

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA

Frederico Elias Passos dos Santos

*Espalhamento de Férmions sob Influência da Violação de
Lorentz no Setor Fotônico*

São Luís
2010

Frederico Elias Passos dos Santos

*Espalhamento de Férmions sob Influência da Violação de
Lorentz no Setor Fotônico*

Dissertação apresentada ao Curso de Física da Matéria Condensada da UFMA, como requisito para a obtenção parcial do grau de MESTRE em Física da Matéria Condensada.

Orientador: Dr. Manoel Messias Ferreira Jr

Doutorado em Física - Universidade Federal do Maranhão(UFMA)

Co-orientador: Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes

Doutorado em Física - Universidade Federal do Maranhão(UFMA)

São Luís

2010

Santos, Frederico Elias Passos dos.

Espalhamento de férmions sob influência da violação de lorentz no setor fotônico/ Frederico Elias Passos dos Santos – São Luís, 2010.

106 f.

Orientador: Manoel Messias Ferreira Júnior.

Co-orientador: Rodolfo Alván Casana Sifuentes.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Maranhão, Curso de Pós-graduação em Física da Matéria Condensada, 2010.

1. Quebra de lorentz. 2. Espalhamento de férmions. 3. Seção de choque diferencial. I. Título.

CDU 530.12

Frederico Elias Passos dos Santos

*Espalhamento de Férmions sob Influência da Violação de
Lorentz no Setor Fotônico*

Dissertação apresentada ao Curso de Física da Matéria
Condensada da UFMA, como requisito para a obtenção
parcial do grau de MESTRE em Física da Matéria
Condensada.

Aprovado em 20 de setembro de 2010

BANCA EXAMINADORA

Dr. Manoel Messias Ferreira Jr

Doutorado em Física - Universidade Federal do Maranhão(UFMA)

Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes

Doutorado em Física - Universidade Federal do Maranhão(UFMA)

Dr. José Abdalla Helayel Neto

Doutorado em Física - Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF)

minha mãe.

pessoa mais importante nisto tudo.

Resumo

O Modelo Padrão Estendido (MPE) é um arcabouço teórico que considera a possibilidade de violação de simetria de Lorentz no Modelo Padrão das interações elementares. Na eletrodinâmica, esta possibilidade é representada pelo termo $K_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}$, que viola a simetria de Lorentz sem violar a simetria CPT, e o termo $\varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu}v^\alpha A^\mu\partial^\beta A^\nu$, que viola a simetria de Lorentz, juntamente com a simetria CPT. Estes termos extras são incluídos na lagrangiana de Maxwell e, conseqüentemente, também alteram a equação de movimento dos campos. Neste trabalho consideramos a influência da violação de Lorentz no setor fotônico em processos de espalhamento de férmions, $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$ e $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$, considerando individualmente o setor CPT-ímpar e CPT-par em suas componentes não-birrefringentes. No primeiro momento, apresentamos uma revisão de tópicos de interesse, passando pela equação de Dirac, propagador de Dirac, matriz de espalhamento, regras de Feynman, truque de Casimir, finalizando com o cálculo das seções de choque diferenciais para processos elementares. Em seguida, implementamos as técnicas desenvolvidas para calcular o incremento à seção de choque, oriundo da violação de simetria de Lorentz no setor fotônico. Em nossos resultados, obtivemos como cada componente de violação de Lorentz altera a seção de choque. No caso CPT-par, observamos que a contribuição do termo κ_{tr} ao processo $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ é de difícil verificação, pois se confunde com as contribuições radioativas. Já as contribuições advindas do vetor κ^i , inserem uma dependência angular na seção de choque diferencial do processo $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$, mas não contribui no processo $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$. Os coeficientes paridade-par, $(\kappa_{e^-})_{ij}$, implicam em contribuições relevantes em ambos os processos, e destacamos sua influência no processo de aniquilação elétron-pósitron, onde atuam como únicas componentes que contribuem de forma notável. A contribuição do setor CPT-ímpar (termo de Carroll-Field-Jackiw) é comparativamente de menor relevância, já que as contribuições à seção de choque aparecem apenas em segunda ordem. Embora tenhamos inicialmente desenvolvido um procedimento perturbativo para calcular as contribuições dos parâmetros de quebra de Lorentz à seção de choque, também foi possível obter os propagadores de Feynman exatos tanto para o setor CPT-ímpar quanto para o setor CPT-par. Tais expressões podem ser usadas para recalculas as seções de choque.

Palavras-chaves: Quebra de Lorentz, espalhamento de férmions, seção de choque diferencial.

Abstract

The standard model extension is a theoretical framework which includes the possibility of Lorentz symmetry violation in the Standard Model of elementary interactions. In electrodynamics, this possibility is represented by the term, $K_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}$, that violates Lorentz symmetry without jeopardizing CPT symmetry, and the term $\varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu}v^\alpha A^\mu \partial^\beta A$, which violates Lorentz and CPT symmetries. These additional terms are inserted in the Maxwell Lagrangiana and alter the field equations, as well. In this work we study the influence of Lorentz violation in the photonic sector on fermion scattering processes, regarding individually the CPT-odd and CPT-even coefficients. At first, we present a review through some topics of great interest, as the Dirac equation, Dirac propagator, scattering matrix, Feynman rules, Casimir trick, and the evaluation of the differential cross sections. Next, we implemented the developed techniques to carry out the corrections (to the cross sections) induced by the Lorentz-violating terms. Our results reveal as each Lorentz-violating component changes the cross section. In the CPT-even case, we observed that the contribution of the term κ_{tr} to the process $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$ is of difficult detection once it can be disguised between the radioactive corrections. The contributions coming from the vector κ^i imply an angular dependence in the differential cross section of the process $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$, and do not contribute for the process $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$. The CPT-even coefficients, $(\kappa_{e^-})_{ij}$, lead to significant contributions in both cases. We highlight its influence in the pair electron-positron annihilation process, where they act as the only components that imply sensitive contributions. The contribution stemming from the CPT-odd sector, represented by the Carroll-Field-Jackiw term, is of less relevance, since the contribute are second order ones. Although we have initially developed a perturbative procedure for evaluating the cross section correction, it was also possible to evaluate the exact propagators of the CPT-odd and CPT-even sectors in a tensor closed form. Such tensor expressions may be used to rederive the cross section corrections.

Keywords: Lorentz Break, scattering of fermions, differential cross sections.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais que sempre me deram a direção certa, também agradeço a minha namorada que foi e tem sido minha companheira nestes anos desta fase. Agradeço aos amigos pela companhia nos papos e naquele chope para esfriar a cabeça. Agradeço aos professores do grupo de teoria de campos pelo voto de confiança e ensinamentos importantes neste período de formação. E a CAPES e FAPEMA pelo relevante apoio financeiro.

“Missão dada parceiro, é missão cumprida.”.

*Tenente-Coronel Nascimento (Filme
TROPA DE ELITE 2)*

Sumário

1	O Modelo Padrão Estendido	10
1.1	Introdução	10
1.2	Setor de gauge do Modelo Padrão Estendido	11
1.3	As componentes não birefringentes setor CPT-par do MPE	17
2	Uma breve introdução da teoria diagramática de Feynman	19
2.1	Introdução	19
2.2	Os propagadores e amplitudes	21
2.3	Campo escalar	22
2.4	A equação de Dirac	24
2.4.1	A equação de Dirac para a partícula livre	27
2.5	Propagador de Feynman da equação de Dirac	30
2.6	Solução perturbativa da equação de Dirac	33
2.7	Matriz S , Amplitudes e Seção de Choque	35
2.8	Espalhamento de férmions	38
2.9	Regra de ouro	41
2.10	Regras de Feynman	42
3	Cálculo da amplitude de espalhamento e seção de choque	44
3.1	A amplitude de Feynman para o espalhamento $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$	44
3.1.1	Truque de Casimir	45
3.1.2	Seção de choque para o espalhamento $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$	47
3.2	A amplitude de Feynman para o espalhamento elétron-pósitron gerando múon e anti-múon	49

3.2.1	Seção de choque $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$	50
3.2.2	Simetria Cruzada	51
4	Cálculo de seção de choque na presença de violação de Lorentz	53
4.1	Amplitude de espalhamento e o propagador CPT-par	53
4.2	A amplitude $\mathcal{M}_{\Delta LV}$ no espalhamento elétron-múon $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$	55
4.2.1	Contribuições paridade-ímpar à amplitude de espalhamento $\langle \mathcal{M} ^2 \rangle_{\text{int}}$	56
4.2.2	Contribuições paridade-par à amplitude de espalhamento	59
4.3	A amplitude $\mathcal{M}_{\Delta LV}$ no processo elétron-pósitron	63
4.3.1	Contribuição isotrópica do setor de paridade par	64
4.3.2	Contribuição anisotrópica do setor de paridade par	64
4.4	Análise de resultados	65
5	Cálculo exato dos propagadores do campo de gauge do Modelo Padrão Estendido	68
5.1	Propagador de gauge do setor CPT-par não-birrefringente	68
5.1.1	Relações de Dispersão	74
5.2	O propagador de gauge do setor CPT-ímpar	74
5.2.1	Relações de Dispersão	77
6	A influência do termo CPT-ímpar no espalhamento elétron-múon	78
6.0.2	A influência do termo CPT-ímpar no processo elétron-pósitron múon-antimúon	86
7	Conclusão	88
8	Apêndice	91
8.1	Matrizes γ	91
8.2	Traço de matrizes gamma	94
8.3	Apêndice de spinores	95

Referências Bibliográficas

97

Referências Bibliográficas

98

1 O Modelo Padrão Estendido

1.1 Introdução

O denominado Modelo Padrão Estendido (MPE) é uma extensão do conhecido Modelo Padrão (MP) das interações fundamentais, proposta por Colladay e Kostelecký [1] por volta de 1996, que incorpora termos de violação da simetria de Lorentz (VSL) em todos os setores de interação do MP. No MPE, os termos de VSL são originados de uma quebra espontânea de simetria que ocorre em uma teoria subjacente definida em altíssimas energias (escala de energia de Planck). A possibilidade de violação espontânea da simetria de Lorentz na escala de energia de Planck foi demonstrada na literatura no final dos anos 80 [2]. O MPE é a teoria resultante após tal quebra, de modo que os coeficientes de VSL são termos tensoriais que se acoplam aos campos do MP. Estes coeficientes de violação são valores esperados do vácuo de quantidades tensoriais originados de uma teoria mais fundamental (definida na escala de Planck).

O MPE preserva a estrutura de gauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ e a renormalizabilidade do Modelo Padrão. A teoria quantizada é hermitiana e renormalizável, tendo ainda outras características como microcausalidade, positividade da energia e cancelamento de anomalias usuais. Dentro da estrutura do MPE, a equação relativística de Dirac e a equação não-relativística de Schrödinger são obtidas, quando efetua-se os limites apropriados. Pode-se, também, extrair uma eletrodinâmica quântica violadora de Lorentz da teoria do MPE, envolvendo modificações tanto no setor fotônico como no setor fermiônico. É importante ressaltar que no contexto da MPE, a violação de Lorentz ocorre apenas no referencial da partícula e que tal simetria não é violada no referencial do observador, isto é, a teoria é covariante sob rotações e translações do referencial inercial do observador. Em nível fundamental, a simetria de Lorentz permanece válida e todas as interações permanecem invariantes sob transformações de Lorentz do observador. Contudo, a invariância de Lorentz do referencial das partículas é violada, isto é, ocorre quebra da covariância sob rotações e translações de uma partícula localizada, conduzindo às variações nas interações físicas quando o movimento ou a orientação de uma partícula muda com respeito ao campo de fundo.

Atualmente, muitos físicos teóricos têm explorado possíveis efeitos de violação de Lorentz em vários contextos da física da matéria condensada à cosmologia. Enquanto, os físicos experimentais têm procurado evidências de tal violação em experimentos de alta precisão em sistemas de baixas energias nos maiores centros de física experimental do mundo. Essa procura incessante tem motivado inúmeros físicos, que objetivam inexoravelmente encontrar sinais significantes para uma nova física válida na escala de Planck. De fato, é difícil precisar as pequenas correções devidas à violação de Lorentz por causa dos vários empecilhos tecnológicos atuais. Por outro lado, os sinais dessa quebra deverão apontar novos caminhos para a Física além do MP e uma das possíveis candidatas para descrever a física na escala de Planck, além da teoria das cordas, é a Gravitação Quântica em *loop*, que tenta conciliar a TRG com a MQ e que se baseia na idéia de quantizar o espaço-tempo.

1.2 Setor de gauge do Modelo Padrão Estendido

Nesta seção, apresentamos uma discussão sobre o setor de gauge do MPE, cuja lagrangeana é dada abaixo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu}v^\alpha A^\mu \partial^\beta A^\nu}_{\text{CPT-ímpar}} - \underbrace{\frac{1}{4}K_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}}_{\text{CPT-par}} - A^\mu J_\mu \quad (1.1)$$

onde ($F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$) é o tensor do campo eletromagnético, o segundo termo é o termo de Carroll-Field-Jackiw (CFJ), o terceiro é o termo CPT-par do MPE, enquanto $J_\alpha A^\alpha$ representa o termo usual de interação do campo com as fontes. Vale destacar que esta lagrangiana é invariante sob a transformação de gauge $U(1)$ do tipo $A^\alpha \rightarrow A^\alpha + \partial^\alpha \Lambda$.

Podemos dizer que os estudos do setor de gauge do MPE iniciaram-se pelo termo de Carroll-Field-Jackiw [3], $\varepsilon_{\beta\alpha\rho\varphi}V^\beta A^\alpha F^{\rho\varphi}$, onde o 4-vetor V^β representa o "background" violador de Lorentz, que tem dimensão de massa igual a +1. Este termo é CPT-ímpar e paridade-ímpar. É interessante destacar que a magnitude deste parâmetro de quebra é estritamente limitada por dados observacionais de birrefringência de luz proveniente de sistemas astronômicos longínquos ($V^\beta \leq 10^{-33}eV$). Contudo, dada a elegância acadêmica desta teoria, denominada de eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw [3], este termo e suas implicações foram intensamente estudados na literatura, sendo examinado em diversos aspectos e perspectivas. Esta eletrodinâmica teve a sua consistência (causali-

dade, estabilidade e unitariedade) analisada por Adam & Klinkharmer [4], sendo demonstrada que a mesma é estável, causal e unitária somente quando o campo de fundo é tipo-espaço, $V^\alpha = (0; \mathbf{v})$. Foi também muito discutida a controvérsia da geração radiativa do termo CFJ por integrações nos férmions considerando-se a VSL no setor de Dirac, questão de interesse acadêmico discutida em diversos trabalhos na literatura [6]. Além disto, foi demonstrada que esta eletrodinâmica admite radiação Cerenkov no vácuo [44], foram calculadas soluções clássicas desta eletrodinâmica [7, 8], e estudo desta teoria à temperatura finita com cálculo da distribuição Planck modificada [9].

O setor de gauge do MPE é também composto pelo termo CPT-par da lagrangiana (1.1), $K_{\alpha\nu\rho\varphi} F^{\alpha\nu} F^{\rho\varphi}$, em que o coeficiente tensorial $K_{\alpha\nu\rho\varphi}$ é adimensional e exhibe as mesmas simetrias do tensor de Riemann, dadas abaixo:

$$K_{\alpha\nu\rho\varphi} = -K_{\nu\alpha\rho\varphi}, \quad K_{\alpha\nu\rho\varphi} = -K_{\alpha\nu\varphi\rho}, \quad K_{\alpha\nu\rho\varphi} = K_{\rho\varphi\alpha\nu}, \quad (1.2)$$

$$K_{\alpha\nu\rho\varphi} + K_{\alpha\rho\varphi\nu} + K_{\alpha\varphi\nu\rho} = 0, \quad (1.3)$$

o que implica em 20 componentes independentes. Este tensor tem ainda um duplo traço nulo

$$K_{\alpha\nu}{}^{\alpha\nu} = 0, \quad (1.4)$$

o que resulta em 19 componentes independentes. Quando consideramos o termo CPT-ímpar nulo, a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\alpha)} = 0, \quad (1.5)$$

fornece a seguinte equação de movimento para a lagrangeana (1.1):

$$\partial_\nu F^{\nu\alpha} - K^{\alpha\nu\rho\lambda} \partial_\nu F_{\rho\lambda} = J^\alpha, \quad (1.6)$$

que implica em equações de onda e equações de Maxwell modificadas, estudadas nas Refs.[10],[11]. Em termos do 4-vetor potencial, encontramos:

$$\square A^\alpha - 2K^{\alpha\nu\rho\lambda} \partial_\nu \partial_\rho A_\lambda = J^\alpha. \quad (1.7)$$

As propriedades do setor CPT-par do MPE foram primeiramente estudadas em 2001, por Kostelecky e Mewes [12], em que analisaram as componentes birrefringentes (10) e não-birrefringentes (9) deste setor. Componentes birrefringentes são aquelas que determinam birrefringência (rotação no plano de polarização da luz ocasionada pelo fato dos modos físicos de polarização propagarem-se com diferentes velocidades de fase). Portanto, a birrefringência está associada a alterações na relação de dispersão da teoria,

embora se saiba que nem toda relação de dispersão modificada produz o efeito. O primeiro estudo detalhado relacionando violação de Lorentz e birrefringência foi realizado por Carroll-Field-Jackiw [3], sendo esta uma referência obrigatória para entender tal questão. Como demonstrado nesta referência, o efeito de rotação do plano de polarização é proporcional à distância percorrida pela luz. Analisando-se a luz advinda de galáxias distantes, situadas a cerca de 10^{10} anos-luz da Terra, estes autores foram capazes de estabelecer uma fortíssima limitação na magnitude do coeficiente de violação ($V^\beta \leq 10^{-33} eV$). Procedimentos similares podem ser implementados para qualquer coeficiente de VSL que produza birrefringência. Consequentemente, estes são os coeficientes de violação que são mais fortemente limitados. De fato, nas Refs. [12], [13] mostra-se que estes coeficientes são menores que 10^{-27} . Atualmente, sabemos que o estudo de birrefringência é o mecanismo que leva a restrições mais severas nos coeficientes de violação, sejam estes quais forem. Depois dos trabalhos iniciais de Kostelecky e Mewes, o setor CPT-par passou a ser mais estudado, tornando-se atualmente o centro das atenções no que se concerne ao setor fotônico do MPE.

Os autores Q. G. Bailey e V. A. Kostelecky analisaram as propriedades resultantes da eletromagnetostática advindas deste termo violador. Além disso, estudos teóricos mostraram que este termo fornece contribuições positivas para a energia e pode ser induzido radiativamente do setor fermiônico do MPE.

No artigo pioneiro [12], Kostelecky e Mewes apresentaram uma prescrição que permite organizar os 19 termos do tensor $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$ em quatro matrizes 3×3 , de forma a facilitar a sua manipulação. Nesta prescrição, o tensor $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$ é escrito em termos das matrizes $\kappa_{DE}, \kappa_{DB}, \kappa_{HE}, \kappa_{HB}$, aqui definidas como:

$$(\kappa_{DE})_{ij} = -2K_{0i0j}, \quad (\kappa_{HB})^{mn} = \frac{1}{2}K_{ijkl}\varepsilon^{0ijm}\varepsilon^{0kln}, \quad (1.8)$$

$$(\kappa_{DB})_i^l = K_{0ijk}\varepsilon^{0jkl}, \quad (\kappa_{DB})_{ij} = -(\kappa_{HE})_{ji}. \quad (1.9)$$

As matrizes κ_{DE}, κ_{HB} congregam as componentes paridade-par, que são 11 no total, enquanto as matrizes κ_{DB}, κ_{HE} são compostas pelas 8 componentes paridade-ímpar desta teoria. Observe que as quatro matrizes possuem no total 19 elementos, como deveria ser. Estas 4 matrizes podem ser escritas em termos de quatro outras matrizes 3×3 de traço

nulo, que explicitam a paridade das suas componentes, estando dadas a seguir:

$$(\kappa_{e+})_{ij} = \frac{1}{2}(\kappa_{DE} + \kappa_{HB})_{ij}, \quad (\kappa_{e-})_{ij} = \frac{1}{2}(\kappa_{DE} - \kappa_{HB})_{ij} + g_{ij}\kappa_{tr}, \quad (1.10)$$

$$(\kappa_{o+})_{ij} = \frac{1}{2}(\kappa_{DB} + \kappa_{HE})_{ij}, \quad (\kappa_{o-})_{ij} = \frac{1}{2}(\kappa_{DB} - \kappa_{HE})_{ij}, \quad (1.11)$$

$$(\kappa_{tr}) = -\frac{1}{3}(\kappa_{DE})_i{}^i = \frac{1}{3}(\kappa_{DE})_{ii}. \quad (1.12)$$

As matrizes (κ_{e+}) , (κ_{e-}) , são paridade-par, enquanto (κ_{o+}) e (κ_{o-}) são paridade-ímpar. O elemento (κ_{tr}) é um coeficiente paridade-par que representa o traço da matriz κ_{DE} . A definição (1.9) permite facilmente ver que a matriz (κ_{o+}) é anti-simétrica. Por outro lado, a definição (1.8) e as simetrias do tensor $K_{\alpha\nu\rho\varphi}$ permitem perceber que as matrizes (κ_{e+}) , (κ_{e-}) , (κ_{o-}) são simétricas. A lagrangeana (1.1) pode ser escrita em função das matrizes, κ_{DE} , κ_{DB} e κ_{HB} , como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot (\kappa_{DE}) \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{2}\mathbf{B} \cdot (\kappa_{HB}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot (\kappa_{DB}) \cdot \mathbf{B} - \rho A_0 + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}, \quad (1.13)$$

ou em função das matrizes (κ_{e+}) , (κ_{e-}) , (κ_{o+}) e (κ_{o-}) , e do coeficiente (κ_{tr}) como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} [(1 + \kappa_{tr}) \mathbf{E}^2 - (1 - \kappa_{tr}) \mathbf{B}^2] + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot (\kappa_{e+} + \kappa_{e-}) \cdot \mathbf{E} \\ & - \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot (\kappa_{e+} - \kappa_{e-}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot (\kappa_{o+} + \kappa_{o-}) \cdot \mathbf{B} - \rho A_0 + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Das 19 componentes CPT-par, 10 são birrefringentes, pertencentes às matrizes κ_{e+} e κ_{o-} , e são extremamente limitadas (ao nível de 1 parte em 10^{32}). Vide Refs. [12, 13, 14]. Em detalhes: das 11 componentes das matrizes κ_{e+} , κ_{e-} , cinco são limitadas por birrefringência, restando 6 coeficientes não-birrefringentes. Por outro lado, as matrizes κ_{o-} e κ_{o+} comportam oito elementos, dos quais cinco são restritos por birrefringência, restando 3 coeficientes chamados de não-birrefringentes. Atualmente, uma boa parcela dos estudos sobre o setor CPT-par é focalizada nas componentes não-birrefringentes, na tentativa de conseguir melhorar a limitação da magnitude destes coeficientes.

Das Refs. [12, 13], observamos que a limitação da birrefringência sobre κ_{o-} é dada na forma:

$$(\kappa_{DB} - \kappa_{HE}) \leq 10^{-32}, \quad (1.15)$$

o que é compatível com $\kappa_{DB} = \kappa_{HE} \neq 0$, que implica em $\kappa_{o-} = 0$ e $\kappa_{o+} \neq 0$, como proposto na Ref. [14]. Tomando as duas condições

$$(\kappa_{DB}) = -(\kappa_{HE})^T, \quad \kappa_{DB} = \kappa_{HE}, \quad (1.16)$$

juntas, obtemos que a matriz $\kappa_{DB} = \kappa_{HE}$ é anti-simétrica, apresentando somente três elementos não-nulos (elementos não-birrefringentes). Vemos assim que a condição de birrefringência (1.15) reduz o setor de paridade ímpar a apenas 3 componentes contidos na matriz κ_{o+} . Em várias abordagens do setor de gauge CPT-par do MPE, estes são os únicos três coeficientes considerados. Como exemplo, vide Refs.[10], [14], [15],[16], [17]. Esses três coeficientes violadores de Lorentz podem ser expressos em termos de um vetor k , cujas componentes são

$$k^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} (\kappa_{DB})_{jk} \quad (1.17)$$

Explicitando as componentes, temos:

$$(\kappa_{DB})_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & k^{(3)} & -k^{(2)} \\ -k^{(3)} & 0 & k^{(1)} \\ k^{(2)} & -k^{(1)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

A presente restrição ao setor paridade-ímpar é equivalente a considerar

$$(\kappa_{e+})^{jk} = (\kappa_{e-})^{jk} = (\kappa_{o-})^{jk} = \kappa_{tr} = 0, \quad (\kappa_{o+})^{jk} = (\kappa_{DB})^{jk}. \quad (1.19)$$

Neste contexto, as equações de Maxwell modificadas são escritas como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \rho, \quad (1.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t (\mathbf{B} \times \mathbf{k}) - \partial_t \mathbf{E} + \nabla \times (\mathbf{E} \times \mathbf{k}) = \mathbf{j}, \quad (1.21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.22)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad (1.23)$$

e são o ponto de partida para estudar as soluções clássicas desta eletrodinâmica. Neste caso, verifica-se que a densidade de carga ρ atuará como fonte não apenas do campo \mathbf{E} , também será do campo magnético (\mathbf{B}), o mesmo valendo para a densidade de corrente \mathbf{j} , que atua como fonte tanto dos campos \mathbf{B} e \mathbf{E} . As soluções estacionárias desta eletrodinâmica para carga pontual e suas expansões dipolares (para cargas espacialmente estendidas) estão calculadas na Ref. [10], onde sugeriu-se a realização de um experimento magnetostático capaz de conduzir a um ótimo limite superior para o parâmetro de violação, $k^j \leq 10^{-16}$.

Atualmente, os coeficientes não-birrefringentes k^j são limitados por experimentos de cavidades de micro-onda [12], que impõem $k^j \leq 10^{-12}$, e pela ausência da radiação Cerenkov no vácuo para raios cósmicos ultra-energéticos [18], que impõe $k^j <$

$10^{-17} - 10^{-18}$. Na Ref. [15], foi calculado o propagador da eletrodinâmica representada pela Lagrangeana (1.13), particularizada para o caso em que o tensor reduz-se ao vetor \mathbf{k} . Neste caso, obtivemos as seguintes relações de dispersão:

$$[p^2 + 2p_0 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{p})] = 0, \quad (1.24)$$

$$[p^2 + 2p_0 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{k}^2 \mathbf{p}^2 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{p})^2] = 0, \quad (1.25)$$

que em primeira ordem recaem em:

$$p_{0\pm} = |\mathbf{p}| \mp (\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}). \quad (1.26)$$

Estas relações foram primeiramente deduzidas nas Refs. [15], [16], tendo sido recentemente usada pelos autores da Ref. [17] para estabelecer o seguinte limite superior de $\kappa^j < 10^{-14}$, em experimentos usando o efeito "edge-Compton effect".

Além das três componentes birefringentes contidas no setor paridade-ímpar, há 6 componentes não birefringentes no setor paridade-par, contidas na matriz κ_{e-} e no elemento κ_{tr} . Este setor é parametrizado pela relação

$$(\kappa_{e-})_{ij} = (\kappa_{DE})_{ij} + g_{ij} \kappa_{tr}, \quad (1.27)$$

onde $(\kappa_{tr}) = -\frac{1}{3}(\kappa_{DE})_i^i$. Para as componentes anisotrópicas paridade-par, e lembrando que tomamos as matrizes $\kappa_{o-} = \kappa_{e-} = 0$, temos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot (\kappa_{e+}) \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot (\kappa_{e+}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot (\kappa_{o+}) \cdot \mathbf{B} - \rho A_0 + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}. \quad (1.28)$$

As equações de movimento, escritas para o potencial escalar e potencial vetor, são:

$$\left[(1 + \kappa_{tr}) \partial_t^2 - (1 + \kappa_{tr}) \nabla^2 - (\kappa_{e-})^{ij} \partial_i \partial_j \right] A_0 - (\kappa_{e-})^{ij} \partial_i \partial_t A^j = \rho, \quad (1.29)$$

$$\left[(1 + \kappa_{tr}) \partial_t^2 - (1 - \kappa_{tr}) \nabla^2 \right] A^i + 2\kappa_{tr} \partial_t (\nabla A_0)^i - (\kappa_{e-})^{ij} \partial_t E^j + \epsilon^{ipj} (\kappa_{e-})^{jl} \partial_p B_l = j^i, \quad (1.30)$$

que no regime estacionário são reduzidas a:

$$\left[(1 + \kappa_{tr}) \nabla^2 + (\kappa_{e-})^{ij} \partial_i \partial_j \right] A_0 = -\rho, \quad (1.31)$$

$$\left[(1 - \kappa_{tr}) \nabla^2 \right] A^i - \epsilon^{ipj} (\kappa_{e-})^{jl} \partial_p B_l = -j^i. \quad (1.32)$$

Estas equações revelam que no regime estacionário o setor elétrico e magnético são desacoplados, diferentemente do que ocorre com a eletrodinâmica do setor paridade-ímpar

que é totalmente acoplado (veja Ref. [10]). Aplicando o operador diferencial $\epsilon_{abi}\partial_b$ a Eq. (1.32), obtemos a seguinte equação diferencial para o campo magnético:

$$\left[\left((1 - \kappa_{tr})\delta_{al} - (\kappa_{e-})^{al} \right) \nabla^2 + (\kappa_{e-})^{jl} \partial_a \partial_j \right] B^l = - (\nabla \times j)^a. \quad (1.33)$$

Sabemos que as equações de Maxwell homogêneas ($\nabla \times E + \partial_t B = 0$, $\nabla \cdot B = 0$) permanecem inalteradas, enquanto as homogêneas (Gauss e Ampere) são alteradas para:

$$(1 + \kappa_{tr})\nabla \cdot \mathbf{E} + (\kappa_{e-})^{ij} \partial_i E^j = \rho, \quad (1.34)$$

$$-(1 + \kappa_{tr})\partial_t E^i + (1 - \kappa_{tr})(\nabla \times B)^i - \epsilon^{ijr} (\kappa_{e-})^{rl} \partial_j B_l - (\kappa_{e-})^{iq} \partial_t E^q = j^i. \quad (1.35)$$

No regime estacionário, a última equação reduz-se a

$$(1 - \kappa_{tr})(\nabla \times B)^i + \epsilon^{ijr} (\kappa_{e-})^{rl} \partial_j B^l = j^i,$$

que sob a ação do operador rotacional ($\epsilon_{abi}\partial_b$) fornece a mesma expressão da Eq. (1.33). As soluções destas equações foram obtidas na Ref.[11], onde também estão discutidas suas principais propriedades.

1.3 As componentes não birefringentes setor CPT-par do MPE

Como já sabemos, a lagrangeana do setor de gauge CPT-par do eletromagnetismo no contexto do MPE é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}K_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} - A^\mu J_\mu, \quad (1.36)$$

Uma maneira alternativa de representar o setor CPT-par apenas por suas componentes não-birrefringentes é a seguinte:

$$K^{\lambda\nu\delta\rho} = \frac{1}{2} \left(g^{\lambda\delta} \kappa^{\nu\rho} - g^{\nu\delta} \kappa^{\lambda\rho} + g^{\nu\rho} \kappa^{\lambda\delta} - g^{\lambda\rho} \kappa^{\nu\delta} \right), \quad (1.37)$$

parametrização esta encontrada na Ref. [19], onde $\kappa^{\nu\rho}$ é uma matriz de traço nulo que contém todas as componentes não-birrefringentes do tensor K , e pode ser representada por:

$$\kappa^{\mu\nu} = (K)_\alpha^{\mu\alpha\nu}. \quad (1.38)$$

O tensor $K_{\mu\nu\alpha\beta}$ continua tendo as simetrias das Eqs.(1.2-1.4). Expandindo o termo CPT-par da lagrangeana (1.36) e usando as relações anteriores, obtemos:

$$-\frac{1}{4}K_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\kappa_{ij} + g_{ij}\kappa_{00})E^iE^j + \varepsilon_{0ijk}\kappa^{0k}E^iB^j - \frac{1}{2}(\kappa_{00}g_{ij} + \kappa_{ij})B^iB^j, \quad (1.39)$$

Como visto anteriormente, os termos que surgem desta expansão são usados para definir as seguintes matrizes:

$$(\kappa_{DE})_{ij} = -(\kappa_{00}g_{ij} + \kappa_{ij}), \quad (1.40)$$

$$(\kappa_{DB})_{ij} = \varepsilon_{0ijk}\kappa^{0k}, \quad (1.41)$$

$$(\kappa_{HB})_{ij} = \kappa_{00}g_{ij} + \kappa_{ij}. \quad (1.42)$$

Em termos destas matrizes, a relação anterior fica:

$$-\frac{1}{4}K_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\kappa_{DE})_{ij}E^iE^j + (\kappa_{DB})_{il}E^iB^l - \frac{1}{2}(\kappa_{HB})^{mn}B_mB_n. \quad (1.43)$$

Ainda teremos as matrizes do setor de paridade par:

$$(\tilde{\kappa}_{e+})_{ij} = 0, \quad (1.44)$$

$$(\kappa_{e-})_{ij} = -\kappa_{ij} - \frac{1}{3}\kappa_{00}g_{ij}, \quad (1.45)$$

$$\kappa_{tr} = \frac{2}{3}\kappa_{00}, \quad (1.46)$$

e também as matrizes do setor de paridade-ímpar:

$$(\kappa_{o+})_{ij} = \kappa^{0k}\varepsilon_{0ijk}, \quad (1.47)$$

$$(\kappa_{o-})_{ij} = 0, \quad (1.48)$$

$$k_i = -\kappa_{0i}. \quad (1.49)$$

Vemos que esta parametrização reproduz perfeitamente as componentes não-birrefringentes do tensor $K^{\lambda\nu\delta\rho}$. No Cap. IV, será analisado como estas componentes não-birrefringentes alteram alguns processos elementares de espalhamento da QED.

