

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Aspectos clássicos da eletrodinâmica de
Maxwell suplementada pelo termo CPT-par
do setor de gauge do Modelo Padrão
Estendido**

Paulo Rogério Dias Pinheiro

ORIENTADOR: MANOEL MESSIAS FERREIRA JÚNIOR

São Luís

2009

Paulo Rogério Dias Pinheiro

Aspectos Clássicos da eletrodinâmica de
Maxwell suplementada pelo termo CPT-par
do setor de gauge do Modelo Padrão
Estendido

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Física da Universidade Federal do Maranhão, como
parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

Orientador: Manoel Messias Ferreira Júnior

Doutor em Física - UFMA

SÃO LUÍS

2009

Pinheiro, Paulo Rogério Dias

Aspectos clássicos da eletrodinâmica de Maxwell suplementada
pelo termo CPT-par do setor de gauge do Modelo Padrão Estendido/
Paulo Rogério Dias Pinheiro - São Luís, 2009

76.f

Impresso por Computador (fotocópia)

Orientador: Manoel Messias Ferreira Júnior

Dissertação (Mestrado)-Universidade Federal do Maranhão; Programa
de Pós-Graduação em Física, 2009.

1.Eletrodinâmica 2.Simetria-Lorentz 3.Soluções Clássicas. I Título

CDU 537.8

PAULO ROGÉRIO DIAS PINHEIRO

Aspectos clássicos da eletrodinâmica de Maxwell
suplementada pelo termo CPT-par do setor de gauge do
Modelo Padrão Estendido

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-
Graduação em Física da Universidade Federal do
Maranhão, como parte dos requisitos para a obtenção
do título de mestre.

BANCA EXAMINADORA

Manoel Messias Ferreira Júnior

Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão

Rodolfo Alván Casana Sifuentes

Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão

Humberto Belich Jr

Doutor em Física - Universidade Federal do Espírito Santo

Aos meus pais por tudo

Agradecimentos

A minha família e à Deus, pelo apoio irrestrito em todos os momentos.

Ao professor Manoel Messias, por sua competência intelectual e por sua orientação segura. Além disso, por sua motivação e encorajamento sempre presentes.

Ao professor Rodolfo Casana, por sua capacidade matemática e por ensinar-me sua técnica com extremo prazer e estímulo.

Aos professores que diretamente ou indiretamente contribuíram para a minha formação, principalmente Carlos Alberto, Jerias Batista e Humberto Filomeno.

À Katiane Pereira da Silva, por apaziguar meu espírito e meu coração na minha jornada final no mestrado.

Aos colegas do Grupo de Física Teórica de Partículas e Campos (GFTPC) pela ajuda mútua e pelo companheirismo.

À Capes e à Fapema, pelo apoio financeiro ao trabalho realizado nestes dois anos e à Pós-graduação de Física da UFMA, principalmente para Josy.

”Cada ponto em sua desagregação e reprodução se acha infinitamente entrelaçado com o sentimento total da desagregação e reprodução, de forma que tudo se permeia, se toca e se aproxima infinitamente, tanto na dor como na alegria, na luta e na paz, no movimento e no repouso, na configuração e desconfiguração”.

Friedrich Hölderlin

Resumo

A possibilidade de violação espontânea da simetria de Lorentz no contexto da teoria das cordas surgiu nos anos 90 como um elemento capaz de direcionar novos caminhos para a física na escala de Planck. Possíveis violações da invariância de Lorentz são vistas como uma característica da física além do Modelo Padrão usual, que proíbe tal violação em sua estrutura. A observação da violação de Lorentz (VL) em mais baixas energias pode ser vista como uma evidência da ocorrência do mecanismo de quebra espontânea na escala de Planck, com importantes consequências para o desenvolvimento da teoria da gravitação quântica. Este trabalho propõe-se a estudar efeitos da VL em um regime de baixas energias, mais precisamente no contexto da eletrodinâmica de Maxwell modificada pelo termo CPT-par ($W_{\alpha\nu\rho\varphi}F^{\alpha\nu}F^{\rho\varphi}$) do Modelo Padrão Estendido. Na primeira parte do trabalho, tratamos a eletrodinâmica resultante do setor de paridade ímpar do tensor $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$, em que os setores elétrico e magnético são acoplados pelo parâmetro de quebra (vetor violador k). Usa-se então o método de Green para obter as soluções clássicas desta eletrodinâmica. Observa-se que os coeficientes violadores de Lorentz contribuem em primeira ordem para os setores elétrico e magnético. Propõe-se um experimento de factível realização em laboratório, para estipular um limite superior para a magnitude do "background" ($k < 10^{-16}$). Tratamos em seguida a eletrodinâmica advinda do setor de paridade par. As soluções para o setor elétrico e magnético são obtidas similarmente pelo método de Green. Com tais soluções, conseguimos impor um limite superior sobre os parâmetros: $(\tilde{\kappa}_{e-})_{ib} < 2.9 \times 10^{-20}$. Por fim, calculamos o propagador desta teoria, tanto para o setor paridade-par quanto para o setor paridade ímpar, e usamo-lo para obter informações sobre a causalidade, estabilidade e unitariedade do modelo.

Palavras-Chave: Eletrodinâmica de Maxwell, Simetria de Lorentz, Soluções Clássicas, Propagador.

Abstract

The possibility of spontaneous breaking of Lorentz symmetry in the context of string theory appeared in 1990's as an element capable to direct new ways for developing physics at Planck scale. Possible breaking of Lorentz invariance is seen as a characteristic of the physics beyond the usual Model Standard, that forbids such breaking in its structure. The observation of Lorentz breaking (LV) at lower energies can be seen as an evidence of occurrence of Lorentz spontaneous breaking at Planck scale, with important consequence for the development of the quantum gravitation theory. This work aims at studying the LV effects in a regime of low energies, more necessarily in the context of the Maxwell electrodynamics, in the presence of the CPT-even term ($W_{\alpha\nu\rho\varphi}F^{\alpha\nu}F^{\rho\varphi}$) of the standard model extension. In the first part of the work, we deal with the electrodynamics stemming from the parity-odd sector of the tensor $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$, where the electric and magnetic sectors are connected by the breaking parameter (violating vector k). The method of Green is then used to yield the classic solutions for this electrodynamics. It is observed that Lorentz-violating coefficients contribute in first order for the electric and magnetic sectors. An experiment of feasible accomplishment in laboratory is considered for stipulating an upper bound for the background magnitude ($k < 10^{-16}$). In the sequel we deal with the electrodynamics stemming from the parity-even sector of the tensor $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$. The solutions for the electric and magnetic sector are attained similarly by the Green method. With such solutions, we are able to impose an upper bound on the parameters: $(\tilde{\kappa}_{e-})_{ib} < 2.9 \times 10^{-20}$. Finally, we evaluate the gauge propagator of this theory, both for the parity-even and the parity-odd sectors. We then use it to analyze the stability, causality and unitary of this model.

Keywords: Maxwell electrodynamics, Lorentz symmetry, Classical solutions, Propagator.

Sumário

Introdução	1
1 Método das funções de Green	10
1.1 Introdução	10
1.2 Funções de Green	11
2 Soluções clássicas para o termo violador de Lorentz e CPT-par do MPE	16
2.1 Introdução	16
2.2 Setor de gauge do Modelo Padrão Estendido	17
2.3 Eletrodinâmica de Maxwell modificada pelo termo CPT-par	20
2.3.1 Função de Green para o potencial escalar	24
2.3.2 Expansão Dipolar para o Campo Elétrico	29
2.3.3 Expansão Dipolar para o Campo Magnético	30
2.3.4 Algumas Aplicações	31
3 Soluções Clássicas para o setor de paridade par do tensor CPT-par do setor de gauge do MPE	35
3.1 Introdução	35
3.2 Eletrodinâmica de Maxwell modificada pelo termo CPT-par	36
3.2.1 Solução para o Setor Elétrico	38
3.2.2 Expansão Dipolar para o Campo Elétrico	39
3.2.3 Solução para o Setor Magnético	40
3.2.4 Expansão Dipolar para o Campo Magnético	41

3.2.5	Limites Superiores para os termos Violadores n e $(\tilde{\kappa}_{e-})_{ib}$	42
3.2.6	Observações finais	44
4	O propagador de gauge do termo CPT-par do MPE	46
4.1	Introdução	46
4.2	Lagrangeana e ação do modelo teórico	47
4.3	Cálculo do propagador de gauge para o setor de paridade-ímpar	48
4.3.1	Relações de Dispersão, causalidade e estabilidade	50
4.3.2	A análise da unitariedade	52
4.4	O propagador de gauge do setor paridade-par	54
4.4.1	Relações de dispersão e análise de consistência	56
5	Conclusão	58
A	Cálculo do potencial escalar gerado por uma esfera carregada	60
	Referências	61

Introdução

As simetrias na Física desempenham um papel importante no entendimento de sistemas físicos. Sistemas dotados de simetrias possuem quantidades conservadas tais como: energia, momento, carga, etc. A conexão entre simetrias e quantidades conservadas é estabelecida por meio do teorema de Noether¹, que afirma que para cada simetria há uma correspondente lei de conservação. Em outras palavras, este teorema estipula que caso um sistema seja invariante sob uma transformação contínua infinitesimal, há uma "corrente" associada, que satisfaz necessariamente uma equação de continuidade, implicando na existência de uma "carga" conservada (energia, momento linear, momento angular, carga elétrica, carga de cor, número eletrônico, etc). Deste modo, o conhecimento da existência de simetrias em sistemas físicos da natureza é extremamente útil para uma descrição teórica satisfatória. Duas simetrias fundamentais da natureza são as simetrias de Lorentz e CPT, que são julgadas como verdades da natureza devido a testes de alta precisão que confirmam a sua validade em alto nível. Entre tais testes, temos experimentos muito sensíveis envolvendo cavidades ressonantes e masers [1], novas versões do experimento de Michelson-Morley [2], cavidades ressonantes de micro-onda [3] e testes diversos da simetria CPT envolvendo férmions [5].

A formulação da teoria da relatividade restrita (TRR) [7] revelou a existência de uma nova simetria da natureza: a covariância de Lorentz. Ela afirma que as leis físicas são invariantes perante as transformações de Lorentz, ou seja, que as leis físicas não devem depender da perspectiva de um observador e que tais leis são equivalentes para todos os observadores postados nos mais diversos referenciais inerciais. Este é o conhecido princípio da relatividade de Einstein, um dos postulados centrais da TRR. Este e o segundo postulado, que estabelece a velocidade da luz como uma constante universal que independe do movimento relativo

¹Um dos mais importantes teoremas do século 20, descoberto pela matemática alemã Emmy Noether.

entre a fonte emissora e o observador, constituem os pressupostos fundamentais da teoria da relatividade. A TRR apresenta base sólida em sua formulação e destaca-se como uma das teorias mais bem sucedidas já formuladas, pois não há experimentos que contradigam suas previsões e seus pressupostos, nem contradições internas. Nesse sentido, pode-se afirmar que a TRR é tomada como uma verdade da natureza. Há inúmeras teorias que se apóiam na TRR, tal como a mecânica quântica relativística de Dirac e a eletrodinâmica quântica (formulada por Richard Feynman, Julian Schwinger e Sin-Itiro Tomonaga) que na verdade foram desenvolvidas tendo como grandes pilares as duas teorias do século XX: a TRR e a mecânica quântica. A Eletrodinâmica Quântica (EDQ) (responsável por explicar as interações eletromagnéticas no nível quântico), assim como a Cromodinâmica Quântica (CDQ) (responsável por explicar as interações fortes entre os quarks) e a Teoria Eletrofraca de Glashow-Weinberg-Salam, também denominada *Flavordinâmica Quântica* (FDQ) (responsável por explicar as interações fracas em decaimento de partículas) constituem o chamado Modelo Padrão das Interações Fundamentais, o qual explica as interações entre as partículas existentes na natureza (interações eletromagnéticas, nuclear forte e nuclear fraca). A interação gravitacional até o momento, ainda não foi adequadamente incluída na estrutura do MP, devido à dificuldade de ser tratada satisfatoriamente como uma teoria de campo quantizável e renormalizável. A descrição teórica para a interação gravitacional é realizada pela teoria da relatividade geral (TRG) de Einstein, formulada em 1915-1916, objetivando descrever a física para referenciais inerciais em movimento acelerado. Na TRG, a gravitação é considerada como um efeito da geometria do espaço-tempo e se apóia sobre o princípio da equivalência, que estabelece que sistemas quando acelerados ou quando submetidos a campos gravitacionais são fisicamente equivalentes.

A simetria CPT é uma outra invariância fundamental nas teorias que compõem o Modelo Padrão (MP). Essa simetria tem a propriedade de que os sistemas físicos permanecem invariantes sob a operação conjunta de três operações: conjugação de carga (C) (que consiste em trocar a partícula pela sua anti-partícula em um determinado sistema físico), paridade (P) (que está relacionada à reflexão espacial, ou seja, a inversão do sentido dos eixos espaciais de um determinado sistema físico) e a reversão temporal (T) (que consiste em trocar o tempo t por $-t$, ou seja, inversão do sentido de evolução temporal do sistema. Observa-se apenas violações individuais destas simetrias ou dupla como a violação CP. Contudo, ainda

não foi observada violação da simetria CPT no contexto da física de partículas. Foi um fato marcante, a observação da violação de paridade no decaimento de mésons K, que podem decair conservando a paridade ou violando a conservação da paridade. Uma solução para este impasse foi apresentada por T.D. Lee e C.N. Yang [8] em 1956, que sugeriram que a conservação da paridade se aplicava essencialmente às interações fortes, mas não especificamente às interações fracas.

Também, podemos falar que a simetria de gauge é uma das simetrias fundamentais da natureza e apresenta-se como uma das mais importantes que existem na física, pois está no âmago do eletromagnetismo e das teorias rotuladas como "teorias de gauge". Esta simetria está relacionada às transformações que mantêm os campos elétrico e magnético invariantes perante uma mudança nos potenciais escalar e vetor. Então, de certa forma, podemos alterar os potenciais, sem que as quantidades físicas (os campos observáveis) sejam afetadas. Isso transparece na arbitrariedade da escolha do zero do potencial escalar, uma vez que a quantidade física relevante é a diferença de potencial. A eletrodinâmica de Maxwell foi a primeira teoria física a apresentar a simetria de gauge em sua estrutura. Após o sucesso da aplicação no eletromagnetismo, esta simetria foi identificada na TRG e em outras teorias de campos, tais como a teoria eletrofraca e a cromodinâmica quântica, estendendo o conceito de invariância de gauge ou de calibre. A real importância dessa simetria foi observada na física das partículas elementares, quando C.N. Yang e Robert Mills, nos idos de 1950, introduziram a teoria de gauge para resolver um problema referente à interação forte, baseada em grupos não-abelianos. Com o advento da teoria de Yang-Mills, as teorias de gauge ganharam uma grande importância do ponto de vista físico-matemático na teoria quântica de campos (TQC), por fornecer uma estrutura unificada para descrever três das quatro interações fundamentais: a eletromagnética, a força fraca e a força forte. Deste modo, o MP é uma Teoria de calibre construída sobre o grupo de invariância $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. De tal forma que a cromodinâmica quântica (CDQ) é baseada no grupo de simetria de gauge $SU(3)$, enquanto a FDQ é regida pelo grupo $SU(2)$, e a EDQ é construída o grupo de simetria $U(1)$ [9].

As teorias físicas que compõem o MP são teorias quânticas de campo (a eletrodinâmica quântica, a cromodinâmica quântica e a teoria eletrofraca) e exibem propriedades de renormalizabilidade, da covariância de Lorentz, da invariância de gauge e da simetria CPT. Em

uma TQC, os campos são considerados como um conjunto infinito de osciladores harmônicos livres, enquanto as partículas são consideradas como excitações localizadas no espaço-tempo, onde pode haver criação ou aniquilação de partículas. Todas as interações descritas pelo MP têm uma partícula mediadora (bósons transmissores da força), que é responsável por carregar a informação (energia, momento, carga) entre as partículas interagentes. A interação eletromagnética tem o fóton como partícula mediadora, a interação fraca tem os bósons vetoriais W^+ , W^- e Z^0 , a interação forte tem oito glúons como partículas mediadoras (responsáveis por manter os quarks como partículas confinadas). Outra característica referente ao MP é a propriedade inerente que cada partícula apresenta para cada tipo de interação. Para a interação eletromagnética, há a carga elétrica; para a interação fraca, há a carga fraca e para a interação forte, há a carga de cor. Com o sucesso da descrição do MP para estas interações, o mesmo raciocínio foi utilizado para a interação gravitacional, onde supõe-se que tal interação é mediada por uma partícula chamada *gráviton*. Mas, esta partícula ainda não foi encontrada em experimentos que tentaram detectá-la.

O MP, apesar de descrever com sucesso a maioria das propriedades das partículas, também tem suas limitações. Este modelo não consegue explicar a origem da massa das partículas de maneira adequada, pois a partícula-chave deste processo, o bóson de Higgs² ainda não foi detectada. Outro ponto crucial é a não-incorporação da interação gravitacional no bojo do MP, uma vez que a interação gravitacional não tem se mostrado renormalizável quando tratada como uma TQC. Por isso, algumas teorias tem sido desenvolvidas para descrever tal interação a nível quântico, como as teorias das cordas, que são propostas para a descrição da física na escala de Planck ($\approx 10^{19} Gev$), onde os efeitos quânticos da gravitação tornam-se apreciáveis.

