
 folheação horizontal em $W_p \times S_p$, 36
- \mathcal{P}_n , 21
- \mathcal{R}
 conjunto dos pontos regulares, 43
- \mathcal{X}_E
 função característica, 11
- μ_A
 restrição normalizada de uma medida a um conjunto, 23, 44
- ϕ'_p
 carta folheada para a folheação estável, 33

- ϕ_p
 carta folheada para a folheação instável,
 33
- $\phi_p^* \mu$
 medida imagem por uma carta folheada, 36
- π
 aplicação de holonomia local, 34
- $\tau(E, x)$
 tempo de visita médio, 11
- $\text{Im}^r(W_\varepsilon^s(p), M)$
 conjunto das imersões C^r , 31, 32
- $\tilde{\varphi}$
 média temporal, 12
- d^u
 distância em uma folha instável, 37
- $f_* \mu$
 medida imagem por f , 13
- h^n
 ramo inverso, 18
- m^u
 medida de Lebesgue induzida em \mathcal{F}^u ,
 37
- m_U
 medida de Lebesgue induzida em um
 conjunto, 36
- Aplicação
 de holonomia local, 34
 expansora, 17
- Atrator hiperbólico, 29
 transitivo, 30
- Bacia
 de um atrator hiperbólico, 53
 de uma medida, 13, 14
- Carta folheada
 para a folheação estável, 33
 para a folheação instável, 33
- Classe de acessibilidade, 43
- Conjunto
 dos pontos regulares, 43
 hiperbólico, 27
- Continuidade absoluta
 ao longo da folheação instável, 36
 ao longo de uma folheação horizontal,
 35
- Cruza, 39
- Difeomorfismo de Anosov, 27
- Distância em uma folha instável, 37
- Ferradura de Smale, 28
- Folha, 31
- Folheação, 31
 contínua, 32
 estável, 31
 horizontal, 35
 instável, 31
 invariante, 31
- Função característica, 11
- hipótese ergódica, 9
- Lema de distorção
 para aplicações expansoras, 18
 para atratores hiperbólicos, 37
- Média temporal, 11

Medida

- de Dirac, 13
- de Lebesgue, 12
- física, 14
- imagem, 13
- imagem por uma carta folheada, 36
- invariante, 11
- SRB, 14

Ponto

- fixo hiperbólico, 25, 26
- regular, 43

Ramo inverso, 17

Sistema ergódico, 12

Subespaço

- estável, 26
- instável, 26

Tempo de visita médio, 11

Teorema

- da variedade estável, 31
- ergódico de Birkhoff, 11

Variedade

- estável, 30
- estável local, 30
- instável, 30
- instável local, 30