2 Uma breve introdução da teoria diagramática de Feynman

2.1 Introdução

Em física, muitas vezes estamos interessados em saber como uma partícula avança num sentido clássico ou, como evolui um determinado estado num sentido quântico[20]. Uma estratégia para isso é dividir este processo em etapas e estudar cada etapa separadamente. Um exemplo clássico seria o ilustrado na figura abaixo:

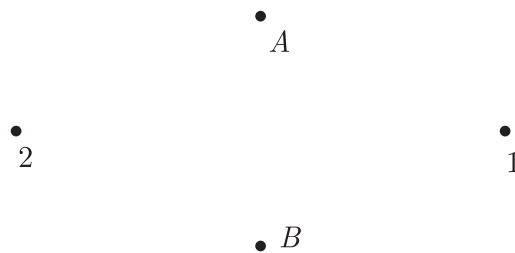


Figura 2.1: 1 é o ponto de partida e 2 é o ponto de chegada. A e B são possíveis destinos intermediários.

Estamos interessados em calcular a probabilidade $P(1, 2)$, que significa a probabilidade de uma partícula que está inicialmente em 1 ser encontrada posteriormente em 2, onde sabemos: $P_0(1, 2)$, a probabilidade de a partícula inicialmente em 1 ser encontrada em 2 sem passar por outro lugar antes; $P(A)$, peso associado ao ponto A ou interação com o ponto A e etc. Com isso podemos considerar que, se em princípio, a partícula passa no máximo por um lugar antes de chegar em 2 temos:

$$P(1, 2) \approx P_0(1, 2) + P_0(1, A) P(A) P_0(A, 2) + P_0(1, B) P(B) P_0(B, 2) \quad (2.1)$$

Se quisermos, podemos ainda considerar a possibilidade de duas ou mais etapas ou de mais interações. Nesta situação a probabilidade $P(1, 2)$ é:

$$\begin{aligned}
 P(1, 2) &= P_0(1, 2) + P_0(1, A) P(A) P_0(A, 2) + P_0(1, B) P(B) P_0(B, 2) + \\
 &+ P_0(1, A) P(A) P_0(A, A) P(A) P_0(A, 1) + \dots \\
 &+ P_0(1, A) P(A) P_0(A, B) P(B) P_0(B, 2) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Isso pode ser transcrito na série de diagramas que observamos na figura (2.2):

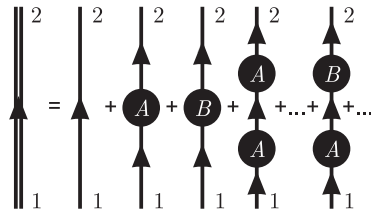


Figura 2.2: $P(1, 2)$ na linguagem de diagramas.

podemos agora montar um dicionário de significados:

Objeto	Diagrama	Significado
$P(1, 2)$		Probabilidade de propagação de 1 até 2
$P_0(1, A)$		Probabilidade de propagação de m até n
$P(X)$		Probabilidade de interação com X

Tabela 2.1:

Agora consideramos que $P(1, 2) = P(1, A) = P(A, 2) = P(A, 2) = c$ e que $P(B) \ll 1$:

$$P(1, 2) = c + c^2 P(A) + c^3 P(A)^2 + \dots = c \times (1 + cP(A) + c^2 P(A)^2), \tag{2.3}$$

que é uma serie geométrica e podemos chegar ao resultado:

$$P(1, 2) = \frac{1}{c^{-1} + P(A)}, \tag{2.4}$$

ou na linguagem dos diagramas:

$$\begin{aligned}
 \text{Diagrama} &= \text{Diagrama} \times \left(\text{Diagrama} + \left(\text{Diagrama} \circledast \text{Diagrama} \right) + \left(\text{Diagrama} \circledast \text{Diagrama} \right)^2 + \dots \right) \\
 \text{Diagrama} &= \frac{1}{\text{Diagrama}^{-1} + \text{Diagrama}}
 \end{aligned}$$

2.2 Os propagadores e amplitudes

Uma diferença básica entre a física clássica e física quântica é que, na física clássica, se temos um processo como o representado pela Figura (2.1), para calcularmos a probabilidade total, somamos todas as probabilidades intermediárias.

$$P_{\text{clássica}} = P_1 + P_2 + P_3 \dots \quad (2.5)$$

Já em mecânica quântica, se temos uma amplitude \mathcal{M} a probabilidade será dada por $P = \mathcal{M}^* \mathcal{M} = |\mathcal{M}|^2$ e o que somamos são as amplitudes individuais de cada processo assim:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3 \dots \quad (2.6)$$

Com isso temos:

$$\mathcal{M}^* \mathcal{M} = |\mathcal{M}_1|^2 + |\mathcal{M}_2|^2 + |\mathcal{M}_3|^2 + \dots + \mathcal{M}_2^* \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_3^* \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2 + \dots \quad (2.7)$$

$$P_{\text{quântica}} = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + \text{termos de interência.} \quad (2.8)$$

Neste ponto podemos aproveitar para definir o significado do propagador da seguinte forma: dado $iG(x, x', t, t')$, esta quantidade representa a amplitude de probabilidade de uma partícula colocada em x num instante t , ser detectada em x' num instante posterior t' . A quantidade i é colocada apenas por convenção. Esse propagador deve satisfazer a condição de ser 0 para $t' < t$. Isso garante que o sistema só se propaga para o futuro. Em sessões posteriores iremos sobre esse assunto. De outra forma também podemos definir um propagador assim: dado $iG(\psi, \psi', t, t')$, esta quantidade representa a amplitude de probabilidade de um sistema quântico preparado em um estado $|\psi\rangle$ no instante t , ser encontrado num estado $|\psi'\rangle$ em um tempo posterior t' . Vejamos o seguinte exemplo: Inicialmente temos o estado:

$$|\psi\rangle = e^{-iE_k t} |k\rangle, \quad (2.9)$$

onde $|k\rangle$ representa um auto estado da energia. Se posteriormente tivermos,

$$|\psi'\rangle = e^{-iE_{k'} t'} |k'\rangle, \quad (2.10)$$

encontramos:

$$iG(\psi', \psi, t', t) = \langle \psi' | \psi \rangle = e^{iE_{k'} t'} e^{-iE_k t} \langle k' | k \rangle \quad (2.11)$$

Se resolvermos contar o tempo a partir de t , então:

$$iG(\psi, \psi', t' - t) = \langle \psi | \psi' \rangle = e^{iE_{k'} (t' - t)} \langle k | k' \rangle. \quad (2.12)$$

Este propagador recebe o nome de propagador avançado. Para maiores detalhes sobre classificação de propagadores consulte a referencia[21]. Considerando que os auto vetores são normalizados, podemos definir para o caso em que $k' = k$:

$$iG(k, t' - t) = e^{iE_k(t'-t)}\theta(t' - t), \quad (2.13)$$

onde

$$\theta(t' - t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t' - t < 0 \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (2.14)$$

Podemos passar para o espaço de Fourier:

$$iG(k, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d(t' - t) e^{i(E_k + i\varepsilon)(t'-t)}\theta(t' - t) e^{i\omega(t'-t)}, \quad (2.15)$$

onde o parâmetro ε é positivo e infinitesimal. Esse parâmetro é colocado para garantir que o nosso propagador esteja bem definido.

$$iG(k, \omega) = \int_0^{\infty} d(t' - t) e^{i(E_k + i\varepsilon + \omega)(t'-t)} = -\frac{1}{i(E_k + i\varepsilon + \omega)}, \quad (2.16)$$

$$G(k, \omega) = \frac{1}{(E_k + i\varepsilon + \omega)}. \quad (2.17)$$

2.3 Campo escalar

Na década de 1920, os cientistas buscavam por uma equação de onda. Uma solução encontrada para isso foi a equação de Schrödinger, que no caso da partícula livre é usada a seguinte prescrição operatorial para encontrá-la:

$$\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla}, \quad E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.18)$$

Assim, encontramos:

$$\frac{p^2}{2m}\psi = E\psi, \quad -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi = i\dot{\psi}. \quad (2.19)$$

Essa equação se mostrou e mostra-se boa até hoje pelas razões que veremos abaixo. Primeiro multiplicamos pelo complexo conjugado de ψ :

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi\psi^* = i\dot{\psi}\psi^*. \quad (2.20)$$

Agora tomamos o complexo conjugado dessa expressão:

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi^*\psi = -i\dot{\psi}^*\psi, \quad (2.21)$$

e então subtraímos as duas,

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi\psi^* + \frac{1}{2m}\nabla^2\psi^*\psi = i\left(\dot{\psi}\psi^* + \dot{\psi}^*\psi\right). \quad (2.22)$$

Após alguma álgebra:

$$\frac{i}{2m}\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla}\psi^*\psi - \vec{\nabla}\psi\psi^*\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\psi\psi^*), \quad (2.23)$$

que está na forma de uma equação de continuidade, onde:

$$\rho = \psi\psi^*, \quad (2.24)$$

$$\vec{J} = \frac{i}{2m}\left(\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\vec{\nabla}\psi\right) = -\frac{1}{m}Im\left(\psi\vec{\nabla}\psi^*\right), \quad (2.25)$$

e ρ é positivo definido. Com isso podemos fazer a seguinte interpretação:

$$P = \int_V \rho d^3x = \int_V \psi\psi^* d^3x, \quad (2.26)$$

onde P é a probabilidade de encontrarmos a partícula dentro do volume de integração. Agora, vamos tentar dar um passo além, tentar encontrar uma equação de onda que seja explicitamente relativística. Para isso, usamos a mesma prescrição, apenas um pouco modificada:

$$p_\mu \rightarrow i\partial_\mu. \quad (2.27)$$

Com isso temos:

$$p_\mu p^\mu = m^2, \quad (2.28)$$

$$-\partial_\mu \partial^\mu \varphi = m^2 \varphi, \quad (2.29)$$

que é a chamada equação de Klein-Gordon. Continuando, faremos a mesma verificação com a equação de Schrödinger. Multiplicando pela forma complexo conjugada:

$$-\partial_\mu \partial^\mu \varphi \varphi^* = m^2 \varphi \varphi^*, \quad (2.30)$$

agora tomamos o complexo conjugado da expressão:

$$-\partial_\mu \partial^\mu \varphi^* \varphi = m^2 \varphi^* \varphi, \quad (2.31)$$

subtraindo as duas,

$$-\partial_\mu \partial^\mu \varphi \varphi^* + \partial_\mu \partial^\mu \varphi^* \varphi = 0, \quad (2.32)$$

$$\partial_\mu (\varphi \partial^\mu \varphi^* - \varphi^* \partial^\mu \varphi) = 0, \quad (2.33)$$

que também está na forma de uma equação de continuidade:

$$J^\mu = -i(\varphi \partial^\mu \varphi^* - \varphi^* \partial^\mu \varphi) = 2Im(\varphi \partial^\mu \varphi^*). \quad (2.34)$$

Neste caso, se resolvemos fazer uma interpretação probabilística de J^0 , encontramos a seguinte dificuldade:

$$J^0 = 2Im(\varphi \partial^0 \varphi^*), \quad (2.35)$$

que não é uma quantidade positiva definida como antes. Vejamos o caso das soluções de onda plana:

$$\varphi = ne^{-ip^\nu x_\nu}, \quad (2.36)$$

substituindo na equação de Klein-Gordon:

$$-n\partial_\mu \partial^\mu (e^{-ip^\nu x_\nu}) = nm^2 e^{-ip^\nu x_\nu}, \quad (2.37)$$

$$p_\mu p^\mu = m^2, \quad (2.38)$$

$$E = \pm \sqrt{m^2 + p^2}, \quad (2.39)$$

e J^0 fica:

$$J^0 = 2Im(\varphi \partial^0 \varphi^*) = 2E |n|^2. \quad (2.40)$$

Devido a essa problemática, a equação de Klein-Gordon foi deixada de lado por um tempo, voltando posteriormente numa interpretação de campo.

2.4 A equação de Dirac

Continuando a busca por uma equação de onda relativística, sabia-se que era necessária uma equação de primeira ordem no tempo. Para isso, foi feita a seguinte proposta:

$$(p^\mu p_\mu - m^2) \varphi = (\beta^\alpha p_\alpha + m) (\gamma^\beta p_\beta - m) \varphi, \quad (2.41)$$

$$(p^\mu p_\mu - m^2) \varphi = (\beta^\alpha p_\alpha \gamma^\beta p_\beta - m(\beta^\alpha - \gamma^\alpha) p_\alpha - m^2) \varphi. \quad (2.42)$$

Não devemos ter termos de primeira ordem em m . Como consequência disso, devemos ter: $\beta^\alpha = \gamma^\alpha$ Continuando temos:

$$(\gamma^\alpha \gamma^\beta p_\alpha p_\beta - m^2) \varphi. \quad (2.43)$$

Poderíamos propor o seguinte:

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta = g^{\alpha\beta}, \quad (2.44)$$

e testar. Devemos ter:

$$\gamma^0 \gamma^i = 0. \quad (2.45)$$

Se escolhêssemos $\gamma^0 = 0$ anularíamos a componente g^{00} e se escolhêssemos $\gamma^i = 0$ anularíamos as componentes g^{ii} , ou seja, a métrica não poderia ser construída dessa forma. Um próximo passo é elevar essas variáveis ao patamar de matrizes. Como de modo geral, matrizes não são comutantes e a métrica é simétrica, uma tentativa poderia ser:

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha = 2g^{\alpha\beta}. \quad (2.46)$$

Se usamos isso na expressão (2.43):

$$(\gamma^\alpha \gamma^\beta p_\alpha p_\beta - m^2) \varphi, \quad (2.47)$$

$$\left(\frac{1}{2} (\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha) p_\alpha p_\beta - m^2 \right) \varphi, \quad (2.48)$$

$$(g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta - m^2) \varphi = (p^\beta p_\beta - m^2) \varphi, \quad (2.49)$$

temos recuperada a equação de Klein-Gordon. Então, em vez de resolvermos esta equação de segunda ordem, resolvemos esta de primeira ordem:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) \psi = 0 \rightarrow (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0, \quad (2.50)$$

que é a chamada equação de Dirac e ψ é o spinor de Dirac. As matrizes gamma são num total de quatro matrizes quadradas de ordem 4. Em nossa convenção, são definidas assim:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Ou de forma mais compacta:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

onde σ^i são as matrizes de Pauli. Também podemos neste caso verificar a existência de uma corrente conservada. Para isto, partimos de (2.50)

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0. \quad (2.54)$$

Agora, tomamos o adjunto hermetiano da expressão:

$$-i(\partial_\mu \psi^\dagger)(\gamma^\mu)^\dagger - m\psi^\dagger = 0. \quad (2.55)$$

As matrizes gamma satisfazem a expressão (veja apêndice):

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0, \quad (2.56)$$

de modo que a eq.(2.55) é escrita como:

$$-i(\partial_\mu \psi^\dagger) \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 - m\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 = 0, \quad (2.57)$$

onde usamos $(\gamma^0)^2 = 1$. Aqui definimos o espinor conjugado:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0. \quad (2.58)$$

Com isso, temos:

$$-i(\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^0 - m\bar{\psi} \gamma^0 = 0. \quad (2.59)$$

Logo:

$$-i(\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu - m\bar{\psi} = 0. \quad (2.60)$$

Esta é a chamada equação de Dirac adjunta. Multiplicandoa eq. (2.54) por $\bar{\psi}$ pela esquerda e a eq. (2.60) por ψ pela direita, temos:

$$i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi = 0, \quad (2.61)$$

$$-i(\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi - m\bar{\psi} \psi = 0 \quad (2.62)$$

Subtraindo as duas, resulta:

$$\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0, \quad (2.63)$$

onde temos a corrente de Dirac (corrente associadas às partículas de spin-1/2) é dada por:

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (2.64)$$

A componente J^0 dessa vez pode ser interpretada com uma densidade de probabilidade sem problemas, já que é positivo-definida:

$$J^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2. \quad (2.65)$$

2.4.1 A equação de Dirac para a partícula livre

Agora buscamos soluções de onda plana para a equação de Dirac. Para isso, vamos propor que a solução tem essa forma:

$$\psi = e^{-ip^\mu x_\mu} u, \quad (2.66)$$

onde:

$$u = n \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

Substituindo na equação de Dirac :

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u = 0, \quad (2.68)$$

$$\begin{pmatrix} E - m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0. \quad (2.69)$$

Estamos interessados em soluções não triviais da equação de Dirac. Para isso devemos ter:

$$\det \begin{pmatrix} E - m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -E - m \end{pmatrix} = 0, \quad (2.70)$$

$$-(E^2 - m^2) + |\vec{p}|^2 = 0. \quad (2.71)$$

Aqui foi usado que $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = |\vec{p}|^2$. Continuando:

$$E = \pm \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}. \quad (2.72)$$

Embora tenhamos resolvido a problemática da probabilidade negativa, as energias negativas ainda estão presentes no modelo. Mais à frente vamos ver como contornar esta situação. Seguindo adiante:

$$\begin{pmatrix} (E - m) \varphi - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi - (E + m) \chi \end{pmatrix} = 0. \quad (2.73)$$

Aqui podemos fazer duas escolhas:

$$\varphi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{(E - m)} \chi, \quad (2.74)$$

$$\chi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi}{(E + m)}. \quad (2.75)$$

Sendo (2.74) adequada a energias negativas e (2.75) adequada a energias positivas. Com isso ,ficamos:

$$\psi_{E>0} = ne^{-ip^\mu x_\mu} \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi}{(E+m)} \end{pmatrix}, \quad (2.76)$$

$$\psi_{E<0} = ne^{-ip^\mu x_\mu} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi}{(E-m)} \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (2.77)$$

Aqui voltamos à questão da energia negativa. Um problema de uma teoria com energia negativa é que as partículas, preferencialmente, estariam nestes estados de energia. Para resolver esse problema, Dirac postulou o que ficou conhecido como mar de Dirac, onde se tinha todos os estados de energia negativa já ocupados, e se fosse dada energia suficiente para um elétron num estado de energia negativa, ele seria encontrado com energia positiva e a lacuna deixada nos estados de energia negativa seria interpretado com um pósitron de energia positiva. Embora fosse razoável o argumento de Dirac, ele se baseava no princípio de exclusão de Pauli que é válido para férmions, mas não para bósons, logo fracassando no caso de bósons. Tempos depois, foi dada uma nova interpretação para os estados de energia negativa, onde se tinha um elétron de energia negativa viajando para o passado seria equivalente a um pósitron com energia positiva viajando para o futuro. Esse enunciado ficou conhecido como argumento de Stückelberg-Feynman. E com isso ficamos:

Elétron:

$$\psi = ne^{-ip^\mu x_\mu} \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi}{(E+m)} \end{pmatrix}. \quad (2.78)$$

Pósitron:

$$\psi = ne^{ip^\mu x_\mu} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi}{(E+m)} \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (2.79)$$

Onde ψ para o pósitron continua satisfazendo:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_p - m\psi_p = 0. \quad (2.80)$$

Na teoria de Dirac o operador de spin é redefinido da seguinte forma:

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (2.81)$$

Também definimos o operador helicidade:

$$\Sigma = \vec{S} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \end{pmatrix}. \quad (2.82)$$

Se escolhemos escrever φ e χ em termos dos auto vetores de \vec{S} temos:

$$\vec{S}_z s_1 = +\frac{1}{2}s_1, \quad (2.83)$$

$$\vec{S}_z s_2 = -\frac{1}{2}s_2, \quad (2.84)$$

$$\varphi = a_1 s_1 + a_2 s_2, \quad (2.85)$$

$$\chi = b_1 s_1 + b_2 s_2, \quad (2.86)$$

as soluções ainda podem ser subclassificadas em:

Elétron:

$$\psi = a_1 n e^{-ip^\mu x_\mu} \underbrace{\begin{pmatrix} s_1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} s_1}{(E+m)} \end{pmatrix}}_{\psi_1} + a_2 n e^{-ip^\mu x_\mu} \underbrace{\begin{pmatrix} s_2 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} s_2}{(E+m)} \end{pmatrix}}_{\psi_2}. \quad (2.87)$$

Pósitron:

$$\psi = b_1 n e^{ip^\mu x_\mu} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} s_1}{(E+m)} \\ s_1 \end{pmatrix}}_{\psi_1} + b_2 n e^{ip^\mu x_\mu} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} s_2}{(E+m)} \\ s_2 \end{pmatrix}}_{\psi_2}. \quad (2.88)$$

Onde temos

Elétron:

$$\psi_1 = n e^{-ip^\mu x_\mu} \begin{pmatrix} s_1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} s_1}{(E+m)} \end{pmatrix} = n e^{-ip^\mu x_\mu} u_1, \quad (2.89)$$

$$\psi_2 = n e^{-ip^\mu x_\mu} \begin{pmatrix} s_2 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} s_2}{(E+m)} \end{pmatrix} = n e^{-ip^\mu x_\mu} u_2. \quad (2.90)$$

Pósitrons:

$$\psi_1 = n e^{ip^\mu x_\mu} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} s_1}{(E+m)} \\ s_1 \end{pmatrix} = n e^{ip^\mu x_\mu} v^1, \quad (2.91)$$

$$\psi_2 = n e^{ip^\mu x_\mu} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} s_2}{(E+m)} \\ s_2 \end{pmatrix} = n e^{ip^\mu x_\mu} v^2. \quad (2.92)$$

Não é muito difícil ver que esses estados não correspondem a auto-estados de spin, a não ser no referencial de repouso da partícula. Então fazemos as classificações: a solução (2.89) representa uma partícula (antipartícula) de energia positiva (negativa) e que, em seu referencial de repouso, possui projeção do spin sobre o eixo z $1/2$. A solução (2.90) representa uma partícula (antipartícula) de energia positiva (negativa) e que, em seu referencial de

repouso, possui projeção do spin sobre o eixo z $-1/2$. A solução (2.91) representa uma partícula (antipartícula) de energia negativa (positiva) e que, em seu referencial de repouso, possui projeção do spin sobre o eixo z $1/2$. A solução (2.92) representa uma partícula de energia negativa e que, em seu referencial de repouso, possui projeção do spin sobre o eixo z $-1/2$. Embora essas soluções carreguem algumas complicações fora do referencial da partícula, elas são interpretáveis e formam um conjunto completo de soluções:

Ortogonalidade:

$$\bar{u}^i u^j = 2m\delta_{ij}, \quad \bar{v}^i v^j = -2m\delta_{ij}, \quad (2.93)$$

além de:

$$(u^i)^\dagger u^j = (v^i)^\dagger v^j = 2E\delta_{ij}, \quad (2.94)$$

e completiza:

$$\sum_{i,j} u^i \bar{u}^j = \gamma^\mu p_\mu + m, \quad \sum_{i,j} v^i \bar{v}^j = \gamma^\mu p_\mu - m. \quad (2.95)$$

A constante de normalização n vai ser escolhida tal que:

$$n = \frac{1}{\sqrt{2E(2\pi)^3}}. \quad (2.96)$$

Isso garante que:

$$\int d^3x (\psi_{j,p'})^\dagger \psi_{i,p} = \delta^3(p' - p) \delta_{ij}. \quad (2.97)$$

Também temos:

$$\int d^3x (\psi_{j,p'}^{E><0})^\dagger \psi_{i,p}^{E<>0} = 0. \quad (2.98)$$

2.5 Propagador de Feynman da equação de Dirac

Uma solução geral da equação de Dirac pode ser escrita assim:

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^2 \int d^3\vec{p} A_i(\vec{p}) \psi_{i,\vec{p}}^{E>0}(x) + \sum_{j=1}^2 \int d^3\vec{p} B_j(\vec{p}) \psi_{j,\vec{p}}^{E<0}(x). \quad (2.99)$$

Multiplicando pela direita por $\psi_{k,\vec{p}'}^{E>0}(x)^\dagger$:

$$\psi_{k,\vec{p}'}^{E>0}(x)^\dagger \psi(x) = \sum_{i=1}^2 \int d^3\vec{p} A_i(\vec{p}) \psi_{k,\vec{p}'}^{E>0}(x)^\dagger \psi_{i,\vec{p}}^{E>0}(x) + \sum_{j=1}^2 \int d^3\vec{p} B_j(\vec{p}) \psi_{k,\vec{p}'}^{E>0}(x)^\dagger \psi_{j,\vec{p}}^{E<0}(x), \quad (2.100)$$

integrando em \vec{x} :

$$\int d^3\vec{x} (\psi_{k,\vec{p}'}^{E>0}(x))^\dagger \psi(x) = \sum_{i=1}^2 \int d^3\vec{p} A_i(\vec{p}) \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \delta_{ik}, \quad (2.101)$$

agora integrando em \vec{p} e fazendo o somatório:

$$\int d^3\vec{x} (\psi_{k,\vec{p}'}^{E>0}(x))^\dagger \psi(x) = A_k(\vec{p}'), \quad (2.102)$$

apenas mudando alguns rótulos:

$$A_i(\vec{p}) = \int d^3\vec{x}' (\psi_{i,\vec{p}}^{E>0}(x'))^\dagger \psi(x'). \quad (2.103)$$

De forma semelhante podemos mostrar que:

$$B_j(\vec{p}) = \int d^3\vec{x}' (\psi_{j,\vec{p}}^{E<0}(x'))^\dagger \psi(x'). \quad (2.104)$$

Substituindo em (2.99):

$$\psi(x) = \int d^3\vec{x}' \left(\sum_i \int d^3\vec{p} \psi_{i,\vec{p}}^{E>0}(x) \psi_{i,\vec{p}}^{E>0}(x')^\dagger + \sum_j \int d^3\vec{p} \psi_{j,\vec{p}}^{E<0}(x) \psi_{j,\vec{p}}^{E<0}(x')^\dagger \right) \gamma^0 \gamma^0 \psi(x'). \quad (2.105)$$

Aqui definimos:

$$iK(x, x') = \sum_i \int d^3\vec{p} \psi_{i,\vec{p}}^{E>0}(x) \bar{\psi}_{i,\vec{p}}^{E>0}(x') + \sum_j \int d^3\vec{p} \psi_{j,\vec{p}}^{E<0}(x) \bar{\psi}_{j,\vec{p}}^{E<0}(x'). \quad (2.106)$$

E com isso:

$$\psi(x) = i \int d^3\vec{x}' K(x, x') \gamma^0 \psi(x'). \quad (2.107)$$

Porém, foi observado por Feynman, que $K(x, x')$ permitia que um elétron de energia positiva tivesse energia negativa posteriormente, o que ia contra o postulado de Dirac de que todos os estados de energia negativa estariam ocupados. Para resolver isso, Feynman propôs retirar do passado os termos de energia positiva e, do futuro, os termos de energia negativa. Assim temos:

$$iK(x, x') = \int d^3\vec{p} \sum_{i=1}^2 \psi_{i,\vec{p}}^{E>0}(x) \bar{\psi}_{i,\vec{p}}^{E>0}(x') \theta(t - t') - \int d^3\vec{p} \sum_{j=1}^2 \psi_{j,\vec{p}}^{E<0}(x) \bar{\psi}_{j,\vec{p}}^{E<0}(x') \theta(t' - t), \quad (2.108)$$

que é o propagador relativístico da teoria de Dirac. O sinal negativo está adequado a estatística de férmions. Ainda podemos usar as relações de completude para simplificar o resultado

$$iK(x, x') = \int d^3\vec{p} \sum_{i=1}^2 \psi_{i,\vec{p}}^{E>0}(x) \bar{\psi}_{i,\vec{p}}^{E>0}(x') \theta(t - t') - \int d^3\vec{p} \sum_{j=1}^2 \psi_{j,\vec{p}}^{E<0}(x) \bar{\psi}_{j,\vec{p}}^{E<0}(x') \theta(t' - t). \quad (2.109)$$

Este objeto não é explicitamente covariante, mas é possível mostrar que este objeto satisfaz seguinte equação diferencial

$$(i\gamma^\alpha \partial_\alpha - m) K(x, x') = \delta(x - x'). \quad (2.110)$$

Usando o método de transformada de Fourier

$$(\not{p} - m) \tilde{K} = 1, \quad (2.111)$$

$$\tilde{K} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}, \quad (2.112)$$

$$K = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x - x')}, \quad (2.113)$$

$$K = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 \vec{p} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{I(p_0, \vec{p})}{p_0^2 - E^2}, \quad (2.114)$$

onde $I(p_0, \vec{p}) = (\not{p} + m) e^{-ip \cdot (x - x')}$ e $E = \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}$. A integral em p_0 possui dois pólos, um em E e outro em $-E$. Um procedimento que pode ser utilizado para realizar essa integral e o de deslocar os pólos de suas posições originais subtraindo uma quantidade $i\varepsilon$ e os pólos passam a ser $E - i\varepsilon$ e $-E + i\varepsilon$. Isso é representado pelo chamado contorno de Feynman onde o contorno é feito no sentido anti-horário caso $x_0 < x'_0$ e no sentido horário caso $x_0 > x'_0$.

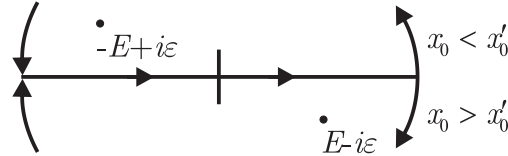


Figura 2.3: contorno de Feynman

Para $x_0 < x'_0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{I(p_0, \vec{p})}{p_0^2 - (E - i\varepsilon)^2} = 2\pi i \frac{I(-E + i\varepsilon, \vec{p})}{-2(E - i\varepsilon)}, \quad (2.115)$$

já para $x_0 > x'_0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{I(p_0, \vec{p})}{p_0^2 - (E - i\varepsilon)^2} = -2\pi i \frac{I(E - i\varepsilon, \vec{p})}{2(E - i\varepsilon)}. \quad (2.116)$$

Podemos reunir os dois resultados em um só utilizando a função degrau depois de fazermos

lim:
 $\varepsilon \rightarrow 0$

$$K = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{p} \frac{I(E, \vec{p})}{2(E)} \theta(x_0 - x'_0) - \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{p} \frac{I(-E, \vec{p})}{2(E)} \theta(x'_0 - x_0). \quad (2.117)$$

Na segunda integral fazemos a transformação $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$

$$iK = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} \frac{I(E, \vec{p})}{2E} \theta(x_0 - x'_0) + \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} \frac{I(-E, -\vec{p})}{2E} \theta(x'_0 - x_0). \quad (2.118)$$

É fácil ver que $I(-E, -\vec{p}) = -(\not{p} - m) e^{ip \cdot (x-x')}$ então

$$iK = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} \frac{(\not{p} + m)}{2E} e^{-ip \cdot (x-x')} \theta(x_0 - x'_0) - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} \frac{(\not{p} - m)}{2E} e^{ip \cdot (x-x')} \theta(x'_0 - x_0). \quad (2.119)$$

2.6 Solução perturbativa da equação de Dirac

Já vimos em sessão anterior a solução da equação de Dirac para partícula livre. Agora vamos estudar como lidar com a presença de um potencial externo do ponto de vista perturbativo. Um potencial externo é inserido na equação de Dirac via acoplamento mínimo, ou seja:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \quad (2.120)$$

Isso nos leva a equação de Dirac com campo eletromagnético externo,

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi = 0, \quad (2.121)$$

$$(i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - m) \psi(x, A) = 0. \quad (2.122)$$

Por analogia, o propagador deve satisfazer

$$(i\gamma^\alpha D_\alpha - m) K(x, x', A) = \delta(x - x'), \quad (2.123)$$

$$(i\gamma^\alpha \partial_\alpha - m) K(x, x', A(x)) = \delta(x - x') + e\gamma^\alpha A_\alpha(x) K(x, x', A(x)). \quad (2.124)$$

Desenvolvendo um pouco mais a Eq.(2.122), temos

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x, A(x)) - m\psi(x, A(x)) = e\gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x, A(x)). \quad (2.125)$$

Usando agora o método de função de Green, podemos escrever a solução como

$$\psi(x, A(x)) = \psi(x, 0) + \int d^4x' e K(x, x', 0) \gamma^\mu A_\mu(x') \psi(x', A(x')), \quad (2.126)$$

e também o propagador na forma

$$K(x, x', A(x)) = \int d^4x'' K(x, x'', 0) [\delta(x'' - x') + e\gamma^\alpha A_\alpha(x'')] K(x'', x', A(x'')) \quad (2.127)$$

$$K(x, x', A(x)) = K(x, x', 0) + e \int d^4x'' K(x, x'', 0) \gamma^\alpha A_\alpha(x'') K(x'', x', A(x'')) \quad (2.128)$$

Podemos então, de forma iterativa, substituir a Eq. (2.128) novamente na Eq. (2.128), de modo que teríamos, em primeira iteração:

$$K(x, x', A(x)) = K(x, x', 0) + e \int d^4 x'' K(x, x'', 0) \gamma^\alpha A_\alpha(x'') K(x'', x', 0) + e^2 \int d^4 x'' d^4 x''' K(x, x'', 0) \gamma^\alpha A_\alpha(x'') K(x'', x''', 0) \gamma^\alpha A_\alpha(x''') K(x''', x', A(x''')). \quad (2.129)$$

Após a n -ésima iteração, encontramos:

$$K(x, x', A(x)) = K(x, x', 0) + e \int d^4 x'' K(x, x'', 0) \not{A}'' K(x'', x', 0) + e^2 \int d^4 x'' d^4 x''' K(x, x'', 0) \not{A}'' K(x'', x''', 0) \not{A}''' K(x''', x', A''') + e^n \int d^4 x'' d^4 x''' \dots K(x, x'', 0) \not{A}'' K(x'', x''', 0) \not{A}''' K(x''', x', 0). \quad (2.130)$$

Em termos de diagramas de Feynman, o primeiro termo da série é descrito por (2.128):

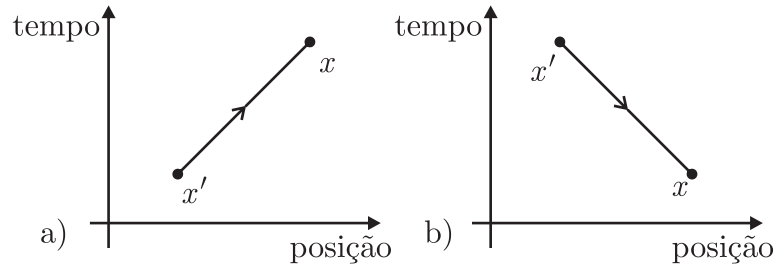


Figura 2.4: Diagrama (a): representa um elétron propagando-se livremente de x' até x , se $(t > t')$. Diagrama (b): representa um pósitron propagando-se livremente de x até x' , se $(t > t')$.