O insucesso das teorias de gravitação quântica abriu espaço para que a unificação da gravitação ao corpo do MP começasse a ser tratada por novas teorias, desenvolvidas para tratar a física na escala de Planck. Nesta escala de energia, há a possibilidade de quebra espontânea da simetria de Lorentz e CPT no contexto das teorias das cordas (que envolve mais que quatro dimensões espaço-temporais), isto acarreta importantes consequências em sistemas físicos de baixa energia. No início dos anos 1990, Kostelecký, Samuel e Potting

²O bóson de Higgs é partícula escalar massiva responsável pela explicação da origem da massa de algumas partículas elementares, produzido pelo mecanismo proposto pelo Físico britânico Peter Higgs, cuja idéia está baseada na quebra espontânea de simetria de gauge na interação eletrofraca.

conseguiram comprovar teoricamente essa possibilidade de quebra no âmbito da teoria das cordas, onde haveria a criação de campos de fundo - são os valores esperados no vácuo de quantidades tensoriais pertencentes a uma teoria mais primordial abrigada na escala de altíssimas energias. Entretanto, como a escala de Planck nos dias atuais é inacessível para os equipamentos experimentais que dispomos tais como aceleradores de partículas, procura-se sinais dos efeitos de violação de Lorentz no contexto de sistemas físicos de baixa energia. Esses sinais são tratados como efeitos remanescentes de uma possível quebra da simetria de Lorentz na escala de Planck.

Um dos primeiros trabalhos a abordar a violação da simetria de Lorentz foi proposto em 1990, por Carroll-Field-Jackiw em um artigo seminal [10], no qual é apresentada uma eletrodinâmica de Maxwell modificada pela presença de um termo tipo Chern-Simons em (1+3) dimensões, $\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}A^\mu V^\nu F^{\kappa\lambda}$, estabelecendo um acoplamento do campo de gauge com um campo violador da simetria de Lorentz (V^μ). Nesse contexto, os autores estudaram as consequências desse termo violador na eletrodinâmica resultante, com o objetivo de analisar até que ponto a simetria de Lorentz é uma simetria exata da natureza. Uma das principais previsões teóricas deste modelo é a birrefringência da luz (fótons com estados de polarização diferentes se propagam com velocidades distintas), acarretando uma rotação do plano de polarização da luz - efeito da birrefringência do vácuo (induzida pelo vetor de quebra de simetria de Lorentz). Comparando os cálculos teóricos com dados observacionais da luz vinda de galáxias distantes, foi possível verificar que o efeito previsto não ocorria na natureza. Com isto, foi possível impor limites rigorosos ("*upper bounds*") sobre o termo violador de Lorentz (parâmetro de quebra).

Posteriormente, Colladay e Kostelecký [11], influenciados pelo trabalho de Carroll-Field-Jackiw construíram um modelo teórico que incorpora termos violadores de Lorentz em todos os setores de interação do MP, denominado de Modelo Padrão Estendido (MPE). O MPE incorpora termos de violação de Lorentz e simetria CPT gerados através de uma quebra espontânea de simetria (QES) no contexto de uma teoria mais fundamental, definida na escala de Planck. Tais termos provocam a violação explícita da invariância de Lorentz no MPE. A proposição e desenvolvimento do MPE foi também motivada por trabalhos que estabeleceram a possibilidade de quebra espontânea da simetria de Lorentz no contexto das teorias de cordas [12]. A real ocorrência da quebra da simetria de Lorentz no regime de

altas energias (teoria de cordas) é um ingrediente teórico que pode alterar os rumos do desenvolvimento das teorias de gravitação quântica, sendo esta, portanto, uma questão de interesse. Sendo o MPE uma teoria efetiva de mais baixa energia, violações da simetria de Lorentz (VSL) observadas no seu contexto podem ser interpretadas como evidências da VSL no regime das teorias de cordas. Isto, em si, já constitui uma motivação para o estudo das consequências do MPE nos mais diversos sistemas físicos.

Os coeficientes violadores de Lorentz presentes no MPE, gerados em QES, são quantidades tensoriais que fazem o papel de valores esperados do vácuo. Tais coeficientes podem ser CPT-par e CPT-ímpar (quando violam ou não violam a simetria CPT). O MPE preserva a estrutura de gauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ usual do MP, a renormalizabilidade, conservação do tensor energia-momento, microcausalidade, e cancelamento de anomalias usuais. É importante ressaltar que, no contexto do MPE, a violação de Lorentz ocorre apenas no referencial da partícula³, não ocorrendo no referencial do observador⁴, isto é, a teoria é covariante sob rotações e translações do referencial inercial do observador. Isto significa que do ponto de vista do observador, a simetria de Lorentz permanece válida e todas as interações permanecem invariantes. Os coeficientes tensoriais do MPE se transformam como coeficientes tensoriais genuínos sob transformações de Lorentz do observador (TLO). Sob ação de transformações de Lorentz de partícula (TLP), entretanto, tais coeficientes tensoriais transformam-se como um conjunto de escalares independentes, gerando termos na lagrangeana que não se comportam como bilineares, o que implica na VSL.

As TLO consistem nas transformações de coordenadas usuais que representam uma mudança de referencial, sem modificar diretamente as coordenadas ou propriedades das partículas (ou campos) que compõem o sistema. Tal transformação atua sobre os campos de fundo (*background*), uma vez que se trata de um *boost*. A invariância do sistema sob este

³Uma transformação de Lorentz no referencial das partículas equivale a uma transformação que ocorre ao nível das coordenadas das partículas ou dos campos associados as mesmas. Tais transformações não atuam no *background* atrelado aos coeficientes tensoriais advindo da QES, ou seja, não atuam sobre os 4-vetores e tensores do MPE.

⁴Uma transformação de Lorentz do observador corresponde uma transformação de Lorentz tradicional: *boost* ou rotação, onde a transformação se dá sobre as coordenadas do referencial (observador). Importante entender que uma mudança de observador implica em transformações tensoriais sobre o 4-vetor de fundo. Isto implica que cada um dos termos violadores de Lorentz da lagrangeana se transforme como um bilinear, o que é compatível com a covariância de Lorentz.

tipo de transformação configura a simetria de Lorentz do observador. Já no caso da TLP, ocorre uma transformação (operação) diretamente sobre as coordenadas ou propriedades das partículas, enquanto que os campos de *background* são mantidos intactos. Estes dois tipos de transformação de Lorentz são equivalentes em uma situação onde vale a SL, mas tal equivalência deixa de valer quando a SL é quebrada. A invariância do sistema sobre a TLP estabelece a simetria de Lorentz da partícula. Para uma descrição didática sobre o mecanismo da violação espontânea de Lorentz e suas peculiaridades, vide Ref. [4].

O MPE tem setor fermiônico e o setor bosônico. Ambos os setores têm sido bastante estudados na literatura, tendo em vista tanto a análise da nova fenomenologia induzida pelos termos de quebra quanto a imposição de limites rigorosos sobre a magnitude dos coeficientes de violação. Há uma ampla literatura [5] sobre o uso da violação da simetria CPT (dentro do contexto do MPE) para estipular limites sobre os parâmetros de violação. Na atualidade, o estudo da violação da simetria de Lorentz no contexto do MPE tem sido amplamente estudado em diversos aspectos [6].

O setor de gauge do MPE é composto por um termo CPT-ímpar e um termo CPT-par. O termo CPT-ímpar é o termo de Carroll-Field-Jackiw [10]. Desde 1990, a eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw [10] tem sido minuciosamente examinada em variados aspectos e contextos teóricos, como por exemplo: aspectos de causalidade, estabilidade e unitariedade [27], soluções clássicas [16, 28], radiação Cerenkov [29], correções radiativas [30] e correções induzidas sobre a radiação cósmica de fundo [31]. O termo CPT-par é dado por $W_{\alpha\nu\rho\varphi}F^{\alpha\nu}F^{\rho\varphi}$, onde $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$ representa um tensor com as mesmas simetrias do tensor de Riemann e um duplo traço nulo (possuindo 19 componentes). Um estudo interessante sobre as características da eletrostática e magnetostática de Maxwell alterada por este termo foi realizado primeiramente por Bailey & Kostelecký [25], que usaram o método das funções de Green para obter as soluções clássicas para o 4-potencial no vácuo e em um meio material. Tais soluções revelam que ocorre uma conexão inextrincável entre o setor elétrico e magnético desta teoria. Outros estudos envolvendo o setor de gauge do MPE são também encontrados na literatura [26].

A presente dissertação está inserida no âmbito do setor de gauge do MPE, voltando-se mais precisamente ao estudo de características clássicas do setor CPT-par. A primeira parte deste trabalho consiste em estudar as soluções clássicas da eletrodinâmica de Maxwell

suplementada por este termo e, a partir destas soluções, estipular limites superiores sobre os termos de VL. A segunda parte consiste no cálculo do propagador da nova eletrodinâmica, e uso destes propagadores para análise da consistência da teoria.

No capítulo 1 deste trabalho, iniciamos apresentando o método das funções de Green para resolução de equações diferenciais. Mais precisamente, aplicamos o método de Green para as equações de onda inhomogêneas do potencial escalar e vetor (escritas no regime estacionário da teoria de Maxwell). A partir das soluções obtidas, obtemos os campos eletromagnéticos.

No capítulo 2, iniciamos com uma breve introdução sobre o setor de gauge do MPE, distinguindo entre o termo CPT-ímpar (Carroll-Field-Jackiw) e o termo CPT-par. Em seguida, focalizamos sobre o setor CPT-par, representado pelo termo $W_{\alpha\nu\rho\varphi}F^{\alpha\nu}F^{\rho\varphi}$, tendo como propósito a investigação de soluções clássicas da eletrodinâmica de Maxwell suplementada por este termo. Apresentamos uma prescrição que organiza as 19 componentes independentes do tensor $W^{\alpha\nu\rho\varphi}$ em 4 matrizes 3×3 , e um setor paridade-par e paridade-ímpar. Tendo como meta o estudo das propriedades do setor paridade-ímpar, restringimos o número de componentes do tensor $W^{\alpha\nu\rho\varphi}$ a apenas 3, representadas pelo vetor \mathbf{k} . Neste contexto, obtemos as equações de movimento, que são as equações de Maxwell modificadas pelo campo de fundo, advindas da lagrangeana de partida. Por efeito de simplicidade, tais equações são reduzidas ao caso estacionário (independente do tempo). Em seguida, implementa-se o método das funções de Green para a equação diferencial do potencial escalar, obtendo-se a sua forma alterada pela presença dos coeficientes de VSL. Com o potencial escalar em mãos, encontra-se a solução para o campo elétrico. A solução estacionária para o campo magnético é também obtida. Observa-se que neste cenário cargas geram tanto campo elétrico quanto campo magnético, o mesmo sendo verdade para correntes. Ao se realizar uma expansão dipolar para os campos elétrico e magnético, observa-se que as contribuições de VSL em primeira ordem em k para o campo elétrico são geradas pela corrente assim como as contribuições de VSL em primeira ordem em k para o campo magnético são geradas pelas cargas. Para ilustração do efeito, algumas aplicações são efetuadas. Primeiro, calculamos o potencial escalar gerado por um anel circular de corrente (de raio R), em seguida calculamos o campo magnético gerado por um anel de raio R carregado (sem corrente). Por fim, usamos o campo magnético gerado por uma esfera carregada para impor um limite superior sobre o parâmetro de VSL.

No capítulo 3, investigamos, de maneira similar, o setor paridade-par do tensor $W^{\alpha\nu\rho\varphi}$. Usando uma parametrização que reduz este setor a 4 componentes independentes, escrevemos as equações de Maxwell e as equações de onda do 4-potencial, das quais derivam-se as equações para os potenciais escalar e vetor. Em seguida, usamos o método de Green para resolver as equações de onda, obtendo as soluções clássicas para os setores elétrico e magnético desta teoria. Em seguida, encontramos expressões para os campos E e B dentro da aproximação dipolar. A solução obtida para o potencial escalar e campo elétrico exibe a presença de termos não-coulombianos que induzem quebra da simetria radial das soluções. Baseado neste efeito, um experimento é então proposto para impor um limite superior sobre a magnitude dos parâmetros de VSL, sendo obtido $(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} < 2 \times 10^{-19}$.

No capítulo 4, calculamos o propagador da eletrodinâmica de Maxwell incorporando o termo CPT-par ($W_{\alpha\nu\rho\varphi}F^{\alpha\nu}F^{\rho\varphi}$) do SME. Este cálculo é realizado tanto para o setor de paridade-ímpar quanto para o setor paridade-par do tensor $W^{\alpha\nu\rho\varphi}$. Os propagadores obtidos são expressos como matrizes 4×4 , escritas em primeira ordem nos parâmetros de violação de Lorentz. Na sequência, procedemos uma análise da consistência dos modelos baseada na estrutura de pólos dos propagadores. Dos pólos, obtemos as relações de dispersão, das quais podemos analisar aspectos de causalidade e estabilidade. Da matriz de resíduo do propagador saturado, investigamos aspectos de unitariedade. Observamos que no caso do setor paridade-ímpar, a teoria é estável, não-causal e não-unitária. No caso do setor paridade-par, observamos que a teoria é estável, causal, e unitária.

No capítulo 5, apresentamos a conclusão desta dissertação e discutimos possíveis perspectivas futuras.

Capítulo 1

Método das funções de Green

1.1 Introdução

A resolução de equações diferenciais (homogêneas ou inhomogêneas) pelo método das funções de Green é extremamente eficaz e constitui uma poderosa ferramenta matemática. É difícil precisar a origem das chamadas "funções de Green", mas certamente está associada com o trabalho genial de George Green (1793-1841), que aplicou o método pela primeira vez em problemas eletrostáticos. No trabalho seminal "An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of the Electricity and Magnetism" [13], lançado em 1828, Green determinou o potencial elétrico dentro de um condutor preenchido com vácuo usando as funções de Green [14]. As funções de Green (ou propagadores) são elementos físico-matemáticos responsáveis pela transmissão da informação física de um ponto a outro do espaço.

Neste capítulo, apresentamos o método das funções de Green como uma forma eficaz para a resolução de equações diferenciais. Utilizamos como forma de demonstração da eficácia deste método a resolução da equação de onda para o potencial escalar (no regime estático), cuja solução é obtida pelo método de Green. Em seguida, esta solução é reescrita através da expansão dipolar. Da solução para o potencial escalar é encontrada a expressão para o campo elétrico. De forma similar, a equação de onda para o potencial vetor é também resolvida pelo método de Green. Em seguida, a aproximação dipolar é implementada para obter a solução do potencial vetor e o campo magnético a grandes distâncias das fontes.

1.2 Funções de Green

Iremos utilizar o método das funções de Green para as equações de onda do potencial escalar A_0 e potencial vetor \mathbf{A} . Tomamos como partida as equações de Maxwell usuais:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.4)$$

A primeira equação é a lei de Gauss, a segunda é a lei de Gauss magnética, a terceira é a lei de Faraday e a quarta é a lei de Ampère. Para a obtenção das equações de onda, iremos utilizar o gauge de Lorenz:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial A_0}{\partial t} = 0. \quad (1.5)$$

Usamos também a relação de definição do campo elétrico em termos do potencial escalar e o potencial vetor

$$\mathbf{E} = -\nabla A_0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (1.6)$$

Para escrevermos a equação de onda para A_0 , substituímos a Eq.(1.6) na Eq.(1.1):

$$-\nabla^2 A_0 - \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.7)$$

Substituindo agora a Eq.(1.5) na relação acima, temos

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A_0 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.8)$$

Esta é a equação de onda para A_0 , também escrita na forma tensorial

$$\square A_0 = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.9)$$

onde $\square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ é o operador d'Alembertiano, com a métrica dada por $g^{\mu\nu} = (+, -, -, -)$.

Para escrevermos a equação de onda para \mathbf{A} , partimos da Eq.(1.4), na qual substituímos a Eq.(1.6) e a expressão para o campo magnético,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.10)$$

Assim, obtemos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla A_0 + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right). \quad (1.11)$$

Utilizando a expressão vetorial, $[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}]$, a Eq. (1.11) resulta igual a

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}, \quad (1.12)$$

onde foi novamente usada a condição do gauge de Lorenz. Esta é a equação de onda para \mathbf{A} , também escrita como

$$\square \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (1.13)$$

As equações de onda (1.8) e (1.12) possuem a mesma forma de uma equação de onda não-homogênea, dada na forma:

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi = -4\pi f(x, t) \quad (1.14)$$

Nossa tarefa agora é encontrar a função de Green para resolvermos a Eq.(1.14). Usaremos a transformada de Fourier como meio de encontrar a função de Green para esta equação de onda.

Começamos considerando o caso estático, em que o potencial escalar e o potencial vetor são independentes do tempo. As equações de onda são então escritas como:

$$\nabla^2 A_0 = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.15)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (1.16)$$

Estas são as equações de Poisson para o potencial escalar e vetor, respectivamente. Considerando-se primeiramente a Eq.(1.15), a função de Green para esta equação de onda, por definição, deve satisfazer a:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.17)$$

onde $\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ é a função de Dirac 3-dimensional. Escrevemos a transformada de Fourier para $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$:

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} \tilde{G}(\mathbf{p}) \exp[-i(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}], \quad (1.18)$$

e sua transformada inversa $\tilde{G}(\mathbf{p})$,

$$\tilde{G}(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{r}' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \exp[i(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}]. \quad (1.19)$$

Aplicando a transformada de Fourier na Eq.(1.17), e sabendo que

$$\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \exp[-i(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}], \quad (1.20)$$

obtemos:

$$\tilde{G}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{\mathbf{p}^2}. \quad (1.21)$$

Com este resultado em mãos, podemos encontrar a função de Green $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Para isto, substituímos (1.14) na Eq.(1.17):

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \exp[-i(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}], \quad (1.22)$$

onde $d^3\mathbf{p} = \mathbf{p}^2 \sin\theta d\theta d\phi dp$ é o elemento de volume em coordenadas esféricas. Escrevemos:

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{\mathbf{p}^2} \exp[-ip|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos\theta] \mathbf{p}^2 \sin\theta d\theta d\phi dp, \quad (1.23)$$

onde θ é o ângulo definido pelos vetores \mathbf{p} e $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, ou seja, $[\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = p|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos\theta]$.

Realizando as integrações angulares, temos:

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.24)$$

Esta é a função de Green associada ao operador ∇^2 , característica da interação coulombiana, que será usada como resultado de referência ao longo dos próximos capítulos deste trabalho.

Apresentamos agora a solução geral para a Eq.(1.15), que é dada por:

$$A_0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}'). \quad (1.25)$$

Substituindo a função de Green obtida na Eq.(1.25), temos:

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1.26)$$

Resultado bem conhecido em textos de eletromagnetismo (vide Ref. [15]). Realizaremos agora o estudo desta solução em pontos bem distantes das fontes (cargas). Isto equivale a trabalhar dentro do regime em que $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$, no qual vale a seguinte expansão,

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')}{r^3} + \dots, \quad (1.27)$$

conhecida como expansão dipolar, onde termos de ordem superior em \mathbf{r}' são desprezados.

Substituindo esta expansão na Eq.(1.26), temos:

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \right]. \quad (1.28)$$

Sabendo que,

$$q = \int \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}', \quad (1.29)$$

é a carga elétrica do sistema, e

$$\mathbf{p}_e = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}', \quad (1.30)$$

é o momento de dipolo elétrico. Podemos escrever a Eq.(1.28) como:

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right]. \quad (1.31)$$

Este é o potencial elétrico devido à distribuição de carga ρ no espaço, que devido a sua não-homogeneidade, pode gerar uma contribuição dipolar não-nula. O campo elétrico pode ser obtido fazendo-se uso de $[\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla A_0(\mathbf{r})]$, que resulta igual a:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r^3} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}_e}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_e)}{r^5} \mathbf{r} \right]. \quad (1.32)$$

De maneira análoga, podemos escrever a solução para a equação de onda $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ para o potencial vetor no caso estático na forma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \int d^3\mathbf{r}' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}'), \quad (1.33)$$

onde a função de Green $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ também satisfaz a Eq.(1.17), sendo dada igualmente pela expressão (1.24). A Eq.(1.33) assume a forma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1.34)$$

Utilizando a expansão dipolar expressa em (1.27), temos:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int \mathbf{r}' \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \right]. \quad (1.35)$$

Iremos agora utilizar a seguinte identidade (vide a Ref. [15], pág. 185):

$$\int (f \mathbf{J} \cdot \nabla' g + g \mathbf{J} \cdot \nabla' f + f g \nabla' \cdot \mathbf{J}) d^3\mathbf{r}' = 0. \quad (1.36)$$

Fazendo $f = 1$, $g = r'$ e $\nabla' \cdot \mathbf{J} = \mathbf{0}$ (conservação da densidade de corrente), resulta que:

$$\int \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = 0. \quad (1.37)$$

Agora fazendo $f = r'_i$, $g = r'_j$ e novamente $\nabla' \cdot \mathbf{J} = \mathbf{0}$, estabelecemos que:

$$\int (r'_i \mathbf{J}_j - r'_j \mathbf{J}_i) d^3\mathbf{r}' = 0. \quad (1.38)$$

A segunda integral na Eq.(1.35) pode ser reescrita como:

$$\frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int \mathbf{r}' \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = -\frac{1}{2r^3} \left[\mathbf{r} \times \int (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')) d^3\mathbf{r}' \right]. \quad (1.39)$$

Na expressão acima, identificamos o momento magnético \mathbf{m} , sendo dado por:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')) d^3\mathbf{r}' \quad (1.40)$$

de maneira que vale:

$$\mathbf{r} \cdot \int \mathbf{r}' \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \mathbf{r} \times \mathbf{m}. \quad (1.41)$$

Substituindo as expressões (1.37) e (1.41) na Eq.(1.35), obtemos simplesmente:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \right]. \quad (1.42)$$

Esta é a contribuição não-nula de uma distribuição de corrente localizada $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ ao potencial vetor (em primeira ordem em \mathbf{r}'). O campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ pode ser agora calculado diretamente, via $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, obtendo-se:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right). \quad (1.43)$$

Desenvolvendo a expressão acima, podemos obter o campo magnético para uma expansão dipolar na forma

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right], \quad (1.44)$$

que é o campo magnético produzido pelo dipolo magnético pontual.

Capítulo 2

Soluções clássicas para o termo violador de Lorentz e CPT-par do MPE

2.1 Introdução

Neste capítulo, realiza-se o estudo da eletrodinâmica de Maxwell na presença de termos violadores de Lorentz contidos no termo CPT-par do MPE. A idéia consiste em estudar as soluções clássicas desta eletrodinâmica via uso do método de Green, tendo por objetivo saber como os termos de violação de Lorentz afetam as soluções usuais da eletrodinâmica de Maxwell. Um estudo similar a este foi realizado na Ref. [16], onde foram estudadas as soluções clássicas da eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw originada pelo termo violador de Lorentz e CPT tipo Chern-Simons ($\varepsilon_{\beta\alpha\rho\varphi} V^\beta A^\alpha F^{\rho\varphi}$). Primeiramente, foi obtido o propagador do campo de gauge desta teoria, cujos pólos fornecem prontamente as relações de dispersão do modelo. De posse das relações de dispersão, foi realizada a análise de estabilidade, causalidade e unitariedade dos modos de propagação. Concluiu-se que esta teoria é consistente (estável, causal e unitária) somente para o caso em que o campo de fundo é tipo-espaço, $V^\beta = (0, \mathbf{v})$, enquanto, é inviável a quantização da teoria quando considera-se o caso de um campo de fundo tipo-tempo, $V^\beta = (v_0, 0)$. Este resultado já havia sido estabelecido nas Refs. [27]. Dando prosseguimento ao trabalho, os autores obtiveram as

equações de Maxwell modificadas pela presença do termo violador, a partir das quais foram obtidas as equações de onda para o potencial escalar e vetor. Em seguida, usou-se o método de Green para obter as soluções para as equações de onda, que forneceram as soluções para o setor elétrico e magnético da teoria.

No presente capítulo, daremos atenção específica à eletrodinâmica de Maxwell modificada pela presença do termo violador de Lorentz e CPT-par ($W_{\alpha\nu\rho\varphi}F^{\alpha\nu}F^{\rho\varphi}$) do MPE, com o intuito em estudar algumas propriedades clássicas desta eletrodinâmica estendida. Os resultados apresentados neste capítulo estão contidos na Ref. [17].

2.2 Setor de gauge do Modelo Padrão Estendido

Na presente seção, apresentamos uma discussão sobre o setor de gauge do MPE cuja lagrangeana é dada abaixo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\nu}F^{\alpha\nu} - \frac{1}{4}\varepsilon_{\beta\alpha\rho\varphi}V^\beta A^\alpha F^{\rho\varphi} - \frac{1}{4}W_{\alpha\nu\rho\varphi}F^{\alpha\nu}F^{\rho\varphi} - J_\alpha A^\alpha, \quad (2.1)$$

onde $F_{\alpha\nu}$ ($F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$) é o tensor do campo eletromagnético, o segundo termo é o termo de Carroll-Field-Jackiw, o terceiro é o termo CPT-par do MPE, enquanto $J_\alpha A^\alpha$ representa a interação do campo com as fontes. Esta lagrangeana é invariante sob a transformação de gauge $U(1)$ ($A^\alpha \rightarrow A^\alpha + \partial^\alpha \Lambda$).

O termo de Carroll-Field-Jackiw, $\varepsilon_{\beta\alpha\rho\varphi}V^\beta A^\alpha F^{\rho\varphi}$, é CPT-ímpar e invariante de calibre. O 4-vetor V^β representa o "background" violador de Lorentz e tem dimensão de massa +1. Este parâmetro é fortemente limitado ($V^\beta \leq 10^{-33}\text{eV}$) por dados observacionais de birrefringência de luz proveniente de sistemas astronômicos longínquos. A partir 1990 a eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw [10] tem sido investigada em diversos aspectos [27], [16, 28], [29],[31].

O terceiro termo da lagrangiana (2.1) é o termo CPT-par, $W_{\alpha\nu\rho\varphi}F^{\alpha\nu}F^{\rho\varphi}$, no qual o coeficiente tensorial $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$ é adimensional e tem a mesma simetria do tensor de Riemann, satisfazendo as seguintes propriedades de simetria e anti-simetria,

$$[W_{\alpha\nu\rho\varphi} = -W_{\nu\alpha\rho\varphi}, W_{\alpha\nu\rho\varphi} = -W_{\alpha\nu\varphi\rho}, W_{\alpha\nu\rho\varphi} = W_{\rho\varphi\alpha\nu}], \quad (2.2)$$

além de possuir um duplo traço nulo, $W^{\alpha\beta}_{\alpha\beta} = 0$, o que resulta em 19 componentes independentes.

Inicialmente, apresentamos uma prescrição que permite organizar os 19 termos do tensor $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$ em matrizes 3×3 , de forma a facilitar a sua manipulação. Seguiremos a prescrição utilizada na Ref. [19] por ser a convenção mais usualmente utilizada na literatura, onde o tensor $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$ é escrito em termos de 4 matrizes 3×3 , $\kappa_{DE}, \kappa_{DB}, \kappa_{HE}, \kappa_{HB}$, definidas como

$$(\kappa_{DE})^{jk} = -2W^{0j0k}, \quad (\kappa_{HB})^{jk} = \frac{1}{2}\epsilon^{j pq}\epsilon^{klm}W^{pqlm}, \quad (2.3)$$

$$(\kappa_{DB})^{jk} = -(\kappa_{HE})^{kj} = \epsilon^{kpq}W^{0j pq}. \quad (2.4)$$

Verifica-se que as matrizes κ_{DE}, κ_{HB} (de paridade par) contêm juntas 11 componentes independentes, enquanto κ_{DB}, κ_{HE} (de paridade ímpar) possuem 8 componentes, que somam os 19 elementos independentes do tensor $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$. Tais coeficientes podem ser parametrizados em termos de 4 outras matrizes 3×3 e um elemento de traço, escritos como combinações de $\kappa_{DE}, \kappa_{DB}, \kappa_{HE}, \kappa_{HB}$, a saber

$$(\tilde{\kappa}_{e+})^{jk} = \frac{1}{2}(\kappa_{DE} + \kappa_{HB})^{jk}, \quad (\tilde{\kappa}_{e-})^{jk} = \frac{1}{2}(\kappa_{DE} - \kappa_{HB})^{jk} - \frac{1}{3}\delta^{jk}(\kappa_{DE})^{ii}, \quad (2.5)$$

$$(\tilde{\kappa}_{o+})^{jk} = \frac{1}{2}(\kappa_{DB} + \kappa_{HE})^{jk}, \quad (\tilde{\kappa}_{o-})^{jk} = \frac{1}{2}(\kappa_{DB} - \kappa_{HE})^{jk}, \quad (\tilde{\kappa}_{tr}) = \frac{1}{3}(\kappa_{DE})^{ii}. \quad (2.6)$$

As matrizes $(\tilde{\kappa}_{e+}), (\tilde{\kappa}_{e-}), (\tilde{\kappa}_{o+})$ e $(\tilde{\kappa}_{o-})$ possuem traço nulo, enquanto $(\tilde{\kappa}_{tr})$ é um coeficiente simples. Das definições (2.3, 2.4), percebemos que apenas a matriz $(\tilde{\kappa}_{o+})$ é anti-simétrica enquanto as outras três matrizes são simétricas. As matrizes $(\tilde{\kappa}_{e+})$ e $(\tilde{\kappa}_{o-})$ podem ser escritas como (conforme Ref. [19]):

$$(\tilde{\kappa}_{e+})^{jk} = - \begin{bmatrix} -(W^{(3)} + W^{(4)}) & W^{(5)} & W^{(6)} \\ W^{(5)} & W^{(3)} & W^{(7)} \\ W^{(6)} & W^{(7)} & W^{(4)} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

$$(\tilde{\kappa}_{o-})^{jk} = \begin{bmatrix} 2W^{(2)} & -W^{(9)} & W^{(8)} \\ -W^{(9)} & -2W^{(1)} & W^{(10)} \\ W^{(8)} & W^{(10)} & 2(W^{(1)} - W^{(2)}) \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

onde os dez elementos $W^{(i)}$ são escritos como combinações dos elementos $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$ tal como se

segue:

$$\begin{aligned}
W^{(\alpha)} = & \{W^{0213}, W^{00123}, W^{0202} - W^{1313}, W^{0303} - W^{1212}, W^{0102} + W^{1323}, \\
& W^{0103} - W^{1223}, W^{0203} + W^{1213}, W^{0112} + W^{0323}, W^{0113} - W^{0223}, \\
& W^{0212} - W^{0313}\}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Todos os coeficientes de paridade-par estão contidos em $(\tilde{\kappa}_{e+})$, $(\tilde{\kappa}_{e-})$ e $(\tilde{\kappa}_{tr})$, enquanto os coeficientes de paridade-ímpar estão contidos em $(\tilde{\kappa}_{o+})$ e $(\tilde{\kappa}_{o-})$. Devido a dados observacionais de birrefringência [19, 20], dez dos 19 elementos do tensor $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$ (pertencentes às matrizes $\tilde{\kappa}_{e+}$ e $\tilde{\kappa}_{o-}$) são fortemente limitados (ao nível de 1 parte em 10^{32}). Cinco destes elementos pertencem ao setor paridade-par (matriz $\tilde{\kappa}_{e+}$), restando apenas 6 coeficientes não limitados por birrefringência (5 deles localizados na matriz $\tilde{\kappa}_{e-}$) e o elemento traço. Os cinco outros elementos birrefringentes pertencem à matriz $\tilde{\kappa}_{o-}$, restando então apenas 3 coeficientes na matriz $\tilde{\kappa}_{o+}$ (chamados de não-birrefringentes, uma vez que não determinam birrefringência).

Para os cálculos aqui propostos, supomos que os seis coeficientes não-birrefringentes do setor paridade-par são nulos, o que é equivalente a escolher $\kappa_{DE} = \kappa_{HB} = 0$ (incluindo $\tilde{\kappa}_{tr} = 0$), que implica em $(\tilde{\kappa}_{e-}) = 0$. A justificativa para tal é que estamos interessados inicialmente em isolar e estudar as propriedades do setor paridade-ímpar, de forma que anulamos os termos do setor de paridade-par.

A limitação da birrefringência sobre o setor paridade-ímpar recai sobre $\tilde{\kappa}_{o-}$, sendo dada na forma:

$$(\kappa_{DB} - \kappa_{HE}) \leq 10^{-32}, \tag{2.10}$$

o que é compatível com $\kappa_{DB} = \kappa_{HE} \neq 0$. Isto implica em $\tilde{\kappa}_{o-} = 0$ e $\tilde{\kappa}_{o+} \neq 0$, como proposto na Ref. [21]. As condições $(\kappa_{DB}) = -(\kappa_{HE})^T$ e $\kappa_{DB} = \kappa_{HE}$ implicam juntas que a matriz $\kappa_{DB} = \kappa_{HE}$ seja anti-simétrica, apresentando somente três elementos não-nulos (os elementos não-birrefringentes). Portanto, vemos que a condição de birrefringência (2.10) reduz o setor de paridade-ímpar a apenas 3 componentes (contidos na matriz $\tilde{\kappa}_{o+}$). Esses são os três únicos coeficientes violadores de Lorentz do tensor $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$ a serem considerados de agora em diante. Tais coeficientes podem ser expressos em termos de um vetor $\boldsymbol{\kappa}$, cujas componentes estão dadas por

$$\kappa^j = \frac{1}{2} \epsilon^{jppq} (\kappa_{DB})^{pq}. \tag{2.11}$$

A presente abordagem equivale a considerar

$$(\tilde{\kappa}_{e+})^{jk} = (\tilde{\kappa}_{e-})^{jk} = (\tilde{\kappa}_{o-})^{jk} = \tilde{\kappa}_{tr} = 0, \quad (\tilde{\kappa}_{o+})^{jk} = (\kappa_{DB})^{jk}. \quad (2.12)$$

Atualmente, os coeficientes não-birrefringentes κ^j são limitados por experimentos de cavidades de micro-onda [19], que impõem $\kappa^j \leq 10^{-12}$, e também por raios cósmicos ultra-energéticos (RCUEs) na ausência da radiação Cerenkov no vácuo [23],[24] que impõem $\kappa^j < 10^{-17} - 10^{-18}$.