Já o segundo termo da integral é representado pelos diagramas representados na figura (2.5):

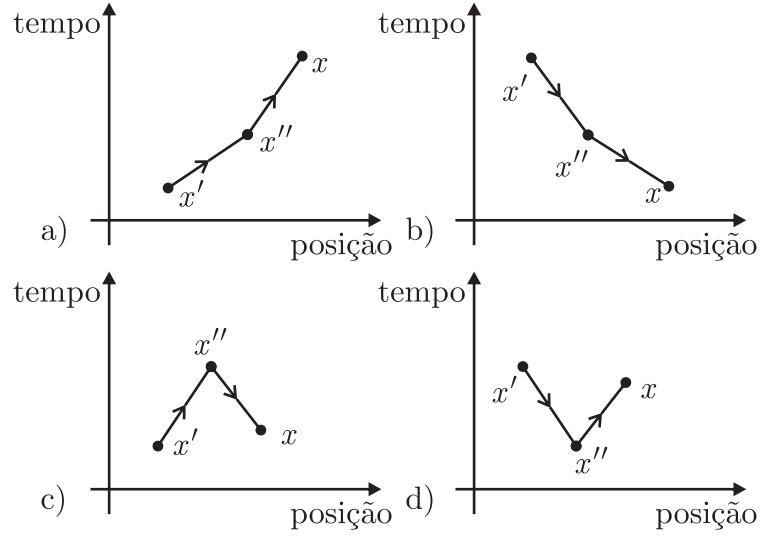


Figura 2.5: Diagrama (a): representa um elétron que se propagava a partir de x' é espalhado por um potencial às proximidades de x'' e volta a se propagar livremente em x se ($t > t'' > t'$). Diagrama (b): representa um pósitron que se propagava a partir de x é espalhado por um potencial às proximidades de x'' e volta a se propagar livremente em x' se ($t' > t'' > t$); Diagrama (c): representa um elétron que se propagava a partir de x' e um pósitron que se propagava a partir de x se aniquilam em x'' ($t'' > t \wedge t'$). Diagrama (d): representa a criação de par em x'' de um elétron se propagando para x e um pósitron se propagando para x' .

2.7 Matriz S , Amplitudes e Seção de Choque

Vamos calcular a matriz S que representa a amplitude do seguinte processo: um elétron inicialmente livre (representado pelo estado φ_i em um passado distante, $t \rightarrow -\infty$) ser espalhado por um potencial A , e ser encontrado livre em um futuro distante em um outro estado - φ_f .

$$S_{if} = \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \int \varphi_f(x)^\dagger \psi_i(x) d^3\vec{x}, \quad (2.131)$$

onde $\varphi_f(x)$ representa o estado final de elétron livre (pós-espalhamento) e $\psi_i(x)$ um estado que evoluiu a partir do estado $\varphi_i(x)$. Os estados φ_i e φ_f são dados obviamente como ondas planas,

$$\varphi_f(x) = n_f e^{-ip_f \cdot x} u^{sf}(\vec{p}_f), \quad (2.132)$$

enquanto o estado ψ_i é:

$$\psi_i(x, A) = \varphi_i(x) + e \int d^4x' K(x, x', 0) A' \psi_i(x', A'), \quad (2.133)$$

o que leva (S_{if}) - amplitude de espalhamento entre os estados φ_i e φ_f - à forma:

$$S_{if} = \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \int \varphi_f(x)^\dagger \varphi_i(x) d^3 \vec{x} + e \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \int \int d^3 \vec{x} d^4 x' \varphi_f(x)^\dagger K(x, x', 0) A' \psi_i(x', A'). \quad (2.134)$$

Sendo as funções de onda ortonormalizadas, decorre

$$S_{if} = \delta^3(p_f - p_i) \delta_{s_i s_f} + e \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \int \int d^3 \vec{x} d^4 x' \varphi_f(x)^\dagger K(x, x') A' \psi_i(x', A'). \quad (2.135)$$

Neste caso

$$iK(x, x') = \int d^3 \vec{p} \sum_{i=1}^2 \psi_{i, \vec{p}}^{E>0}(x) \bar{\psi}_{i, \vec{p}}^{E>0}(x'), \quad (2.136)$$

então

$$i \int d^3 \vec{x} \varphi_f(x)^\dagger K(x, x') = \int d^3 \vec{p} \sum_{i=1}^2 \int d^3 \vec{x} \left(\varphi_f(x)^\dagger \psi_{i, \vec{p}}^{E>0}(x) \right) \bar{\psi}_{i, \vec{p}}^{E>0}(x'), \quad (2.137)$$

$$i \int d^3 \vec{x} \varphi_f(x)^\dagger K(x, x') = \bar{\psi}_{s_f, \vec{p}_f}^{E>0}(x'), \quad (2.138)$$

$$\int d^3 \vec{x} \varphi_f(x)^\dagger K(x, x') = -i \bar{\varphi}_f(x'),$$

$$S_{if} = \delta^3(p_f - p_i) \delta_{s_i s_f} - ie \int d^4 x' \bar{\varphi}_f(x') A' \psi_i(x', A'), \quad (2.139)$$

para $i \neq f$

$$iS_{if} = e \int d^4 x' \bar{\varphi}_f(x') A' \psi_i(x', A'). \quad (2.140)$$

Num formalismo de primeira ordem podemos aproximar a onda incidente $\psi_i(x', A')$ por $\varphi_i(x')$.

$$iS_{if} = e \int d^4 x \bar{\varphi}_f(x) A \varphi_i(x). \quad (2.141)$$

Em um gauge fixo temos que

$$\left(\square g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right) \partial_\mu \partial_\nu \right) A^\mu = J_\nu. \quad (2.142)$$

Usando o método de função de Green, o 4-potencial é escrito na forma

$$A^\mu(x) = \int d^4 x' D^{\mu\alpha}(x, x') j_\alpha(x'), \quad (2.143)$$

onde a equação diferencial satisfeita pela função de Green é:

$$\left(\square g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right) \partial_\mu \partial_\nu \right) D^{\mu\alpha}(x, x') = \delta_\nu^\alpha \delta^4(x - x'). \quad (2.144)$$

Usando o método de transformação de Fourier

$$\left(-q^2 g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right) q_\mu q_\nu \right) \tilde{D}^{\mu\alpha} = \delta_\nu^\alpha, \quad (2.145)$$

$$\left(-q^2\Theta_{\mu\nu} - q^2\frac{1}{\zeta}\Omega_{\mu\nu}\right)\tilde{D}^{\mu\alpha} = \Theta_{\nu}^{\alpha} + \Omega_{\nu}^{\alpha}, \quad (2.146)$$

onde usamos os projetores transversal ($\Theta_{\mu\nu}$) e longitudinal ($\Omega_{\mu\nu}$), definidos como:

$$\Theta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - q_{\mu}q_{\nu}/q^2, \quad (2.147)$$

$$\Omega_{\mu\nu} = \frac{q_{\mu}q_{\nu}}{q^2}. \quad (2.148)$$

Entre estes projetores, valem as seguintes propriedades de contração tensorial

	$\Theta^{\mu\alpha}$	$\Omega^{\mu\alpha}$
$\Theta_{\mu\nu}$	Θ_{ν}^{α}	0
$\Omega_{\mu\nu}$	0	Ω_{ν}^{α}

Tabela 2.2: algebra dos projetores

Para inverter esta expressão vamos propor que:

$$\tilde{D}^{\mu\alpha} = a\Theta^{\mu\alpha} + b\Omega^{\mu\alpha}, \quad (2.149)$$

com isso

$$\left(-q^2\Theta_{\mu\nu} - q^2\frac{1}{\zeta}\Omega_{\mu\nu}\right)(a\Theta^{\mu\alpha} + b\Omega^{\mu\alpha}) = \Theta_{\nu}^{\alpha} + \Omega_{\nu}^{\alpha}, \quad (2.150)$$

$$-aq^2\Theta_{\nu}^{\alpha} - bq^2\frac{1}{\zeta}\Omega_{\nu}^{\alpha} = \Theta_{\nu}^{\alpha} + \Omega_{\nu}^{\alpha}. \quad (2.151)$$

O que nos indica que $a = -1/q^2$ e $b = -\zeta/q^2$ então:

$$\tilde{D}^{\mu\alpha} = -1/q^2\Theta^{\mu\alpha} - \zeta/q^2\Omega^{\mu\alpha}. \quad (2.152)$$

Usando a transformação inversa:

$$D_{\mu\nu}(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \tilde{D}^{\mu\alpha} e^{-iq^{\mu}(x_{\mu} - x'_{\mu})}. \quad (2.153)$$

Com isso

$$iS_{if} = e \int \int d^4x d^4x' \bar{\varphi}_f(x) \gamma^{\mu} \varphi_i(x) D_{\mu\nu}(x, x') j^{\nu}(x'). \quad (2.154)$$

Aqui nomeamos o termo $j_e^{\mu} = e\bar{\varphi}_f(x) \gamma^{\mu} \varphi_i(x)$ que é a corrente de transição.

$$iS_{if} = \int \int d^4x d^4x' j_e^{\mu}(x) D_{\mu\nu}(x, x') j^{\nu}(x'). \quad (2.155)$$

2.8 Espalhamento de férmions

Agora vamos estudar o processo de espalhamento de férmions. De acordo com a Eq. (2.155), precisamos da corrente fermiônica, $j^\nu(x')$, para efetuar o cálculo. Embora não saibamos a princípio nada sobre essa corrente, para a matriz S não há diferença entre o férmion espalhado e o férmion que produziu o potencial. Se, por exemplo, temos um elétron espalhado por um potencial produzido por um múon ou se temos um múon que foi espalhado por um potencial produzido pelo elétron, a matriz S deverá ser a mesma nestes dois casos. Assim, podemos dizer que:

$$j^\nu(x') = j_{(\mu)}^\nu(x') = e\bar{\varphi}_{f'}(x')\gamma^\mu\varphi_{i'}(x'), \quad (2.156)$$

$$iS = \int \int d^4x d^4x' j_{(e)}^\mu(x) D_{\mu\nu}(x, x') j_{(\mu)}^\nu(x'). \quad (2.157)$$

As correntes de transição são dadas por:

$$j^\mu = e\bar{\varphi}_f(x)\gamma^\mu\varphi_i(x). \quad (2.158)$$

Explicitando as soluções de onda plana,

$$j^\mu = nn'e^{-i(p-p')\cdot x} j^\mu(\vec{p}, \vec{p}'), \quad (2.159)$$

onde $j^\mu(\vec{p}, \vec{p}') = e\bar{u}^{s'_1}(\vec{p}')\gamma^\mu u^{s_1}(\vec{p})$ é a corrente de transição no espaço dos momentos.

Substituindo as expressões (2.159) e (2.153) na Eq. (2.157)

$$iS = N \int \int j^\mu(\vec{p}_1, \vec{p}'_1) \left(\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{D}_{\mu\nu} e^{i(p'_1 - p_1 - q)x} e^{i(q + p'_2 - p_2)x'} \right) j^\nu(\vec{p}_2, \vec{p}'_2) d^4x d^4x' \quad (2.160)$$

Aqui, $N = n_1 n'_1 n_2 n'_2$ engloba as normalizações. Integrando em x e x' e depois em q

$$iS = N(2\pi)^4 j^\mu(\vec{p}_1, \vec{p}'_1) \tilde{D}_{\mu\nu} j^\nu(\vec{p}_2, \vec{p}'_2) \delta^4(p_1 - p'_1 + p_2 - p'_2). \quad (2.161)$$

O termo δ^4 garante a conservação da energia-momento neste processo. Agora definiremos o elemento \mathcal{M} :

$$\mathcal{M} = j^\mu(\vec{p}_1, \vec{p}'_1) \tilde{D}_{\mu\nu} j^\nu(\vec{p}_2, \vec{p}'_2), \quad (2.162)$$

ou de forma explícita

$$\mathcal{M} = e^2 \bar{u}^{s'_1}(\vec{p}'_1) \gamma^\mu u^{s_1}(\vec{p}_1) \tilde{D}_{\mu\nu} \bar{u}^{s'_2}(\vec{p}'_2) \gamma^\nu u^{s_2}(\vec{p}_2), \quad (2.163)$$

que é as vezes chamada de amplitude de Feynman ou apenas amplitude invariante já que é resultado de uma contração tensorial.

$$iS = n'_1 n_1 n'_2 n_2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p'_1 + p_2 - p'_2) \mathcal{M}. \quad (2.164)$$

Como sabemos os elementos da matriz S nos dão as amplitudes associadas a transição de estados separados por um longo intervalo de tempo. A probabilidade de esse processo ocorrer será dada por $|S|^2$.

$$|S|^2 = (n'_1 n_1 n'_2 n_2)^2 (2\pi)^8 (\delta^4(p_1 - p'_1 + p_2 - p'_2))^2 |\mathcal{M}|^2. \quad (2.165)$$

A função delta tem a seguinte propriedade:

$$f(x) \delta(x) = f(0) \delta(x), \quad (2.166)$$

logo:

$$(\delta^4(p_1 - p'_1 + p_2 - p'_2))^2 = \delta^4(0) \delta^4(p_1 - p'_1 + p_2 - p'_2). \quad (2.167)$$

Sabemos também que:

$$\delta^4(p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \lim_{V, T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \int_V e^{-p_0 t} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} dt d^3\vec{x}, \quad (2.168)$$

então:

$$\delta^4(0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \lim_{V, T \rightarrow \infty} TV. \quad (2.169)$$

Considerando, por enquanto, o sistema confinado num intervalo de tempo finito T e dentro de um volume finito V , ficamos com:

$$|S|^2 = (n'_1 n_1 n'_2 n_2)^2 (2\pi)^4 TV \delta^4(p_1 - p'_1 + p_2 - p'_2) |\mathcal{M}|^2. \quad (2.170)$$

As funções de onda devem ser normalizadas dentro deste volume V , isto leva a redefinição das constantes de normalização:

$$n = \frac{1}{\sqrt{2EV}}. \quad (2.171)$$

Continuando com a álgebra

$$\frac{|S|^2}{T} = (n'_1 n_1 n'_2 n_2)^2 (2\pi)^4 V \delta^4(p_1 - p'_1 + p_2 - p'_2) |\mathcal{M}|^2. \quad (2.172)$$

A expressão dada por (2.172) é a probabilidade de transição por unidade de tempo de interação ou taxa de probabilidade de transição

$$\Lambda = \frac{|S|^2}{T}, \quad (2.173)$$

$$\Lambda = (n'_1 n_1 n'_2 n_2)^2 (2\pi)^4 V \delta^4(p_1 - p'_1 + p_2 - p'_2) |\mathcal{M}|^2, \quad (2.174)$$

e também a taxa de transição por unidade de volume

$$W = (n'_1 n_1 n'_2 n_2)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p'_1 + p_2 - p'_2) |\mathcal{M}|^2. \quad (2.175)$$

O número de estados com momento \vec{p} dentro de um volume $d^3\vec{p}$ é dado por $dn = Vd^3\vec{p}/(2\pi)^3$. Como temos duas partículas o número de estados com o elétron tendo momento dentro de $d^3\vec{p}_1$ e o múon dentro de $d^3\vec{p}_2$ será a combinação dos resultados.

$$dN = V^2 \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3}. \quad (2.176)$$

Um diferencial de seção de choque vai ser dado por:

$$d\sigma = \frac{dNW}{|J_{\text{inc}}|/V}, \quad (2.177)$$

onde

$$J_{\text{inc}}^i = n^2 u^{s_1} (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^\dagger \gamma^0 \gamma^i u^{s_1} (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \quad (2.178)$$

$$J_{\text{inc}}^i = n^2 \begin{pmatrix} s_1^\dagger & \frac{s_1^\dagger \vec{\sigma} \vec{p}_R}{(E+m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \frac{\vec{\sigma} \vec{p}_R s_1}{(E+m)} \end{pmatrix} \quad (2.179)$$

$$J_{\text{inc}}^i = n^2 \begin{pmatrix} \frac{s_1^\dagger \vec{\sigma} \vec{p}_R \sigma^i}{(E+m)} & s_1^\dagger \sigma^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \frac{\vec{\sigma} \vec{p}_R s_1}{(E+m)} \end{pmatrix} \quad (2.180)$$

$$J_{\text{inc}}^i = \frac{n^2}{(E+m)} s_1^\dagger (\vec{\sigma} \vec{p}_R \sigma^i + \sigma^i \vec{\sigma} \vec{p}_R) s_1 \quad (2.181)$$

$$J_{\text{inc}}^i = \frac{2n^2}{(E+m)} s_1^\dagger s_1 p_R^i \quad (2.182)$$

$$J_{\text{inc}}^i = \frac{p_R^i}{EV} = \frac{v_R^i}{V} \quad (2.183)$$

Usando (2.183), (2.176), (2.175) e (2.171):

$$d\sigma = \frac{1}{4E_1 E_2 |v_R|} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p'_1 + p_2 - p'_2) |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3\vec{p}_1}{2E'_1 (2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}_2}{2E'_2 (2\pi)^3} \quad (2.184)$$

Ainda podemos escrever levando em conta que os feixes incidentes devem ser colineares:

$$E_1 E_2 |v_R| = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m^2 M^2}, \quad (2.185)$$

com isso:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m^2 M^2}} \delta^4(p_1 - p'_1 + p_2 - p'_2) |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3\vec{p}_1}{2E'_1 (2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}_2}{2E'_2 (2\pi)^3} \quad (2.186)$$

2.9 Regra de ouro

A algumas vezes chamada regra de ouro nos dá uma forma geral para calcularmos a seção de choque diferencial para um caso mais geral de espalhamento do tipo:

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + 5 + \dots + n, \quad (2.187)$$

e a formula é:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 S}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m^2 M^2}} \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - \dots - p_n) |\mathcal{M}|^2 \prod_{i=3}^n \frac{d^3 \vec{p}_i}{2E_i (2\pi)^3}, \quad (2.188)$$

onde neste caso S representa um fator estatístico ($1/j!$) para cada grupo de partículas idênticas. Para o caso de duas partículas e escolhendo o centro de massa para os cálculos onde $p_1 = (E_1, \vec{p})$ e $p_2 = (E_2, -\vec{p})$ são respectivamente os momentos iniciais das partículas e $p'_1 = (E'_1, \vec{p}'_1)$ e $p'_2 = (E'_2, \vec{p}'_2)$ os momentos finais (ao final, as partículas não precisam ser do mesmo tipo). Neste caso $(p_1 \cdot p_2)^2 - m^2 M^2 = (E_1 + E_2)^2 |\vec{p}|^2$.

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{4(E_1 + E_2) |\vec{p}|} \delta(E_1 + E_2 - E'_1 - E'_2) \delta^3(\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2) |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3 \vec{p}'_1}{2E'_1 (2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{p}'_2}{2E'_2 (2\pi)^3}. \quad (2.189)$$

Integrando em \vec{p}'_2 obtemos as relações $-\vec{p}'_2 = \vec{p}'_1 = \vec{p}'$, $E'_1 = \sqrt{m^2 + |\vec{p}'|^2}$ e $E'_2 = \sqrt{M^2 + |\vec{p}'|^2}$

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{4(E_1 + E_2) |\vec{p}|} \delta(E_1 + E_2 - E'_1 - E'_2) |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3 \vec{p}'}{4E'_1 E'_2 (2\pi)^6}. \quad (2.190)$$

Chamamos a tenção para um fato de que $d\sigma = \int d\sigma d^3 \vec{p}'_2$ onde optamos por manter o mesmo símbolo. Continuando:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{4(E_1 + E_2) |\vec{p}|} \delta(E_1 + E_2 - E'_1 - E'_2) |\mathcal{M}|^2 \frac{|\vec{p}'|^2 d|\vec{p}'| d\Omega}{4E'_1 E'_2 (2\pi)^6}. \quad (2.191)$$

Aqui fazemos uma mudança de variável

$$E'_1 + E'_2 = \sqrt{m^2 + |\vec{p}'|^2} + \sqrt{M^2 + |\vec{p}'|^2}, \quad (2.192)$$

$$\frac{d(E'_1 + E'_2)}{E'_1 + E'_2} = \frac{|\vec{p}'| d|\vec{p}'|}{E'_2 E'_1},$$

com isso

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 |\vec{p}'|}{4(E_1 + E_2) |\vec{p}|} \delta(E_1 + E_2 - E'_1 - E'_2) |\mathcal{M}|^2 \frac{d(E'_1 + E'_2) d\Omega}{4(E'_1 + E'_2) (2\pi)^6}. \quad (2.193)$$







Integrando em $(E'_1 + E'_2)$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\vec{p}'|}{(8\pi)^2 (E_1 + E_2)^2 |\vec{p}|} |\mathcal{M}|^2. \quad (2.194)$$

2.10 Regras de Feynman

Embora nosso resultado para seção seja valida para qualquer tipo de espalhamento, nossa amplitude \mathcal{M} está particularizada para o caso de espalhamento de férmions. Para um espalhamento Compton, por exemplo, as peças que compõem a amplitude são outras. É possível montar a amplitude \mathcal{M} usando um conjunto de regras conhecidas como regras de Feynman. Os processos da QED são representados por diagramas de Feynman. De posse destes diagramas, montamos a amplitude de espalhamento. Vejamos como funciona:

1. Escreva todos os momentos externos (p_1, p_2, \dots), internos (q_1, q_2, \dots), e os spins (s_1, s_2, \dots). Utilize setas para determinar se as partículas estão chegando ou saindo.
2. As linhas externas contribuem com os seguintes fatores:

Elétron	Elétron chegando ): u
	Elétron saindo ): \bar{u}
Pósitron	Pósitron chegando ): \bar{v}
	Pósitron saindo ): v
Fóton	Fóton chegando ): ε^μ
	Fóton saindo (): $\varepsilon^{\mu*}$

3. Os vértices contribuem com:

$$ig_e \gamma^\mu,$$

em nosso sistema de unidades $g_e = e$.

4. As linhas internas contribuem com $i\tilde{K}$, caso sejam elétrons ou pósitrons, e com $i\tilde{D}^{\mu\nu}$ caso sejam fótons.

5. Para garantir a conservação do quadri-momento, a cada vértice devemos adicionar uma função delta de Dirac do tipo:

$$(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3)$$

6. Integre sobre todos os momentos internos e escreva para cada um deles um fator:

$$\frac{d^4q}{(2\pi)^4}.$$

7. O que restar estará multiplicado por um fator $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - \dots p_n)$, o restante será $-i\mathcal{M}$.

3 Cálculo da amplitude de espalhamento e seção de choque

Neste capítulo, usaremos as regras de Feynman para escrever e calcular a amplitude de espalhamento e seção de choque de dois processos elementares bastante conhecidos na literatura, o espalhamento elétron-múon, $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$, e o espalhamento elétron-pósitron resultando em múon e anti-múon, $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$. Deste modo, neste capítulo estaremos revisando alguns desenvolvimentos facilmente encontrados nas Refs. [22],[23],[24],[21],[25],[26],[27], [28].

3.1 A amplitude de Feynman para o espalhamento

$$e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$$

O diagrama associado ao processo é o seguinte:

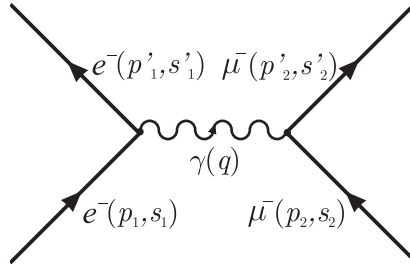


Figura 3.1: Diagrama de espalhamento elétron-muon a nível de árvore.

Usando as regras de Feynman, escrevemos a amplitude do espalhamento como:

$$\int \underbrace{\bar{u}}_{R2} \underbrace{u}_{R2} \underbrace{ig_e \gamma^\mu}_{R3} \underbrace{i\tilde{D}_{\mu\nu}(q)}_{R4} \underbrace{ig_e \gamma^\nu}_{R3} \underbrace{u}_{R2} \times \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p'_1 - q)}_{R5} \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p_2 - p'_2 + q)}_{R5} \underbrace{\frac{d^4q}{(2\pi)^4}}_{R6} \quad (3.1)$$

Integrando no momento interno, obtemos $q = p_1 - p'_1 = p'_2 - p_2$, e amplitude resulta igual

a:

$$-ig_e^2 \bar{u}^{s'_1}(p'_1) \gamma^\mu u^{s_1}(p_1) \tilde{D}_{\mu\nu}(q) \bar{u}^{s'_2}(p'_2) \gamma^\nu u^{s_2}(p_2) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 - p'_2 + p_1 - p'_1) \quad (3.2)$$

Usando a regra (7), encontramos

$$\mathcal{M} = g_e^2 \bar{u}^{s'_1}(p'_1) \gamma^\mu u^{s_1}(p_1) \tilde{D}_{\mu\nu}(q) \bar{u}^{s'_2}(p'_2) \gamma^\nu u^{s_2}(p_2). \quad (3.3)$$

Na prática, é comum estudarmos processos onde as partículas não possuem polarização determinada. Neste caso, a seção de choque vai ser:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2 (E_1 + E_2)^2} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle, \quad (3.4)$$

onde

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2} \sum_{s'_1, s'_2} |\mathcal{M}|^2, \quad (3.5)$$

é uma média sobre os spins iniciais e uma soma sobre os spins finais do sistema, ou seja, como os estados de polarização de spin são desconhecidos, todas as possibilidades são consideradas.

3.1.1 Truque de Casimir

O truque de Casimir consiste em um procedimento para calcular a quantidade $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ sem calcular cada amplitude individualmente. Vejamos como funciona. Sabemos que $|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}\mathcal{M}^*$, de modo que primeiro calculamos \mathcal{M}^*

$$\mathcal{M}^* = g_e^2 \left[\bar{u}^{s'_1}(p'_1) \gamma^\alpha u^{s_1}(p_1) \right]^* \tilde{D}_{\alpha\beta}(q)^* \left[\bar{u}^{s'_2}(p'_2) \gamma^\beta u^{s_2}(p_2) \right]^*, \quad (3.6)$$

onde

$$\left[\bar{u}^{s'_1}(p'_1) \gamma^\alpha u^{s_1}(p_1) \right]^* = (u^{s_1}(p_1))^\dagger (\gamma^\alpha)^\dagger \left(\bar{u}^{s'_1}(p'_1) \right)^\dagger = \bar{u}^{s_1}(p_1) \gamma^0 (\gamma^\alpha)^\dagger \gamma^0 u^{s'_1}(p'_1), \quad (3.7)$$

$$\left[\bar{u}^{s'_1}(p'_1) \gamma^\alpha u^{s_1}(p_1) \right]^* = \bar{u}^{s_1}(p_1) \gamma^\alpha u^{s'_1}(p'_1). \quad (3.8)$$

Usando a Eq. (3.8) na Eq. (3.6), temos:

$$\mathcal{M}^* = g_e^2 \bar{u}^{s_1}(p_1) \gamma^\alpha u^{s'_1}(p'_1) \tilde{D}_{\alpha\beta}(q)^* \bar{u}^{s_2}(p_2) \gamma^\beta u^{s'_2}(p'_2). \quad (3.9)$$

Lembrando que \mathcal{M} está dado pela Eq. (3.3), escrevemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= g_e^4 \tilde{D}_{\mu\nu}(q) \tilde{D}_{\alpha\beta}(q)^* \bar{u}^{s'_1}(p'_1) \gamma^\mu u^{s_1}(p_1) \bar{u}^{s'_2}(p'_2) \gamma^\nu u^{s_2}(p_2) \times \\ &\times \bar{u}^{s_1}(p_1) \gamma^\alpha u^{s'_1}(p'_1) \bar{u}^{s_2}(p_2) \gamma^\beta u^{s'_2}(p'_2). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Reorganizando

$$|\mathcal{M}|^2 = g_e^4 \tilde{D}_{\mu\nu}(q) \tilde{D}_{\alpha\beta}(q)^* \left[\bar{u}^{s'_1}(p'_1) \gamma^\mu u^{s_1}(p_1) \bar{u}^{s_1}(p_1) \gamma^\alpha u^{s'_1}(p'_1) \right] \times \\ \times \left[\bar{u}^{s'_2}(p'_2) \gamma^\nu u^{s_2}(p_2) \bar{u}^{s_2}(p_2) \gamma^\beta u^{s'_2}(p'_2) \right]. \quad (3.11)$$

Aqui usaremos a seguinte relação,

$$a^\dagger M b = \text{tr}(M b a^\dagger), \quad (3.12)$$

o que nos leva a

$$|\mathcal{M}|^2 = g_e^4 \tilde{D}_{\mu\nu}(q) \tilde{D}_{\alpha\beta}(q)^* \text{tr} \left(\gamma^\mu u^{s_1}(p_1) \bar{u}^{s_1}(p_1) \gamma^\alpha u^{s'_1}(p'_1) \bar{u}^{s'_1}(p'_1) \right) \times \\ \times \text{tr} \left(\gamma^\nu u^{s_2}(p_2) \bar{u}^{s_2}(p_2) \gamma^\beta u^{s'_2}(p'_2) \bar{u}^{s'_2}(p'_2) \right). \quad (3.13)$$

Uma vez escrita a amplitude quadrática, $|\mathcal{M}|^2$, podemos encontrar a amplitude quadrática média tomando-se a soma (média) sobre os estados de spin, ou seja:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} g_e^4 \tilde{D}_{\mu\nu}(q) \tilde{D}_{\alpha\beta}(q)^* \sum_{s_1, s_2} \sum_{s'_1, s'_2} \text{tr} \left(\gamma^\mu u^{s_1}(p_1) \bar{u}^{s_1}(p_1) \gamma^\alpha u^{s'_1}(p'_1) \bar{u}^{s'_1}(p'_1) \right) \times \\ \times \text{tr} \left(\gamma^\nu u^{s_2}(p_2) \bar{u}^{s_2}(p_2) \gamma^\beta u^{s'_2}(p'_2) \bar{u}^{s'_2}(p'_2) \right). \quad (3.14)$$

Considerando-se as somas nos spins e implementando a relação de completeza, resulta:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} g_e^4 \tilde{D}_{\mu\nu}(q) \tilde{D}_{\alpha\beta}(q) \text{tr} \left(\gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma^\alpha (\not{p}'_1 + m) \right) \times \\ \times \text{tr} \left(\gamma^\nu (\not{p}_2 + M) \gamma^\beta (\not{p}'_2 + M) \right), \quad (3.15)$$

o que pode ser escrito simplifcadamente como

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} g_e^4 \tilde{D}_{\mu\nu}(q) \tilde{D}_{\alpha\beta}(q) L^{\mu\alpha} M^{\nu\beta}, \quad (3.16)$$

onde definimos:

$$L^{\mu\alpha} = \text{tr} \left(\gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma^\alpha (\not{p}'_1 + m) \right), \quad (3.17)$$

$$M^{\nu\beta} = \text{tr} \left(\gamma^\nu (\not{p}_2 + M) \gamma^\beta (\not{p}'_2 + M) \right). \quad (3.18)$$

Para estas expressões, valem as seguintes propriedades:

$$L^{\mu\nu} = L^{\nu\mu}, \quad M^{\nu\beta} = M^{\beta\nu}, \quad (3.19)$$

$$L^{\mu\alpha}(p_1, p'_1) = L^{\mu\alpha}(p'_1, p_1), \quad M^{\nu\beta}(p_2, p'_2) = M^{\beta\nu}(p'_2, p_2), \quad (3.20)$$

$$q_\mu L^{\mu\nu} = 0, \quad q_\mu M^{\mu\nu} = 0, \quad (3.21)$$

onde $q_\mu = p_{1\mu} - p'_{1\mu}$. O termo $\tilde{D}_{\mu\nu}(q) \tilde{D}_{\alpha\beta}(q)^*$ vem da Eq. (2.152), ou seja:

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(q) \tilde{D}_{\alpha\beta}(q)^* = (-1/q^2 \Theta_{\mu\nu} - \zeta/q^2 \Omega_{\mu\nu}) (-1/q^2 \Theta_{\alpha\beta} - \zeta/q^2 \Omega_{\alpha\beta}). \quad (3.22)$$

Dadas as propriedades (3.21), percebemos que o termo $\Omega_{\mu\nu} = q_\mu q_\nu / q^2$ não irá contribuir à amplitude de espalhamento, enquanto $\Theta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / q^2$ contribuirá apenas com $g_{\mu\nu}$.

Efetivamente, teremos

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{g_e^4}{4q^4} g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} L^{\mu\alpha} M^{\nu\beta}. \quad (3.23)$$

Isso é equivalente a escolhermos o parâmetro de gauge $\zeta = 1$, mas também mostra que a seção de choque não depende da escolha de gauge. Continuando os cálculos:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{g_e^4}{4q^4} L^{\mu\alpha} M_{\mu\alpha}. \quad (3.24)$$

3.1.2 Seção de choque para o espalhamento $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$

Usando as regras de traço, estabelecidas no Apêndice, podemos mostrar que

$$L^{\mu\alpha} = 4[p_1^\mu p_1'^\alpha + p_1'^\mu p_1^\alpha + g^{\mu\alpha} (m^2 - p_1 \cdot p_1')], \quad (3.25)$$

$$M^{\nu\beta} = 4[p_2^\nu p_2'^\beta + p_2'^\nu p_2^\beta + g^{\nu\beta} (M^2 - p_2 \cdot p_2')]. \quad (3.26)$$

Deste modo, a contração presente na Eq. (3.24) é dada por:

$$L^{\mu\alpha} M_{\mu\alpha} = 32[(p_1 \cdot p_2)(p_1' \cdot p_2') + (p_1 \cdot p_2')(p_2 \cdot p_1') - m^2(p_2 \cdot p_2') - M^2(p_1 \cdot p_1') + 2m^2 M^2]. \quad (3.27)$$

Em um choque elástico, vale a conservação do 4-momento total:

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2', \quad (3.28)$$

que também pode ser escrito como:

$$p_1 - p_1' = p_2' - p_2, \quad (3.29)$$

$$p_1 - p_2' = p_1' - p_2. \quad (3.30)$$

Quadrando cada uma dessas expressões, obtemos as relações:

$$p_1 \cdot p_2 = p_1' \cdot p_2', \quad (3.31)$$

$$p_1 \cdot p_2' = p_2 \cdot p_1', \quad (3.32)$$

$$p_1 \cdot p_1' - m^2 = p_2 \cdot p_2' - M^2. \quad (3.33)$$

Com estes resultados, temos:

$$L^{\mu\alpha} M_{\mu\alpha} = 32[(p_1 \cdot p_2)^2 + (p_2 \cdot p'_1)^2 - (M^2 + m^2)(p_1 \cdot p'_1) + m^2(M^2 + m^2)]. \quad (3.34)$$

Para calcularmos a seção de choque, é preciso escolher um referencial. Escolhemos o referencial do centro de massa, onde $p_1 = (E_1, \vec{p})$, $p_2 = (E_2, -\vec{p})$, $p'_1 = (E_1, \vec{p}')$ e $p'_2 = (E_2, -\vec{p}')$, e a condição $|\vec{p}| = |\vec{p}'|$ garante a conservação da energia. Com isso:

$$p_1 \cdot p_2 = p'_1 \cdot p'_2 = E_1 E_2 + |\vec{p}|^2, \quad (3.35)$$

$$p_1 \cdot p'_2 = p_2 \cdot p'_1 = E_1 E_2 + |\vec{p}|^2 \cos \theta, \quad (3.36)$$

$$p_1 \cdot p'_1 = m^2 + 2|\vec{p}|^2 \sin^2(\theta/2), \quad (3.37)$$

$$p_2 \cdot p'_2 = M^2 + 2|\vec{p}|^2 \sin^2(\theta/2), \quad (3.38)$$

$$q^2 = -4|\vec{p}|^2 \sin^2(\theta/2). \quad (3.39)$$

Substituindo estes resultados na Eq. (3.34), temos

$$L^{\mu\alpha} M_{\mu\alpha} = 32 \left(2m^2 M^2 + 2(M^2 + 2E_1 E_2 + m^2) \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) |p|^2 + (\cos^2 \theta + 3) |p|^4 \right), \quad (3.40)$$

e também:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{g_e^4}{|\vec{p}|^4 \sin^4(\theta/2)} \left(m^2 M^2 + (M^2 + 2E_1 E_2 + m^2) \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) |p|^2 + \frac{(\cos^2 \theta + 3)}{2} |p|^4 \right) \quad (3.41)$$

o que nos leva à expressão geral para a seção de choque no CM:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{g_e^4 (E_1 + E_2)^{-2}}{(8\pi)^2 |\vec{p}|^4 \sin^4(\theta/2)} \left(m^2 M^2 + (M^2 + 2E_1 E_2 + m^2) \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) |p|^2 + \frac{(\cos^2 \theta + 3)}{2} |p|^4 \right). \quad (3.42)$$

Esta contração pode ser particularizada para o limite não-relativístico, $m \gg |\vec{p}|$,

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{g_e^4}{|\vec{p}|^4 \sin^4(\theta/2)} (m^2 M^2 + (M + m)^2 |\vec{p}|^2 \cos^2(\theta/2)), \quad (3.43)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{g_e^4}{64\pi^2 |\vec{p}|^4 \sin^4(\theta/2)} (\mu^2 + |\vec{p}|^2 \cos^2(\theta/2)), \quad (3.44)$$

onde $\mu = mM/(m + M)$ é a massa reduzida. Se ainda considerarmos $M \gg m$, a massa reduzida vai para $\mu \rightarrow m$, e recuperamos a seção de choque de Mott:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{g_e^4}{64\pi^2 |\vec{p}|^4 \sin^4(\theta/2)} (m^2 + |\vec{p}|^2 \cos^2(\theta/2)). \quad (3.45)$$

3.2 A amplitude de Feynman para o espalhamento elétron-pósitron gerando múon e anti-múon 49

Por último, se desprezarmos o termo $|\vec{p}|^2$ ($m \gg |\vec{p}|^2$), encontramos a seção de choque clássica de Rutherford:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{g_e^4}{64\pi^2 m^2 |\vec{v}|^4 \sin^4(\theta/2)}. \quad (3.46)$$

Podemos também tomar o limite ultra-relativístico, em que $|\vec{p}| \gg M$. Neste caso, a amplitude média quadrática reduz-se a

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{g_e^4}{2 \sin^4(\theta/2)} (4 + (1 + \cos \theta)^2), \quad (3.47)$$

e a seção de choque é:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2 8 |\vec{p}|^2 \sin^4(\theta/2)} g_e^4 (4 + (1 + \cos \theta)^2). \quad (3.48)$$

Mostramos assim como obter a seção de choque do espalhamento elétron-múon (para feixe não polarizado), partindo-se das regras de Feynman, usando-se o truque de Casimir, e o propagador de Feynman para o campo de gauge.

3.2 A amplitude de Feynman para o espalhamento elétron-pósitron gerando múon e anti-múon

O processo de espalhamento elétron-pósitron, $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$, é representado (em mais baixa ordem) pelo diagrama da Fig. (3.2).

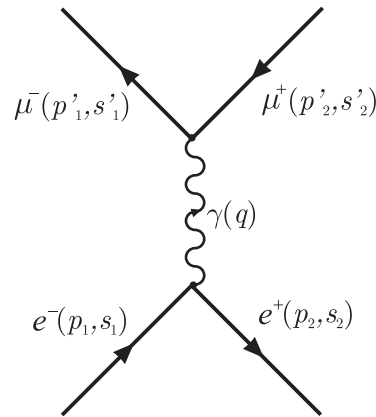


Figura 3.2: Processo de espalhamento elétron-pósitron a nível de árvore ("tree-level").

A amplitude de espalhamento para este processo é montada usando-se as regras Feynman, obtendo-se:

$$\mathcal{M} = g_e^2 \bar{v}^{s_2}(p_2) \gamma^\mu u^{s_1}(p_1) \tilde{D}_{\mu\nu}(q) \bar{u}^{s'_1}(p'_1) \gamma^\nu v^{s'_2}(p'_2), \quad (3.49)$$

onde desta vez $q = p_1 + p_2$. Ainda temos:

$$|\mathcal{M}|^2 = g_e^4 \tilde{D}_{\alpha\beta}(q)^* \tilde{D}_{\mu\nu}(q) \text{tr} [\gamma^\mu u^{s_1}(p_1) \bar{u}^{s_1}(p_1) \gamma^\alpha v^{s_2}(p_2) \bar{v}^{s_2}(p_2)] \times \\ \times \text{tr} \left[\gamma^\nu v^{s'_2}(p'_2) \bar{v}^{s'_2}(p'_2) \gamma^\beta u^{s'_1}(p'_1) \bar{u}^{s'_1}(p'_1) \right]. \quad (3.50)$$

Novamente, estamos interessados no caso não polarizado, o que nos leva a considerar uma soma sobre os spins dos estados iniciais e finais. Fazendo-se isto, obtemos

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{g_e^4}{4} \tilde{D}_{\mu\nu}(q) \tilde{D}_{\alpha\beta}(q)^* L^{\mu\alpha} M^{\nu\beta}, \quad (3.51)$$

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{g_e^4}{4q^4} L^{\mu\alpha} M_{\mu\alpha}, \quad (3.52)$$

onde desta vez

$$L^{\mu\alpha} = \text{tr} (\gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma^\alpha (\not{p}_2 - m)), \quad (3.53)$$

$$M^{\nu\beta} = \text{tr} (\gamma^\nu (\not{p}'_1 + M) \gamma^\beta (\not{p}'_2 - M)). \quad (3.54)$$

Estes tensores têm as mesmas propriedades das expressões (3.19), (3.20) e (3.21), o que nos leva novamente a Eq. (3.24).

3.2.1 Seção de choque $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$

Desta vez, as regras de traço nos levam a:

$$L^{\mu\alpha} = 4[p_2^\mu p_1^\alpha + p_1^\mu p_2^\alpha - g^{\mu\alpha} (m^2 + p_1 \cdot p_2)], \quad (3.55)$$

$$M^{\mu\alpha} = 4[p_2'^\mu p_1'^\alpha + p_1'^\mu p_2'^\alpha - g^{\mu\alpha} (M^2 + p'_1 \cdot p'_2)], \quad (3.56)$$

e à contração:

$$L^{\mu\alpha} M_{\mu\alpha} = 32 \left\{ (p_1 \cdot p'_2) (p_2 \cdot p'_1) + (p_1 \cdot p'_1) (p_2 \cdot p'_2) + M^2 (p_1 \cdot p_2) + m^2 (p'_1 \cdot p'_2) + 2m^2 M^2 \right\}. \quad (3.57)$$

Se escolhermos o referencial do centro de massa, $p_1 = (E, \vec{p})$, $p_2 = (E, -\vec{p})$, $p'_1 = (E, \vec{p}')$ e $p'_2 = (E, -\vec{p}')$, onde $|\vec{p}'|^2 = |\vec{p}|^2 + M^2 - m^2$, temos:

$$p_1 \cdot p_2 = 2E^2 - m^2, \quad (3.58)$$

$$p'_1 \cdot p'_2 = 2E^2 - M^2, \quad (3.59)$$

$$p_1 \cdot p'_2 = p_2 \cdot p'_1 = E^2 + |\vec{p}| |\vec{p}'| \cos \theta, \quad (3.60)$$

$$p_1 \cdot p'_1 = p_2 \cdot p'_2 = E^2 - |\vec{p}| |\vec{p}'| \cos \theta, \quad (3.61)$$

$$q^2 = 4E^2. \quad (3.62)$$

Com isso:

$$L^{\mu\alpha} M_{\mu\alpha} = 64[E^4 + (M^2 + m^2) E^2 + (E^4 - (M^2 + m^2) E^2 + M^2 m^2) \cos^2 \theta]. \quad (3.63)$$

Montamos assim a seguinte amplitude quadrática média:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{g_e^4}{E^4} [E^4 + (M^2 + m^2) E^2 + (E^4 - (M^2 + m^2) E^2 + M^2 m^2) \cos^2 \theta]. \quad (3.64)$$

Se temos $M \gg |\vec{p}|$, a amplitude quadrática média é lida como

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = g_e^4 \left(2 + \frac{m^2}{M^2} \right), \quad (3.65)$$

enquanto a seção de choque reduz-se a:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{g_e^2}{16\pi M} \right)^2 \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} \left(2 + \frac{m^2}{M^2} \right). \quad (3.66)$$

Se consideramos ainda $M \gg m$, a seção de choque passa a valer

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 2 \left(\frac{g_e^2}{16\pi M} \right)^2 \frac{|\vec{p}'|}{M} \rightarrow 0. \quad (3.67)$$

Tomando agora o limite ultra-relativístico na expressão, decorre

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = g_e^4 (1 + \cos^2 \theta), \quad (3.68)$$

e a seção de choque fica

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{g_e^2}{16\pi |\vec{p}'|} \right)^2 (1 + \cos^2 \theta). \quad (3.69)$$

3.2.2 Simetria Cruzada

A tabela (3.1) nos mostra um comparativo entre os processos $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$ e $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$.

É fácil ver que a transformação $(p'_1, p_2) \leftrightarrow (-p_2, -p'_1)$ leva a amplitude de um processo ao outro¹. Isso significa que um elétron (pósitron) saindo (chegando) em um vértice se transforma em um pósitron (elétron) chegando (saindo) se invertemos o sinal do quadri-momento da partícula.

¹Cada tensor ganha um sinal de negativo, mas um cancela o outro.

$e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$	$e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$
$L^{\mu\alpha} = tr(\gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma^\alpha (\not{p}'_1 + m))$	$L^{\mu\alpha} = tr(\gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma^\alpha (\not{p}_2 - m))$
$M^{\nu\beta} = tr(\gamma^\nu (\not{p}_2 + M) \gamma^\beta (\not{p}'_2 + M))$	$M^{\nu\beta} = tr(\gamma^\nu (\not{p}'_1 - M) \gamma^\beta (\not{p}'_2 + M))$
$q = p_1 - p'_1$ $= -p_2 + p'_2$	$q = p_1 + p_2$ $= p'_1 + p'_2$

Tabela 3.1:

4 Cálculo de seção de choque na presença de violação de Lorentz

Neste capítulo, iremos retomar os cálculos de espalhamento do capítulo precedente, agora no contexto do arcabouço do Modelo Padrão Estendido, no qual são alterados tanto o setor de gauge quanto o setor fermiônico. Consideramos neste trabalho, porém, termos de violação de Lorentz apenas no setor fotônico, que implicarão em modificações no propagador do fóton. Mais especificamente, iremos considerar a presença dos termos CPT-pares no propagador de Feynman, mantendo o setor fermiônico inalterado.

4.1 Amplitude de espalhamento e o propagador CPT-par

Um passo inicial para calcular a seção de choque do espalhamento de férmions, é aplicar as regras de Feynman, que são mantidas inalteradas se o setor fermiônico não é afetado pela violação da simetria de Lorentz. Neste caso, resta basicamente determinar como os termos de violação do setor de gauge alteram o propagador de Feynman. O propagador de Feynman do setor de gauge CPT-par do Modelo Padrão Estendido foi calculado numa forma matricial na Ref. [15], onde foram também encontradas relações de dispersão, e realizado a análise de consistência (estabilidade, causalidade, unitariedade) desta eletrodinâmica. Um propagador na forma matricial não é adequadamente funcional para realizar cálculos de espalhamento que envolvem diversas contrações tensoriais. Por este motivo, adotaremos um procedimento de cálculo que conduza a um propagador em primeira ordem nos coeficientes de violação, sendo os termos de ordem superior desprezados.

Um dos pontos de partida para obtenção do propagador de gauge do setor

CPT-par é a equação do 4-potencial, escrita como:

$$\left(\square g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right) \partial_\mu \partial_\nu + 2K_{\mu\beta\nu\alpha} \partial^\beta \partial^\alpha \right) A^\nu = J_\mu, \quad (4.1)$$

que também pode ser lida no espaço dos momentos,

$$\left(-q^2 g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right) q_\mu q_\nu - 2K_{\mu\beta\nu\alpha} q^\beta q^\alpha \right) \tilde{D}_{LV}^{\mu\alpha} = \delta_\nu^\alpha. \quad (4.2)$$

Esta equação difere da usual, Eq. (2.142), apenas pelo termo $S_{\mu\nu} = -2K_{\mu\beta\nu\alpha} q^\beta q^\alpha$, que pode ser tratado como uma perturbação devido à conhecida pequenez dos coeficientes de violação de Lorentz. O cálculo do propagador é equivalente a inverter uma matriz. Uma fórmula útil para calcularmos $\tilde{D}_{LV}^{\mu\alpha}$ é a seguinte:

$$O^{-1} = Z^{-1} - Z^{-1} B Z^{-1} + Z^{-1} B Z^{-1} B Z^{-1} - \dots \quad (4.3)$$

onde $O = Z + B$, com Z possuindo inversa e B adequado à convergência da série. Neste caso, Z representa o operador da Eq. (2.142), sem termo de violação de Lorentz, enquanto B representa o termo de violação da simetria de Lorentz, ou seja, $S_{\mu\nu}$. O propagador $\tilde{D}_{LV}^{\mu\alpha}$ pode ser escrito em termos da seguinte expansão:

$$i\tilde{D}_{LV}^{\mu\nu} = i\tilde{D}^{\mu\nu} + i\tilde{D}^{\mu\beta} (iS_{\beta\alpha}) i\tilde{D}^{\alpha\nu} + i\tilde{D}^{\mu\beta} (iS_{\beta\alpha}) i\tilde{D}^{\alpha\chi} (iS_{\chi\delta}) i\tilde{D}^{\delta\nu} - \dots \quad (4.4)$$

Em termos de diagramas, o processo de espalhamento na presença do termo de violação de Lorentz pode ser representado como:

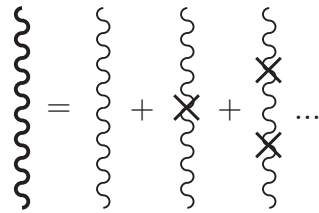


Figura 4.1: Diagrama do processo de espalhamento na presença de termo adicional de violação da simetria de Lorentz no setor de gauge representado pelo símbolo \times

Aqui, o símbolo \times está associado ao termo $iS_{\mu\nu} = -2iK_{\mu\beta\nu\alpha} q^\beta q^\alpha$ e nos fornece uma regra de Feynman adicional, considerando o propagador (4.4) apenas em primeira ordem. Esse termo extra presente no propagador pode ser traduzido como uma nova amplitude nos diagramas de espalhamento. O processo agora em primeira ordem fica da seguinte forma:

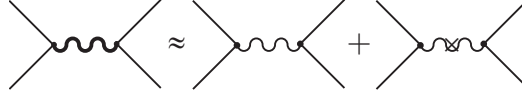


Figura 4.2: Diagramas que contribuem para o processo de espalhamento a "tree-level" considerando o termo de violação de Lorentz.

que corresponde ao propagador em primeira ordem:

$$\tilde{D}_{LV}^{\mu\nu} = \tilde{D}^{\mu\nu} + \tilde{D}^{\mu\beta} 2K_{\mu\beta\nu\alpha} q^\beta q^\alpha \tilde{D}^{\alpha\nu}.$$

Isso significa que, além da amplitude usual, teremos mais uma associada à violação de Lorentz. A amplitude será então:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\text{usual}} + \mathcal{M}_{\Delta LV}, \quad (4.5)$$

onde a amplitude $\mathcal{M}_{\Delta LV}$ está associada ao diagrama extra. Como já sabemos, para o cálculo da seção de choque do espalhamento não-polarizado precisamos de $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$, que será dada por:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{usual}} + \langle \mathcal{M}_{\text{usual}} \mathcal{M}_{\Delta LV}^* + \mathcal{M}_{\Delta LV} \mathcal{M}_{\text{usual}}^* \rangle_{\text{interferência}} + \langle |\mathcal{M}_{\Delta LV}|^2 \rangle, \quad (4.6)$$

Como sabemos, em nossos cálculos, estamos considerando a influência da violação de Lorentz apenas em primeira ordem. Logo, consideramos insignificante o termo $\langle |\mathcal{M}_{\Delta LV}|^2 \rangle$, que contribui em segunda ordem. Porém, devemos tratar com cuidado o termo de interferência,

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int.}} = \langle \mathcal{M}_{\text{usual}} \mathcal{M}_{\Delta LV}^* + \mathcal{M}_{\Delta LV} \mathcal{M}_{\text{usual}}^* \rangle_{\text{interferência}}. \quad (4.7)$$

4.2 A amplitude $\mathcal{M}_{\Delta LV}$ no espalhamento elétron-múon

$$e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$$

Usando as regras de Feynman usuais, considerando o diagrama adicional, podemos montar a amplitude $\mathcal{M}_{\Delta LV}$:

$$-i\mathcal{M}_{\Delta LV} = \bar{u}^{s'_1}(p'_1) i g_e \gamma^\mu u^{s_1}(p_1) i \tilde{D}_{\mu\beta}(q) i S^{\beta\alpha} i \tilde{D}_{\alpha\nu}(q) \bar{u}^{s'_2}(p'_2) i g_e \gamma^\nu u^{s_2}(p_2), \quad (4.8)$$

que pode ser simplificado à forma:

$$\mathcal{M}_{\Delta LV} = \frac{g_e^2}{q^4} \bar{u}^{s'_1}(p'_1) \gamma^\mu u^{s_1}(p_1) 2K_{\mu\chi\nu\delta} q^\chi q^\delta \bar{u}^{s'_2}(p'_2) \gamma^\nu u^{s_2}(p_2). \quad (4.9)$$

Tomando o complexo conjugado

$$\mathcal{M}_{\Delta LV}^* = \frac{g_e^2}{q^4} \bar{u}^{s_1}(p_1) \gamma^\mu u^{s_1'}(p_1') 2K_{\mu\chi\nu\delta} q^\chi q^\delta \bar{u}^{s_2}(p_2) \gamma^\nu u^{s_2'}(p_2'), \quad (4.10)$$

podemos calcular o primeiro termo de interferência:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{usual}} \mathcal{M}_{\Delta LV}^* &= -\frac{g_e^4}{q^6} 2g_{\mu\nu} K_{\alpha\chi\beta\delta} q^\chi q^\delta \text{tr} \left(\gamma^\mu u^{s_1}(p_1) \bar{u}^{s_1}(p_1) \gamma^\alpha u^{s_1'}(p_1') \bar{u}^{s_1'}(p_1') \right) \times \\ &\times \text{tr} \left(\gamma^\nu u^{s_2}(p_2) \bar{u}^{s_2}(p_2) \gamma^\beta u^{s_2'}(p_2') \bar{u}^{s_2'}(p_2') \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Implementando o truque de Casimir para realizar a soma sobre os estados de spin, temos:

$$\langle \mathcal{M}_{\text{usual}} \mathcal{M}_{\Delta LV}^* \rangle = -\frac{2g_e^4}{q^6} g_{\mu\nu} K_{\alpha\chi\beta\delta} q^\chi q^\delta L^{\mu\alpha} M^{\nu\beta}. \quad (4.12)$$

O segundo termo de interferência é o complexo conjugado do primeiro. É fácil então ver que:

$$\langle \mathcal{M}_{\text{usual}} \mathcal{M}_{\Delta LV}^* \rangle = \langle \mathcal{M}_{\text{usual}}^* \mathcal{M}_{\Delta LV} \rangle = -\frac{g_e^4}{q^6} 2g_{\mu\nu} K_{\alpha\chi\beta\delta} q^\chi q^\delta L^{\mu\alpha} M^{\nu\beta}. \quad (4.13)$$

Com isso, temos:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = -\frac{4g_e^4}{q^6} g_{\mu\nu} K_{\alpha\chi\beta\delta} q^\chi q^\delta L^{\mu\alpha} M^{\nu\beta}. \quad (4.14)$$

Usando a parametrização (1.37), concluímos que:

$$K_{\alpha\chi\beta\delta} q^\chi q^\delta = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} \kappa_{\chi\delta} q^\chi q^\delta - \kappa_{\chi\beta} q^\chi q_\alpha - \kappa_{\alpha\chi} q_\beta q^\chi + \kappa_{\alpha\beta} q_\delta q^\delta). \quad (4.15)$$

Das propriedades de $L^{\mu\alpha}$ e $M^{\nu\beta}$, sabemos que os termos $\kappa_{\chi\beta} q^\chi q_\alpha$ e $\kappa_{\alpha\chi} q_\beta q^\chi$ não contribuem, já que $q_\alpha L^{\mu\alpha} = q_\beta M^{\nu\beta} = 0$. A amplitude quadrática é então escrita como:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = -\frac{2g_e^4}{q^6} (\kappa_{\chi\delta} q^\chi q^\delta L_{\beta\nu} M^{\nu\beta} + \kappa_{\alpha\beta} q^2 L_\nu^\alpha M^{\nu\beta}). \quad (4.16)$$

Continuando, podemos expandir este resultado em termos das componentes do tensor

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} &= -\frac{2g_e^4}{q^6} [\kappa_{00} (q^0 q^0 L_{\beta\nu} M^{\nu\beta} + q^2 L_\nu^0 M^{\nu 0}) + \kappa_{0i} (q^2 L_\nu^0 M^{\nu i} + 2q^0 q^i L_{\beta\nu} M^{\nu\beta} \\ &+ q^2 L_\nu^i M^{\nu 0}) + \kappa_{ij} (q^i q^j L_{\beta\nu} M^{\nu\beta} + q^2 L_\nu^i M^{\nu j})]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

4.2.1 Contribuições paridade-ímpar à amplitude de espalhamento

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}}$$

Para estudar o efeito das componentes de paridade-ímpar, vamos considerar nulas as componentes não-birrefringentes paridade-par ($\kappa_{00} = \kappa_{ij} = 0$). Além disso, vamos usar a parametrização $k_i = -\kappa_{0i}$, o que reduz a amplitude (4.17) à forma:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = \frac{2g_e^4}{q^4} k_i (L_{\mu 0} M^{\mu i} + L^{\nu i} M_{\nu 0}) + \frac{4g_e^4}{q^6} k_i q^i q^0 L^{\mu\alpha} M_{\mu\alpha}. \quad (4.18)$$

Para continuar, devemos definir um referencial para calcular as contrações tensoriais envolvidas. Assim como realizado no para o caso usual (sem violação de Lorentz), vamos escolher o referencial do centro de massa. Neste referencial, vale:

$$p_1 = (E_1, \vec{p}), \quad p_2 = (E_2, -\vec{p}), \quad p'_1 = (E_1, \vec{p}'), \quad p'_2 = (E_2, -\vec{p}'), \quad (4.19)$$

onde $|\vec{p}| = |\vec{p}'|$ para garantir a conservação da energia. Com isso:

$$p_1 \cdot p_2 = p'_1 \cdot p'_2 = E_1 E_2 + |\vec{p}|^2, \quad (4.20)$$

$$p_1 \cdot p'_2 = p_2 \cdot p'_1 = E_1 E_2 + |\vec{p}|^2 \cos(\theta), \quad (4.21)$$

$$p_1 \cdot p'_1 = m^2 + 2 |\vec{p}|^2 \sin^2(\theta/2), \quad (4.22)$$

$$p_2 \cdot p'_2 = M^2 + 2 |\vec{p}|^2 \sin^2(\theta/2), \quad (4.23)$$

$$q^2 = -4 |\vec{p}|^2 \sin^2(\theta/2). \quad (4.24)$$

Ainda precisamos de

$$\vec{p} \cdot \vec{k} = |\vec{p}| |\vec{k}| \cos(\theta_k), \quad (4.25)$$

$$\vec{p}' \cdot \vec{k} = |\vec{p}'| |\vec{k}| \left(\frac{\vec{p}' \cdot \vec{k}}{|\vec{p}'| |\vec{k}|} \right), \quad (4.26)$$

onde

$$\frac{\vec{p}' \cdot \vec{k}}{|\vec{p}'| |\vec{k}|} = (\sin(\theta) \sin(\theta_k) \cos(\varphi) \cos(\varphi_k) + \sin(\theta) \sin(\theta_k) \sin(\varphi) \sin(\varphi_k) + \cos(\theta) \cos(\theta_k)). \quad (4.27)$$

Os ângulos apresentados na expressão anterior estão ilustrados na Fig.(4.3).

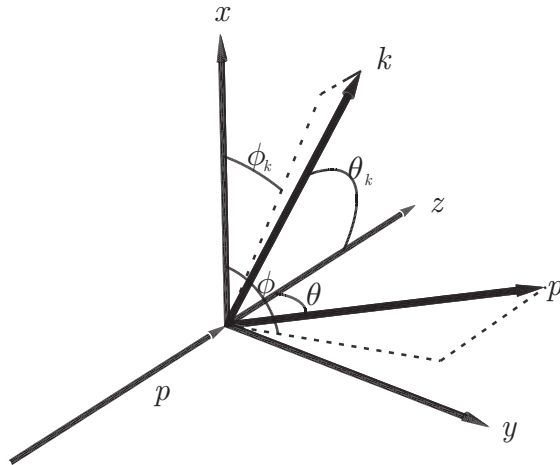


Figura 4.3: Sistema de coordenadas adotado com \vec{p} alinhado ao eixo z

Neste referencial $q^0 = 0$, o que simplifica um pouco o resultado:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = \frac{2g_e^4}{q^4} (k_i L_{00} M^{i0} + k_j L_{i0} M^{ij} + k^i L_{i0} M^{00} + k^j L_{ij} M^{i0}). \quad (4.28)$$

De (3.25) e (3.26), podemos tirar:

$$L_{00} = 4(p_{10}p'_{10} + p'_{10}p_{10} + (m^2 - p_1 \cdot p'_1)) = 8(m^2 + |\vec{p}|^2 \cos^2(\theta/2)), \quad (4.29)$$

$$L_{i0} = 4(p_{1i}p'_{10} + p'_{1i}p_{10} + g_{i0}(m^2 - p_1 \cdot p'_1)) = 4(p_i + p'_i) E_1, \quad (4.30)$$

$$L_{ij} = 4(p_i p'_j + p'_i p_j - 2g_{ij} |\vec{p}|^2 \sin^2(\theta/2)), \quad (4.31)$$

$$M^{00} = 8(M^2 + |\vec{p}|^2 \cos^2(\theta/2)), \quad M^{i0} = -4(p^i + p'^i) E_2, \quad (4.32)$$

$$M^{ij} = 4(p^i p'^j + p'^i p^j - g^{ij} 2 |\vec{p}|^2 \sin^2(\theta/2)) \quad (4.33)$$

Usando os termos acima apresentados, escrevemos:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = & -\frac{g_e^4}{q^4} 16 \left\{ 4k_i (m^2 + |\vec{p}|^2 \cos^2(\theta/2)) (p^i + p'^i) E_2 + \right. \\ & -2k_j (p_i + p'_i) E_1 (p^i p'^j + p'^i p^j - g^{ij} 2 |\vec{p}|^2 \sin^2(\theta/2)) + \\ & -4k^i (p_i + p'_i) E_1 (M^2 + |\vec{p}|^2 \cos^2(\theta/2)) + \\ & \left. +2k^j (p_i p'_j + p'_i p_j - 2g_{ij} |\vec{p}|^2 \sin^2(\theta/2)) (p^i + p'^i) E_2 \right\}, \quad (4.34) \end{aligned}$$

cuja simplificação leva a:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = -\frac{32g_e^4}{q^4} (p^i + p'^i) k_i [(p^j p_j - p_j p'^j) (E_1 - E_2) + 2M^2 E_1 - 2m^2 E_2], \quad (4.35)$$

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = \frac{4g_e^4 |\vec{k}|}{|\vec{p}|^3 \sin^4(\theta/2)} \left(\cos(\theta_k) + \frac{\vec{p} \cdot \vec{k}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{k}|} \right) ((E_2 - E_1) |\vec{p}|^2 \sin^2(\theta/2) - m^2 E_2 + M^2 E_1). \quad (4.36)$$

O incremento dado à seção de choque é:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\Delta LV} = \frac{4g_e^4 |\vec{k}|}{(8\pi)^2 (E_1 + E_2)^2 |\vec{p}|^3 \sin^4(\frac{\theta}{2})} I(\theta_k, \varphi_k, \theta, \varphi) \left((E_2 - E_1) |\vec{p}|^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - m^2 E_2 + M^2 E_1 \right). \quad (4.37)$$

A quantidade $I(\theta_k, \varphi_k, \theta, \varphi) = \cos(\theta_k) + \vec{p} \cdot \vec{k} / |\vec{p}| |\vec{k}|$ controla a anisotropia associada à violação de Lorentz. Podemos analisar alguns casos particulares, tais como:

		ϕ_k			
		0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
θ_k	0	$2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$	$2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$	$2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$	$2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$
	$\frac{\pi}{2}$	$\sin(\theta) \cos(\phi)$	$\sin(\theta) \sin(\phi)$	$-\sin(\theta) \cos(\phi)$	$-\sin(\theta) \sin(\phi)$
	π	$-2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$	$-2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$	$-2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$	$-2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$

I

Ainda podemos estudar os limites da expressão (4.37). O limite não-relativístico é definido quando $m, M \gg |\vec{p}|$. Neste regime, temos:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\Delta LV} = \frac{4g_e^4 |\vec{k}| I(\theta_k, \varphi_k, \theta, \varphi) (M - m)}{(8\pi)^2 (m + M)^2 |\vec{p}|^3 \sin^4(\theta/2)} \left(|\vec{p}|^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + Mm \right). \quad (4.38)$$

Se consideramos agora $M \gg m$, temos o limite de Mott, para o qual a seção de choque vale:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\Delta LV} = \frac{4g_e^4 |\vec{k}| I(\theta_k, \varphi_k, \theta, \varphi)}{(8\pi)^2 |\vec{p}|^3 \sin^4(\theta/2)} \left(\frac{|\vec{p}|^2}{M} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + m \right). \quad (4.39)$$

E se ainda impomos $m \gg |\vec{p}|^2$, encontramos:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\Delta LV} = \frac{4g_e^4 |\vec{k}| I(\theta_k, \varphi_k, \theta, \varphi)}{(8\pi)^2 m^2 |\vec{v}|^3 \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)}. \quad (4.40)$$

Também podemos considerar o limite ultra-relativístico, no qual vale:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\Delta LV} = \frac{4g_e^4 |\vec{k}| I(\theta_k, \varphi_k, \theta, \varphi)}{(8\pi)^2 4 |\vec{p}|^4 \sin^4(\theta/2)} (M^2 - m^2) \rightarrow 0 \quad (4.41)$$

Vemos que o setor de paridade ímpar introduz uma dependência na seção de choque também com relação ao ângulo ϕ , o que não é presente na teoria usual.