Neste capítulo, temos como objetivo o cálculo das soluções clássicas da eletrodinâmica de Maxwell suplementada pelo vetor $\boldsymbol{\kappa}$ violador de Lorentz, numa extensão do trabalho da Ref. [25], onde Bayley & Kostelecký analisaram diversas propriedades eletrostáticas e magnetostáticas advindas do tensor $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$. Vale observar que estes autores, entretanto, não adotaram a parametrização aqui usada, deixando seus resultados em termos das componentes do tensor $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$ propriamente dito, assim como também não realizaram análise mais detalhada das soluções clássicas. Tomamos como ponto de partida as equações de Maxwell, com as quais obtemos as equações de onda para os potenciais escalar e vetor, e para os campos elétrico e magnético. Tais equações, como veremos, já revelam de antemão que nesta teoria as cargas elétricas contribuem para o setor magnético e as correntes contribuem para o setor elétrico. Tais contribuições são explicitamente calculadas por meio do método das funções de Green, que fornecem soluções para cargas pontuais e fontes espacialmente extensas. O ponto chave é a expressão para o potencial escalar, escrito para uma fonte geral (ρ, \mathbf{j}) . Desta, obtemos os campos elétrico e magnético em segunda ordem de κ . Uma expansão dipolar é efetuada para esses campos, revelando que as contribuições da corrente para o campo elétrico e as contribuições da carga para o campo magnético são em primeira ordem de κ . Finalizamos estabelecendo um limite superior para o parâmetro de VL, $k < 10^{-16}$, um valor excelente para um experimento de possível realização em laboratório.

2.3 Eletrodinâmica de Maxwell modificada pelo termo CPT-par

O foco do nosso interesse reside especificamente no termo CPT-par, $(W_{\alpha\nu\rho\varphi} F^{\alpha\nu} F^{\rho\varphi})$. A

lagrangeana, com ($V^\beta = 0$), que adotamos como ponto de partida, é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\nu}F^{\alpha\nu} - \frac{1}{4}W_{\alpha\nu\rho\varphi}F^{\alpha\nu}F^{\rho\varphi} - J_\alpha A^\alpha. \quad (2.13)$$

Esta lagrangeana pode ser escrita em função das matrizes, κ_{DE} , κ_{DB} e κ_{HB} ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot (\kappa_{DE}) \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{2}\mathbf{B} \cdot (\kappa_{HB}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot (\kappa_{DB}) \cdot \mathbf{B} - \rho A_0 + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}, \quad (2.14)$$

ou em função das matrizes ($\tilde{\kappa}_{e+}$), ($\tilde{\kappa}_{e-}$), ($\tilde{\kappa}_{o+}$) e ($\tilde{\kappa}_{o-}$), e do coeficiente ($\tilde{\kappa}_{tr}$):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} [(1 + \tilde{\kappa}_{tr}) \mathbf{E}^2 - (1 - \tilde{\kappa}_{tr}) \mathbf{B}^2] + \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot (\tilde{\kappa}_{e+} + \tilde{\kappa}_{e-}) \cdot \mathbf{E} \\ & - \frac{1}{2}\mathbf{B} \cdot (\tilde{\kappa}_{e+} - \tilde{\kappa}_{e-}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot (\tilde{\kappa}_{o+} + \tilde{\kappa}_{o-}) \cdot \mathbf{B} - \rho A_0 + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Para o caso aqui considerado, em que nos restringimos ao setor paridade-ímpar (fazendo $\tilde{\kappa}_{e+} = \tilde{\kappa}_{e-} = \tilde{\kappa}_{tr} = 0$), temos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \mathbf{E} \cdot (\tilde{\kappa}_{o+}) \cdot \mathbf{B} - \rho A_0 + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}. \quad (2.16)$$

A equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\alpha)} = 0, \quad (2.17)$$

fornece a seguinte equação de movimento para a langrageana (2.13):

$$\partial_\nu F^{\nu\alpha} - W^{\alpha\nu\rho\lambda} \partial_\nu F_{\rho\lambda} = J^\alpha, \quad (2.18)$$

onde foram usados os resultados

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = J^\alpha, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\alpha)} = F^{\alpha\nu} - W^{\alpha\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda}. \quad (2.19)$$

A equação de movimento (2.18) contém as duas equações inhomogêneas de Maxwell modificadas, enquanto as duas equações homogêneas advêm da identidade de Bianchi ($\partial_\nu F^{\nu\alpha*} = 0$), com $F^{\alpha\beta*} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\lambda\mu} F_{\lambda\mu}$ sendo o tensor dual, e $\epsilon^{\alpha\beta\lambda\mu}$ o símbolo de Levi-Civita escrito em 4-dimensões.

Considerando as Eqs. (2.4) e (2.11), podemos escrever as componentes do vetor κ em termos da matriz (κ_{DB}) e do tensor $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$, obtendo

$$\kappa^{(1)} = ((\kappa_{DB})^{23} - (\kappa_{DB})^{32})/2 = W^{0212} + W^{0313}, \quad (2.20)$$

$$\kappa^{(2)} = ((\kappa_{DB})^{31} - (\kappa_{DB})^{13})/2 = W^{0323} - W^{0121}, \quad (2.21)$$

$$\kappa^{(3)} = ((\kappa_{DB})^{12} - (\kappa_{DB})^{21})/2 = W^{0131} + W^{0232}. \quad (2.22)$$

$$\kappa^{(1)} = (\kappa_{DB})^{23} = 2W^{0212}, \quad (2.23)$$

$$\kappa^{(2)} = -(\kappa_{DB})^{13} = -2W^{0121}, \quad (2.24)$$

$$\kappa^{(3)} = (\kappa_{DB})^{12} = 2W^{0131}. \quad (2.25)$$

Neste caso, a matriz κ_{DB} reduz-se a:

$$(\kappa_{DB})^{jk} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa^{(3)} & -\kappa^{(2)} \\ -\kappa^{(3)} & 0 & \kappa^{(1)} \\ \kappa^{(2)} & -\kappa^{(1)} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Com tal prescrição, a lagrangeana (2.16) assume a forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \boldsymbol{\kappa} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \rho A_0 + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}, \quad (2.27)$$

enquanto a Eq. (2.18) conduz às equações de Maxwell modificadas:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\kappa} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \rho, \quad (2.28)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\kappa}) - \partial_t \mathbf{E} + \nabla \times (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\kappa}) = \mathbf{j}, \quad (2.29)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.30)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = \mathbf{0}. \quad (2.31)$$

Tais equações são o ponto de partida para estudar as soluções clássicas desta eletrodinâmica. A primeira equação é a lei de Gauss modificada (na qual ρ é a densidade de carga) e a segunda é a lei de Ampère modificada (na qual \mathbf{j} é a densidade de corrente). Vemos que a lei de Faraday e a lei de Gauss para o campo magnético permanecem inalteradas. A eletrodinâmica modificada será obtida das duas equações de Maxwell inhomogêneas estendidas (2.28) e (2.29) (nas quais observa-se que os campos elétrico e magnético são acoplados em virtude da presença de $\boldsymbol{\kappa}$). Constata-se a partir da Eq.(2.28) que a densidade de carga ρ não será apenas fonte do campo \mathbf{E} , também será do campo \mathbf{B} . De forma similar, verifica-se a partir da Eq.(2.29) que a densidade de corrente \mathbf{j} é fonte tanto do campo \mathbf{B} quanto do campo \mathbf{E} .

A fim de resolver tais equações, devemos obter as equações de onda para os potenciais vetor e escalar, e para os setores elétrico e magnético. Para efeito de simplificação, trabalhamos no regime estacionário, ou seja, no qual os potenciais e campos não possuem dependência temporal. Utilizando a relação entre o campo elétrico e o potencial escalar $\mathbf{E} = -\nabla A_0$ e

a relação vetorial $[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}]$ nas Eqs. (2.28) e (2.29), obtemos as seguintes equações:

$$\nabla^2 A_0 - \boldsymbol{\kappa} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = -\rho, \quad (2.32)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} + [(\boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla) \nabla - \boldsymbol{\kappa} \nabla^2] A_0 = -\mathbf{j}. \quad (2.33)$$

A condição de gauge de Lorenz, $\partial_t A_0 + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, no regime estacionário, reduz-se a $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, que equivale à condição do gauge de Coulomb ou gauge transverso. Com esta condição, a Eq. (2.32) toma a forma:

$$\nabla^2 A_0 + \boldsymbol{\kappa} \cdot (\nabla^2 \mathbf{A}) = -\rho, \quad (2.34)$$

onde utilizamos a relação $B = \nabla \times \mathbf{A}$. O operador rotacional, quando aplicado sobre a Eq. (2.33) implica em

$$\nabla^2 \mathbf{B} + (\boldsymbol{\kappa} \times \nabla) \nabla^2 A_0 = -\nabla \times \mathbf{j}. \quad (2.35)$$

Tomando o produto escalar do vetor $\boldsymbol{\kappa}$ com a expressão (2.33), resulta:

$$\boldsymbol{\kappa} \cdot (\nabla^2 \mathbf{A}) = \boldsymbol{\kappa}^2 \nabla^2 A_0 - (\boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla) (\boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla) A_0 - \mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\kappa}. \quad (2.36)$$

Substituindo a Eq. (2.36) na Eq. (2.34), obtemos a equação de onda para o potencial escalar:

$$[(1 + \boldsymbol{\kappa}^2) \nabla^2 - (\boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla)^2] A_0 = -\rho + \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{j}. \quad (2.37)$$

Agora, aplicando o operador diferencial $[(1 + \boldsymbol{\kappa}^2) \nabla^2 - (\boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla)^2]$ sobre as Eqs. (2.33) e (2.35), obtemos intrincadas equações de onda para o potencial vetor e para o campo magnético, apresentadas a seguir:

$$\nabla^2 [(1 + \boldsymbol{\kappa}^2) \nabla^2 - (\boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla)^2] \mathbf{A} = [(\boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla) \nabla - \boldsymbol{\kappa} \nabla^2] [\rho - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{j}] - [(1 + \boldsymbol{\kappa}^2) \nabla^2 - (\boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla)^2] \mathbf{j}, \quad (2.38)$$

$$\nabla^2 [(1 + \boldsymbol{\kappa}^2) \nabla^2 - (\boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla)^2] \mathbf{B} = (\boldsymbol{\kappa} \times \nabla) \nabla^2 [\rho - (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{j})] - [(1 + \boldsymbol{\kappa}^2) \nabla^2 - (\boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla)^2] \nabla \times \mathbf{j}. \quad (2.39)$$

Uma relação mais simples para o campo magnético pode ser derivada da Eq. (2.35), ao considerar a comutação do operador ∇^2 com o operador $(\mathbf{k} \times \nabla)$. Obtemos assim:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{B} + \nabla^2 (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\kappa}) &= -\nabla \times \mathbf{j}, \\ \nabla^2 (\mathbf{B} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\kappa}) &= -\nabla \times \mathbf{j} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Utilizando o método das funções de Green, observamos que a solução para o termo entre colchetes da Eq. (2.40) pode ser escrita como

$$\mathbf{B} + (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\kappa}) = - \int d^3 r' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (\nabla' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')), \quad (2.41)$$

onde a função de Green $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ satisfaz a Eq. (1.17), cuja solução está dada pela Eq. (1.24). Substituindo este resultado na Eq. (2.41), temos:

$$\mathbf{B} + (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3 \mathbf{r}' \frac{\nabla' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.42)$$

Realizando agora uma integração por partes, obtemos

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int d^3 \mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.43)$$

Esta expressão relaciona o campo magnético com o campo elétrico e a corrente. Este procedimento fornece uma maneira mais fácil de calcular o campo magnético gerado por fontes genéricas (ρ, \mathbf{j}) , desde que o campo elétrico seja previamente conhecido. Trata-se de uma alternativa de cálculo que evita a árdua tarefa de solucionar as Eqs. (2.38) e (2.39), que possuem parte não-homogênea bastante complicada.

Como já foi mencionado, todas essas equações de onda revelam que os setores elétrico e magnético estão relacionados entre si no sentido tal que tanto a carga quanto a corrente geram os campos elétrico e magnético. Tal conexão neste modelo foi primeiramente discutida nas Refs. [21, 25]. Este tipo de acoplamento também aparece no caso da eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (MCFJ) [10, 16] para o caso em que o "background" é tipo-espaco, mas desaparece no caso em que o "background" é puramente tipo-tempo. No caso do setor CPT-par, ocorre algo parecido, pois esta conexão é realmente manifesta nas soluções do setor paridade-ímpar, mas não é observada nas soluções do setor paridade-par, como veremos no próximo capítulo.

2.3.1 Função de Green para o potencial escalar

Uma solução geral para a Eq. (2.37) pode ser dada pela expressão integral,

$$A_0(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [-\rho(\mathbf{r}') + \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')] d^3 \mathbf{r}', \quad (2.44)$$

onde $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ é função de Green associada que satisfaz a equação diferencial,

$$[(1 + \boldsymbol{\kappa}^2)\nabla^2 - (\boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla)^2] G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.45)$$

A fim de obter $G(\mathbf{r})$, usamos a transformada de Fourier,

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} \tilde{G}(\mathbf{p}) \exp[-i(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}]. \quad (2.46)$$

Utilizando o método de Green, obtemos:

$$\tilde{G}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{[(1 + \boldsymbol{\kappa}^2)\mathbf{p}^2 - (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p})^2]}. \quad (2.47)$$

Sendo α o ângulo definido pelo vetor do campo de fundo ($\boldsymbol{\kappa}$) e o vetor \mathbf{p} , então vale $\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p} = \kappa p \cos \alpha$. Com isto, escrevemos:

$$\tilde{G}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{[\mathbf{p}^2(1 + \boldsymbol{\kappa}^2 \sin^2 \alpha)]}. \quad (2.48)$$

Agora, precisamos definir as coordenadas esféricas do vetor momento, $\mathbf{p} = (p, \theta, \phi)$, e as coordenadas do vetor do campo de fundo fixo, $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa, \theta_1, \phi_1)$. Para nossa proposta de cálculo, alinhamos o vetor $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ como o eixo- z , de modo que θ_1 é o ângulo definido pelos vetores $\boldsymbol{\kappa}$ e $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, $[\boldsymbol{\kappa} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \kappa |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos \theta_1]$, θ é o ângulo definido pelos vetores \mathbf{p} e $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, ou seja, $[\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = p |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos \theta]$.

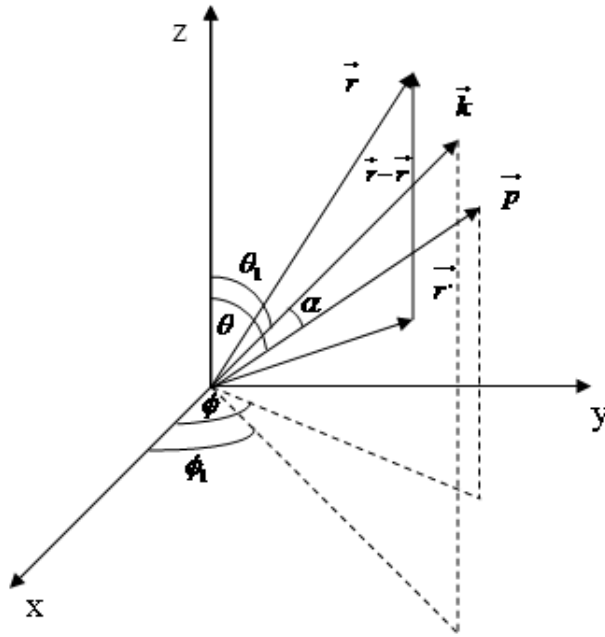


Fig.1 – Configuração dos vetores \mathbf{k} e \mathbf{p} .

Neste caso, vale a seguinte relação entre os ângulos α , θ , θ_1 , ϕ e ϕ_1 (de acordo com a Fig. 1):

$$\cos \alpha = \cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \cos(\phi - \phi_1).$$

A transformada de Fourier (2.46) não pode ser resolvida exatamente devido à presença do ângulo α (que está diretamente relacionado ao ângulo θ) no denominador da expressão (2.46). Como forma de contornar este empecilho usaremos uma aproximação, a fim de resolver a integral para $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Uma solução explícita pode ser encontrada para o caso $\kappa^2 \ll 1$, para o qual temos

$$(1 + \kappa^2 \sin^2 \alpha)^{-1} \simeq (1 - \kappa^2 \sin^2 \alpha). \quad (2.49)$$

Então, com esta aproximação a Eq. (2.46) assume a forma

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} \frac{(1 - \kappa^2 \sin^2 \alpha)}{p^2} \exp[-i(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}], \quad (2.50)$$

ou

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{(2\pi)^3} \left[\int d^3 \mathbf{p} \frac{\exp[-i(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}]}{p^2} - \kappa^2 \int d^3 \mathbf{p} \frac{\sin^2 \alpha}{p^2} \exp[-i(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}] \right]. \quad (2.51)$$

Usando os seguintes resultados,

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} \frac{1}{p^2} \exp[-i(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}] = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2.52)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} \frac{\sin^2 \alpha}{p^2} \exp[-i(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}] = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{[\boldsymbol{\kappa} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]^2}{8\pi \kappa^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (2.53)$$

a função de Green é finalmente calculada:

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \left(1 - \frac{\kappa^2}{2}\right) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{[\boldsymbol{\kappa} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]^2}{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\}. \quad (2.54)$$

Observe que o resultado acima é dado pela função de Green coulombiana, $-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$, corrigida por termos de violação de Lorentz.

Utilizando a função de Green, o potencial escalar devido a fontes genéricas (ρ, \mathbf{j}) (em ordem κ^2) é

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ c(\kappa) \int d^3 \mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{r}' \frac{[\boldsymbol{\kappa} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') - \int d^3 \mathbf{r}' \frac{\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\}, \quad (2.55)$$

com $c(\kappa) = (1 - \kappa^2/2)$. Tal expressão revela que os termos de contribuição para $A_0(\mathbf{r})$ (violadores de Lorentz), advindos da carga são proporcionais a κ^2 , enquanto as correções induzidas pela corrente são em primeira ordem de κ . Com esta expressão, podemos imediatamente calcular o potencial escalar para uma carga pontual em repouso [$\rho(\mathbf{r}') = e\delta(\mathbf{r}')$] e para uma carga pontual em movimento uniforme com velocidade \mathbf{u} , [$\mathbf{j}(\mathbf{r}') = e\mathbf{u}\delta(\mathbf{r}')$]. Substituindo estas fontes na Eq.(2.55), temos

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi} \left\{ c(\kappa) \int d^3\mathbf{r}' \frac{\delta(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r}' \frac{[\boldsymbol{\kappa} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \delta(\mathbf{r}') - \int d^3\mathbf{r}' \frac{\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(\mathbf{r}') \right\}, \quad (2.56)$$

cuja integração direta leva a

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi} \left\{ \frac{c(\kappa)}{r} - \frac{\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{u}}{r} - \frac{1}{2} \frac{(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})^2}{r^3} \right\}. \quad (2.57)$$

Tomando o gradiente desta expressão, obtemos para o campo elétrico de uma carga estática e de uma carga em movimento uniforme:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi} \left\{ c(\kappa) \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{3(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})^2}{2r^5} \mathbf{r} + \frac{(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})}{r^3} \boldsymbol{\kappa} \right\}, \quad (2.58)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi} (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{u}) \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (2.59)$$

respectivamente. Aqui, ambos os campos apresentam um comportamento decrescente tipo $1/r^2$. Embora, o campo estático (2.58) decaia com $1/r^2$, seu comportamento é não-coulombiano uma vez que a magnitude do segundo e terceiro termos varia com a direção, e o terceiro termo aponta na direção de $\boldsymbol{\kappa}$. A presença do coeficiente $c(\kappa)$ no termo coulombiano revela que o campo de fundo violador de Lorentz também induz uma espécie de blindagem na magnitude da carga elétrica. Tais efeitos podem ser contrastados com aqueles induzidos pelo campo de fundo do modelo de Carroll-Field-Jackiw (V^β) sobre a teoria de Maxwell, onde o campo elétrico gerado por uma carga estática (ou em movimento uniforme) permanece exatamente coulombiano para um campo de fundo tipo-tempo, $V^\beta = (v_0, 0)$ [16].

O campo elétrico gerado pelas fontes (ρ, \mathbf{j}) , advindo da Eq.(2.55), tem a forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi} \left\{ c(\kappa) \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' + \frac{1}{2} \nabla \int d^3\mathbf{r}' \frac{[\boldsymbol{\kappa} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') \right. \\ & \left. - \int \frac{\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \right\}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

onde foi usado $\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) = -\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$ no primeiro e terceiro termos entre chaves. De posse do campo elétrico, podemos escrever uma expressão integral para o campo magnético modificado, partindo da Eq.(2.43) (em ordem $\boldsymbol{\kappa}^2$):

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{(4\pi)} \left\{ \int \frac{\rho(\mathbf{r}') \boldsymbol{\kappa} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' - \int \frac{\boldsymbol{\kappa} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' \right. \\ & \left. + \int d^3\mathbf{r}' \nabla \times \left[\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Esta expressão mostra que as cargas induzem contribuições (de quebra de Lorentz) em primeira ordem em $\boldsymbol{\kappa}$ para o campo magnético, enquanto as correntes induzem somente contribuições em segunda ordem em $\boldsymbol{\kappa}$. O último termo da expressão acima é a contribuição usual da teoria de Maxwell. Podemos escrevê-lo utilizando

$$\nabla \times \left[\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (2.62)$$

onde foi usado $\nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$, já que o operador atua apenas nas variáveis sem linha. Assim, o campo magnético dada pela Eq.(2.61) é escrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{(4\pi)} \left\{ \int \frac{\rho(\mathbf{r}') \boldsymbol{\kappa} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' - \int \frac{\boldsymbol{\kappa} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' \right. \\ & \left. + \int d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Para o caso de fontes pontuais [$\rho(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r}')$, $\mathbf{j}(\mathbf{r}') = q\mathbf{u}\delta(\mathbf{r}')$], a Eq. (2.61) fica:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = & \frac{q}{(4\pi)} \left\{ \int \frac{\delta(\mathbf{r}') \boldsymbol{\kappa} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' - \int \frac{\boldsymbol{\kappa} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{u}) \delta(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' \right. \\ & \left. + \int d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{u} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \delta(\mathbf{r}') \right\}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Após uma integração direta, o campo magnético resultante (na ordem de $\boldsymbol{\kappa}^2$) é:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi} \left\{ [1 - (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{u})] \frac{\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{r}}{r^3} \right\}. \quad (2.65)$$

Tal solução tem duas componentes: uma apontando na direção de $\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{r}$, outra na direção $\mathbf{u} \times \mathbf{r}$, revelando que o campo magnético é sempre ortogonal ao vetor posição \mathbf{r} . Para uma carga pontual estática, o campo magnético associado é

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (2.66)$$

onde fizemos $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Observa-se que o "background" violador é responsável por um resultado novo: a geração de campo magnético tendo como fonte uma carga estática.

Por uma questão de consistência, deve ser mencionado que o resultado (2.65) pode ser obtido diretamente da Eq. (2.39) para fontes pontuais. De fato, propondo uma transformada de Fourier da forma,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{B}(\mathbf{p}) \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) d^3\mathbf{p}, \quad (2.67)$$

substituindo-a na Eq. (2.39), juntamente com as fontes pontuais:

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r}) = \frac{q}{(2\pi)^3} \int \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) d^3\mathbf{p}, \quad (2.68)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = q\mathbf{u}\delta(\mathbf{r}) = \frac{q\mathbf{u}}{(2\pi)^3} \int \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) d^3\mathbf{p}, \quad (2.69)$$

obtemos o seguinte resultado:

$$\tilde{B}(\mathbf{p}) = q \left[i \frac{(1 - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{p}}{\mathbf{p}^2(1 + \boldsymbol{\kappa}^2) - (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p})^2} + i \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{p}}{\mathbf{p}^2} \right], \quad (2.70)$$

cuja transformada de Fourier, na ordem de κ^2 , fornece exatamente a Eq. (2.65).

2.3.2 Expansão Dipolar para o Campo Elétrico

Um procedimento interessante consiste em realizar a expansão dipolar para os campos elétrico e magnético aqui obtidos. Como passo inicial, realizamos a expansão dipolar para o potencial escalar, de onde podemos obter o campo elétrico e, por conseguinte, o campo magnético. No caso de fontes espacialmente distribuídas, podemos trabalhar na aproximação dipolar utilizando (1.27) e

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')}{r^5} - \frac{3\mathbf{r}'^2}{r^2} + \frac{15(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{2r^7} + \dots \quad (2.71)$$

Realizando a substituição das expressões (1.27) e (2.71), a Eq. (2.55) fornece

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ c(\kappa) \frac{q}{r} - \frac{(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})^2}{2r^3} q + \left[\frac{c(\kappa)}{r^3} - \frac{3(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})^2}{2r^5} \right] (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}_e) + \frac{(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})}{r^3} (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{P}_e) - \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{m}) \right\}. \quad (2.72)$$

Aqui, usamos $q = \int \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$ como a carga elétrica, $\mathbf{P}_e = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$ como o momento dipolar elétrico, e $\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$ como o momento dipolar magnético associado com a corrente \mathbf{j} (considerando uma densidade de corrente localizada e sem divergência).

O campo elétrico correspondente é obtido de (2.55) via $\mathbf{E} = -\nabla A_0$, ou introduzindo a aproximação dipolar diretamente em (2.60), levando a:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ c(\kappa) \left[\frac{q}{r^3} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{P}_e}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}_e)}{r^5} \mathbf{r} \right] - \frac{3q(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})^2}{2r^5} \mathbf{r} - \frac{15(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}_e)}{2r^7} \mathbf{r} + \frac{3(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{P}_e)}{r^5} \mathbf{r} \right. \\ \left. + \frac{3(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})^2}{2r^5} \mathbf{P}_e + \frac{q(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})}{r^3} \boldsymbol{\kappa} + \frac{3(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}_e)}{r^5} \boldsymbol{\kappa} - \frac{(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{P}_e)}{r^3} \boldsymbol{\kappa} - \frac{3[\mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{m})]}{r^5} \mathbf{r} + \frac{\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{m}}{r^3} \right\}. \quad (2.73)$$

o qual exibe um comportamento $1/r^2$. Os primeiros três termos entre parênteses na ordem zero de κ representam o comportamento usual coulombiano (presentes na teoria usual de Maxwell), enquanto os nove termos seguintes representam o caráter não-coulombiano. Os dois últimos termos são as correções advindas do momento magnético da corrente. Todos esses termos dão origem a novos fenômenos, potencialmente observáveis em nível microscópico (atômico) e macroscópico.

2.3.3 Expansão Dipolar para o Campo Magnético

Na aproximação dipolar, a expressão geral (2.43) é escrita como

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right], \quad (2.74)$$

com os últimos dois termos sendo os usuais da teoria usual de Maxwell (vide resultado da Eq. (1.44)).

O campo magnético na aproximação dipolar pode ser obtido diretamente da Eq. (2.61) ou partindo da expressão geral (2.74), na qual se substitui a Eq. (2.73). O resultado assim obtido, em segunda ordem em $\boldsymbol{\kappa}$, é:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[\frac{q}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}_e)}{r^5} - \frac{3\mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{m})}{r^5} \right] \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{r} - \frac{\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{P}_e}{r^3} + \frac{\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{m}) - \boldsymbol{\kappa}^2 \mathbf{m}}{r^3} \right. \\ \left. + \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right] \right\}, \quad (2.75)$$

onde foi também utilizado $\boldsymbol{\kappa} \times (\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{m}) = \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{m}) - \boldsymbol{\kappa}^2 \mathbf{m}$. Os termos não-maxwellianos são induzidos pelo campo de fundo violador de Lorentz. Como já observado, os efeitos de VL induzidos pela distribuição de carga são em primeira ordem em $\boldsymbol{\kappa}$, enquanto aqueles induzidos pela distribuição de corrente são em segunda ordem em $\boldsymbol{\kappa}$.

2.3.4 Algumas Aplicações

Agora, podemos realizar aplicações dos resultados aqui derivados para algumas situações bem definidas, tais como o caso de um anel de corrente e um anel de carga. De imediato, começamos calculando o potencial escalar devido a um anel circular de corrente (I_0) de raio R , confinado no plano $x - y$, descrita pela seguinte densidade de corrente

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') = I_0 [\delta(\cos \theta') \delta(r' - R)/R] \hat{\mathbf{e}}_{\phi'}, \quad (2.76)$$

com $\hat{\mathbf{e}}_{\phi'} = -\sin \phi' \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi' \hat{\mathbf{j}}$. Uma vez que este sistema possui simetria cilíndrica, podemos escolher o ponto de observação no plano $x - z$ ($\phi = 0$) para efeito de cálculo. Substituindo a densidade de corrente (com $\rho = 0$) na Eq.(2.55), temos:

$$A_0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \boldsymbol{\kappa} \cdot \left[\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi' \frac{I_0 [\delta(\cos \theta') \delta(r' - R)/R]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left(-\sin \phi' \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi' \hat{\mathbf{j}} \right) \right], \quad (2.77)$$

onde $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [\mathbf{r}^2 + \mathbf{r}'^2 - 2r r' (\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \phi')]^{\frac{1}{2}}$. Realizando a integração sobre as funções delta de Dirac para as variáveis r' e θ' , obtemos o seguinte resultado

$$A_0(\mathbf{r}) = -\frac{I_0 R}{(4\pi)} \boldsymbol{\kappa} \cdot \left[-\int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi' d\phi'}{\sqrt{a - b \cos \phi'}} \hat{\mathbf{i}} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi' d\phi'}{\sqrt{a - b \cos \phi'}} \hat{\mathbf{j}} \right], \quad (2.78)$$

com

$$a = (r^2 + R^2), \quad b = 2rR \sin \theta. \quad (2.79)$$

Enquanto a primeira integral é nula como consequência do fato do integrando ser uma função ímpar, a segunda integral pode ser expressa em termos das integrais elípticas completas K e E de primeira e segunda espécie, respectivamente, dadas abaixo:

$$K(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \gamma}}, \quad (2.80)$$

$$E(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \gamma} d\gamma. \quad (2.81)$$

Sendo assim, obtemos:

$$A_0(\mathbf{r}) = -\frac{I_0 R}{(4\pi)} \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left[\frac{a}{b} K(\alpha) - \frac{a+b}{b} E(\alpha) \right] \boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{j}}, \quad (2.82)$$

com $\alpha = \sqrt{2b/(a+b)}$. Fazendo-se agora uma expansão em termos da razão $(b/2a) = [rR \sin \theta / (r^2 + R^2)]$, o potencial escalar assume a forma

$$A_0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{mr \sin \theta}{(r^2 + R^2)^{3/2}} \left[1 + 15 \frac{R^2 r^2 \sin^2 \theta}{8 (r^2 + R^2)^2} + \dots \right] \boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{j}}, \quad (2.83)$$

onde $m = \pi R^2 I_0$ é a magnitude do momento dipolar associado com a corrente, dado como $\mathbf{m} = m\hat{k}$. Agora, é importante mostrar que este resultado equivale ao previsto pela expansão dipolar da Eq. (2.72), que para $q = \mathbf{P}_e = 0$ fornece:

$$A_0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{m})}{r^3}. \quad (2.84)$$

Usando a identificação $mr \sin \theta \hat{j} = \mathbf{m} \times \mathbf{r}$ (válida para a configuração de cálculo), reescrevemos o potencial escalar (2.83) como:

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{(r^2 + R^2)^{3/2}} \left[1 + 15 \frac{R^2 r^2 \sin^2 \theta}{8(r^2 + R^2)^2} + \dots \right] \mathbf{r} \cdot (\mathbf{m} \times \boldsymbol{\kappa}), \quad (2.85)$$

uma vez que $\boldsymbol{\kappa} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{r}) = -\mathbf{r} \cdot (\mathbf{m} \times \boldsymbol{\kappa})$. No limite em que $r \gg R$, obtemos simplesmente:

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{m} \times \boldsymbol{\kappa})}{r^3} \right], \quad (2.86)$$

que coincide exatamente com o resultado da Eq. (2.84)

Outro exemplo bastante ilustrativo é o do campo magnético gerado por um anel de raio R contendo carga Q , localizada no plano $x - y$. A densidade de carga deste anel é escrita como

$$\rho(r') = (Q/2\pi R^2) \delta(r' - R) \delta(\cos \theta'). \quad (2.87)$$

Uma vez que $j = 0$, o campo magnético gerado por este anel é dado pelo primeiro termo da Eq. (2.61),

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(4\pi)} \frac{Q}{2\pi R^2} \left[\int \frac{\boldsymbol{\kappa} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(r' - R) \delta(\cos \theta')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r' \right]. \quad (2.88)$$

Realizando as integrações em dr' e $d\theta'$, resulta:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(4\pi)} \frac{Q}{2\pi} \left[(\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{r}) \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{[a - b \cos \phi']^{3/2}} - \boldsymbol{\kappa} \times \int_0^{2\pi} \mathbf{R} \frac{d\phi'}{[a - b \cos \phi']^{3/2}} \right]. \quad (2.89)$$

Usando-se agora $\mathbf{R} = R(\cos \phi' \hat{i} + \sin \phi' \hat{j})$, obtemos:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(4\pi)} \frac{Q}{2\pi} \left[(\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{r}) \int_0^{2\pi} \frac{1}{[a - b \cos \phi']^{3/2}} d\phi' - (\boldsymbol{\kappa} \times \hat{i}) R \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi'}{[a - b \cos \phi']^{3/2}} d\phi' \right], \quad (2.90)$$

com os parâmetros a, b dados pela Eq. (2.79). Lançando mão agora das funções elípticas, o campo $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ assume a forma:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(4\pi)} \frac{Q}{2\pi} \frac{4}{\sqrt{a+b}(a-b)} \left\{ (\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{r}) E(\alpha) - R (\boldsymbol{\kappa} \times \hat{i}) \left[\frac{(a-b)}{b} K(\alpha) - \frac{a}{b} E(\alpha) \right] \right\}. \quad (2.91)$$

Uma expansão em termos da razão $[rR \sin \theta / (r^2 + R^2)]$ pode ser realizada, implicando

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{(r^2 + R^2)^{3/2}} \left\{ (\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{r}) \left[1 + \frac{15}{4} \frac{(rR \sin \theta)^2}{(r^2 + R^2)^2} \right] - R (\boldsymbol{\kappa} \times \hat{i}) \left[-\frac{3}{2} \frac{(rR \sin \theta)}{(r^2 + R^2)} - \frac{105}{16} \frac{(rR \sin \theta)^3}{(r^2 + R^2)^3} \right] \right\}. \quad (2.92)$$

No limite $r \gg R$, esta expressão reduz-se a

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi} \frac{(\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{r})}{r^3}, \quad (2.93)$$

resultado este que coincide com a expansão dipolar (2.75), quando se faz $\mathbf{P}_e = 0$ e $\mathbf{m} = 0$. Observa-se que para a distribuição de carga aqui considerada, temos $\mathbf{P}_e = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = 0$, o que pode ser verificado explicitamente substituindo-se a densidade de carga da Eq. (2.87) nesta expressão.