4.2.2 Contribuições paridade-par à amplitude de espalhamento

Partindo da eq.(4.17), e tomando os coeficientes de paridade-ímpar como nulos, temos:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\Delta LV} = & -\frac{2g_e^4}{q^6} \left\{ \frac{3}{2} (\kappa_{tr}) (q^0 q^0 L_{\beta\nu} M^{\nu\beta} + q^2 L_\nu^0 M^{\nu 0}) + \right. \\ & \left. - \left((\kappa_{e-})_{ij} + \frac{1}{2} g_{ij} (\kappa_{tr}) \right) (q^i q^j L_{\beta\nu} M^{\nu\beta} + q^2 L_\nu^i M^{\nu j}) \right\}. \quad (4.42) \end{aligned}$$

O resultado para este setor pode ainda ser subdividido em duas partes: a parte isotrópica representada pelo termo κ_{tr} , e a anisotrópica, representada pela matriz κ_{e-} . Continuando nossa metodologia, vamos primeiro considerar a contribuição isotrópica.

Contribuição da componente isotrópica

Considerando κ_{e^-} nulo, o setor de paridade-par é representado apenas pela componente κ_{tr} . A sua contribuição à amplitude é dada por:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} &= -\frac{2g_e^4}{q^6} \left\{ \frac{3}{2} (\kappa_{tr}) (q^0 q_0 L_{\beta\nu} M^{\nu\beta} + q^2 L_{0\nu} M^{0\nu}) + \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{2} (\kappa_{tr}) (q^i q_i L_{\beta\nu} M^{\beta\nu} + q^2 L_{i\nu} M^{i\nu}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Para continuarmos, devemos definir um referencial para as contrações. Assim como foi feito para o caso usual, vamos escolher o referencial do centro de massa. Neste referencial, vale $q^0 = 0$, e também $q^2 = q^i q_i$, o que simplifica um pouco nosso problema, levando a:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = -\frac{2g_e^4}{q^6} \left\{ \frac{3}{2} (\kappa_{tr}) (q^2 L_{0\nu} M^{0\nu}) - \frac{1}{2} (\kappa_{tr}) (q^2 L_{\beta\nu} M^{\beta\nu} + q^2 L_{i\nu} M^{i\nu}) \right\}. \quad (4.44)$$

Usando $L_{i\nu} M^{i\nu} = L_{\beta\nu} M^{\beta\nu} - L_{0\nu} M^{0\nu}$, resulta:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = \frac{2g_e^4}{q^4} \kappa_{tr} L_{\beta\nu} M^{\beta\nu} - \frac{4g_e^4}{q^4} \kappa_{tr} L_{0\nu} M^{0\nu}, \quad (4.45)$$

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = 8\kappa_{tr} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{usual}} - \frac{4g_e^4}{q^4} \kappa_{tr} L_{\nu 0} M^{\nu 0}. \quad (4.46)$$

Precisamos agora desenvolver o termo $L_{\nu 0} M^{\nu 0}$. Para isso vamos usar o ferramental já desenvolvido antes:

$$L_{\nu 0} M^{\nu 0} = L_{00} M^{00} + L_{i0} M^{i0}, \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} L_{\nu 0} M^{\nu 0} &= 64 (m^2 + |\vec{p}|^2 \cos^2(\theta/2)) (M^2 + |\vec{p}|^2 \cos^2(\theta/2)) \\ &\quad - 16 (p_i p^i + p_i p'^i + p'_i p^i + p'_i p'^i) E_1 E_2. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Lançando mão das definições (4.19), obtemos:

$$L_{\nu 0} M^{\nu 0} = 64 (m^2 M^2 + (m^2 - E_1 E_2 + M^2) |\vec{p}|^2 \cos^2(\theta/2) + |\vec{p}|^4 \cos^4(\theta/2)). \quad (4.49)$$

Substituindo esta última expressão na Eq.(4.46), encontramos:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} &= -8\kappa_{tr} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{usual}} + \frac{16g_e^4}{|\vec{p}|^4 \sin^4(\theta/2)} \kappa_{tr} (|\vec{p}|^4 \cos^4(\theta/2) \\ &\quad + (m^2 - E_1 E_2 + M^2) |\vec{p}|^2 \cos^2(\theta/2) + m^2 M^2), \end{aligned} \quad (4.50)$$

e a seção de choque assume a forma:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\Delta LV} &= 8\kappa_{tr} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{usual}} - \frac{16g_e^4 \kappa_{tr}}{(8\pi)^2 (E_1 + E_2)^2 |\vec{p}|^4 \sin^4(\theta/2)} (|\vec{p}|^4 \cos^4(\theta/2) + \\ &\quad + (m^2 - E_1 E_2 + M^2) |\vec{p}|^2 \cos^2(\theta/2) + m^2 M^2). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Tomando o limite não-relativístico:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\Delta LV} &= 8\kappa_{tr} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{usualNR}} - 16\kappa_{tr} \frac{g_e^4}{64\pi^2 |\vec{p}|^4 \sin^4(\theta/2)} (\mu^2 + |\vec{p}|^2 \cos^2(\theta/2)) \\ &\quad - \frac{3mM}{(m+M)^2} |\vec{p}|^2 \cos^2(\theta/2). \end{aligned} \quad (4.52)$$

O incremento dado à sessão de choque não-relativística é:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\Delta LV} = -8\kappa_{tr} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{usualNR}} + \frac{3\kappa_{tr} g_e^4 m M \cos^2(\theta/2)}{4\pi^2 |\vec{p}|^2 \sin^4(\theta/2) (m+M)^2}. \quad (4.53)$$

Se consideramos $M \gg m$, encontramos:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\Delta LV} = -8\kappa_{tr} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{usualMott}} \quad (4.54)$$

Considerando ainda $m \gg |\vec{p}|^2$, resulta:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\Delta LV} = -8\kappa_{tr} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{usualRutherford}} \quad (4.55)$$

E agora consideramos o limite ultra-relativístico:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\Delta LV} = 8\kappa_{tr} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{usualUR}} - \frac{g_e^4 \kappa_{tr}}{16\pi^2 |\vec{p}|^2 \sin^4(\theta/2)} \cos^4(\theta/2), \quad (4.56)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\Delta LV} = 8\kappa_{tr} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{usualUR}} + \frac{g_e^4 \kappa_{tr}}{16\pi^2 |\vec{p}|^2 \sin^4(\theta/2)} - \frac{8g_e^4 \kappa_{tr}}{128\pi^2 |\vec{p}|^2 \sin^4(\theta/2)} (1 + \cos^4(\theta/2)). \quad (4.57)$$

Lembrando o resultado (3.48), esta expressão simplifica-se à forma:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\Delta LV} = \frac{g_e^4 \kappa_{tr}}{16\pi^2 |\vec{p}|^2 \sin^4(\theta/2)}. \quad (4.58)$$

Observamos que o termo κ_{tr} continua mantendo a dependencia da seção de choque com relação ao angulo θ o que pode tornar difícil sua verificação.

Contribuição das componentes anisotrópicas

Vamos agora trabalhar com a contribuição anisotrópica. Para isso vamos zerar o termo κ_{tr} , de modo que:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = \frac{2g_e^4}{q^6} (\kappa_{e-})_{ij} (q^i q^j L_{\beta\nu} M^{\nu\beta} + q^2 L_{\nu}^i M^{\nu j}). \quad (4.59)$$

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = \frac{g_e^4}{4q^4} \left(8 \frac{(\tilde{\kappa}_{e-})_{ij} q^i q^j}{q^2} \right) L_{\mu\alpha} M^{\mu\alpha} + \frac{2g_e^4}{q^4} (\kappa_{e-})_{ij} L_{\nu}^j M^{\nu i} \quad (4.60)$$

Considerando que $q^i = (p^i - p'^i)$, o termo $(\kappa_{e^-})_{ij} q^i q^j$ pode ser desenvolvido como:

$$(\kappa_{e^-})_{ij} q^i q^j = (\tilde{\kappa}_{e^-})_{ij} p^i p^j - 2(\kappa_{e^-})_{ij} p^i p'^j + (\kappa_{e^-})_{ij} p'^i p'^j. \quad (4.61)$$

Para calcular o produto $L_\nu^j M^{\nu i}$, partimos das expressões

$$L_\nu^j = 4(p_{1\nu} p_1'^j + p_{1\nu}' p_1^j + \delta_\nu^j (m^2 - p_1 \cdot p_1')), \quad (4.62)$$

$$M^{\nu i} = 4(p_2^\nu p_2'^i + p_2'^\nu p_2^i + g^{\nu i} (m^2 - p_1 \cdot p_1')), \quad (4.63)$$

e escrevemos:

$$\begin{aligned} L_\nu^j M^{\nu i} = & 16 \left\{ (p_{10} p_1'^j + p_{10}' p_1^j + \delta_0^j (m^2 - p_1 \cdot p_1')) (p_2^0 p_2'^i + p_2'^0 p_2^i + g^{0i} (m^2 - p_1 \cdot p_1')) + \right. \\ & \left. + (p_{1k} p_1'^j + p_{1k}' p_1^j + \delta_k^j (m^2 - p_1 \cdot p_1')) (p_2^k p_2'^i + p_2'^k p_2^i + g^{ki} (m^2 - p_1 \cdot p_1')) \right\} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Simplificando e agrupando termos:

$$\begin{aligned} L_\nu^j M^{\nu i} = & 16 \left\{ (p_k p^k - E_1 E_2) (p'^i p'^j + p^i p^j) + (p_k p'^k + 2(m^2 - p_1 \cdot p_1') - E_1 E_2) (p^i p'^j + p'^i p^j) \right. \\ & \left. + g^{ji} (m^2 - p_1 \cdot p_1')^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Fazendo a contração desta expressão com $(\kappa_{e^-})_{ij}$, temos:

$$\begin{aligned} (\kappa_{e^-})_{ij} L_\nu^j M^{\nu i} = & 16 (p_k p^k - E_1 E_2) \left((\kappa_{e^-})_{ij} p'^i p'^j + (\kappa_{e^-})_{ij} p^i p^j \right) \\ & - 32 (2p_k p'^k + p_k p'^k + E_1 E_2) (\tilde{\kappa}_{e^-})_{ij} p^i p'^j. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Com este resultado, decorre:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = & (\kappa_{e^-})_{ij} p^i p^j \left(\frac{g_e^4}{2q^6} L_{\mu\alpha} M^{\mu\alpha} + \frac{32g_e^4}{q^4} (p_k p^k - E_1 E_2) \right) + \\ & - (\kappa_{e^-})_{ij} p^i p'^j \left(\frac{g_e^4}{q^6} L_{\mu\alpha} M^{\mu\alpha} + \frac{64g_e^4}{q^4} (2p_k p'^k + p_k p'^k + E_1 E_2) \right) \\ & + (\kappa_{e^-})_{ij} p'^i p'^j \left(\frac{g_e^4}{2q^6} L_{\mu\alpha} M^{\mu\alpha} + \frac{32g_e^4}{q^4} (p_k p^k - E_1 E_2) \right). \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = & -2 (\kappa_{e^-})_{ij} p^i p'^j \left(\frac{32g_e^4}{q^4} (p_k p^k + p_k p'^k + 2E_1 E_2) \right) + \\ & + \left((\kappa_{e^-})_{ij} p'^i p'^j - 2 (\kappa_{e^-})_{ij} p^i p'^j + (\tilde{\kappa}_{e^-})_{ij} p^i p^j \right) \times \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\times \left(\frac{g_e^4}{2q^6} L_{\mu\alpha} M^{\mu\alpha} + \frac{32g_e^4}{q^4} (p_k p^k - E_1 E_2) \right). \quad (4.69)$$

Esta amplitude pode ser colocada em forma mais compacta:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = & \frac{(q_i (\kappa_{e^-})_{ij} q_j)}{q^2} \left(2 \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{usual}} - \frac{32g_e^4}{q^2} (|\vec{p}|^2 + E_1 E_2) \right) \\ & + \frac{(p_i (\kappa_{e^-})_{ij} p_j')}{q^2} \frac{128g_e^4}{q^2} (|\vec{p}|^2 \cos^2(\theta/2) - E_1 E_2). \end{aligned} \quad (4.70)$$

E a seção de choque:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{int}} &= 2 \frac{(q_i (\kappa_{e-})_{ij} q_j)}{q^2} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{usual}} - \frac{(q_i (\kappa_{e-})_{ij} q_j)}{(8\pi)^2 (E_1 + E_2)^2 q^4} (|\vec{p}|^2 + E_1 E_2) + \\ &+ \frac{128 (p_i (\kappa_{e-})_{ij} p'_j) g_e^4}{(8\pi)^2 (E_1 + E_2)^2 q^4} (|\vec{p}|^2 \cos^2(\theta/2) - E_1 E_2) \end{aligned} \quad (4.71)$$

Fazendo o limite não relativístico:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\Delta LV} &= 2 \frac{(q_i (\kappa_{e-})_{ij} q_j)}{q^2} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{usualNR}} - \frac{(q_i (\kappa_{e-})_{ij} q_j) mM}{(8\pi)^2 (m + M)^2 q^4} + \\ &\frac{128 (p_i (\kappa_{e-})_{ij} p'_j) g_e^4 mM}{(8\pi)^2 (m + M)^2 q^4} \end{aligned} \quad (4.72)$$

Se consideramos $M \gg m$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\Delta LV} = 2 \frac{(q_i (\kappa_{e-})_{ij} q_j)}{q^2} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{usualMott}} \quad (4.73)$$

Ou ainda se considerarmos $m \gg |\vec{p}|^2$.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\Delta LV} = 2 \frac{(q_i (\kappa_{e-})_{ij} q_j)}{q^2} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{usualRutherford}} \quad (4.74)$$

E o limite ultra-relativístico:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\Delta LV} = 2 \frac{(q_i (\kappa_{e-})_{ij} q_j)}{q^2} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{usual}} - \frac{(q_i (\kappa_{e-})_{ij} q_j)}{(8\pi)^2 2q^4} - \frac{128 (p_i (\kappa_{e-})_{ij} p'_j) g_e^4}{(8\pi)^2 4q^4} \sin^2(\theta/2). \quad (4.75)$$

Neste caso, notamos que o termo κ_{e-} introduz modificações que também levam em consideração dependência com relação ao angulo ϕ . Esta dependência está implícita nas contrações $q_i (\kappa_{e-})_{ij} q_j$ e $p_i (\kappa_{e-})_{ij} p'_j$.

4.3 A amplitude $\mathcal{M}_{\Delta LV}$ no processo elétron-pósitron

No que concerne ao processo $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$, a simetria cruzada nos permite começar o cálculo a partir da Eq. (4.17). Se a partir deste ponto, escolhermos o referencial do centro de massa, temos que $q^i = 0$ e $q^2 = q_0^2$. Com isso, a amplitude é reduzida a:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} &= -\frac{2g_e^4}{q^4} \left\{ \kappa_{00} (L_{\beta\nu} M^{\nu\beta} + L_\nu^0 M^{\nu 0}) + \kappa_{0i} (L_\nu^0 M^{\nu i} + L_\nu^i M^{\nu 0}) + \right. \\ &\left. + \kappa_{ij} (L_\nu^i M^{\nu j}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Para mostrar que o setor de paridade-ímpar não contribui neste processo, basta observar as componentes temporais do tensor $L^{\nu\beta}$:

$$L_0^0 = 4(p_2^0 p_{10} + p_1^0 p_{20} - (m^2 + p_1 \cdot p_2)) = 4(2E^2 - 2E^2) = 0, \quad (4.77)$$

$$L_j^0 = 4(p_2^0 p_{1j} + p_1^0 p_{2j}) = 4(Ep_j - Ep_j) = 0. \quad (4.78)$$

Sabendo que vale o mesmo para as componentes temporais de $M^{\nu\beta}$, a amplitude simplifica-se à forma:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = -\frac{2g_e^4}{q^4} \left\{ \kappa_{00} (L_{\beta\nu} M^{\nu\beta}) + \kappa_{ij} (L_\nu^i M^{\nu j}) \right\},$$

ou ainda,

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = -\frac{2g_e^4}{q^4} \left\{ \frac{1}{2} \kappa_{tr} (3L_{\beta\nu} M^{\nu\beta} - L_{i\nu} M^{\nu i}) + -(\kappa_{e-})_{ij} (L_\nu^i M^{\nu j}) \right\}.$$

Considerando que desta vez $L_{\beta\nu} M^{\nu\beta} = L_{i\nu} M^{\nu i}$, decorre:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = -\frac{2g_e^4}{q^4} \left\{ \kappa_{tr} L_{\beta\nu} M^{\nu\beta} - (\kappa_{e-})_{ij} (L_\nu^i M^{\nu j}) \right\}.$$

4.3.1 Contribuição isotrópica do setor de paridade par

Primeiro analisaremos o termo isotrópico do setor de paridade-par. Para isso, vamos zerar o termo κ_{e-} , o que reduz a amplitude quadrática a:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = -\frac{2g_e^4}{q^4} \kappa_{tr} L_{\beta\nu} M^{\nu\beta}, \quad (4.79)$$

que pode ser também expressa em termos do resultado usual:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = -8\kappa_{tr} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{usual}}, \quad (4.80)$$

o mesmo valendo também para a seção de choque:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\Delta LV} = -8\kappa_{tr} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{usual}}. \quad (4.81)$$

da mesma forma que antes, o termo κ_{tr} , não altera a dependência angular da seção de choque e desta vez dando apenas um incremento de forma multiplicativa.

4.3.2 Contribuição anisotrópica do setor de paridade par

Continuando, vamos calcular a contribuição anisotrópica do setor de paridade par. Para isso, desta vez vamos anular o termo κ_{tr} . Temos:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = \frac{2g_e^4}{q^4} (\kappa_{e-})_{ij} (L_\nu^i M^{\nu j}). \quad (4.82)$$

Precisamos da contração $L_\nu^i M^{\nu j}$, desenvolvida a seguir:

$$L_\nu^i M^{\nu j} = 16 (p_{2\nu} p_1^i + p_{1\nu} p_2^i - \delta_\nu^i (m^2 + p_1 \cdot p_2)) (p_2'^\nu p_1'^j + p_1'^\nu p_2'^j - g^{\nu j} (M^2 + p_1' \cdot p_2')), \quad (4.83)$$

$$L_\nu^i M^{\nu j} = 16 \left\{ (p_{20} p_1^i + p_{10} p_2^i - \delta_0^i (m^2 + p_1 \cdot p_2)) (p_2'^0 p_1'^j + p_1'^0 p_2'^j - g^{0j} (M^2 + p_1' \cdot p_2')) + (p_{2k} p_1^i + p_{1k} p_2^i - \delta_k^i (m^2 + p_1 \cdot p_2)) (p_2'^k p_1'^j + p_1'^k p_2'^j - g^{kj} (M^2 + p_1' \cdot p_2')) \right\} \quad (4.84)$$

Simplificando:

$$L_\nu^i M^{\nu j} = 64 (p_k p'^k p^i p'^j + p^i p^j E^2 + E^2 p'^i p'^j) + 16 g^{ij} (m^2 + p_1 \cdot p_2) (M^2 + p_1' \cdot p_2'). \quad (4.85)$$

Realizando a contração com $(\kappa_{e-})_{ij}$, resulta:

$$(\kappa_{e-})_{ij} L_\nu^i M^{\nu j} = 64 \left(p_k p'^k (\kappa_{e-})_{ij} p^i p'^j + (\kappa_{e-})_{ij} p^i p^j E^2 + E^2 (\tilde{\kappa}_{e-})_{ij} p'^i p'^j \right). \quad (4.86)$$

Com isso a amplitude quadrática é dada por:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = 8g_e^4 \left(-\frac{|\vec{p}| |\vec{p}'| \cos(\theta) (\kappa_{e-})_{ij} p^i p'^j}{E^4} + \frac{(\kappa_{e-})_{ij} p^i p^j}{E^2} + \frac{(\kappa_{e-})_{ij} p'^i p'^j}{E^2} \right). \quad (4.87)$$

E a seção de choque:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\Delta\text{LV}} = \frac{2g_e^4 |\vec{p}'|}{(8\pi)^2 E^4 |\vec{p}|} \left(-\frac{|\vec{p}| |\vec{p}'| \cos(\theta) (\kappa_{e-})_{ij} p^i p'^j}{E^2} + (\kappa_{e-})_{ij} p^i p^j + (\kappa_{e-})_{ij} p'^i p'^j \right) \quad (4.88)$$

Se fazemos o limite não relativístico $M \gg |\vec{p}'|$:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\Delta\text{LV}} = \frac{2g_e^4 |\vec{p}'|}{(8\pi)^2 M^4 \sqrt{(M^2 - m^2)}} \left((\kappa_{e-})_{ij} p^i p^j + (\kappa_{e-})_{ij} p'^i p'^j \right) \quad (4.89)$$

Se consideramos ainda $M \gg m$,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\Delta\text{LV}} = \frac{2g_e^4 |\vec{p}'|}{(8\pi)^2 M^5} \left((\kappa_{e-})_{ij} p^i p^j + (\kappa_{e-})_{ij} p'^i p'^j \right) \rightarrow 0 \quad (4.90)$$

Ou ainda o limite ultra relativístico:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\Delta\text{LV}} = \frac{2g_e^4}{(8\pi)^2 |\vec{p}|^4} \left(-\cos(\theta) (\kappa_{e-})_{ij} p^i p'^j + (\kappa_{e-})_{ij} p^i p^j + (\kappa_{e-})_{ij} p'^i p'^j \right) \quad (4.91)$$

4.4 Análise de resultados

Nas sessões anteriores, calculamos o incremento oriundo do setor CPT-par do Modelo Padrão Estendido nos processos de espalhamento e aniquilação envolvendo elétrons e

múons, e suas anti-partículas. No que se refere aos termos de paridade-ímpar (k^i), vemos que há uma contribuição com dependência angular com relação ao ângulo φ na seção de choque do espalhamento elétron-múon; por outro lado, estes coeficientes não contribuem à seção de choque do processo de aniquilação. O termo de paridade-par anisotrópico, $(\kappa_{e-})_{ij}$, contribui acrescentando também dependência com relação ao ângulo φ em ambos os processos. Já o termo de paridade-par (isotrópico) não implica em nenhuma dependência angular nova.

Embora não sejam o foco de nosso trabalho as correções radioativas, é importante ressaltar que as suas correções podem chegar até 10% das seções de choque calculada a "tree-level" na QED. Em geral, tais correções têm a seguinte forma:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{corrigida}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{baixa ordem}} (1 + \text{fatores de correção}) \quad (4.92)$$

Isso torna evidente que não podemos simplesmente acrescentar os incrementos advindos da violação de Lorentz às seções de choque usuais (de mais baixa ordem), pois as primeiras correções radioativas serão mais relevantes em virtude da pequenez dos coeficientes de violação. Isto insere uma dificuldade na análise dos resultados, principalmente no que se refere à intenção de usar estas correções para estabelecer limites superiores sobre os parâmetros de violação.

Especificamente, no caso paridade-par isotrópico surge uma dificuldade adicional, uma vez que a correção obtida é uma fração da seção de choque usual, sendo neste caso mais difícil distingui-las das correções radioativas. Nos outros casos, temos que as correções aparecem acompanhadas de uma dependência angular que não pode ser explicada pelas correções radioativas. Deste modo, as anisotropias induzidas à seção de choque podem ser tomadas como um fator de diferenciação das correções radiativas. Uma fórmula mais geral poderia então considerar também violação de Lorentz nos diagramas usuais de maior ordem na QED usual. Podemos ilustrar isso no caso da aniquilação de par através da figura (4.4):

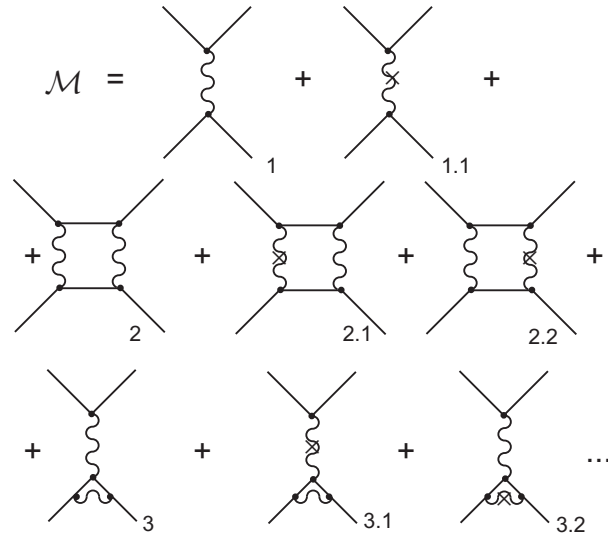


Figura 4.4: violação de Lorentz em diagramas de ordem maior.

A contribuição de violação de Lorentz vem, em primeira ordem no parâmetro de quebra, da interferência entre os digramas modificados e os diagramas usuais. Não é muito difícil perceber que a contribuição dominante de violação de Lorentz está na interferência entre os dois primeiros diagramas, o que justifica nossos cálculos.

5 Cálculo exato dos propagadores do campo de gauge do Modelo Padrão Estendido

Neste capítulo, iremos apresentar o cálculo exato dos propagadores da eletrodinâmica do Modelo Padrão Estendido, tanto para o setor CPT-par quanto para o setor CPT-ímpar. O procedimento de cálculo de ambos propagadores é baseado na existência de uma álgebra fechada de projetores, definidos em cima dos coeficientes de violação de Lorentz de cada setor.

5.1 Propagador de gauge do setor CPT-par não-birrefringente

Devido à ausência de uma expressão tensorial fechada para o propagador de gauge do setor CPT-par do MPE, usamos até o presente momento uma expansão (em primeira ordem nos coeficientes de violação) para este propagador. Esta abordagem deveu-se ao fato de termos inicialmente em mãos apenas uma expressão matricial para o propagador de gauge do setor CPT-par, calculada para as componentes não-birefringentes de paridade-ímpar, e isotrópica de paridade-par na Ref.[15]. Neste trabalho, foi também analisada a consistência desta teoria no que se refere aos aspectos de estabilidade, causalidade, e unitariedade, revelando que o setor paridade-ímpar é estável, não-causal e unitário, enquanto o setor paridade-par isotrópico é estável, causal e unitário apenas para um intervalo limitado dos valores do coeficiente κ_{tr} , $0 < \kappa_{tr} < 1$. O cálculo foi realizado numa forma matricial devido, certamente, à impossibilidade de obter-se uma álgebra fechada de projetores capaz de assegurar o cálculo do propagador numa forma tensorial exata.

No presente Capítulo, iremos mostrar que o uso da prescrição do tensor K_F para as componentes não-birrefringentes do setor CPT-par, apresentada na Eq.(1.37), possibilita a realização do cálculo do propagador numa forma tensorial fechada. Os desenvolvimentos aqui apresentados encontram-se publicados na Ref. [46].