Finalmente, devemos tentar empregar os resultados aqui obtidos para impor um limite superior sobre o parâmetro de VL. Dado que os limites devem ser os mais restritivos possíveis, cabe usar as correções *em primeira ordem em κ* , o que envolve as correções para o campo elétrico induzidas por correntes ou correções para o campo magnético induzidas por cargas. Assim, uma experiência apropriada concebida para limitar o parâmetro VL deve envolver uma destas duas situações.

Decidimos inicialmente usar a expressão para o campo magnético gerado por uma carga estática [veja Eq. (2.66)] para obter um limite superior sobre o coeficiente de violação de Lorentz. Como primeira tentativa, consideramos o campo magnético criado por uma carga elétrica confinada num núcleo atômico (Z). Para o elemento sódio, $Z = 11e$, com $e = \sqrt{1/137}$ (em unidades naturais). Calculando a magnitude do campo magnético, $|\mathbf{B}(\mathbf{r})| = (4\pi)^{-1} Z\kappa/r^2$, para uma distância orbital atômica típica ($r = 0,75 \times 10^{-10}$ m), obtemos: $|\mathbf{B}(\mathbf{r})| = 10^5 \kappa$ (eV)². Obviamente o campo acopla-se com o spin do elétron, dando uma contribuição de energia ($\Delta E = \boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{B}$) que pode modificar as linhas espectrais, onde $\boldsymbol{\mu}_s = g_s (\mu_B/\hbar) \mathbf{S}$ é o momento magnético de spin e μ_B é o magnéton de Bohr. Tomando $g_s = 2$, $S = 1/2$, $\mu_B = 1,3 \times 10^{-10}$ (eV)⁻¹, temos $\Delta E = 1,3 \times 10^{-5} \kappa$. Considerando que tal correção não pode ser muito maior do que 10^{-10} eV (caso contrário seria detectada), o seguinte limite é obtido: $\kappa < 10^{-5}$. Para átomos mais pesados, este limite pode ser melhorado para $\kappa < 10^{-6}$, o que ainda não constitui um limite restritivo em comparação com aqueles encontrados na literatura.

Uma situação em que se pode conseguir um limite superior melhor consiste em uma esfera condutora de raio igual a R , e dotada de uma (grande) carga elétrica Q . Uma vez que o campo magnético de uma carga pontual comporta-se como r^{-2} - de acordo com a Eq. (2.66), uma esfera carregada pode produzir um campo magnético proporcional a $Q\kappa/r^2$. Este resultado pode ser obtido substituindo-se a densidade de carga de uma esfera carregada, $\rho(\mathbf{r}') = \frac{Q}{4\pi R^2}\delta(r' - R)$, na expressão (2.61) do campo magnético. Uma esfera carregada de raio $R = 0,9$ m, dotada de carga $1C$ (mantida no vácuo), gera um campo magnético em $r = 1$ m igual a $|\mathbf{B}| = 2 \times 10^4 \kappa$ (eV)². Lembrando que aparelhos supercondutores de interferência quântica, SQUIDS, são capazes de detectar variações do campo magnético tão pequenas quanto $10^{-10}G$, um limite superior tão restritivo quanto $\kappa < 10^{-16}$ pode ser, em princípio, encontrado em um experimento deste tipo.

Capítulo 3

Soluções Clássicas para o setor de paridade par do tensor CPT-par do setor de gauge do MPE

3.1 Introdução

Neste capítulo estudamos as soluções clássicas do setor de paridade-par do tensor CPT-par, de maneira similar ao tratamento realizado no capítulo precedente. Aplicando novamente o método das funções de Green para resolver as equações de onda advindas das equações de Maxwell estendidas, obtém-se as soluções clássicas para os campos elétrico e magnético. Calculamos o campo elétrico devido a uma carga pontual em repouso e realizamos uma expansão dipolar para os campos elétrico e magnético. Por fim, estimamos um limite superior para o parâmetro de quebra baseado num experimento que explora a quebra da simetria radial do potencial escalar (efeito induzido pela VL). Os resultados apresentados neste capítulo estão presentes na Ref. [18].

3.2 Eletrodinâmica de Maxwell modificada pelo termo CPT-par

No presente capítulo, focamos atenção sobre o setor de paridade par do tensor CPT-par, com ênfase especial sobre as 6 componentes não-birrefringentes (5 delas contidas na matriz $\tilde{\kappa}_{e-}$ mais o elemento do traço). Deste modo, toma-se como nulo, o setor de paridade ímpar do tensor CPT-par ($\kappa_{DB} = \kappa_{HE} = 0$). Adotamos ainda a seguinte parametrização ($\kappa_{DE} = -(\kappa_{HB})$), que implica em

$$(\tilde{\kappa}_{e+}) = 0, \quad (3.1)$$

$$(\tilde{\kappa}_{e-})^{jk} = (\kappa_{DE})^{jk} - n\delta^{jk}, \quad (3.2)$$

$$n = \frac{1}{3}\delta^{jk}Tr(\kappa_{DE}). \quad (3.3)$$

Esta parametrização está em concordância com a nulidade das componentes sensíveis aos testes de birrefringência, contidos na matriz $\tilde{\kappa}_{e+}$. Por outro lado, as componentes não sensíveis à birrefringência, contidas na matriz $\tilde{\kappa}_{e-}$, estão agora escritas de acordo com as Eqs. (3.2) e (3.3). Como ponto de partida no processo de obtenção das soluções clássicas deste setor, devemos escrever a equação de onda para o 4-potencial. Da equação de movimento (2.18), temos:

$$\begin{aligned} \partial_\nu (\partial^\nu A^\alpha - \partial^\alpha A^\nu) - W^{\alpha\nu\rho\lambda} \partial_\nu (\partial_\rho A_\lambda - \partial_\lambda A_\rho) &= J^\alpha, \\ \partial_\nu \partial^\nu A^\alpha - \partial^\alpha \partial_\nu A^\nu - 2W^{\alpha\nu\rho\lambda} \partial_\nu \partial_\rho A_\lambda &= J^\alpha, \\ \square A^\alpha - 2W^{\alpha\nu\rho\lambda} \partial_\nu \partial_\rho A_\lambda &= J^\alpha, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde foi usada a condição do gauge de Lorenz, $\partial_\nu A^\nu = 0$. Esta equação de onda gera duas equações, uma para o potencial escalar e outra para o potencial vetor, dadas a seguir:

$$(\partial_t^2 - \nabla^2) A^0 - 2W^{0\nu\rho\lambda} \partial_\nu \partial_\rho A_\lambda = \rho, \quad (3.5)$$

$$(\partial_t^2 - \nabla^2) A^i - 2W^{i\nu\rho\lambda} \partial_\nu \partial_\rho A_\lambda = j^i. \quad (3.6)$$

Expandindo a soma de Einstein no segundo termo das equações acima, e sabendo-se que

$W^{0i0j} = -(\kappa_{DE})^{ij}$, obtemos as seguintes equações de onda:

$$\left[(1+n)\partial_t^2 - (1+n)\nabla^2 - (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} \partial_i \partial_j \right] A_0 + (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} \partial_i \partial_t A_j = \rho, \quad (3.7)$$

$$\left[(1+n)\partial_t^2 - (1-n)\nabla^2 \right] A_i - 2n\partial_t \partial_i A - (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} \partial_t E_j - \epsilon_{ipj} (\tilde{\kappa}_{e-})^{jl} \partial_p B_l = j_i, \quad (3.8)$$

onde usamos $E_j = -F_{0j}$, $B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ipj}F_{pj}$, $(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} = (\tilde{\kappa}_{e-})_{ij}$.

Observa-se nestas equações que os setores elétrico e magnético permanecem acoplados enquanto a dependência temporal dos potenciais é mantida. No regime estacionário, essas equações desacoplam-se, como vemos abaixo:

$$\left[(1+n)\nabla^2 + (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} \partial_i \partial_j \right] A_0 = -\rho, \quad (3.9)$$

$$\left[(1-n)\nabla^2 \right] A_i + \epsilon_{ipj} (\tilde{\kappa}_{e-})^{jl} \partial_p B_l = -j_i. \quad (3.10)$$

O desacoplamento dos setores elétrico e magnético, manifesto nas Eqs. (3.9) e (3.10), diferencia a física do setor de paridade-par da física do setor paridade-ímpar (inteiramente acoplado no regime estacionário). Aplicando o operador diferencial $\epsilon_{abi}\partial_b$ à Eq. (3.10), obtemos uma equação de onda para o campo magnético,

$$\left[\left((1-n)\delta_{al} - (\tilde{\kappa}_{e-})^{al} \right) \nabla^2 + (\tilde{\kappa}_{e-})^{jl} \partial_a \partial_j \right] B_l = -(\nabla \times j)_a, \quad (3.11)$$

onde usamos

$$\epsilon_{abi}\partial_b j_i = (\nabla \times j)_a, \quad (3.12)$$

$$\epsilon_{abi}\partial_b A_i = (\nabla \times A)_a = B_a, \quad (3.13)$$

$$\epsilon_{abi}\epsilon_{icd} = \delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}. \quad (3.14)$$

Enquanto as equações homogêneas de Maxwell permanecem as mesmas ($\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) (pois são obtidas diretamente da identidade de Bianchi ($\partial_\nu F^{\nu\alpha*} = 0$)), as equações inhomogêneas de Maxwell (lei de Gauss e Ampère) são modificadas como segue:

$$(1+n)\nabla \cdot \mathbf{E} - (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} \partial_i E_j = \rho, \quad (3.15)$$

$$(1+n)\partial_t E_i - (1-n)(\nabla \times B)_i + \epsilon_{ijr} (\tilde{\kappa}_{e-})^{rl} \partial_j B_l + (\tilde{\kappa}_{e-})^{iq} \partial_t E_q = -j_i. \quad (3.16)$$

No regime estacionário, a última equação fornece

$$(1-n)(\nabla \times B)_i - \epsilon_{ijr} (\tilde{\kappa}_{e-})^{rl} \partial_j B_l = j_i, \quad (3.17)$$

equação esta que sob a ação do operador rotacional ($\epsilon_{abi}\partial_b$) conduz a mesma expressão da Eq. (3.11).

3.2.1 Solução para o Setor Elétrico

A solução para o potencial escalar pode ser obtida pelo método das funções de Green. A função de Green para a Eq. (3.9) satisfaz

$$\left[(1+n)\nabla^2 + (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} \partial_i \partial_j \right] G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.18)$$

com

$$A_0(\mathbf{r}) = - \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'. \quad (3.19)$$

Com o objetivo de calcular $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, propomos a transformada de Fourier (2.46), para a qual obtemos a transformada inversa

$$\tilde{G}(\mathbf{p}) = - \frac{1}{(1+n)\mathbf{p}^2 + (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} p_i p_j}. \quad (3.20)$$

Considerando-se a pequena magnitude dos coeficientes $(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij}$, vale a seguinte aproximação (em primeira ordem $\tilde{\kappa}_{e-}$):

$$\left[1+n + (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} p_i p_j / \mathbf{p}^2 \right]^{-1} \simeq \left[1-n - (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} p_i p_j / \mathbf{p}^2 \right]. \quad (3.21)$$

Com isto, obtemos

$$\tilde{G}(\mathbf{p}) \simeq - \frac{1}{\mathbf{p}^2} \left[1-n - (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} \frac{p_i p_j}{\mathbf{p}^2} \right]. \quad (3.22)$$

O mesmo procedimento utilizado no cálculo da Eq. (2.54) é aplicado aqui para a obtenção da função de Green, escrita na forma:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= -(1-n) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} \frac{1}{p^2} \exp[-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \\ &\quad - (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} \frac{1}{(2\pi)^3} \partial_i \partial_j \int d^3 \mathbf{p} \frac{1}{p^4} \exp[-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] . \end{aligned} \quad (3.23)$$

Tendo o seguinte resultado

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^4} \exp[-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] = - \frac{1}{8\pi} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \quad (3.24)$$

e usando as relações abaixo,

$$\partial_c |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_c}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \partial_c \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_c}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (3.25)$$

$$\partial_i \partial_j |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}')_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (3.26)$$

obtemos a seguinte função de Green:

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \left\{ (1-n) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}')_j}{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\}, \quad (3.27)$$

que apresenta um comportamento coulombiano blindado pelo fator $(1-n)$ e um comportamento não-coulombiano associado com os termos de VSL não-isotrópicos $(\tilde{\kappa}_{e-})_{ij}$. O decaimento em r^{-1} continua o mesmo da eletrodinâmica de Maxwell. Usando a função de Green (3.27), o potencial escalar devido uma distribuição genérica de carga $[\rho(\mathbf{r}')]$ é

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ (1-n) \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} \int d^3\mathbf{r}' \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}')_j}{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') \right\}. \quad (3.28)$$

O campo elétrico, escrito em componentes, assume a forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi} \left\{ (1-n) \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right. \\ & \left. + 3(\tilde{\kappa}_{e-})^{lj} \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_l (\mathbf{r} - \mathbf{r}')_j (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^i}{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \right\}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

Com tais expressões, podemos imediatamente calcular o potencial escalar e o campo elétrico para uma carga pontual em repouso $[\rho(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r}')] :$

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi} \left\{ (1-n) \frac{1}{r} + (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} \frac{r_i r_j}{2r^3} \right\}, \quad (3.30)$$

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi} \left\{ \left(1-n + \frac{3}{2} (\tilde{\kappa}_{e-})^{lj} \frac{r_l r_j}{r^2} \right) \frac{r^i}{r^3} - (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} \frac{r_j}{r^3} \right\}. \quad (3.31)$$

O potencial e o campo elétrico apresentam uma contribuição genuinamente coulombiana proporcional ao fator $(1-n)$, e uma contribuição não-coulombiana, proporcional a $(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij}$.

3.2.2 Expansão Dipolar para o Campo Elétrico

Podemos agora obter uma expressão para o potencial escalar e para o campo elétrico dentro da aproximação dipolar, utilizando (1.27) e (2.71). Após as simplificações, obtemos para o potencial escalar

$$\begin{aligned} A_0(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi} \left\{ (1-n) \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \left[\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}_e}{r^3} \right] \right. \\ & \left. + \frac{(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij}}{2} \int d^3\mathbf{r}' (\mathbf{r} - \mathbf{r}')_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}')_j \left[\frac{1}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')}{r^5} \right] \rho(\mathbf{r}') \right\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Realizando as integrações, obtemos para o potencial escalar:

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ (1-n) \left[\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}_e}{r^3} \right] + \frac{(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij}}{2r^3} \left[r_i r_j \left(1 + 3 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}_e}{r^2} \right) - r_i P_{ej} - r_j P_{ei} \right] \right\}. \quad (3.33)$$

Deste resultado, obtém-se a expressão para o campo elétrico na aproximação dipolar:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi} \left\{ (1-n) \left[\frac{q}{r^3} r^i - \left(\frac{P_e^i}{r^3} - \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}_e)}{r^5} r^i \right) \right] - (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} \frac{1}{r^3} \left(q r_j - P_{ej} + 3 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}_e)}{r^2} r_j \right) \right. \\ & \left. + 3 (\tilde{\kappa}_{e-})^{lj} \frac{r_l r_j}{2r^5} \left[q r^i - P_e^i + 5 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}_e)}{r^2} r^i \right] - 3 (\tilde{\kappa}_{e-})^{lj} \frac{r_l P_{ej}}{r^5} r^i \right\}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Vemos aqui que os termos em $(\tilde{\kappa}_{e-})^{lj}$ quebram a simetria radial, sendo responsáveis pelo comportamento não-coulombiano das soluções estáticas. Apesar dos muitos termos desta solução, observamos que o campo elétrico preserva os comportamentos assintóticos em r^{-2} e r^{-3} para os termos de momento de monopolo e dipolo elétrico. Certamente, isto é uma consequência do caráter adimensional dos coeficientes de VSL. Finalizamos aqui as soluções para o setor elétrico desta teoria.

3.2.3 Solução para o Setor Magnético

Para obter uma solução para o campo magnético, devemos encontrar a função de Green para a Eq. (3.11). Tal função satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\left[\left((1-n) \delta_{al} - (\tilde{\kappa}_{e-})^{al} \right) \nabla^2 + (\tilde{\kappa}_{e-})^{jl} \partial_a \partial_j \right] G_{lb}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta_{ab} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.35)$$

que no espaço dos momentos conduz a

$$\tilde{G}_{ab}(\mathbf{p}) = - \left\{ \frac{1}{[(1-n) \delta_{ab} - (\tilde{\kappa}_{e-})_{ab}] \mathbf{p}^2 + (\tilde{\kappa}_{e-})_{cb} p_a p_c} \right\}. \quad (3.36)$$

Considerando que a magnitude de $(\tilde{\kappa}_{e-})_{ab}$ é muito pequena, e tendo bastante cuidado no procedimento de inversão tensorial, podemos realizar a seguinte aproximação:

$$\tilde{G}_{ab}(\mathbf{p}) \simeq - \frac{1}{\mathbf{p}^2} \left[(1+n) \delta_{ab} + (\tilde{\kappa}_{e-})_{ab} - (\tilde{\kappa}_{e-})_{cb} \frac{p_a p_c}{\mathbf{p}^2} \right]. \quad (3.37)$$

A transformada de Fourier $G_{ab}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ é dada por

$$G_{ab}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \left[(1+n) \delta_{ab} + (\tilde{\kappa}_{e-})_{ab} - (\tilde{\kappa}_{e-})_{cb} \frac{p_a p_c}{\mathbf{p}^2} \right] \exp[-i(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}]. \quad (3.38)$$

Realizando as integrações de Fourier similares a aquelas já realizadas neste trabalho, obtemos a seguinte função de Green:

$$G_{ab}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left\{ (1+n) \delta_{ab} + \frac{(\tilde{\kappa}_{e-})_{ab}}{2} + \frac{(\tilde{\kappa}_{e-})_{cb} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')_a (\mathbf{r} - \mathbf{r}')_c}{2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\}. \quad (3.39)$$

Sabendo que o campo magnético é dado por,

$$B^i(\mathbf{r}) = - \int d^3\mathbf{r}' G_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (\nabla' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}'))^j, \quad (3.40)$$

encontramos a seguinte solução integral:

$$B^i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[(1+n) \delta_{ib} + \frac{1}{2} (\tilde{\kappa}_{e-})_{ib} \right] \int d^3\mathbf{r}' \frac{(\nabla \times j(\mathbf{r}'))^b}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{(\tilde{\kappa}_{e-})^{lj}}{2} \int d^3\mathbf{r}' \left[\frac{(\nabla \times j(\mathbf{r}'))^l}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')_j (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^i \right] \right\}. \quad (3.41)$$

3.2.4 Expansão Dipolar para o Campo Magnético

Podemos derivar uma expansão dipolar para o campo magnético, utilizando-se novamente as relações (1.27) e (2.71).

$$B^i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ (1+n) \left(-\frac{m^i}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})}{r^5} r^i \right) - (\tilde{\kappa}_{e-})^{ib} \frac{\mathbf{m}_b}{r^3} - (\kappa_{e-})_{pb} r_p r_b \left[\frac{3}{2} \frac{m^i}{r^5} - \frac{15}{2} \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})}{r^7} r^i \right] \right\}. \quad (3.42)$$

onde \mathbf{m} é o momento dipolar magnético associado com a corrente. Na obtenção desta expressão, foram utilizados os seguintes resultados intermediários:

$$\int d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{J}_i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r^3} \int d^3\mathbf{r}' \mathbf{J}_i(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) = -\frac{1}{r^3} (\mathbf{r} \times \mathbf{m})_i, \quad (3.43)$$

$$\epsilon_{ijk} \partial_j \int d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{J}_k(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})}{r^5} r_i - \frac{\mathbf{m}_i}{r^3}, \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} (\kappa_{e-})_{pb} \epsilon_{bcd} \partial_c \int d^3\mathbf{r}' \mathbf{J}_d(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_a (\mathbf{r} - \mathbf{r}')_p}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} &= -\frac{1}{r^3} (\kappa_{e-})_{aj} \mathbf{m}_j - \frac{3}{r^5} (\kappa_{e-})_{aj} r_j (\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}) \\ &\quad - \frac{3}{r^5} \mathbf{m}_a r_j (\kappa_{e-})_{ji} r_i + \frac{15}{r^7} r_a r_j (\kappa_{e-})_{ji} r_i (\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}), \end{aligned} \quad (3.45)$$

nos quais consideramos uma densidade de corrente localizada e de divergente nulo. O primeiro termo entre parênteses na Eq. (3.42) é a usual contribuição da teoria de Maxwell, apenas corrigida pela presença do fator $(1 + n)$. Os outros termos violadores de Lorentz conferem à solução uma dependência direcional relacionada ao parâmetro $(\tilde{\kappa}_{e-})^{ib}$. Em princípio, tal dependência direcional poderia ser usada para impor um limite superior sobre os parâmetros LV. Entretanto, como se mostra na seção seguinte, o limite conseguido desta maneira não é suficientemente restritivo. O fato de todos os termos do campo magnético resultarem proporcionais a m/r^3 é devido à adimensionalidade do tensor $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$.

3.2.5 Limites Superiores para os termos Violadores n e $(\tilde{\kappa}_{e-})_{ib}$

A solução para o campo magnético obtida não conduz a bons limites superiores para a magnitude dos parâmetros n e $(\tilde{\kappa}_{e-})_{ib}$ quando tomamos como referência o campo magnético da Terra. De fato, procedendo numa maneira similar à descrita na Ref. [10], afirmamos que o tensor violador de Lorentz não deve implicar uma contribuição de campo magnético maior do que 10^{-4}G (caso contrário seria detectado). Da Eq. (3.42), sabemos que os termos violadores de Lorentz são sempre proporcionais a (m/r^3) . Assumindo que \mathbf{m} representa o dipolo magnético da Terra, e R_{\oplus} o raio da Terra, vale a seguinte razão $m/R_{\oplus}^3 = 0,3 \text{ G}$ (veja Ref. [10]). Este procedimento, entretanto, implica num limite não restritivo: $n \leq 10^{-4}$.

Um limite muito melhor para o parâmetro $(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij}$ pode ser obtido da expressão para o potencial escalar. A idéia é calcular o potencial escalar gerado por uma esfera carregada em diferentes pontos localizados a mesma distância do centro da esfera, observando a diferença de potencial induzida pelo termo violador de Lorentz (não-coulombiano). Tomamos como ponto de partida a expressão para o potencial escalar gerado por uma esfera condutora de raio R e carga q , que pode ser obtido substituindo a densidade de carga para uma esfera, $\rho(\mathbf{r}') = q\delta(r' - R)/(4\pi R^2)$, na Eq. (3.28). Usando integrações de Fourier (veja Apêndice A), obtemos

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ (1 - n) \frac{q}{r} + \frac{q(\tilde{\kappa}_{e-})^{ab}}{2} \left[\frac{r_a r_b (r^2 - R^2)}{r^5} \right] \right\}, \quad (3.46)$$

resultado válido para $r > R$. É então notório que o termo $(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij}$ quebra a simetria radial do potencial escalar, conduzindo a variações ao longo de um caminho circular em torno do

centro. Podemos expandir o termo $(\tilde{\kappa}_{e-})_{ab} r_a r_b$ na forma

$$\begin{aligned} (\tilde{\kappa}_{e-})^{ab} r_a r_b &= (\tilde{\kappa}_{e-})^{11} [(r_1)^2 - (r_3)^2] + (\tilde{\kappa}_{e-})^{22} [(r_2)^2 - (r_3)^2] \\ &+ 2 (\tilde{\kappa}_{e-})^{12} r_1 r_2 + 2 (\tilde{\kappa}_{e-})^{13} r_1 r_3 + 2 (\tilde{\kappa}_{e-})^{23} r_2 r_3, \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde usamos a seguinte matriz $\tilde{\kappa}_{e-}$

$$(\tilde{\kappa}_{e-}) = \begin{pmatrix} (\tilde{\kappa}_{e-})_{11} & (\tilde{\kappa}_{e-})_{12} & (\tilde{\kappa}_{e-})_{13} \\ (\tilde{\kappa}_{e-})_{12} & (\tilde{\kappa}_{e-})_{22} & (\tilde{\kappa}_{e-})_{23} \\ (\tilde{\kappa}_{e-})_{13} & (\tilde{\kappa}_{e-})_{23} & -(\tilde{\kappa}_{e-})_{11} - (\tilde{\kappa}_{e-})_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Podemos então medir o potencial induzido por uma esfera de raio R e carga de 1 C (mantida no vácuo) em dois pontos diferentes, A e B, localizados no plano $x - y$, sobre um círculo de raio r . Supomos então que os pontos A e B são simetricamente dispostos em relação ao eixo- y , ocupando as posições: $A = r(\cos \phi, \sin \phi, 0)$, $B = r(-\cos \phi, \sin \phi, 0)$ [vide Fig. 2].

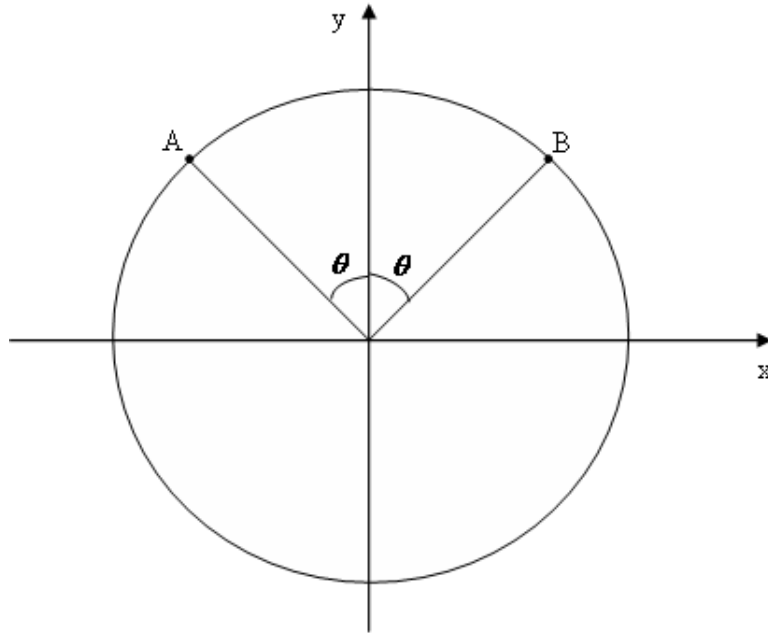


Fig. 2 - Localização dos pontos A e B

A diferença de potencial entre estes pontos então vale

$$\Delta A_0 = A_0(A) - A_0(B) = \frac{q}{4\pi} (\tilde{\kappa}_{e-})_{12} \sin 2\phi \frac{(r^2 - R^2)}{r^3}, \quad (3.49)$$

calculada para $r > R$. Tomando $\phi = \pi/4$ e $q = 1\text{ C}$, esta diferença resulta igual a

$$\Delta A_0 = 9 \times 10^9 (\tilde{\kappa}_{e-})_{12} \frac{(r^2 - R^2)}{r^3}. \quad (3.50)$$

Para obter o melhor *bound* possível, devemos tomar o valor máximo da expressão (3.50). Então, devemos calculá-la em $r = R\sqrt{3}$, ponto no qual $(r^2 - R^2)r^{-3}$ tem um máximo. Para uma esfera carregada de raio unitário ($R = 1m$), obtemos $\Delta A_0 = 3.46 \times 10^9 (\tilde{\kappa}_{e-})^{12}$ V. Considerando a existência de métodos sensíveis para a medida do potencial, capazes de detectar diferenças de 1 parte em 10^{10} V, podemos inferir que a diferença de voltagem entre os pontos A e B não pode ser maior do que 10^{-10} V, ou seja, $3.46 \times 10^9 (\tilde{\kappa}_{e-})^{12} < 10^{-10}$. Esta condição implica em

$$(\tilde{\kappa}_{e-})^{12} < 2.9 \times 10^{-20}. \quad (3.51)$$

Escolhendo agora pares de pontos simetricamente dispostos nos planos $y - z$ e $x - z$, esta condição pode ser igual imposta sobre os coeficientes $(\tilde{\kappa}_{e-})^{23}$ e $(\tilde{\kappa}_{e-})^{13}$.

Este aparato pode ser usado também para estabelecer um limite superior também sobre as componentes diagonais $(\tilde{\kappa}_{e-})^{ii}$. Começamos com $(\tilde{\kappa}_{e-})^{11}$, para o que tomamos os pontos A e B nas posições: $A = r(1, 0, 0)$, $B = r(0, 0, 1)$. A diferença de potencial entre estes dois pontos vale

$$\Delta A_0 = A_0(A) - A_0(B) = \frac{q}{4\pi} (\tilde{\kappa}_{e-})_{11} \left[\frac{r^2 - R^2}{r^3} \right], \quad (3.52)$$

que coincide com a expressão (3.50), uma vez substituída o valor da carga q . Este procedimento conduz então ao mesmo limite: $(\tilde{\kappa}_{e-})^{11} < 2.9 \times 10^{-20}$. Para estabelecer um limite sobre $(\tilde{\kappa}_{e-})^{22}$, tomamos um par de pontos no plano $y - z$, com coordenadas $A = r(0, 1, 0)$, $B = r(0, 0, 1)$, o que implicará na mesma diferença de potencial da Eq.(3.52), e no mesmo limite, ou seja, $(\tilde{\kappa}_{e-})^{22} < 2.9 \times 10^{-20}$. Assim, concluímos que o seguinte limite superior,

$$(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} < 2.9 \times 10^{-20}, \quad (3.53)$$

pode ser estabelecido por meio deste experimento *gedanken* para as 5 componentes anisotrópicas $(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij}$. Este é um bom limite superior para os coeficientes $(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij}$, em se tratando de um teste passível de realização em laboratório. Este limite é tão bom quanto os melhores limites obtidos de dados astronômicos de RCUEs [23], [24].

3.2.6 Observações finais

Podemos comparar estas soluções clássicas do setor paridade-par com aquelas do setor paridade-ímpar exibidas no Cap. 2. A principal diferença é que agora os setores elétrico e

magnético não são acoplados pelo tensor de VSL, pelo menos no regime estacionário. No caso de paridade-ímpar, uma corrente estacionária é capaz de gerar um potencial escalar e campo elétrico tanto quanto uma carga estática pode produzir campo magnético. Quando tal conexão deixa de existir, a manifestação dos efeitos de VSL (separadamente do comportamento maxwelliano), como o surgimento de campo magnético gerado por uma carga pontual, deixa de existir. Agora, os efeitos de VSL aparecem diluídos como pequenas correções para os campos elétrico e magnético da teoria usual de Maxwell. Contudo, os efeitos de VSL podem ainda ser identificados por meio de dispositivos experimentais apropriados, como discutido abaixo. Pontuada esta diferença, podem ser apontadas algumas similaridades entre as soluções dos setores de paridade-par e ímpar. O campo elétrico para uma carga pontual (em ambos os setores) exibe um comportamento não-coulombiano decrescente com $1/r^2$, enquanto a corrente estacionária fornece uma expansão dipolar do campo magnético proporcional a m/r^3 . Isto é atribuído ao caráter adimensional do tensor $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$.

Dado que o coeficiente isotrópico n não quebra a simetria radial do potencial, o tipo de experimento usado para limitar $(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij}$ mostra-se incapaz de restringir a magnitude deste coeficiente. Das soluções obtidas, sabemos que o coeficiente n induz uma leve blindagem no potencial coulombiano, o que pode ser interpretado como uma blindagem da carga. Um experimento envolvendo eletrodinâmica clássica, capaz de restringir a magnitude de n deve ser baseado no efeito de blindagem da carga/potencial. A maior dificuldade em se fazer isto é que o pequeno efeito da violação de Lorentz estará disfarçado em meio ao comportamento de Maxwell (totalmente dominante). Neste caso, os efeitos de VL estarão limitados pela precisão experimental do aparato. Deve-se mencionar que um limite foi recentemente estabelecido para n no contexto de processos de decaimento modificados pela VSL no contexto da eletrodinâmica quântica [24].

Por fim, podemos afirmar que este trabalho finaliza o cálculo das soluções clássicas do termo CPT-par do MPE, tarefa iniciada nas Refs. [17, 25].