Para calcular este propagador de gauge em uma forma tensorial exata, usaremos a

prescrição (1.37). Começamos a escrever a Lagrangiana em sua forma quadrática

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A_\mu D^{\mu\nu} A_\nu, \quad (5.1)$$

com $D^{\mu\nu}$ sendo um operador tensorial de segunda ordem definido com

$$D^{\mu\nu} = \square g^{\mu\nu} + \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \partial^\mu \partial^\nu - S^{\mu\nu}, \quad (5.2)$$

onde $g^{\mu\nu} = (+, - - -)$ é o tensor métrico, e $S^{\mu\nu}$ é o operador simétrico de violação de Lorentz

$$S^{\mu\nu} = 2 (K_F)^{\mu\alpha\beta\nu} \partial_\alpha \partial_\beta = S^{\nu\mu}. \quad (5.3)$$

O propagador de Feynman do campo de gauge é o definido como

$$\langle 0 | T(A_\mu(x) A_\nu(y)) | 0 \rangle = i \Delta_{\mu\nu}(x-y), \quad (5.4)$$

onde $\Delta_{\mu\nu}$ é o operador tensorial que satisfaz a relação:

$$D^{\mu\beta} \Delta_{\beta\nu}(x-y) = \delta^\mu_\nu \delta(x-y). \quad (5.5)$$

Podemos calcular o propagador de gauge no calibre de Feynman, $\xi = 1$, o que simplifica os cálculos. Neste calibre, temos

$$O^{\mu\nu} = \square g^{\mu\nu} - S^{\mu\nu}. \quad (5.6)$$

Com a prescrição contida na Ref. (1.37), o $S^{\lambda\rho}$ operador torna-se

$$S^{\lambda\rho} = [g^{\lambda\delta} k^{\nu\rho} - g^{\nu\delta} k^{\lambda\rho} + g^{\nu\rho} k^{\lambda\delta} - g^{\lambda\rho} k^{\nu\delta}] \partial_\nu \partial_\delta. \quad (5.7)$$

Na representação de Fourier, temos

$$\delta(x-y) = \int \frac{dp}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)}, \quad \Delta_{\beta\nu}(x-y) = \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}_{\beta\nu}(p) e^{-ip \cdot (x-y)}, \quad (5.8)$$

com

$$\tilde{O}^{\lambda\rho} = -(p^2 g^{\lambda\rho} + \tilde{S}^{\lambda\rho}), \quad (5.9)$$

$$\tilde{S}^{\lambda\rho} = -2 (K_F)^{\lambda\nu\delta\rho} p_\nu p_\delta, \quad (5.10)$$

$$\tilde{\tilde{O}}^{\lambda\rho} = - [p^\lambda p_\nu k^{\nu\rho} - p^2 k^{\lambda\rho} + p^\rho p_\delta k^{\lambda\delta} - g^{\lambda\rho} p_\delta p_\nu k^{\nu\delta}], \quad (5.11)$$

de modo que

$$\tilde{\tilde{\tilde{O}}}^{\lambda\rho} = -p^2 g^{\lambda\rho} + p^\lambda p_\nu k^{\nu\rho} - p^2 k^{\lambda\rho} + p^\rho p_\delta k^{\lambda\delta} - g^{\lambda\rho} p_\delta p_\nu k^{\nu\delta}. \quad (5.12)$$

Para inverter este operador tensor, é preciso resolver a relação tensorial

$$\tilde{O}^{\lambda\rho}\tilde{\Delta}_{\rho\beta} = \delta^{\lambda}_{\beta}. \quad (5.13)$$

Para isso, usamos a parametrização geral para um tensor simétrico de traço nulo,

$$k^{\lambda\rho} = \frac{1}{2}(U^{\lambda}V^{\rho} + U^{\rho}V^{\lambda}) - \frac{1}{4}g^{\lambda\rho}(U \cdot V), \quad (5.14)$$

onde U^{λ}, V^{ρ} são dois quadri-vetores arbitrários que contêm os coeficientes de violação de Lorentz. Esta prescrição, garante, obviamente, a propriedade de traço nulo ($k^{\lambda}_{\lambda} = 0$), conforme o esperado. A princípio, esta prescrição é geral, não havendo nenhuma restrição aos 4-vetores U^{λ}, V^{ρ} . Além disso, vale:

$$k^{00} = k^{ii} = \frac{3}{4}U^0V^0 + \frac{1}{4}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}), \quad (5.15)$$

$$k^{ij} = \frac{1}{2}(U^iV^j + U^jV^i) + \frac{1}{4}\delta^{ij}(U^0V^0 - \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}), \quad (5.16)$$

$$(\kappa_{DE})^{jk} = -\frac{1}{2}(U^iV^j + U^jV^i) + \frac{1}{4}\delta^{ij}(U^0V^0 + \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}). \quad (5.17)$$

Comparando a Eq. (5.17) com a Eq. (1.27), notamos que

$$(\kappa_{e-})^{jk} = -\frac{1}{2}(U^iV^j + U^jV^i), \quad \kappa_{\text{tr}} = \frac{1}{2}(U^0V^0 + \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}). \quad (5.18)$$

Lembrando que a matriz κ_{e-} é de traço nulo, devemos impor $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = 0$, o que simplesmente implica

$$\kappa_{\text{tr}} = U^0V^0/2. \quad (5.19)$$

Após estas definições preliminares, voltamos para ao cálculo do propagador. Substituindo a parametrização (5.14) em Eq.(5.12), temos:

$$\begin{aligned} \tilde{O}^{\lambda\rho} = & - \left[p^2 \left(1 - \frac{1}{2}U \cdot V \right) + (p \cdot U)(p \cdot V) \right] g^{\lambda\rho} - \frac{1}{2}(U \cdot V)p^{\lambda}p^{\rho} + \frac{1}{2}(p \cdot U)(p^{\rho}V^{\lambda} + p^{\lambda}V^{\rho}) \\ & + \frac{1}{2}(p \cdot V)(p^{\rho}U^{\lambda} + p^{\lambda}U^{\rho}) - \frac{1}{2}p^2(U^{\lambda}V^{\rho} + U^{\rho}V^{\lambda}). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Para resolver a Eq. (5.13), precisamos primeiro encontrar uma álgebra fechada dos operadores tensoriais (projetores), composta pelos seguintes projectores:

$$\Theta_{\rho\beta}, \omega_{\rho\beta}, U_{\rho}V_{\beta}, U_{\beta}V_{\rho}, p_{\rho}U_{\beta}, p_{\beta}U_{\rho}, p_{\rho}V_{\beta}, p_{\beta}V_{\rho}, V_{\beta}V_{\rho}, U_{\beta}U_{\rho}, \quad (5.21)$$

onde

$$\Theta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu}, \quad \omega_{\mu\nu} = p_{\mu}p_{\nu}/p^2, \quad (5.22)$$

	$\Theta_{\rho\beta}$	$\omega_{\rho\beta}$	$U_\rho V_\beta$	$U_\beta V_\rho$
$g^{\lambda\rho}$	Θ_β^λ	$p^\lambda p_\beta/p^2$	$U^\lambda V_\beta$	$U_\beta V^\lambda$
$\Theta^{\lambda\rho}$	Θ_β^λ	0	$U^\lambda V_\beta$ $-(p \cdot U)p^\lambda V_\beta/p^2$	$U_\beta V^\lambda$ $-(p \cdot V)p^\lambda U_\beta/p^2$
$\omega^{\lambda\rho}$	0	$p^\lambda p_\beta/p^2$	$(p \cdot U)p^\lambda V_\beta/p^2$	$(p \cdot V)p^\lambda U_\beta/p^2$
$p^\lambda V^\rho$	$p^\lambda V_{\beta+}$ $-(V \cdot p)p^\lambda p_\beta/p^2$	$(V \cdot p)p^\lambda p_\beta/p^2$	$(U \cdot V)p^\lambda V_\beta$	$V^2 p^\lambda U_\beta$
$p^\rho V^\lambda$	0	$V^\lambda p_\beta$	$(p \cdot U) V_\beta V^\lambda$	$(p \cdot V) U_\beta V^\lambda$
$p^\lambda U^\rho$	$p^\lambda U_\beta$ $-(p \cdot U)p^\lambda p_\beta/p^2$	$(p \cdot U)p^\lambda p_\beta/p^2$	$U^2 p^\lambda V_\beta$	$(U \cdot V)p^\lambda U_\beta$
$p^\rho U^\lambda$	0	$U^\lambda p_\beta$	$(p \cdot U) V_\beta U^\lambda$	$(p \cdot V) U_\beta U^\lambda$
$p^\lambda p^\rho$	0	$p^\lambda p_\beta$	$(p \cdot U)p^\lambda V_\beta$	$(p \cdot V)p^\lambda U_\beta$
$U^\lambda V^\rho$	$U^\lambda V_\beta$ $-(p \cdot V)U^\lambda p_\beta/p^2$	$(p \cdot V)U^\lambda p_\beta/p^2$	$(U \cdot V)U^\lambda V_\beta$	$V^2 U^\lambda U_\beta$
$U^\rho V^\lambda$	$U_\beta V^\lambda$ $-(p \cdot U)V^\lambda p_\beta/p^2$	$(p \cdot U)V^\lambda p_\beta/p^2$	$U^2 V^\lambda V_\beta$	$(U \cdot V) U_\beta V^\lambda$

Tabela 5.1: Álgebra dos projectores.

são os projectores transversais e longitudinais. Desta forma, propõe-se para o propagador a forma geral:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\rho\beta}(p) = & (a_1 \Theta_{\rho\beta} + a_2 \omega_{\rho\beta} + a_3 U_\rho V_\beta + a_4 U_\beta V_\rho + a_5 p_\rho U_\beta + a_6 p_\beta U_\rho + a_7 p_\rho V_\beta + a_8 p_\beta V_\rho \\ & + a_9 U_\beta U_\rho + a_{10} V_\beta V_\rho), \end{aligned} \quad (5.23)$$

com os coeficientes a_i sendo funções (do momentum e dos quadri-vetore U_μ, V_ν) a serem determinados. A álgebra fechada dos projectores é explicitamente mostrada na Tabela I e na Tabela II.

Ao realizar todas as contrações tensoriais englobadas na expressão (5.13), obtemos um sistema de dez equações para os dez coeficientes a_i , a saber:

$$\begin{aligned} a[-p^2 - (p \cdot V)(p \cdot U)] &= 1, \\ a[1 - 2n(V \cdot U)] - b + f \frac{1}{2}(p \cdot V)U^2 + h \frac{1}{2}(p \cdot U)V^2 &= 0, \end{aligned}$$

	$p_\rho U_\beta$	$p_\beta U_\rho$	$p_\rho V_\beta$	$p_\beta V_\rho$
$g^{\lambda\rho}$	$p^\lambda U_\beta$	$p_\beta U^\lambda$	$p^\lambda V_\beta$	$p_\beta V^\lambda$
$\Theta^{\lambda\rho}$	0	$p_\beta U^\lambda$ $-(p \cdot U)p^\lambda p_\beta/p^2$	0	$p_\beta V^\lambda$ $-(p \cdot V)p^\lambda p_\beta/p^2$
$\omega^{\lambda\rho}$	$p^\lambda U_\beta$	$(p \cdot U)p^\lambda p_\beta/p^2$	$p^\lambda V_\beta$	$(p \cdot V)p^\lambda p_\beta/p^2$
$p^\lambda V^\rho$	$(p \cdot V)p^\lambda U_\beta$	$p^\lambda p_\beta(U \cdot V)$	$p^\lambda V_\beta(p \cdot V)$	$p^\lambda p_\beta V^2$
$p^\rho V^\lambda$	$p^2 V^\lambda U_\beta$	$(p \cdot U)V^\lambda p_\beta$	$p^2 V^\lambda V_\beta$	$(p \cdot V)V^\lambda p_\beta$
$p^\lambda U^\rho$	$(U \cdot p)p^\lambda U_\beta$	$U^2 p^\lambda p_\beta$	$(p \cdot U)p^\lambda V_\beta$	$(U \cdot V)p^\lambda p_\beta$
$p^\rho U^\lambda$	$p^2 U^\lambda U_\beta$	$(p \cdot U)U^\lambda p_\beta$	$p^2 U^\lambda V_\beta$	$(p \cdot V)U^\lambda p_\beta$
$p^\lambda p^\rho$	$p^2 p^\lambda U_\beta$	$(p \cdot U)p^\lambda p_\beta$	$p^2 p^\lambda V_\beta$	$(p \cdot V)p^\lambda p_\beta$
$U^\lambda V^\rho$	$(p \cdot V)U^\lambda U_\beta$	$(U \cdot V)U^\lambda p_\beta$	$(p \cdot V)U^\lambda V_\beta$	$V^2 U^\lambda p_\beta$
$U^\rho V^\lambda$	$(p \cdot U)V^\lambda U_\beta$	$U^2 V^\lambda p_\beta$	$(p \cdot U)V_\beta V^\lambda$	$(U \cdot V)p_\beta V^\lambda$

Tabela 5.2: Algebra dos projectores.

	$U_\beta U_\rho$	$V_\beta V_\rho$
$g^{\lambda\rho}$	$U_\beta U^\lambda$	$V_\beta V^\lambda$
$\Theta^{\lambda\rho}$	$U_\beta U^\lambda$ $-(p \cdot U)p^\lambda U_\beta/p^2$	$V_\beta V^\lambda$ $-(p \cdot V)p^\lambda V_\beta/p^2$
$\omega^{\lambda\rho}$	$(p \cdot U)p^\lambda U_\beta/p^2$	$(p \cdot V)p^\lambda V_\beta/p^2$
$p^\lambda V^\rho$	$(U \cdot V)p^\lambda U_\beta$	$V^2 p^\lambda V_\beta$
$p^\rho V^\lambda$	$(U \cdot p)V^\lambda U_\beta$	$(p \cdot V)V^\lambda V_\beta$
$p^\lambda U^\rho$	$U^2 p^\lambda U_\beta$	$(U \cdot V)p^\lambda V_\beta$
$p^\rho U^\lambda$	$(p \cdot U)U_\beta U^\lambda$	$(p \cdot V)U^\lambda V_\beta$
$p^\lambda p^\rho$	$(p \cdot U)p^\lambda U_\beta$	$(p \cdot V)p^\lambda V_\beta$
$U^\lambda V^\rho$	$(U \cdot V)U_\beta U^\lambda$	$V^2 U^\lambda V_\beta$
$U^\rho V^\lambda$	$U^2 V^\lambda U_\beta$	$(U \cdot V)V^\lambda V_\beta$

Tabela 5.3: Algebra dos projectores.

$$\begin{aligned}
& [a\frac{1}{2}(p \cdot U) + c\frac{1}{2}A^2(p \cdot V) - gp^2 + l\frac{1}{2}(p \cdot U)V^2] = 0, \\
& [a\frac{1}{2}(p \cdot V) - ep^2 + d\frac{1}{2}(p \cdot U)V^2 + j\frac{1}{2}(p \cdot V)U^2] = 0, \\
& -a\frac{1}{2}p^2 + c[-p^2 - \frac{1}{2}(p \cdot U)(p \cdot V)] - \frac{l}{2}[p^2V^2 - (p \cdot V)^2] = 0, \\
& -a\frac{1}{2}p^2 + j\frac{1}{2}(p \cdot U)^2 - j\frac{1}{2}p^2U^2 - [dp^2 + d\frac{1}{2}(p \cdot U)(p \cdot V)] = 0, \\
& a\frac{1}{2}(p \cdot V) - fp^2 - f\frac{1}{2}(p \cdot V)(p \cdot U) + h\frac{1}{2}(p \cdot V)^2 - h\frac{1}{2}p^2V^2 = 0, \\
& a\frac{1}{2}(p \cdot U) + f\frac{1}{2}(p \cdot U)^2 - f\frac{1}{2}p^2U^2 - h\frac{1}{2}(p \cdot U)(p \cdot V) - hp^2 = 0, \\
& c[\frac{1}{2}(p \cdot U)^2 - \frac{1}{2}p^2U^2] - lp^2 - l\frac{1}{2}(p \cdot U)(p \cdot V) = 0, \\
& d[\frac{1}{2}(p \cdot V)^2 - \frac{1}{2}p^2V^2] - jp^2 - j\frac{1}{2}(p \cdot U)(p \cdot V) = 0.
\end{aligned}$$

As soluções deste sistema são:

$$a_1 = -\frac{1}{[p^2 - \frac{1}{2}p^2(U \cdot V) + (p \cdot U)(p \cdot V)]}, \quad a_2 = a_1 \left[\frac{N}{\boxtimes(p)} \right], \quad (5.24)$$

$$a_3 = a_4 = -\frac{a_1}{2} \left[\frac{p^2[p^2 + \frac{1}{2}(p \cdot V)(p \cdot U)]}{\boxtimes(p)} \right], \quad (5.25)$$

$$a_5 = a_6 = \frac{a_1}{2} \left[\frac{p^2(p \cdot V) + (p \cdot U)(p \cdot V)^2 - \frac{1}{2}(p \cdot U)V^2p^2}{\boxtimes(p)} \right], \quad (5.26)$$

$$a_7 = a_8 = \frac{a_1}{2} \left[\frac{(p \cdot U)p^2 + (p \cdot U)^2(p \cdot V) - \frac{1}{2}U^2(p \cdot V)p^2}{\boxtimes(p)} \right], \quad (5.27)$$

$$a_9 = a_{10} = -\frac{a_1}{4} \left[\frac{p^2[(p \cdot V)^2 - p^2V^2]}{\boxtimes(p)} \right], \quad (5.28)$$

onde o elemento no denominador é

$$\boxtimes(p) = p^4 \left(1 - \frac{V^2U^2}{4}\right) + \frac{p^2}{4} [4(p \cdot U)(p \cdot V) + (p \cdot V)^2U^2 + (p \cdot U)^2V^2]. \quad (5.29)$$

Com estes resultados, o propagador gauge está devidamente escrito como

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T(A_\rho(x) A_\beta(y)) | 0 \rangle &= -\frac{i}{[p^2 - \frac{1}{2}p^2(U \cdot V) + (p \cdot U)(p \cdot V)] \boxtimes(p)} \{ \boxtimes(p) \Theta_{\rho\beta} + N(p) \omega_{\rho\beta} \\
&+ F(p)(U_\rho V_\beta + U_\beta V_\rho) + G(p)(p_\rho U_\beta + p_\beta U_\rho) + H(p)(p_\rho V_\beta + p_\beta V_\rho) + \\
&+ I(p)U_\beta U_\rho + L(p)V_\beta V_\rho \}, \quad (5.30)
\end{aligned}$$

com os seguintes coeficientes:

$$G(p) = \frac{1}{2} [(p \cdot V)p^2 + (p \cdot U)(p \cdot V)^2 - \frac{1}{2}(p \cdot U)p^2V^2], \quad (5.31)$$

$$H(p) = \frac{1}{2} [(p \cdot U)p^2 + (p \cdot V)(p \cdot U)^2 - \frac{1}{2}(p \cdot V)p^2U^2], \quad (5.32)$$

$$F(p) = -\frac{p^2}{2}[p^2 + \frac{1}{2}(p \cdot V)(p \cdot U)], \quad I(p) = \frac{1}{4}p^2[p^2V^2 - (p \cdot V)^2], \quad J(p) = \frac{1}{4}p^2[p^2U^2 - (p \cdot U)^2], \quad (5.33)$$

$$N(p) = \frac{a_1}{4\boxtimes} \left[4\boxtimes \left[1 - \frac{1}{2}(U \cdot V) \right] - (p \cdot U)(p \cdot V)p^2U^2V^2 + (p \cdot V)^2p^2U^2 \right. \\ \left. + (p \cdot U)^2p^2V^2 + (p \cdot U)(p \cdot V)^3U^2 + (p \cdot V)(p \cdot U)^3V^2 \right], \quad (5.34)$$

com $U^2 = U \cdot U = U_\mu U^\mu$, $V^2 = V \cdot V = V_\mu V^\mu$.

Levando em conta a expressão (5.14), uma observação importante é que os produtos $U_\beta U_\rho$, $V_\beta V_\rho$, $U_\rho V_\beta$ são termos de primeira ordem nos coeficientes de Lorentz-quebração da matriz $k^{\lambda\rho}$. Notamos que nossos resultados apresentam termos até em terceira ordem nos coeficientes da matriz $k^{\lambda\rho}$. É ainda importante mencionar que este propagador é simétrico sob permutação de índices ($\tilde{D}_{\rho\beta} = \tilde{D}_{\beta\rho}$) e sob a permuta $U \longleftrightarrow V$, como era esperado.

5.1.1 Relações de Dispersão

Como sabemos, as relações de dispersão são extraídas dos pólos do propagador. Fica registrado que as relações de dispersão são:

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 - 2p_0(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}), \quad (5.35)$$

para o setor de paridade ímpar e:

$$p_0 = |\mathbf{p}| \sqrt{(1 - \kappa_{\text{tr}})/(1 + \kappa_{\text{tr}})} \quad (5.36)$$

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 - \mathbf{p} \cdot \kappa_{\mathbf{e}-} \cdot \mathbf{p} \quad (5.37)$$

são as relações do setor de paridade par.

5.2 O propagador de gauge do setor CPT-ímpar

O setor CPT-ímpar do MPE é descrito pela seguinte lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\nu}F^{\alpha\nu} - \frac{1}{4}\varepsilon_{\beta\alpha\rho\varphi}V^\beta A^\alpha F^{\rho\varphi} - J_\alpha A^\alpha, \quad (5.38)$$

onde V^β é o 4-vetor fixo responsável pela violação de Lorentz, inserido no termo de Carroll-Field-Jackiw [3]. Com este termo, a equação de movimento do campo de gauge

assume a forma:

$$\left(\square g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right) \partial_\mu \partial_\nu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} v^\alpha \partial^\beta \right) A^\nu = J_\mu. \quad (5.39)$$

A solução para esta equação pode ser encontrada pelo método de Green, ou seja,

$$\left(\square g_{\mu\kappa} - \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right) \partial_\mu \partial_\kappa + \varepsilon_{\mu\kappa\alpha\beta} v^\alpha \partial^\beta \right) G^{\kappa\nu} = \delta_\mu^\nu. \quad (5.40)$$

No espaço dos momentos, esta equação é escrita como

$$\left(-q^2 g_{\mu\kappa} + \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right) q_\mu q_\kappa - i\varepsilon_{\mu\kappa\alpha\beta} v^\alpha q^\beta \right) \tilde{D}_{LV}^{\kappa\nu} = \delta_\mu^\nu, \quad (5.41)$$

e também em termos dos operadores projetores já definidos antes:

$$\left(-q^2 \Theta_{\mu\kappa} - q^2 \frac{1}{\zeta} \Omega_{\mu\kappa} + S_{\mu\kappa} \right) \tilde{D}_{LV}^{\kappa\nu} = \Theta_\mu^\nu + \Omega_\mu^\nu, \quad (5.42)$$

onde desta vez

$$S_{\mu\kappa} = -i\varepsilon_{\mu\kappa\alpha\beta} v^\alpha q^\beta.$$

Podemos tentar, assim como no caso CPT-par, compor uma álgebra fechada com os projetores $\Theta_{\mu\kappa}$, $\Omega_{\mu\kappa}$, $S_{\mu\kappa}$. Para isso, devemos investigar as seguintes contrações tensoriais:

$$\Theta_{\mu\kappa} S^{\kappa\nu} = \left(g_{\mu\kappa} - \frac{q_\mu q_\kappa}{q^2} \right) (-i\varepsilon^{\kappa\nu\alpha\beta} v_\alpha q_\beta) = -i\varepsilon_\mu^{\nu\alpha\beta} v_\alpha q_\beta = S_\mu^\nu, \quad (5.43)$$

$$\Omega_{\mu\kappa} S^{\kappa\nu} = \left(\frac{q_\mu q_\kappa}{q^2} \right) (-i\varepsilon^{\kappa\nu\alpha\beta} v_\alpha q_\beta) = 0, \quad (5.44)$$

$$S_{\mu\kappa} S^{\kappa\nu} = ((v \cdot q)^2 - v^2 q^2) \Theta_\mu^\nu + (v \cdot q)^2 \Omega_\mu^\nu + \Sigma_\mu^\nu, \quad (5.45)$$

onde usamos a relação:

$$-\varepsilon_{\pi\nu\alpha\beta} \varepsilon^{\pi\sigma\chi\delta} = (\delta_\nu^\sigma \delta_\alpha^\chi \delta_\beta^\delta - \delta_\nu^\delta \delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\chi + \delta_\nu^\delta \delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\chi - \delta_\nu^\delta \delta_\alpha^\chi \delta_\beta^\sigma + \delta_\nu^\chi \delta_\alpha^\delta \delta_\beta^\sigma - \delta_\nu^\chi \delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\delta), \quad (5.46)$$

e definimos um novo projetor (simétrico):

$$\Sigma_\mu^\nu = q^2 v^\nu v_\mu - (v \cdot q) (q^\nu v_\mu + q_\mu v^\nu). \quad (5.47)$$

$$\Sigma^{\nu\mu} = q^2 v^\nu v^\mu - (v \cdot q) (q^\nu v^\mu + q^\mu v^\nu). \quad (5.48)$$

Esta nova peça não pode ser escrita em termos das outras que já tínhamos, o que mostra que nossa álgebra não estava fechada. Podemos agora verificar se obtemos uma álgebra fechada incluindo a presença do operador Σ_μ^ν verificando as seguintes contrações:

$$\Theta_{\mu\kappa} \Sigma^{\kappa\nu} = \Sigma_\mu^\nu + (v \cdot q)^2 \Omega_\mu^\nu, \quad (5.49)$$

	$\Theta_{\rho\beta}$	$\Omega_{\rho\beta}$	$S_{\rho\beta}$	$\Sigma_{\rho\beta}$
$g^{\lambda\rho}$	Θ_{β}^{λ}	Ω_{β}^{λ}	S_{β}^{λ}	Σ_{β}^{λ}
$\Theta^{\lambda\rho}$	Θ_{β}^{λ}	0	S_{β}^{λ}	$\Sigma_{\beta}^{\lambda} + (v \cdot q)^2 \Omega_{\beta}^{\lambda}$
$\Omega^{\lambda\rho}$	0	Ω_{β}^{λ}	0	$-(v \cdot q)^2 \Omega_{\beta}^{\nu}$
$S^{\lambda\rho}$	S_{β}^{λ}	0	$((v \cdot q)^2 - v^2 q^2) \Theta_{\beta}^{\lambda} + (v \cdot q)^2 \Omega_{\beta}^{\lambda} + \Sigma_{\beta}^{\lambda}$	0
$\Sigma^{\lambda\rho}$	$\Sigma_{\beta}^{\lambda} + (v \cdot q)^2 \Omega_{\beta}^{\lambda}$	$-(v \cdot q)^2 \Omega_{\beta}^{\nu}$	0	$(q^2 v^2 - (v \cdot q)^2) \Sigma_{\beta}^{\lambda} + (v \cdot q)^2 v^2 q^2 \Omega_{\beta}^{\lambda}$

Tabela 5.4: Algebra dos projectores da eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw.

$$\Omega_{\mu\kappa} \Sigma^{\kappa\nu} = -(v \cdot q)^2 \Omega_{\mu}^{\nu}, \quad (5.50)$$

$$S_{\mu\kappa} \Sigma^{\kappa\nu} = 0, \quad (5.51)$$

$$\Sigma_{\mu\kappa} \Sigma^{\kappa\nu} = (q^2 v^2 - (v \cdot q)^2) \Sigma_{\mu}^{\nu} + (v \cdot q)^2 v^2 q^2 \Omega_{\mu}^{\nu}. \quad (5.52)$$

Podemos agrupar estes resultados na Tabela:

Concluimos assim que, acrescentando $\Sigma^{\kappa\nu}$ ao nosso conjunto de operadores, temos uma álgebra fechada. Propomos então a seguinte forma para

$$\tilde{D}_{LV}^{\kappa\nu} = a\Theta^{\kappa\nu} + b\Omega^{\kappa\nu} + cS^{\kappa\nu} + d\Sigma^{\kappa\nu}, \quad (5.53)$$

onde a, b, c, d são coeficientes a serem determinados. Com isso:

$$\left(-q^2 \Theta_{\mu\kappa} - q^2 \frac{1}{\zeta} \Omega_{\mu\kappa} + S_{\mu\kappa} \right) (a\Theta^{\kappa\nu} + b\Omega^{\kappa\nu} + cS^{\kappa\nu} + d\Sigma^{\kappa\nu}) = \Theta_{\mu}^{\nu} + \Omega_{\mu}^{\nu}. \quad (5.54)$$

Usando a álgebra de operadores contida na Tabela , obtemos:

$$\begin{aligned} \Theta_{\mu}^{\nu} + \Omega_{\mu}^{\nu} &= (-q^2 a \Theta_{\mu}^{\nu} + c(v \cdot q)^2 - cv^2 q^2) \Theta_{\mu}^{\nu} + \\ &+ \left(-q^2 d(v \cdot q)^2 - q^2 b \frac{1}{\zeta} + q^2 d \frac{1}{\zeta} (v \cdot q)^2 + c(v \cdot q)^2 \right) \Omega_{\mu}^{\nu} \\ &+ (-q^2 c + a) S_{\mu}^{\nu} (-q^2 d + c) \Sigma_{\mu}^{\nu}. \end{aligned}$$

Esta equação tensorial nos leva a um sistema de quatro equações e quatro icógnitas:

$$-q^2 a + c(v \cdot q)^2 - cv^2 q^2 = 1, \quad (5.55)$$

$$-q^2 d(v \cdot q)^2 - q^2 b \frac{1}{\zeta} + q^2 d \frac{1}{\zeta} (v \cdot q)^2 + c(v \cdot q)^2 = 1, \quad (5.56)$$

$$-q^2 c + a = 0, \quad (5.57)$$

$$-q^2 d + c = 0, \quad (5.58)$$

cuja solução é:

$$a = -\frac{q^2}{\boxplus}, \quad b = -\frac{\zeta}{q^2} - \frac{(v \cdot q)^2}{q^2 \boxplus}, \quad (5.59)$$

$$c = -\frac{1}{\boxplus}, \quad d = -\frac{1}{q^2 \boxplus}. \quad (5.60)$$

onde $\boxplus = (q^4 - (v \cdot q)^2 + v^2 q^2)$. Com estes resultados, o propagador assume a forma:

$$\tilde{D}_{LV}^{\kappa\nu} = \frac{-q^2}{\boxplus} \Theta^{\kappa\nu} - \left(\frac{\zeta}{q^2} + \frac{(v \cdot q)^2}{q^2 \boxplus} \right) \Omega^{\kappa\nu} - \frac{1}{\boxplus} S^{\kappa\nu} - \frac{1}{q^2 \boxplus} \Sigma^{\kappa\nu}, \quad (5.61)$$

que é o propagador exato associado ao termo CPT-ímpar de nosso modelo. Este propagador foi aqui calculado para uma escolha covariante de gauge, diferindo do propagador da Ref.[4], que refere-se a uma escolha de gauge axial. Difere também do propagador da Ref.[5], calculado para a eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw na presença do setor de Higgs e do termo massivo de Proca. Apesar de diferir dos propagadores das referências precedentes, uma análise da consistência baseada nesta expressão irá revelar que os mesmos resultados concernentes à consistência da eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw, que é dotada de problemas de instabilidade de energia e causalidade para um background do tipo-tempo, comportando-se como uma teoria consistente (estável, causal e unitária), entretanto, para o caso de um background tipo-espaço (vide Refs.[4],[5]).

5.2.1 Relações de Dispersão

Aqui, vemos que dos polos do propagador, retiramos duas relações de dispersão:.

$$q^2 = 0, \quad (5.62)$$

que é ordinária, e:

$$q^4 - (v \cdot q)^2 + v^2 q^2 \quad (5.63)$$

que é extraordinária:

6 A influência do termo CPT-ímpar no espalhamento elétron-múon

Neste capítulo, iremos discutir a influência do termo de Carroll-Field-Jackiw no espalhamento de férmions, mais precisamente no caso de um espalhamento elétron-muon.

O ponto de partida é o propagador (5.61), com o qual poderemos calcular amplitudes de espalhamento e seções de choque. Sabendo-se que a magnitude do termo de Carroll-Field-Jackiw é fortemente limitada por testes de birrefringência, podemos restringir nossos cálculos usando uma versão do propagador em primeira ordem em v , desprezando os termos em ordem mais alta, ou seja:

$$\tilde{D}_{LV}^{\mu\nu} = -\frac{1}{q^2}\Theta^{\mu\nu} - \frac{\zeta}{q^2}\Omega^{\mu\nu} - \frac{1}{q^4}S^{\mu\nu}. \quad (6.1)$$

onde também expandimos o denominador, $\boxplus^{-1} = (q^4 - (v \cdot q)^2 + v^2 q^2)^{-1}$. No que concerne ao cálculo de amplitude de espalhamento, sabemos que o projetor longitudinal não contribui, de modo que efetivamente temos:

$$\tilde{D}_{LV}^{\kappa\nu} \simeq -\frac{1}{q^2}g^{\kappa\nu} - \frac{1}{q^4}S^{\kappa\nu}. \quad (6.2)$$

Isto pode ser traduzido em um novo diagrama (em primeira ordem em v) onde o termo \bullet está associado a $iS_{\mu\kappa} = \varepsilon_{\mu\kappa\alpha\beta}v^\alpha q^\beta$, o que nos dá a contribuição extra advinda do termo de Carroll-Field-Jackiw.

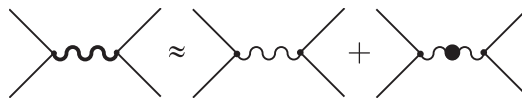


Figura 6.1: Representação dois dois diagramas a "tree-level" que contribuem no espalhamento.

A amplitude total será então a soma das amplitudes associadas a cada um destes diagramas,

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\text{usual}} + \mathcal{M}_{\Delta LV}, \quad (6.3)$$

onde a amplitude $\mathcal{M}_{\Delta LV}$ está associada ao diagrama extra. A amplitude quadrática $|\mathcal{M}|^2$ será dada por:

$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_{\text{usual}}|^2 + |\mathcal{M}_{\text{int}}|^2 + |\mathcal{M}_{\Delta LV}|^2, \quad (6.4)$$

onde $|\mathcal{M}|_{\text{int}}^2$ está associado aos termos de interferência entre os dois diagramas. Seguindo nossa metodologia, vamos concentrar nossos esforços no termo de interferência, que contém a contribuição em primeira ordem no parâmetro de violação de Lorentz:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = \langle \mathcal{M}_{\text{usual}}^* \mathcal{M}_{\Delta LV} \rangle + \langle \mathcal{M}_{\text{usual}}^* \mathcal{M}_{\Delta LV} \rangle^*, \quad (6.5)$$

De maneira genérica, podemos escrever as amplitudes em primeira ordem da seguinte forma:

$$\mathcal{M}_{\text{usual}} = -\frac{1}{q^2} g_{\mu\nu} j_{(1)}^\mu j_{(2)}^\nu, \quad (6.6)$$

$$\mathcal{M}_{\Delta LV} = -\frac{1}{q^4} S_{\alpha\beta} j_{(1)}^\alpha j_{(2)}^\beta, \quad (6.7)$$

e $j^\mu = g_e \bar{u}^{s'}(p') \gamma^\mu u^{sx}(p)$ ou $g_e^2 \bar{v}^{s_2}(p_2) \gamma^\mu u^{s_1}(p_1)$ dependendo do processo. O primeiro termo de interferência é:

$$\mathcal{M}_{\text{usual}}^* \mathcal{M}_{\Delta LV} = \frac{1}{q^6} g_{\mu\nu} S_{\alpha\beta} j_{(1)}^\alpha \left(j_{(1)}^\mu \right)^* j_{(2)}^\beta \left(j_{(2)}^\nu \right)^*, \quad (6.8)$$

cuja média sobre os estados de spin é dada por:

$$\langle \mathcal{M}_{\text{usual}}^* \mathcal{M}_{\Delta LV} \rangle = \frac{1}{q^6} g_{\mu\nu} S_{\alpha\beta} \langle j_{(1)}^\alpha \left(j_{(1)}^\mu \right)^* j_{(2)}^\beta \left(j_{(2)}^\nu \right)^* \rangle. \quad (6.9)$$

Usando os resultados do truque de Casimir, resulta:

$$\langle \mathcal{M}_{\text{usual}}^* \mathcal{M}_{\Delta LV} \rangle = \frac{g_e^4}{4q^6} g_{\mu\nu} S_{\alpha\beta} L^{\mu\alpha} M^{\nu\beta}. \quad (6.10)$$

O segundo termo de interferência é simplesmente o complexo conjugado do primeiro, ou seja,

$$\langle \mathcal{M}_{\text{usual}} \mathcal{M}_{\Delta LV}^* \rangle = -\frac{g_e^4}{4q^6} g_{\mu\nu} S_{\alpha\beta} L^{\mu\alpha} M^{\nu\beta} = -\langle \mathcal{M}_{\text{usual}}^* \mathcal{M}_{\Delta LV} \rangle, \quad (6.11)$$

visto que $S_{\alpha\beta}$ é puramente imaginário. Conseqüentemente, vemos que o termo de interferência anula-se:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = 0, \quad (6.12)$$

para o caso de espalhamentos não-polarizados. Dado que o termo de interferência, definido em primeira ordem, é nulo, resta calcular a contribuição em segunda ordem à amplitude quadrática, dada pela contribuição, $\langle |\mathcal{M}_{\Delta LV}|^2 \rangle$, usando as regras de Feynman. precisamos então do propagador em segunda ordem:

$$\tilde{D}_{LV}^{\kappa\nu} \simeq \left(-\frac{1}{q^2} - \frac{(v \cdot q)^2}{q^6} + \frac{v^2}{q^4} \right) \Theta^{\kappa\nu} - \left(\frac{\zeta}{q^2} + \frac{(v \cdot q)^2}{q^6} \right) \Omega^{\kappa\nu} - \frac{1}{q^4} S^{\kappa\nu} - \frac{1}{q^6} \Sigma^{\kappa\nu} \quad (6.13)$$

ou

$$\tilde{D}_{LV}^{\kappa\nu} \simeq -\frac{1}{q^2}\Theta^{\kappa\nu} - \frac{\zeta}{q^2}\Omega^{\kappa\nu} - \frac{1}{q^4}S^{\kappa\nu} - \frac{1}{q^6} [((v \cdot q)^2 - v^2 q^2)\Theta^{\kappa\nu} + (v \cdot q)^2\Omega^{\kappa\nu} + \Sigma^{\kappa\nu}]$$

Da tabela (5.4) de algebra dos operadores, sabemos que $S_{\mu\kappa}S^{\kappa\nu} = ((v \cdot q)^2 - v^2 q^2)\Theta_{\mu}^{\nu} + (v \cdot q)^2\Omega_{\mu}^{\nu} + \Sigma_{\mu}^{\nu}$. Isto sugere que, em segunda ordem, o propagador é equivalente a:

$$\tilde{D}_{LV}^{\mu\nu} \simeq \tilde{D}^{\mu\nu} - \tilde{D}^{\mu\beta}(S_{\beta\alpha})\tilde{D}^{\alpha\nu} + \tilde{D}^{\mu\beta}(S_{\beta\alpha})\tilde{D}^{\alpha\chi}(S_{\chi\delta})\tilde{D}^{\delta\nu},$$

que é a expansão perturbativa do propagador de Carroll-Field-Jackiw em torno do propagador usual. É esperado que esta série convirja para o propagador exato quando consideramos os termos adicionais. Podemos então propor que termos de ordem maior pode ser incrementados na amplitude através da inserção de outros diagramas do tipo:

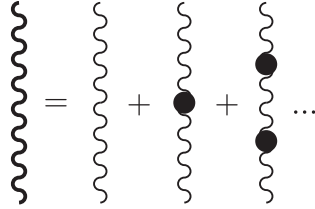


Figura 6.2: Representação do processo como uma soma perturbativa de diagramas com inserções que representam o termo de violação de Lorentz.

A amplitude $M_{\Delta LV}$ está associada à contribuição do diagrama adicional da Fig.(6.1). Usando as regras de Feynman, podemos montar a amplitude quadrática advinda da amplitude (6.7) como:

$$|\mathcal{M}_{\Delta LV}|^2 = -\frac{1}{q^8}S_{\mu\nu}S_{\alpha\beta}j_{(1)}^{\mu}(j_{(1)}^{\alpha})^*j_{(2)}^{\nu}\left(j_{(2)}^{\beta}\right)^* \quad (6.14)$$

uma vez que $S_{\alpha\beta}$ é puramente imaginário. Tomando a soma sobre os spins, decorre:

$$\langle |\mathcal{M}_{\Delta LV}|^2 \rangle = -\frac{g_e^4}{4q^8}S_{\mu\nu}S_{\alpha\beta}L^{\mu\alpha}M^{\nu\beta}. \quad (6.15)$$

Escrevendo agora explicitamente o termo $S_{\mu\nu}$:

$$\langle |\mathcal{M}_{\Delta LV}|^2 \rangle = \frac{g_e^4}{4q^8}\varepsilon_{\mu\nu\theta\varphi}\varepsilon_{\alpha\beta\chi\delta}v^{\theta}q^{\varphi}v^{\chi}q^{\delta}L^{\mu\alpha}M^{\nu\beta}, \quad (6.16)$$

que fornece uma das contribuições em segunda ordem no parâmetro de violação de Lorentz. Se estamos considerando as contribuições em segunda ordem no parâmetro de quebra, então devemos também considerar o seguinte diagrama:



Figura 6.3:

O termo de interferência entre este diagrama e o diagrama usual nos dá à outra contribuição de segunda ordem. A interferência entre este diagrama e o diagrama de primeira ordem no parâmetro de quebra será de terceira ordem e por isso não será considerada, assim como a amplitude quadrática que será de quarta ordem. Usando as regras de Feynman montamos a amplitude associada a este último diagrama:

$$-i\mathcal{M}_{\Delta LV2aO} = \bar{u}^{s'_1}(p'_1) i g_e \gamma^\mu u^{s_1}(p_1) i \tilde{D}_{\mu\beta}(iS^{\beta\alpha}) i \tilde{D}_{\alpha\chi}(iS^{\chi\delta}) i \tilde{D}_{\delta\nu} \bar{u}^{s'_2}(p'_2) i g_e \gamma^\nu u^{s_2}(p_2) \quad (6.17)$$

$$\mathcal{M}_{\Delta LV2aO} = -\frac{1}{q^6} S_{\mu\chi} S_\nu^\chi j_{(1)}^\mu j_{(2)}^\nu \quad (6.18)$$

O primeiro termo de interferência será:

$$\mathcal{M}_{\Delta LV2aO} \mathcal{M}_{\text{usual}}^* = \frac{1}{q^8} g_{\alpha\beta} S_{\mu\chi} S_\nu^\chi j_{(1)}^\mu (j_{(1)}^\alpha)^* j_{(2)}^\nu (j_{(2)}^\beta)^* \quad (6.19)$$

E ainda:

$$\langle \mathcal{M}_{\Delta LV2aO} \mathcal{M}_{\text{usual}}^* \rangle = \frac{g_e^4}{4q^8} g_{\alpha\beta} S_{\mu\chi} S_\nu^\chi L^{\mu\alpha} M^{\nu\beta}. \quad (6.20)$$

O segundo termo de interferência é simplesmente o complexo conjugado do primeiro que desta vez é real. E por último, temos:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = \langle |\mathcal{M}_{\Delta LV}|^2 \rangle + 2 \langle \mathcal{M}_{\Delta LV2aO} \mathcal{M}_{\text{usual}}^* \rangle, \quad (6.21)$$

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = \frac{g_e^4}{4q^8} (\varepsilon_{\mu\nu\theta\varphi} \varepsilon_{\alpha\beta\chi\delta} v^\theta q^\varphi v^\chi q^\delta - 2g_{\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\kappa\theta\varphi} \varepsilon_{\nu\chi\delta}^\kappa v^\theta q^\varphi v^\chi q^\delta) L^{\mu\alpha} M^{\nu\beta}. \quad (6.22)$$

Uma relação útil é a que coloca o produto de Levi-Civitas em termos de um determinante:

$$\varepsilon_{\mu\nu\theta\varphi} \varepsilon_{\alpha\beta\chi\delta} = - \begin{vmatrix} g_{\mu\alpha} & g_{\mu\beta} & g_{\mu\chi} & g_{\mu\delta} \\ g_{\nu\alpha} & g_{\nu\beta} & g_{\nu\chi} & g_{\nu\delta} \\ g_{\theta\alpha} & g_{\theta\beta} & g_{\theta\chi} & g_{\theta\delta} \\ g_{\varphi\alpha} & g_{\varphi\beta} & g_{\varphi\chi} & g_{\varphi\delta} \end{vmatrix}. \quad (6.23)$$

Usando-a, temos:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = \frac{g_e^4}{4q^8} \left(- \begin{vmatrix} g_{\mu\alpha} & g_{\mu\beta} & g_{\mu\chi} & g_{\mu\delta} \\ g_{\nu\alpha} & g_{\nu\beta} & g_{\nu\chi} & g_{\nu\delta} \\ g_{\theta\alpha} & g_{\theta\beta} & g_{\theta\chi} & g_{\theta\delta} \\ g_{\varphi\alpha} & g_{\varphi\beta} & g_{\varphi\chi} & g_{\varphi\delta} \end{vmatrix} v^\theta q^\varphi v^\chi q^\delta + \right. \\ \left. + 2g_{\alpha\beta} \begin{vmatrix} \delta_\mu^\kappa & g_{\mu\nu} & g_{\mu\chi} & g_{\mu\delta} \\ 4 & g_{\kappa\nu} & g_{\kappa\chi} & g_{\kappa\delta} \\ \delta_\theta^\kappa & g_{\theta\nu} & g_{\theta\chi} & g_{\theta\delta} \\ \delta_\varphi^\kappa & g_{\varphi\nu} & g_{\varphi\chi} & g_{\varphi\delta} \end{vmatrix} v^\theta q^\varphi v^\chi q^\delta \right) L^{\mu\alpha} M^{\nu\beta} \quad (6.24)$$

Após alguma álgebra, obtemos:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = \frac{g_e^4}{4q^8} \left(- \begin{vmatrix} g_{\mu\alpha} & g_{\mu\beta} & v_\mu & q_\mu \\ g_{\nu\alpha} & g_{\nu\beta} & v_\nu & q_\nu \\ v_\alpha & v_\beta & v^2 & v \cdot q \\ q_\alpha & q_\beta & v \cdot q & q^2 \end{vmatrix} + 2g_{\alpha\beta} \begin{vmatrix} \delta_\mu^\kappa & g_{\mu\nu} & v_\mu & q_\mu \\ 4 & g_{\kappa\nu} & v_\kappa & q_\kappa \\ v^\kappa & v_\nu & v^2 & v \cdot q \\ q^\kappa & q_\nu & v \cdot q & q^2 \end{vmatrix} \right) L^{\mu\alpha} M^{\nu\beta} \quad (6.25)$$

Implementando as relações $q_\alpha L^{\mu\alpha} = 0$, $q_\mu M^{\mu\alpha} = 0$, nos determinantes, cada termo q_λ contraído $L^{\mu\alpha}$ ou $M^{\nu\beta}$ vai a zero, ou seja:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = \frac{g_e^4}{4q^8} \left(- \begin{vmatrix} g_{\mu\alpha} & g_{\mu\beta} & v_\mu & 0 \\ g_{\nu\alpha} & g_{\nu\beta} & v_\nu & 0 \\ v_\alpha & v_\beta & v^2 & v \cdot q \\ 0 & 0 & v \cdot q & q^2 \end{vmatrix} + 2g_{\alpha\beta} \begin{vmatrix} \delta_\mu^\kappa & g_{\mu\nu} & v_\mu & 0 \\ 4 & g_{\kappa\nu} & v_\kappa & q_\kappa \\ v^\kappa & v_\nu & v^2 & v \cdot q \\ q^\kappa & 0 & v \cdot q & q^2 \end{vmatrix} \right) L^{\mu\alpha} M^{\nu\beta} \quad (6.26)$$

Usando regra de Cramer, podemos calcular o determinante:

$$\begin{vmatrix} \delta_\mu^\kappa & g_{\mu\nu} & v_\mu & 0 \\ 4 & g_{\kappa\nu} & v_\kappa & q_\kappa \\ v^\kappa & v_\nu & v^2 & v \cdot q \\ q^\kappa & 0 & v \cdot q & q^2 \end{vmatrix} = \delta_\mu^\kappa \begin{vmatrix} g_{\kappa\nu} & v_\kappa & q_\kappa \\ v_\nu & v^2 & v \cdot q \\ 0 & v \cdot q & q^2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} g_{\mu\nu} & v_\mu & 0 \\ v_\nu & v^2 & v \cdot q \\ 0 & v \cdot q & q^2 \end{vmatrix} \\ + v^\kappa \begin{vmatrix} g_{\mu\nu} & v_\mu & 0 \\ g_{\kappa\nu} & v_\kappa & q_\kappa \\ 0 & v \cdot q & q^2 \end{vmatrix} - q^\kappa \begin{vmatrix} g_{\mu\nu} & v_\mu & 0 \\ g_{\kappa\nu} & v_\kappa & q_\kappa \\ v_\nu & v^2 & v \cdot q \end{vmatrix}. \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned}
\left\| \begin{array}{cccc} \delta_\mu^\kappa & g_{\mu\nu} & v_\mu & 0 \\ 4 & g_{\kappa\nu} & v_\kappa & q_\kappa \\ v^\kappa & v_\nu & v^2 & v \cdot q \\ q^\kappa & 0 & v \cdot q & q^2 \end{array} \right\| &= \left\| \begin{array}{ccc} g_{\mu\nu} & v_\mu & q_\mu \\ v_\nu & v^2 & v \cdot q \\ 0 & v \cdot q & q^2 \end{array} \right\| - 4 \left\| \begin{array}{ccc} g_{\mu\nu} & v_\mu & 0 \\ v_\nu & v^2 & v \cdot q \\ 0 & v \cdot q & q^2 \end{array} \right\| \\
&+ \left\| \begin{array}{ccc} g_{\mu\nu} & v_\mu & 0 \\ v_\nu & v^2 & v \cdot q \\ 0 & v \cdot q & q^2 \end{array} \right\| - \left\| \begin{array}{ccc} g_{\mu\nu} & v_\mu & 0 \\ q_\nu & v \cdot q & q^2 \\ v_\nu & v^2 & v \cdot q \end{array} \right\|. \quad (6.28)
\end{aligned}$$

Simplificando:

$$\left\| \begin{array}{cccc} \delta_\mu^\kappa & g_{\mu\nu} & v_\mu & 0 \\ 4 & g_{\kappa\nu} & v_\kappa & q_\kappa \\ v^\kappa & v_\nu & v^2 & v \cdot q \\ q^\kappa & 0 & v \cdot q & q^2 \end{array} \right\| = - \left\| \begin{array}{ccc} g_{\mu\nu} & v_\mu & 0 \\ v_\nu & v^2 & v \cdot q \\ 0 & v \cdot q & q^2 \end{array} \right\| \quad (6.29)$$

Continuando, trocaremos β por ν no primeiro determinante:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = \frac{g_e^4}{4q^8} \left(- \left\| \begin{array}{cccc} g_{\mu\alpha} & g_{\mu\nu} & v_\mu & 0 \\ g_{\beta\alpha} & g_{\beta\nu} & v_\beta & 0 \\ v_\alpha & v_\nu & v^2 & v \cdot q \\ 0 & 0 & v \cdot q & q^2 \end{array} \right\| - 2g_{\alpha\beta} \left\| \begin{array}{ccc} g_{\mu\nu} & v_\mu & 0 \\ v_\nu & v^2 & v \cdot q \\ 0 & v \cdot q & q^2 \end{array} \right\| \right) L^{\mu\alpha} M^{\nu\beta} \quad (6.30)$$

Usando mais uma vez a regra de Cramer para o determinante da matriz 4×4 , temos:

$$\det = g_{\mu\alpha} \left\| \begin{array}{ccc} g_{\beta\nu} & v_\beta & 0 \\ v_\nu & v^2 & v \cdot q \\ 0 & v \cdot q & q^2 \end{array} \right\| - g_{\beta\alpha} \left\| \begin{array}{ccc} g_{\mu\nu} & v_\mu & 0 \\ v_\nu & v^2 & v \cdot q \\ 0 & v \cdot q & q^2 \end{array} \right\| + v_\alpha \left\| \begin{array}{ccc} g_{\mu\nu} & v_\mu & 0 \\ g_{\beta\nu} & v_\beta & 0 \\ 0 & v \cdot q & q^2 \end{array} \right\|. \quad (6.31)$$

Usando este resultado e simplificando:

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} &= -\frac{g_e^4}{4q^8} \left(g_{\mu\alpha} \left\| \begin{array}{ccc} g_{\beta\nu} & v_\beta & 0 \\ v_\nu & v^2 & v \cdot q \\ 0 & v \cdot q & q^2 \end{array} \right\| + v_\alpha \left\| \begin{array}{ccc} g_{\mu\nu} & v_\mu & 0 \\ g_{\beta\nu} & v_\beta & 0 \\ 0 & v \cdot q & q^2 \end{array} \right\| + \right. \\
&\left. + g_{\alpha\beta} \left\| \begin{array}{ccc} g_{\mu\nu} & v_\mu & 0 \\ v_\nu & v^2 & v \cdot q \\ 0 & v \cdot q & q^2 \end{array} \right\| \right) L^{\mu\alpha} M^{\nu\beta} \quad (6.32)
\end{aligned}$$

Continuando com a regra de Cramer, temos:

$$g_{\mu\alpha} \left\| \begin{array}{ccc} g_{\beta\nu} & v_\beta & 0 \\ v_\nu & v^2 & v \cdot q \\ 0 & v \cdot q & q^2 \end{array} \right\| = g_{\mu\alpha} g_{\beta\nu} (v^2 q^2 - (v \cdot q)^2) - g_{\mu\alpha} v_\nu v_\beta q^2, \quad (6.33)$$

$$v_\alpha \left\| \begin{array}{ccc} g_{\mu\nu} & v_\mu & 0 \\ g_{\beta\nu} & v_\beta & 0 \\ 0 & v \cdot q & q^2 \end{array} \right\| = v_\alpha q^2 (g_{\mu\nu} v_\beta - g_{\beta\nu} v_\mu), \quad (6.34)$$

$$g_{\alpha\beta} \left\| \begin{array}{ccc} g_{\mu\nu} & v_\mu & 0 \\ v_\nu & v^2 & v \cdot q \\ 0 & v \cdot q & q^2 \end{array} \right\| = g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} (v^2 q^2 - (v \cdot q)^2) - g_{\alpha\beta} v_\nu v_\mu q^2, \quad (6.35)$$

Substituindo estes resultados e explorando as simetrias dos tensores $L^{\mu\alpha}$ e $M^{\nu\beta}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} &= \left(\frac{(v \cdot q)^2}{q^4} - \frac{v^2}{q^2} \right) \frac{g_e^4}{4q^4} L_\alpha^\alpha M_\beta^\beta + \left(\frac{(v \cdot q)^2}{q^4} - \frac{v^2}{q^2} \right) \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle + \\ &+ \frac{g_e^4}{4q^6} v_\nu v_\beta L_\alpha^\alpha M^{\nu\beta} + \frac{g_e^4}{4q^6} v_\alpha v_\mu L^{\mu\alpha} M_\beta^\beta \end{aligned} \quad (6.36)$$

Precisamos agora das contrações:

$$L_\alpha^\alpha = 8 (2m^2 - p_1 \cdot p'_1), \quad (6.37)$$

$$M_\alpha^\alpha = 8 (2M^2 - p_2 \cdot p'_2), \quad (6.38)$$

e das expressões:

$$v_\nu v_\beta L^{\nu\beta} = 4 (2 (v \cdot p_1) (v \cdot p'_1) + v^2 (m^2 - p_1 \cdot p'_1)), \quad (6.39)$$

$$v_\nu v_\beta M^{\nu\beta} = 4 (2 (v \cdot p_2) (v \cdot p'_2) + v^2 (M^2 - p_2 \cdot p'_2)). \quad (6.40)$$

Usando esses resultados, obtemos a contribuição do termo de Carroll-Field-Jackiw à amplitude quadrática média:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} &= 16 \left(\frac{(v \cdot q)^2}{q^4} - \frac{v^2}{q^2} \right) \frac{g_e^4}{q^4} (2m^2 - p_1 \cdot p'_1) (2M^2 - p_2 \cdot p'_2) + \left(\frac{(v \cdot q)^2}{q^4} - \frac{v^2}{q^2} \right) \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{usual}} + \\ &+ \frac{g_e^4}{q^6} 8 (2m^2 - p_1 \cdot p'_1) (2 (v \cdot p_2) (v \cdot p'_2) + v^2 (M^2 - p_2 \cdot p'_2)) + \\ &+ \frac{g_e^4}{q^6} 8 (2M^2 - p_2 \cdot p'_2) (2 (v \cdot p_1) (v \cdot p'_1) + v^2 (m^2 - p_1 \cdot p'_1)). \end{aligned} \quad (6.41)$$

E a seção de choque fica:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\Delta\text{LV}} = \frac{1}{(8\pi)^2 (E_1 + E_2)^2} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}}. \quad (6.42)$$

Devemos agora definir um referencial para avaliar as contrações. Assim como foi feito para o caso usual, vamos escolher o referencial do centro de massa.

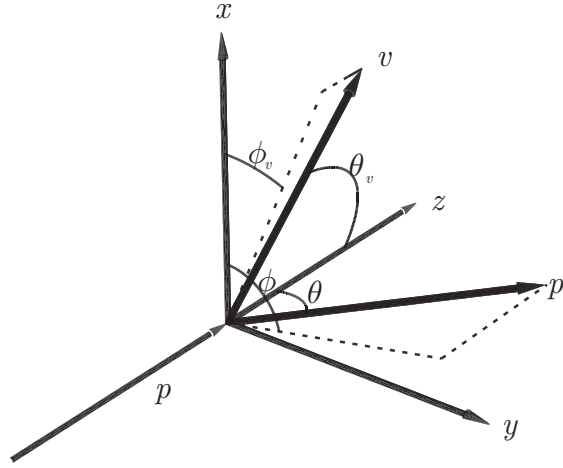


Figura 6.4:

Neste referencial, vale $p_1 = (E_1, \vec{p})$, $p_2 = (E_2, -\vec{p})$, $p'_1 = (E_1, \vec{p}')$ e $p'_2 = (E_2, -\vec{p}')$, onde $|\vec{p}| = |\vec{p}'|$ para garantir a conservação da energia. Com isso:

$$p_1 \cdot p_2 = p'_1 \cdot p'_2 = E_1 E_2 + |\vec{p}|^2, \quad (6.43)$$

$$p_1 \cdot p'_2 = p_2 \cdot p'_1 = E_1 E_2 + |\vec{p}|^2 \cos \theta, \quad (6.44)$$

$$p_1 \cdot p'_1 = m^2 + 2 |\vec{p}|^2 \sin^2 (\theta/2), \quad (6.45)$$

$$p_2 \cdot p'_2 = M^2 + 2 |\vec{p}|^2 \sin^2 (\theta/2), \quad (6.46)$$

$$q^2 = -4 |\vec{p}|^2 \sin^2 (\theta/2). \quad (6.47)$$

Ainda precisamos de:

$$\vec{p} \cdot \vec{v} = |\vec{p}| |\vec{v}| \cos (\theta_v), \quad (6.48)$$

$$\vec{p}' \cdot \vec{v} = |\vec{p}'| |\vec{v}| \left(\frac{\vec{p}' \cdot \vec{v}}{|\vec{p}'| |\vec{v}|} \right), \quad (6.49)$$

onde

$$\frac{\vec{p}' \cdot \vec{v}}{|\vec{p}'| |\vec{v}|} = (\sin (\theta) \sin (\theta_v) \cos (\varphi) \cos (\varphi_v) + \sin (\theta) \sin (\theta_v) \sin (\varphi) \sin (\varphi_v) + \cos (\theta) \cos (\theta_v)). \quad (6.50)$$

Neste referencial, $q^0 = 0$, o que simplifica um pouco o resultado à forma:

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} = & + \left(\frac{|\vec{v}|^2}{4 \sin^2(\theta/2)} \left(\cos(\theta_v) - \left(\frac{\vec{p}' \cdot \vec{v}}{|\vec{p}'| |\vec{v}|} \right) \right)^2 + v^2 \right) \frac{1}{4 |\vec{p}'|^2 \sin^2(\theta/2)} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{usual}} \\
& + \frac{g_e^4}{4 (|\vec{p}'| \sin(\frac{\theta}{2}))^6} \left\{ + \left(\frac{|\vec{v}|^2}{4 \sin^2(\frac{\theta}{2})} \left(\cos(\theta_v) - \left(\frac{\vec{p}' \cdot \vec{v}}{|\vec{p}'| |\vec{v}|} \right) \right)^2 + v^2 \right) \times \right. \\
& \times \left(m^2 - 2 \left(|\vec{p}'| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^2 \right) \left(M^2 - 2 \left(|\vec{p}'| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^2 \right) + - (m^2 - 2 |\vec{p}'|^2 \sin^2(\theta/2)) \times \\
& \left(\left(\frac{v_0 E_2}{|\vec{p}'| |\vec{v}|} + \cos(\theta_v) \right) \left(\frac{v_0 E_2}{|\vec{p}'| |\vec{v}|} + \left(\frac{\vec{p}' \cdot \vec{v}}{|\vec{p}'| |\vec{v}|} \right) \right) - \frac{|\vec{p}'| v^2}{|\vec{v}|} \sin^2(\theta/2) \right) + \\
& - |\vec{p}'| |\vec{v}| (M^2 - 2 |\vec{p}'|^2 \sin^2(\theta/2)) \times \\
& \left. \left(\left(\frac{v_0 E_1}{|\vec{p}'| |\vec{v}|} - \cos(\theta_v) \right) \left(\frac{v_0 E_1}{|\vec{p}'| |\vec{v}|} - \left(\frac{\vec{p}' \cdot \vec{v}}{|\vec{p}'| |\vec{v}|} \right) \right) - \frac{|\vec{p}'| v^2}{|\vec{v}|} \sin^2(\theta/2) \right) \right\}. \quad (6.51)
\end{aligned}$$

6.0.2 A influência do termo CPT-ímpar no processo elétron-pósitron múon-antimúon

Como já foi visto em capítulos anteriores, é possível passar do processo $e + \mu \rightarrow e + \mu$ para $e + e^+ \rightarrow \mu + \mu^+$ fazendo a transformação $(p'_1, p_2) \leftrightarrow (-p_2, -p'_1)$. Isso nos poupa de termos todo o trabalho novamente. Podemos retomar deste ponto:

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} & = \left(\frac{(v \cdot q)^2}{q^4} - \frac{v^2}{q^2} \right) \frac{g_e^4}{4q^4} L_\alpha^\alpha M_\beta^\beta + \left(\frac{(v \cdot q)^2}{q^4} - \frac{v^2}{q^2} \right) \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle + \\
& = + \frac{g_e^4}{4q^6} v_\nu v_\beta L_\alpha^\alpha M^{\nu\beta} + \frac{g_e^4}{4q^6} v_\alpha v_\mu L^{\mu\alpha} M_\beta^\beta, \quad (6.52)
\end{aligned}$$

onde os objetos L , M e q estão no contexto do processo de aniquilação. Precisamos das contrações:

$$L_\alpha^\alpha = -8 (2m^2 + p_1 \cdot p_2), \quad (6.53)$$

$$M_\alpha^\alpha = -8 (2M^2 + p'_1 \cdot p'_2). \quad (6.54)$$

E também precisamos de

$$v_\alpha v_\mu L^{\mu\alpha} = 4 (2 (v \cdot p_1) (v \cdot p_2) - v^2 (m^2 + p_1 \cdot p_2)), \quad (6.55)$$

$$v_\alpha v_\mu M^{\mu\alpha} = 4 (2 (v \cdot p'_1) (v \cdot p'_2) - v^2 (M^2 + p'_1 \cdot p'_2)). \quad (6.56)$$

Se escolhermos o referencial do centro de massa, temos $p_1 = (E, \vec{p})$, $p_2 = (E, -\vec{p})$, $p'_1 = (E, \vec{p}')$ e $p'_2 = (E, -\vec{p}')$, onde $|\vec{p}'|^2 = |\vec{p}'|^2 + M^2 - m^2$.

$$p_1 \cdot p_2 = 2E^2 - m^2, \quad (6.57)$$

$$p'_1 \cdot p'_2 = 2E^2 - M^2. \quad (6.58)$$

$$p_1 \cdot p'_2 = p_2 \cdot p'_1 = E^2 + |\vec{p}| |\vec{p}'| \cos \theta, \quad (6.59)$$

$$p_1 \cdot p'_1 = p_2 \cdot p'_2 = E^2 - |\vec{p}| |\vec{p}'| \cos \theta, \quad (6.60)$$

$$q^2 = 4E^2 \quad (6.61)$$

Com isso:

$$L_\alpha^\alpha = -8(m^2 + 2E^2), \quad M_\alpha^\alpha = -8(M^2 + 2E^2). \quad (6.62)$$

$$v_\alpha v_\mu L^{\mu\alpha} = 8(|\vec{v}|^2 E^2 - (\vec{v} \cdot \vec{p})^2), \quad (6.63)$$

$$v_\alpha v_\mu M^{\mu\alpha} = 8\left(|\vec{v}|^2 E^2 - (\vec{v} \cdot \vec{p}')^2\right). \quad (6.64)$$

Neste referencial, $\vec{q} = 0$ o que simplifica um pouco o resultado. A amplitude fica:

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}} &= \frac{|\vec{v}|^2 g_e^4}{4E^6} (m^2 + 2E^2) (M^2 + 2E^2) + \frac{|\vec{v}|^2}{4E^2} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \\ &\quad - \frac{g_e^4}{2^2 E^6} (m^2 + 2E^2) \left(|\vec{v}|^2 E^2 - (\vec{v} \cdot \vec{p}')^2 \right) - \frac{g_e^4}{2^2 E^6} (|\vec{v}|^2 E^2 - (\vec{v} \cdot \vec{p})^2) (M^2 + 2E^2). \end{aligned} \quad (6.65)$$

Estes resultados mostram que está contribuição realmente aparecerá a partir de segunda ordem no parametro de violação de Lorentz.

7 Conclusão

Neste trabalho, fazemos uma investigação acerca da influência da violação de simetria de Lorentz no setor de gauge e também sobre alguns processos de espalhamento de férmions, abordando como a violação desta simetria pode modificar alguns processos da Eletrodinâmica Quântica (QED). Neste contexto, a peça chave da investigação é o propagador do fóton modificado pelos termos de violação de Lorentz tomado em meio às regras usuais de Feynman para cálculo de processos fundamentais da Eletrodinâmica Quântica, uma vez que o setor fermiônico da teoria é considerado sem modificação. A teoria necessária para o cálculo da seção de choque, assim como dos propagadores, é desenvolvida em capítulos iniciais. Apresentamos primeiramente a equação de Dirac, onde são definidos os spinores, as normalizações e relações de completude. Passamos pelo cálculo do propagador relativístico da teoria de Dirac, e chegamos na matriz de espalhamento - matriz S . Ilustramos o procedimento de cálculo do propagador de gauge usual, e também definimos algumas quantidades, como as correntes de transição fermiônicas no espaço dos momentos e também as amplitudes de Feynman. De posse destes conceitos, chegamos à seção de choque para um caso particular. Em seguida, apresentamos a Regra de Ouro, que nos permite montar seções de choque de espalhamento mais gerais. Em seguida, apresentamos as regras de Feynman, com as quais torna-se possível montar as amplitudes de espalhamento a partir dos diagramas de Feynman, de maneira rápida e eficiente. Em seguida, mostramos como os propagadores e regras de Feynman conduzem eficazmente às seções de choque de processos conhecidos da literatura, como $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$ e $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$. Estes cálculos são feitos, considerando que o feixe inicial é não polarizado onde utilizamos o truque de Casimir, que é uma ferramenta matemática desenvolvida para este fim.

No Cap. IV, iniciamos os cálculos de seção de choque de processos da QED no contexto do Modelo Padrão Estendido, tendo por objetivo específico obter as contribuições dos coeficiente de violação de Lorentz à amplitude de espalhamento quadrática média e à seção de choque dos processos mencionados. No caso do setor CPT-par, a princípio, usamos uma expansão perturbativa do propagador em torno do propagador de Feynman da teoria usual (sem violação de Lorentz), dado a inexistência de uma expressão tensorial

fechada para o propagador no momento destes desenvolvimentos. Por razões conhecidas, consideramos apenas as componentes não birrefringentes do setor paridade-par, contidas no tensor $\kappa^{\mu\nu}$, já parametrizado em termos apenas destas componentes. A violação de Lorentz é considerada através da inserção de diagramas adicionais e os termos de interferência entre estes diagramas (termos cruzados na amplitude quadrática $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_{\text{int}}$) são usados para o cálculo das correções na seção de choque. Assim como antes, os processos são considerados não polarizados, e mais uma vez, fazemos uso do truque de Casimir para fazer a soma sobre os estados de spin. Como consideramos a violação de Lorentz apenas no setor dos fótons e estamos estudando espalhamento de férmions, não precisamos alterar a regra de Ouro, que é utilizada ao final para montarmos a seção de choque. O primeiro cálculo realizado foi o do processo $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$, e em seguida abordamos o processo $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$, porém explorando a simetria cruzada que permite passar de $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ de um processo a outro através de uma redefinição das variáveis dinâmicas (quadri-momentos).

Nossos resultados mostraram que o setor CPT-par, representado pelas componentes paridade-ímpar, κ^i , pela componente isotrópica de paridade-par, κ_{tr} , e pelas componentes anisotrópicas de paridade-par, $(\kappa_{e-})_{ij}$, revelaram que no processo $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$, que as componentes do 3-vetor \vec{k} introduzem uma dependência angular em torno da direção do feixe incidente, em forma de anisotropia. O mesmo ocorre para os termos $(\kappa_{e-})_{ij}$, que introduzem uma anisotropia ainda mais complexa, na forma de termos do tipo $(\tilde{\kappa}_{e-})_{ij} p^i p^j$, e outros semelhantes. Já o termo isotrópico, κ_{tr} , apenas reforça a dependência angular entre a direção do feixe incidente e a direção da partícula espalhada. No caso do processo $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$, verificamos que o termo \vec{k} não contribuirá. Isso parece que vai contra a simetria cruzada, mas é importante lembrar que em certo momento escolhemos o referencial do centro de massa, que não corresponde ao mesmo referencial nos dois processos. Desta vez a anisotropia fica por conta apenas dos coeficientes $(\tilde{\kappa}_{e-})_{ij}$, enquanto o termo κ_{tr} continua apenas reforçando a dependência angular, e desta vez de uma forma ainda mais simples.

No caso do setor CPT-ímpar, representado pelo termo de Carroll-Field-Jackiw, usamos o mesmo procedimento de antes, porém, desta vez, sem maiores dificuldades. O primeiro ponto é o cálculo do propagador de Feynman exato, que se torna possível adicionando-se o termo $\Sigma_\mu^\nu = q^2 v^\nu v_\mu - (v \cdot q)(q^\nu v_\mu + q_\mu v^\nu)$ à álgebra dos projetores. O propagador pode então, ser calculado em sua forma exata. As contribuições do setor CPT-

ímpar à amplitude quadrática média e seção de choque foram explicitamente calculadas, sendo observadas que só aparecem contribuições em segunda ordem no parâmetro de quebra. Isto aconteceu porque no processo não-polarizado, a interferência entre o diagrama usual e o modificado se cancela. Desta forma, estas mostram-se bem menos relevantes que as contribuições advindas do setor CPT-par, responsável pelas contribuições dominantes de violação de Lorentz no espalhamento não-polarizado.

Continuando as atividades deste trabalho, usamos a seguinte parametrização, $\kappa^{\lambda\rho} = 1/2(U^\lambda V^\rho + U^\rho V^\lambda) - 1/4g^{\lambda\rho}(U \cdot V)$, para um cálculo exato do propagador de Feynman das componentes não birrefringentes do setor CPT-par, em termos dos quadri-vetores U^λ e V^ρ . De posse deste propagador, poderemos recalculer as seções de choque derivadas no Cap. IV de forma mais rápida e direta, assim como realizar novos desenvolvimentos envolvendo espalhamento de férmions.

Uma possível perspectiva de averiguação é o estudo dos processos: $e^- + \lambda \rightarrow e^- + \lambda$ (efeito Compton), $e^- + e^+ \rightarrow \lambda + \lambda$, $\lambda + \lambda \rightarrow e^- + e^+$ (aniquilação de pares e seu inverso). Apesar desses cálculos, necessário encontrar uma base de polarização coerente com as modificações impostas pela violação de Lorentz e também introduzir as correções necessárias na regra de ouro devida a alteração na expressão da velocidade de grupo dos fótons neste contexto.

Recentemente, encontramos na literatura alguns artigos que discutem espalhamento de férmions na presença de não-comutatividade [47]. Tais referências usam resultados experimentais de seção de choque para estabelecer escalas nos parâmetros de não-comutatividade. Acreditamos que seja possível usar tais dados experimentais para estabelecer limites superiores nos parâmetros de violação da simetria de Lorentz.

8 Apêndice

8.1 Matrizes γ

Agora devemos determinar a ordem dessas matrizes e para isso vamos fazer algumas investigações. Começamos por (2.46)

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha = 2g^{\alpha\beta}. \quad (8.1)$$

Para índices iguais

$$\gamma^0 \gamma^0 + \gamma^0 \gamma^0 = 2g^{00} \rightarrow (\gamma^0)^2 = 1, \quad (8.2)$$

$$\gamma^i \gamma^i + \gamma^i \gamma^i = 2g^{ii} \rightarrow (\gamma^i)^2 = -1, \quad (8.3)$$

ou seja

$$(\gamma^\mu)^2 = g^{\mu\mu} \quad (8.4)$$

É fácil ver que podemos escrever $\gamma^i = \gamma^0 \gamma^0 \gamma^i$, cujo traço é

$$tr(\gamma^i) = tr(\gamma^0 \gamma^0 \gamma^i). \quad (8.5)$$

Usando a relação de anticomutação

$$tr(\gamma^i) = -tr(\gamma^0 \gamma^i \gamma^0), \quad (8.6)$$

e usando a regra cíclica do traço

$$tr(\gamma^i) = -tr(\gamma^0 \gamma^0 \gamma^i) = -tr(\gamma^i), \quad (8.7)$$

$$tr(\gamma^i) = 0. \quad (8.8)$$

De modo semelhante podemos fazer

$$tr(\gamma^0) = -tr(\gamma^i \gamma^i \gamma^0) = tr(\gamma^i \gamma^0 \gamma^i) = tr(\gamma^i \gamma^i \gamma^0), \quad (8.9)$$

$$tr(\gamma^0) = -tr(\gamma^0), \quad (8.10)$$

$$tr(\gamma^0) = 0. \quad (8.11)$$

Então as matrizes gamma devem ter traço nulo.

$$tr(\gamma^\mu) = 0. \quad (8.12)$$

Dada a equação de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0, \quad (8.13)$$

$$i\gamma^0 \partial_0 \psi = m\psi - i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \psi. \quad (8.14)$$

Multiplicando a direita por γ^0

$$i\partial_0 \psi = m\gamma^0 \psi - i\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \psi, \quad (8.15)$$

agora fazemos a prescrição operacional inversa

$$H\psi = (m\gamma^0 + \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{p}) \psi, \quad (8.16)$$

e temos o hamiltoniano de Dirac

$$H = m\gamma^0 + \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{p}. \quad (8.17)$$

O hamiltoniano deve ser hermetiano, logo:

$$H^\dagger = m(\gamma^0)^\dagger + (\vec{\gamma})^\dagger (\gamma^0)^\dagger \cdot \vec{p} = H. \quad (8.18)$$

Assumindo que p^i comuta com γ^i .

$$\gamma^0 = (\gamma^0)^\dagger, \quad (8.19)$$

$$(\vec{\gamma})^\dagger (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \vec{\gamma}, \quad (8.20)$$

$$(\vec{\gamma})^\dagger = \gamma^0 \vec{\gamma} \gamma^0, \quad (8.21)$$

$$(\vec{\gamma})^\dagger = -\vec{\gamma}. \quad (8.22)$$

Podemos juntar (8.19) e (8.21) em uma relação só

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (8.23)$$

Unicidade do conjunto. Se temos um conjunto de matrizes γ que satisfazem a relação de comutação (8.1) e montamos um novo conjunto de matrizes a partir delas da seguinte forma:

$$\alpha^\mu = \gamma^\beta F_\beta^\mu \quad (8.24)$$

Verificamos

$$\{\alpha^\mu, \alpha^\nu\} = \{\gamma^\beta, \gamma^\chi\} F_\beta^\mu F_\chi^\nu \quad (8.25)$$

$$\{\alpha^\mu, \alpha^\nu\} = 2g^{\beta\chi} F_\beta^\mu F_\chi^\nu \quad (8.26)$$

$$\{\alpha^\mu, \alpha^\nu\} = 2F^{\chi\mu} F_\chi^\nu \quad (8.27)$$

Se F representa uma transformação e Lorentz, por exemplo,

$$\{\alpha^\mu, \alpha^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (8.28)$$

O que mostra que esse conjunto de matrizes não é único. Determinando uma representação para as matrizes gamma. Se diagonalizamos γ^0

$$D^\dagger \gamma^0 D = \gamma'^0 \quad (8.29)$$

$$D^\dagger (\gamma'^0)^2 D = (\gamma'^0)^2 \quad (8.30)$$

$$1 = (\gamma'^0)^2 \quad (8.31)$$

Com isso

$$\gamma'^0 = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pm 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & \pm 1 \end{pmatrix} \quad (8.32)$$

Só podemos ter 1 ou -1 na diagonal principal já que γ^0 é hermetiana. Além disso devemos ter uma matriz de ordem par para que tenhamos traço nulo. Uma primeira proposta para a ordem da matriz é 2 mas em ordem 2 não vamos conseguir um conjunto de 4 matrizes independente. Continuando vamos para quatro. Como o conjunto não é único, escolhemos γ^0 como sendo uma matriz diagonal da seguinte forma:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.33)$$

Onde subentendi-se as matrizes identidade. A forma das outras matrizes deve ser:

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} A^i & B^i \\ -B^i & -A^i \end{pmatrix} \quad (8.34)$$

Onde A^i é antihermetiana e B^i para garantir que γ^i seja antihermetiana. Agora verificamos a relação de comutação com γ^0 :

$$\gamma^0 \gamma^i + \gamma^i \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^i & B^i \\ -B^i & -A^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^i & B^i \\ -B^i & -A^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0 \quad (8.35)$$

$$\begin{pmatrix} A^i & B^i \\ B^i & A^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^i & -B^i \\ -B^i & A^i \end{pmatrix} = 0 \quad (8.36)$$

Daí temos que $A^i = 0$. Por enquanto ficamos com

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & B^i \\ -B^i & 0 \end{pmatrix} \quad (8.37)$$

Agora verificamos a próxima relação de comutação

$$\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & B^i \\ -B^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B^j \\ -B^j & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B^j \\ -B^j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B^i \\ -B^i & 0 \end{pmatrix} = -2\delta^{ij} \quad (8.38)$$

$$\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i = \begin{pmatrix} -B^i B^j & 0 \\ 0 & -B^j B^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -B^j B^i & 0 \\ 0 & -B^i B^j \end{pmatrix} = -2\delta^{ij} \quad (8.39)$$

Então

$$B^i B^j + B^j B^i = 2\delta^{ij} \quad (8.40)$$

A escolha natural é escolher $B^i = \sigma^i$.

8.2 Traço de matrizes gamma

É requerido que o traço de γ^μ seja nulo.

$$\text{tr}(\gamma^\mu) = 0 \quad (8.41)$$

e o traço de qualquer produto de quantidade ímpar de matrizes gamma também é nulo. Já o traço do produto de duas matrizes gamma pode ser calculado diretamente da relação de anti-comutação:

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) + \text{tr}(\gamma^\nu \gamma^\mu) = 2g^{\mu\nu} \text{tr}(1) \quad (8.42)$$

usando a regra cíclica do traço:

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \quad (8.43)$$

Para quatro matrizes a relação será:

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) \quad (8.44)$$

Outras identidades

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4 \quad (8.45)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu \quad (8.46)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho} \quad (8.47)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_\mu = -2\gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\nu \quad (8.48)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha = g^{\mu\nu} \gamma^\alpha + g^{\nu\alpha} \gamma^\mu - g^{\mu\alpha} \gamma^\nu + i^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_\beta \gamma^5 \quad (8.49)$$

onde

$$\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.50)$$

usando as relações anteriores, podemos calcular explicitamente as expressões 3.25 e 3.26:

$$L^{\mu\alpha} = \text{tr} (\gamma^\mu (\gamma^\nu p_{1\nu} + m) \gamma^\alpha (\gamma^\beta p'_{1\beta} + m)) \quad (8.51)$$

$$L^{\mu\alpha} = \text{tr} (\gamma^\mu \gamma^\nu p_{1\nu} \gamma^\alpha \gamma^\beta p'_{1\beta} + m\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta p'_{1\beta} + m\gamma^\mu \gamma^\nu p_{1\nu} \gamma^\alpha + m^2 \gamma^\mu \gamma^\alpha) \quad (8.52)$$

usando que o traço de quantidades impares de matrizes gamma é nulo:

$$L^{\mu\alpha} = p_{1\nu} p'_{1\beta} \text{tr} (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) + m^2 \text{tr} (\gamma^\mu \gamma^\alpha) \quad (8.53)$$

e por ultimo ficamos com:

$$L^{\mu\alpha} = 4 (p_1^\mu p_1'^\alpha + p_1'^\mu p_1^\alpha + g^{\mu\alpha} (m^2 - p_1 \cdot p_1')) \quad (8.54)$$

8.3 Apêndice de spinores

Ortogonalidade

$$\bar{u}^i u^j = \begin{pmatrix} s_i^\dagger & \frac{s_i^\dagger \vec{\sigma} \vec{p}}{(E+m)} \end{pmatrix} \gamma^0 \begin{pmatrix} s_j \\ \frac{\vec{\sigma} \vec{p} s_j}{(E+m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_i^\dagger & \frac{s_i^\dagger \vec{\sigma} \vec{p}}{(E+m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_j \\ \frac{\vec{\sigma} \vec{p} s_j}{(E+m)} \end{pmatrix} \quad (8.55)$$

$$\bar{u}^i u^j = \begin{pmatrix} s_i^\dagger & -\frac{s_i^\dagger \vec{\sigma} \vec{p}}{(E+m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_j \\ \frac{\vec{\sigma} \vec{p} s_j}{(E+m)} \end{pmatrix} = s_i^\dagger s_j - \frac{s_i^\dagger (\vec{\sigma} \vec{p})^2 s_j}{(E+m)^2} \quad (8.56)$$

$$\bar{u}^i u^j = s_i^\dagger s_j \left(1 - \frac{|\vec{p}|^2}{(E+m)^2} \right) = s_i^\dagger s_j \left(\frac{(E+m)^2}{(E+m)^2} - \frac{E^2 - m^2}{(E+m)^2} \right) \quad (8.57)$$

$$\bar{u}^i u^j = s_i^\dagger s_j \left(\frac{2Em + 2m^2}{(E+m)^2} \right) = 2m s_i^\dagger s_j \left(\frac{1}{(E+m)} \right) \quad (8.58)$$

Aqui escolhemos $s_i^\dagger s_j = (E+m) \delta_{ij}$

$$\bar{u}^i u^j = 2m \delta_{ij} \quad (8.59)$$

O mesmo vale para:

$$\bar{v}^i v^j = \begin{pmatrix} \frac{s_i^\dagger \vec{\sigma} \vec{p}}{(E+m)} & s_i^\dagger \end{pmatrix} \gamma^0 \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \vec{p} s_j}{(E+m)} \\ s_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s_i^\dagger \vec{\sigma} \vec{p}}{(E+m)} & -s_i^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \vec{p} s_j}{(E+m)} \\ s_j \end{pmatrix} \quad (8.60)$$

$$\bar{v}^i v^j = s_i^\dagger s_j \left(\frac{|\vec{p}|^2}{(E+m)^2} - 1 \right) = -s_i^\dagger s_j \left(1 - \frac{|\vec{p}|^2}{(E+m)^2} \right) \quad (8.61)$$

$$\bar{v}^i v^j = -2m\delta_{ij} \quad (8.62)$$

Completeza

$$\sum_{i,j} u^i \bar{u}^j = \sum_{i,j} \begin{pmatrix} s_i \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}s_i}{(E+m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_j^\dagger & \frac{s_j^\dagger \vec{\sigma}\vec{p}}{(E+m)} \end{pmatrix} \gamma^0 \quad (8.63)$$

$$\sum_{i,j} u^i \bar{u}^j = \sum_{i,j} \begin{pmatrix} s_i s_j^\dagger & -s_i s_j^\dagger \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{(E+m)} \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}s_i s_j^\dagger}{(E+m)} & -\frac{\vec{\sigma}\vec{p}s_i s_j^\dagger}{(E+m)} \frac{s_j^\dagger \vec{\sigma}\vec{p}}{(E+m)} \end{pmatrix} \quad (8.64)$$

Temos

$$\sum_{i,j} s_i s_j^\dagger = (E+m) 1 \quad (8.65)$$

$$\sum_{i,j} u^i \bar{u}^j = \begin{pmatrix} (E+m) & -(E+m) \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{(E+m)} \\ (E+m) \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{(E+m)} & -(E+m) \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{(E+m)} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{(E+m)} \end{pmatrix} \quad (8.66)$$

$$\sum_{i,j} u^i \bar{u}^j = \begin{pmatrix} (E+m) & -\vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & -\frac{|\vec{p}|^2}{(E+m)} \end{pmatrix} \quad (8.67)$$

$$\sum_{i,j} u^i \bar{u}^j = \begin{pmatrix} (E+m) & -\vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & -\frac{E^2-m^2}{(E+m)} \end{pmatrix} \quad (8.68)$$

$$\sum_{i,j} u^i \bar{u}^j = \begin{pmatrix} (E+m) & -\vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & -(E-m) \end{pmatrix} = \gamma^0 E - \vec{\gamma}\vec{p} + m \quad (8.69)$$

$$\sum_{i,j} u^i \bar{u}^j = \gamma^\mu p_\mu + m = \sum_{i,j} u^i \bar{u}^j = \not{p} + m \quad (8.70)$$

Onde introduzimos a notação de Feynman $\gamma^\mu a_\mu = \not{a}$. Ainda podemos fazer

$$\sum_{i,j} v^i \bar{v}^j = \sum_{i,j} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}s_i}{(E+m)} \\ s_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{s_j^\dagger \vec{\sigma}\vec{p}}{(E+m)} & s_j^\dagger \end{pmatrix} \gamma^0 \quad (8.71)$$

$$\sum_{i,j} v^i \bar{v}^j = \sum_{i,j} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}s_i}{(E+m)} \frac{s_j^\dagger \vec{\sigma}\vec{p}}{(E+m)} & -\frac{\vec{\sigma}\vec{p}s_i}{(E+m)} s_j^\dagger \\ \frac{s_i s_j^\dagger \vec{\sigma}\vec{p}}{(E+m)} & -s_i s_j^\dagger \end{pmatrix} \quad (8.72)$$

$$\sum_{i,j} v^i \bar{v}^j = \begin{pmatrix} \frac{|\vec{p}|^2}{(E+m)} & -\vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & -(E+m) \end{pmatrix} \quad (8.73)$$

$$\sum_{i,j} v^i \bar{v}^j = \begin{pmatrix} E-m & -\vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & -(E+m) \end{pmatrix} \quad (8.74)$$

$$\sum_{i,j} v^i \bar{v}^j = \gamma^0 p_0 - \vec{\gamma} \vec{p} - m = \gamma^\mu p_\mu - m \quad (8.75)$$

Ainda podemos acrescentar

$$(u^i)^\dagger u^j = \begin{pmatrix} s_i^\dagger & \frac{s_i^\dagger \vec{\sigma} \vec{p}}{(E+m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_j \\ \frac{\vec{\sigma} \vec{p} s_j}{(E+m)} \end{pmatrix} = s_i^\dagger s_j \left(1 + \frac{|\vec{p}|^2}{(E+m)^2} \right) \quad (8.76)$$

$$(u^i)^\dagger u^j = (E+m) \left(1 + \frac{|\vec{p}|^2}{(E+m)^2} \right) \delta_{ij} \quad (8.77)$$

$$(u^i)^\dagger u^j = \left(\frac{(E+m)^2}{(E+m)} + \frac{E^2 - m^2}{(E+m)} \right) \delta_{ij} \quad (8.78)$$

$$(u^i)^\dagger u^j = 2E \delta_{ij} \quad (8.79)$$

$$(v^i)^\dagger v^j = \begin{pmatrix} \frac{s_i^\dagger \vec{\sigma} \vec{p}}{(E+m)} & s_i^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \vec{p} s_j}{(E+m)} \\ s_j \end{pmatrix} = \left(\frac{|\vec{p}|^2}{(E+m)^2} + 1 \right) s_i^\dagger s_j \quad (8.80)$$

$$(v^i)^\dagger v^j = 2E \delta_{ij} \quad (8.81)$$

Para a norma do spinor

$$\langle \psi_j | \psi_i \rangle = |n|^2 \int d^3x e^{ip^\mu x_\mu} (u^i(p'))^\dagger e^{-ip^\mu x_\mu} \bar{u}^j(p) = \delta^3(p' - p) \delta_{ij} \quad (8.82)$$

$$\langle \psi_j | \psi_i \rangle = |n|^2 (u^i(p'))^\dagger \bar{u}^j(p) e^{i(E'-E)t} e^{-iEt} \int d^3x e^{-i(\vec{p}' - \vec{p})\vec{x}} = \delta^3(p' - p) \delta_{ij} \quad (8.83)$$

$$\langle \psi_j | \psi_i \rangle = |n|^2 (u^i(p'))^\dagger \bar{u}^j(p) e^{i(E'-E)t} e^{-iEt} (2\pi)^3 \delta^3(p' - p) = \delta^3(p' - p) \delta_{ij} \quad (8.84)$$

$$2 |n|^2 E (2\pi)^3 \delta^3(p' - p) \delta_{ij} = \delta^3(p' - p) \delta_{ij} \quad (8.85)$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{2E (2\pi)^3}} \quad (8.86)$$

Referências Bibliográficas

- [1] D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev. D* **55**, 6760 (1997); D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev. D* **58**, 116002 (1998); S. R. Coleman and S. L. Glashow, *Phys. Rev. D* **59**, 116008 (1999).
- [2] V. A. Kostelecky and S. Samuel, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 224 (1989); *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1811 (1991); *Phys. Rev. D* **39**, 683 (1989); *Phys. Rev. D* **40**, 1886 (1989), V. A. Kostelecky and R. Potting, *Nucl. Phys. B* **359**, 545 (1991); *Phys. Lett. B* **381**, 89 (1996); V. A. Kostelecky and R. Potting, *Phys. Rev. D* **51**, 3923 (1995).
- [3] S.M. Carroll, G.B. Field and R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **41**, 1231 (1990).
- [4] C. Adam and F. R. Klinkhamer, *Nucl. Phys. B* **607**, 247 (2001); *Nucl. Phys. B* **657**, 214 (2003).
- [5] A. P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo, J.A. Helayel-Neto, *Phys. Rev. D* **67**, 085021 (2003).
- [6] R. Jackiw and V. A. Kostelecký, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3572 (1999); J. M. Chung and B. K. Chung *Phys. Rev. D* **63**, 105015 (2001); J.M. Chung, *Phys. Rev. D* **60**, 127901 (1999); G. Bonneau, *Nucl. Phys. B* **593**, 398 (2001); M. Perez-Victoria, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2518 (1999); M. Perez-Victoria, *JHEP* **0104**, 032 (2001); O.A. Battistel and G. Dallabona, *Nucl. Phys. B* **610**, 316 (2001); O.A. Battistel and G. Dallabona, *J. Phys. G* **28**, L23 (2002); *J. Phys. G* **27**, L53 (2001); A. P. B. Scarpelli, M. Sampaio, M. C. Nemes, and B. Hiller, *Phys. Rev. D* **64**, 046013 (2001); T. Mariz, J.R. Nascimento, E. Passos, R.F. Ribeiro and F.A. Brito, *JHEP* **0510** (2005) 019; J. R. Nascimento, E. Passos, A. Yu. Petrov, F. A. Brito, *JHEP* 0706, (2007) 016.
- [7] R. Casana, M.M. Ferreira Jr, C. E. H. Santos, *Phys. Rev. D* **78**, 025030 (2008).
- [8] H. Belich, M. M. Ferreira Jr, J.A. Helayel-Neto, M. T. D. Orlando, *Phys. Rev. D* **68**, 025005 (2003); H. Belich Jr., T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr., J.A. Helayel-Neto, *Eur. Phys. J. C* **42**, 127 (2005).

- [9] J.M. Fonseca, A.H. Gomes, W.A.Moura-Melo, *Phys. Let. B* **671**, 280 (2009); R. Casana, M.M. Ferreira Jr., J. S. Rodrigues, *Phys. Rev. D* **78**, 125013 (2008).
- [10] R. Casana, M.M. Ferreira Jr, C. E. H. Santos, *Phys. Rev. D* **78**, 105014 (2008).
- [11] R. Casana, M.M. Ferreira Jr, A. R. Gomes, P. R. D. Pinheiro, *Eur. Phys. J. C* **62**, 573 (2009).
- [12] V. A. Kostelecky and M. Mewes, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 251304 (2001); V. A. Kostelecky and M. Mewes, *Phys. Rev. D* **66**, 056005 (2002).
- [13] V. A. Kostelecky and M. Mewes, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 140401 (2006).
- [14] A. Kobakhidze and B.H.J. McKellar, *Phys. Rev. D* **76**, 093004 (2007).
- [15] R. Casana, M.M. Ferreira Jr, A. R. Gomes, P. R. D. Pinheiro, *Phys. Rev. D* **80**, 125040 (2009).
- [16] R. Casana, M. M. Ferreira Jr, Madson R. O. Silva, *Phys.Rev. D* **81**, 105015 (2010).
- [17] J.-P. Bocquet et al., *Phys. Rev. Lett.* **104**, 241601 (2010).
- [18] C. Kaufhold and F. R. Klinkhamer, *Phys. Rev. D* **76**, 025024 (2007); F.R. Klinkhamer and M. Risse, *Phys. Rev. D* **77**, 016002 (2008).
- [19] B. Altschul, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 041603 (2007).
- [20] TANG, C. L. **Fundamentals of Quantum Mechanics**. New York: Cambridge University Press, 2005.
- [21] GREINER, W.; REINHARDT, J. **Quantum Electrodynamics**. 4^a Edição. ed. Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2008.
- [22] , R. P. The Theory of Positron. **Physical Review**, v. 76, n. 6, p. 11, 15 Setembro 1949.
- [23] BASSALO, J. M. **Eletrodinâmica Quântica**. 2^a Edição. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.
- [24] GREINER, W. **Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations**. 3^a Edição. ed. Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; London;: Springer, 2000.

- [25] GRIFFITHS, D. **Introduction to elementary particles**. 2ª Edição. ed. New York ,Chichester , Brisbane , Toronto , Singapore: John Wiley & Sons Inc, 1987.
- [26] GROSS, F. **Relativistic quantum mechanics and field theory**. [S.l.]: [s.n.], 1999.
- [27] MATTINGLY, D. Modern Tests of Lorentz Invariance. **Living Rev. Relativity**, v. 8, n. 5, 2005.
- [28] PESKIN, M.; SCHROEDER, D. **An introduction to quantum field theory**. Reading, Massachusetts: Perceus books, 1995.
- [29] SAKURAI, J. J. **Advanced Quantum Mechanics**. [S.l.]: [s.n.].
- [30] STRANGE, P. **Relativistic Quantum Mechanics: With Applications in Condensed Matter and Atomic Physics**. Cambridge, New York, Melbourne, Cape Town, Singapore, São Paulo: Cambridge University Press, 1998.
- [31] H. Müller, C. Braxmaier, S. Herrmann, A. Peters, and C. Lämmerzahl, *Phys. Rev. D* **67**, 056006 (2003); H. Müller, S. Herrmann, A. Saenz, A. Peters, and C. Lämmerzahl, *Phys. Rev. D* **68**, 116006 (2003); M.A. Humphrey, D.F. Phillips, E.M. Mattison, R.F.C. Vessot, R.E. Stoner, and R.L. Walsworth, *Phys. Rev. A* **68**, 063807 (2003); D. Bear, R.E. Stoner, R.L. Walsworth, V. A. Kostelecky, and C. D. Lane, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5038 (2000); Erratum-ibid. 89 (2002) 209902; D. F. Phillips, M. A. Humphrey, E. M. Mattison, R. E. Stoner, R. F. C. Vessot, R. L. Walsworth, *Phys. Rev. D* **63**, 111101(R) (2001); H. Müller, *Phys. Rev. D* **71**, 045004 (2005); N. Russell, *Phys. Scripta* **72**, C38 (2005).
- [32] H. Müller, S. Herrmann, C. Braxmaier, S. Schiller, and A. Peters, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 020401 (2003); H. Müller, P.L. Stanwix, M. E. Tobar, E. Ivanov, P. Wolf, S. Herrmann, A. Senger, E. Kovalchuk, and A. Peters, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 050401 (2007).
- [33] J.A. Lipa, J.A. Nissen, S. Wang, D. A. Stricker, D. Avaloff, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 060403 (2003); P. Wolf, S. Bize, A. Clairon, G. Santarelli, M. E. Tobar and A. N. Luiten, *Phys. Rev. D* **70**, 051902(R) (2004); P. L. Stanwix, M.E. Tobar, P. Wolf, C.R. Locke, and E. N. Ivanov, *Phys. Rev. D* **74**, 081101(R) (2006).

- [34] R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and N. Russell, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1432 (1997); R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and N. Russell, *Phys. Rev. D* **57**, 3932 (1998); R. Bluhm, V.A. Kostelecky, C. D. Lane, and N. Russell, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 090801 (2002); R. Bluhm and V.A. Kostelecky, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1381 (2000); R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and C. D. Lane, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1098 (2000); R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and N. Russell, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2254 (1999); V.A. Kostelecky and C. D. Lane, *Phys. Rev. D* **60**, 116010 (1999).
- [35] A. Einstein, *Ann. der Physik* **17**, 981 (1905).
- [36] T.D. Lee and C.N. Yang, *Phys. Rev.* **104**, 254 (1956)
- [37] K. Moriyasu, *An Elementary Primer for Gauge Theory*, World Scientific Publishing Co Pte Ltd., Cingapore, 1983.
- [38] F.R. Klinkhamer and M. Risse, *Phys. Rev. D* **77**, 117901 (A) (2008).
- [39] Q. G. Bailey and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev. D* **70**, 076006 (2004).
- [40] C. Kaufhold and F. R. Klinkhamer, *Phys. Rev. D* **76**, 025024 (2007); F.R. Klinkhamer and M. Risse, *Phys. Rev. D* **77**, 016002 (2008).
- [41] A. P. Baeta Scarpelli and J. A. Helayel-Neto, *Phys. Rev. D* **73**, 105020 (2006); N.M. Barraz, Jr., J.M. Fonseca, W.A. Moura-Melo, and J.A. Helayel-Neto, *Phys. Rev. D* **76**, 027701 (2007); M.N. Barreto, D. Bazeia, and R. Menezes, *Phys. Rev. D* **73**, 065015 (2006); J.W. Moffat, *Int. J. Mod. Phys. D* **12** 1279 (2003); F. W. Stecker and S.T. Scully, *Astropart. Phys.* **23**, 203 (2005); H. Belich *et al.*, *Phys. Rev. D* **68**, 065030 (2003); E. O. Iltan, *Eur. Phys. J. C* **40**, 269 (2005); *Mod. Phys. Lett.* **A19**, 327 (2004); *JHEP* 0306 (2003) 016; T. Mariz, J.R. Nascimento, A.Yu. Petrov, L.Y. Santos, A.J. da Silva, *Phys. Lett.* **B** 661, 312 (2008); M. Gomes, J.R. Nascimento, E. Passos, A.Yu. Petrov, A.J. da Silva, *Phys.Rev.* **D** **76**, 047701 (2007); A.F. Ferrari, M. Gomes, A.J. da Silva, J.R. Nascimento, E. Passos, A.Yu. Petrov., *Phys. Lett.* **B** **652**, 174 (2007); O. Bertolami and D.F. Mota, *Phys. Lett.* **B** **455**, 96 (1999).
- [42] R. Montemayor and L.F. Urrutia, *Phys. Rev. D* **72**, 045018 (2005); X. Xue and J. Wu, *Eur. Phys. J. C* **48**, 257 (2006); A.A. Andrianov and R. Soldati, *Phys. Rev. D* **51**, 5961 (1995); *Phys. Lett. B* **435**, 449 (1998); A.A. Andrianov, R. Soldati and L. Sorbo, *Phys. Rev. D* **59**, 025002 (1998); M. B. Cantcheff, *Eur. Phys. J. C* **46**, 247

- (2006); M. B. Cantcheff, C.F.L. Godinho, A.P. Baeta Scarpelli, J.A. Helayël-Neto, Phys. Rev. D **68**, 065025 (2003).
- [43] R. Casana, M. M. Ferreira Jr., J. S. Rodrigues, Madson R.O. Silva, Phys. Rev. D **80**, 085026 (2009).
- [44] R. Lehnert and R. Potting, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 110402 (2004); R. Lehnert and R. Potting, *Phys. Rev. D* **70**, 125010 (2004); B. Altschul, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 041603 (2007); Phys. Rev. D **75**, 105003 (2007); Nucl. Phys. B **796**, 262 (2008).
- [45] A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem. [S.l.]: [s.n.], 1992.B.
- [46] R. Casana, M.M. Ferreira Jr, A. R. Gomes, **Frederico E. P. dos Santos**, Phys. Rev. D **82**, 125006 (2010).
- [47] J. M. Conroy, H. J. Kwee, and V. Nazaryan, Phys. Rev. D **68**, 054004 (2003); J. Anne L. Hewett, F. J. Petriello, and T. G. Rizzo, Phys. Rev. **D 64**, 075012 (2001); R. Delgadillo-Blandoab and B.Ydric, JHEP 03 (2007) 056; A. Prakash, A. Mitra, and P. Kumar Das, Phys. Rev. **D 82**, 055020 (2010).