Capítulo 4

O propagador de gauge do termo CPT-par do MPE

4.1 Introdução

O estudo de uma teoria a nível clássico inclui também o cálculo do propagador, o elemento físico-matemático responsável pela transmissão de informação na teoria. De posse do propagador, torna-se possível realizar o exame da consistência da teoria, que envolve a análise das condições de estabilidade de energia, causalidade e unitariedade. O estudo da consistência é também importante quando se objetiva quantizar a teoria. Esta análise passa pela averiguação de três aspectos essenciais: estabilidade, causalidade e unitariedade. Quando uma teoria é dita causal, afirma-se que em tal teoria não há propagação de sinais físicos com velocidades superluminais (táquions). Desta maneira, ao analisar se uma teoria é causal, é necessário calcular a velocidade de propagação de sinais relacionados com os modos da teoria. Uma teoria é dita estável quando a mesma apresenta quantidades dinâmicas com energia positivo-definida. Por fim, uma teoria é denominada unitária quando possui modos de propagação associados a estados que apresentam norma quadrática positiva, ou seja, a unitariedade é relacionada à positividade da norma dos estados definidos no espaço de Hilbert. A análise de consistência é realizada a partir dos pólos do propagador, da qual obtém-se as relações de dispersão, que são indispensáveis nesta averiguação. Neste capítulo, calculamos o propagador da eletrodinâmica de Maxwell suplementada pelo termo CPT-par em

duas situações: restringindo-se primeiramente ao setor paridade-ímpar e depois restringindo-se ao setor paridade-par (representado apenas pelo termo de traço). Em seguida, é realizada a análise de consistência de cada um destes modelos.

4.2 Lagrangeana e ação do modelo teórico

No presente capítulo realizamos o cálculo do propagador da eletrodinâmica de Maxwell suplementada pelo termo CPT-par, $W^{\alpha\nu\rho\varphi}F_{\alpha\nu}F_{\rho\varphi}$, abarcando tanto o setor de paridade-par quanto o setor de paridade ímpar do tensor $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$. Na sequência, estudamos a estabilidade, causalidade e unitariedade deste modelo, partindo dos pólos do propagador. Escrevemos a densidade langrangeana incluindo o termo de fixação de gauge (termo inócuo de Fermi), $\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$, como segue abaixo:

$$\mathcal{L} = \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^{\alpha\nu\rho\varphi}F_{\alpha\nu}F_{\rho\varphi} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \right]. \quad (4.1)$$

A ação correspondente naturalmente toma a forma

$$S = \int dx \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^{\alpha\nu\rho\varphi}F_{\alpha\nu}F_{\rho\varphi} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \right], \quad (4.2)$$

que pode ser escrita como uma expressão quadrática em termos do campo de gauge A_ν :

$$S = \int dx \frac{1}{2}A_\mu \left[\square g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu - S^{\mu\nu} \right] A_\nu, \quad (4.3)$$

onde o operador simétrico $S^{\mu\nu}$ está definido como expresso abaixo:

$$S^{\mu\nu} = 2W^{\mu\alpha\beta\nu}\partial_\alpha\partial_\beta = S^{\nu\mu}. \quad (4.4)$$

Tal ação pode ser compactamente escrita abaixo

$$S = \int dx \frac{1}{2}A_\mu [D^{\mu\nu}] A_\nu, \quad (4.5)$$

onde $D^{\mu\nu}$ é o operador diferencial de segunda ordem contido na Eq. (4.3):

$$D^{\mu\nu} = \square g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu - S^{\mu\nu}. \quad (4.6)$$

Adotamos o gauge de Feynman, $\xi = 1$, para o cálculo do propagador, o que implica

$$D^{\mu\nu} = \square g^{\mu\nu} - S^{\mu\nu}. \quad (4.7)$$

O propagador de gauge, $\Delta_{\beta\nu}$, é dado pela inversa do operador $D^{\mu\nu}$, ou seja,

$$\Delta_{\beta\nu} = [D^{\beta\nu}]^{-1}. \quad (4.8)$$

O cálculo da inversa satisfaz a relação

$$D^{\mu\beta} \Delta_{\beta\nu} = \delta^\mu{}_\nu, \quad (4.9)$$

também escrita na forma:

$$(\square g^{\mu\beta} - S^{\mu\beta}) \Delta_{\beta\nu}(x-y) = \delta^\mu{}_\nu \delta(x-y). \quad (4.10)$$

Na representação de Fourier, temos:

$$\delta(x-y) = \int \frac{dp}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)}, \quad \Delta_{\beta\nu}(x-y) = \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}_{\beta\nu}(p) e^{-ip \cdot (x-y)}, \quad (4.11)$$

com:

$$\tilde{D}^{\mu\beta} = -(p^2 g^{\mu\beta} - \tilde{S}^{\mu\beta}), \quad (4.12)$$

$$\tilde{S}^{\mu\nu} = 2W^{\mu\alpha\beta\nu} p_\alpha p_\beta = \tilde{S}^{\nu\mu}. \quad (4.13)$$

No espaço dos momentos, a relação (4.10) toma a forma:

$$-(p^2 g^{\mu\beta} - \tilde{S}^{\mu\beta}) \tilde{\Delta}_{\beta\nu}(p) = \delta^\mu{}_\nu. \quad (4.14)$$

4.3 Cálculo do propagador de gauge para o setor de paridade-ímpar

Neste seção, o propósito é calcular o propagador da eletrodinâmica de Maxwell suplementada pelo setor de paridade-ímpar do tensor $W^{\alpha\nu\rho\varphi}$, seguindo a mesma parametrização adotada no capítulo 2, que consiste em tomar como nulo o setor de paridade-par ($\kappa_{DE} = \kappa_{HB} = 0$) e em reter somente três componentes do setor de paridade-ímpar. Tal parametrização é imposta pelas condições $(\kappa_{DB}) = -(\kappa_{HE})^T$ e $\kappa_{DB} = \kappa_{HE}$, que deixam a matriz $\kappa_{DB} = \kappa_{HE}$ anti-simétrica. Estes três coeficientes não-nulos do tensor $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$, contidos na matriz κ_{DB} , são escritos em termos das componentes de um 3-vetor $\boldsymbol{\kappa}$, cujas componentes estão dadas

pela Eq. (2.11). Estas componentes estão explicitamente dadas nas relações (2.20,2.21,2.22). Para esta situação ($\tilde{\kappa}_{e+} = \tilde{\kappa}_{e-} = \tilde{\kappa}_{tr} = 0$, $(\tilde{\kappa}_{o+})^{jk} = (\kappa_{DB})^{jk}$), a lagrangeana é reduzida para a forma (2.27).

A maneira usual para o cálculo do propagador da lagrangeana (2.27) seria por meio da definição de uma álgebra fechada envolvendo os operadores $L^{\mu\nu} = p^\mu p^\nu / p^2$, $T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - L^{\mu\nu}$, $\tilde{S}^{\mu\nu} = 2W^{\mu\alpha\beta\nu} p_\alpha p_\beta$, $R^{\mu\nu} = \tilde{S}^{\mu\rho} \tilde{S}_\rho{}^\nu$. Infelizmente, a procura por uma álgebra fechada envolvendo uma combinação desses operadores tem se mostrado infrutífera. Dada esta impossibilidade, a estratégia adotada aqui consiste em escrever uma matriz completa que represente o operador $\tilde{D}^{\mu\nu} = -\left(p^2 g^{\mu\beta} - \tilde{S}^{\mu\beta}\right)$, invertendo-a na sequência. Começamos calculando todas as componentes do operador $\tilde{S}^{\mu\nu}$, definido na Eq. (4.13), que podem ser agrupadas apropriadamente em uma matriz 4×4 , como segue:

$$\tilde{S}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 B - p_1 A & \kappa_2 B - p_2 A & \kappa_3 B - p_3 A \\ \kappa_1 B - p_1 A & 2p_0 (A - \kappa_1 p_1) & -p_0 (\kappa_1 p_2 + \kappa_2 p_1) & -p_0 (\kappa_3 p_1 + \kappa_1 p_3) \\ \kappa_2 B - p_2 A & -p_0 (\kappa_1 p_2 + \kappa_2 p_1) & 2p_0 (A - \kappa_2 p_2) & -p_0 (\kappa_2 p_3 + \kappa_3 p_2) \\ \kappa_3 B - p_3 A & -p_0 (\kappa_3 p_1 + \kappa_1 p_3) & -p_0 (\kappa_2 p_3 + \kappa_3 p_2) & 2p_0 (A - \kappa_3 p_3) \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

onde $A = (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p})$ e $B = \mathbf{p}^2$. Podemos mostrar algumas contrações tensoriais de interesse:

$$\tilde{S}_\alpha^\alpha = S_0^0 + S_1^1 + S_2^2 + S_3^3 = -4p_0 (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p}), \quad (4.16)$$

$$\tilde{S}^{\mu\rho} \tilde{S}_{\mu\rho} = -2\boldsymbol{\kappa}^2 \mathbf{p}^4 + 2(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p})^2 \mathbf{p}^2 + 6p_0^2 (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p})^2 + 2p_0^2 \boldsymbol{\kappa}^2 \mathbf{p}^2. \quad (4.17)$$

Com a matriz (4.15), o operador completo $\tilde{D}^{\mu\nu}$ é escrito como:

$$\tilde{D}^{\mu\nu} = - \begin{pmatrix} p^2 & p_1 A - \kappa_1 B & p_2 A - \kappa_2 B & p_3 A - \kappa_3 B \\ p_1 A - \kappa_1 B & -p^2 - 2p_0 (A - \kappa_1 p_1) & p_0 (\kappa_1 p_2 + \kappa_2 p_1) & p_0 (\kappa_3 p_1 + \kappa_1 p_3) \\ p_2 A - \kappa_2 B & p_0 (\kappa_1 p_2 + \kappa_2 p_1) & -p^2 - 2p_0 (A - \kappa_2 p_2) & p_0 (\kappa_2 p_3 + \kappa_3 p_2) \\ p_3 A - \kappa_3 B & p_0 (\kappa_3 p_1 + \kappa_1 p_3) & p_0 (\kappa_2 p_3 + \kappa_3 p_2) & -p^2 - 2p_0 (A - \kappa_3 p_3) \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

O propagador da lagrangeana (4.1) é dado pela inversa da matriz $\tilde{D}^{\mu\nu}$, que satisfaz a Eq. (4.9). Sendo M uma matriz não-singular, sua inversa é $M^{-1} = (\det M)^{-1} \text{Adj}(M) = (\det M)^{-1} (\text{Cof}(M))^T$.

O primeiro passo para o procedimento de inversão consiste em calcular o determinante da matriz $D^{\mu\nu}$. Tal determinante é composto pela soma de 76 termos diferentes. Esta soma, entretanto, pode ser cuidadosamente simplificada para somente sete termos, escritos como

um produto simples:

$$\det D = -p^4[p^4 + p^2(4Ap_0 + A^2 - B\boldsymbol{\kappa}^2) + (4A^2p_0^2 - 2ABp_0\boldsymbol{\kappa}^2 + 2A^3p_0)], \quad (4.19)$$

$$\det D = -p^4[(p^2 + 2Ap_0)(p^2 + 2Ap_0 - B\boldsymbol{\kappa}^2 + A^2)]. \quad (4.20)$$

Podemos agora calcular os elementos da matriz do cofator, que em primeira ordem em κ conduz a:

$$\text{COF} = -p^4 \begin{pmatrix} -(p^2 + 4Ap_0) & F_1 & F_2 & F_3 \\ F_1 & C_{11} & p_0(p_1\kappa_2 + p_2\kappa_1) & p_0(p_1\kappa_3 + p_3\kappa_1) \\ F_2 & p_0(p_1\kappa_2 + p_2\kappa_1) & C_{22} & p_0(p_2\kappa_3 + p_3\kappa_2) \\ F_3 & p_0(p_1\kappa_3 + p_3\kappa_1) & p_0(p_2\kappa_3 + p_3\kappa_2) & C_{33} \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

onde $F_i = -(Ap_i - \mathbf{p}^2\kappa_i)$, $C_{ii} = (p^2 + 2Ap_0 + 2p_0p_i\kappa_i)$.

Como a matriz do cofator é simétrica, a matriz do propagador é escrita como:

$$\Delta_{\alpha\beta} = \frac{1}{D_1} \begin{pmatrix} -(p^2 + 4Ap_0) & F_1 & F_2 & F_3 \\ F_1 & C_{11} & p_0(p_1\kappa_2 + p_2\kappa_1) & p_0(p_1\kappa_3 + p_3\kappa_1) \\ F_2 & p_0(p_1\kappa_2 + p_2\kappa_1) & C_{22} & p_0(p_2\kappa_3 + p_3\kappa_2) \\ F_3 & p_0(p_1\kappa_3 + p_3\kappa_1) & p_0(p_2\kappa_3 + p_3\kappa_2) & C_{33} \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

onde o fator

$$D_1 = (p^2 + 2Ap_0)(p^2 + 2Ap_0 - B\boldsymbol{\kappa}^2 + A^2), \quad (4.23)$$

contém toda informação sobre a estrutura de pólos da teoria.

4.3.1 Relações de Dispersão, causalidade e estabilidade

As relações de dispersão para esta eletrodinâmica são obtidas dos pólos do propagador, sendo dadas por $\det \tilde{D}^{\mu\nu} = 0$. Estas relações são importantes para a análise de estabilidade e causalidade da teoria. Considerando o determinante (4.20), tais relações de dispersão são:

$$[p^2 + 2p_0(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p})] = 0, \quad (4.24)$$

$$[p^2 + 2p_0(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p}) - \boldsymbol{\kappa}^2\mathbf{p}^2 + (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p})^2] = 0. \quad (4.25)$$

Trabalhando a relação (4.24),

$$p_0^2 - \mathbf{p}^2 + 2p_0(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p}) = 0, \quad (4.26)$$

obtemos as seguintes raízes:

$$p_{0\pm} = -(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p}) \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p})^2}, \quad (4.27)$$

Considerando que $|\boldsymbol{\kappa}| \ll 1$, temos (em primeira ordem em $|\boldsymbol{\kappa}|$):

$$p_{0+} = |\mathbf{p}| - (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p}), \quad (4.28)$$

$$p_{0-} = -(|\mathbf{p}| + (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p})). \quad (4.29)$$

Aqui, a raiz $p_{0+} = |\mathbf{p}| - (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p})$ é positivo-definida desde que $|\boldsymbol{\kappa}| \ll 1$. Por outro lado, o modo $p_{0-} = -(|\mathbf{p}| + (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p}))$ está associado a uma anti-partícula, cuja energia torna-se positiva após a reinterpretação $p_{0-} = |\mathbf{p}| + (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p})$. Neste sentido, podemos afirmar que os modos (4.28,4.29) apresentam energia positiva, sendo assim estáveis. Destas relações, podemos obter a velocidade de fase dos modos:

$$u_{phase} = p_0/|\mathbf{p}| = (1 \pm \boldsymbol{\kappa} \cos \boldsymbol{\theta}), \quad (4.30)$$

onde $\cos \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p}/(|\boldsymbol{\kappa}||\mathbf{p}|)$.

A segunda relação de dispersão (4.24) é

$$p_0^2 - \mathbf{p}^2 + 2p_0(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p}) - \boldsymbol{\kappa}^2 \mathbf{p}^2 + (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p})^2 = 0, \quad (4.31)$$

cujas raízes são dadas como segue:

$$p_{0\pm} = -(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p}) \pm \sqrt{\mathbf{p}^2(1 + \boldsymbol{\kappa}^2)}. \quad (4.32)$$

Em primeira ordem de $|\boldsymbol{\kappa}|$, temos:

$$p_{0+} = |\mathbf{p}| - (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p}), \quad (4.33)$$

$$p_{0-} = -(|\mathbf{p}| + (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p})), \quad (4.34)$$

os mesmos resultados obtidos para os modos provenientes da primeira relação de dispersão. Então concluímos que esta teoria é dotada com energia positiva para valores pequenos de $|\boldsymbol{\kappa}|$, implicando em estabilidade. Tais relações implicam na mesma velocidade de fase da Eq. (4.30).

As relações de dispersão (4.28,4.29) e (4.33,4.34) descrevem uma teoria dotada com birrefringência, uma vez que os dois modos que provêm de cada pólo do propagador se propagam com velocidades de fase diferentes.

Outra questão de importância refere-se à causalidade. No nível quântico, a causalidade é uma característica que requer a comutação entre os observáveis separados por um intervalo tipo-espaço (chamada microcausalidade em teoria de campos). A análise de causalidade, em um nível clássico, está relacionada ao sinal dos pólos do propagador, dados em termos de p^2 , de tal maneira que se deve ter $p^2 \geq 0$, a fim de preservar a causalidade (impedindo a existência de táquions). As relações de dispersão (4.24, 4.25) mostram que podemos ter $p^2 < 0$, que implica em modos não-causais. Uma análise mais detalhada e consistente sobre a causalidade advém da análise da velocidade de grupo ($u_g = dp_0/d|\mathbf{p}|$) e da velocidade de frente de onda ("front velocity"), definida como ($u_{front} = \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} u_{phase}$). A causalidade é então assegurada quando $u_g \leq 1, u_{front} \leq 1$. Para a relação (4.24), obtemos:

$$u_g = \frac{dp_0}{d|\mathbf{p}|} = \frac{|\mathbf{p}| - p_0|\boldsymbol{\kappa}||\mathbf{p}| \cos \boldsymbol{\theta}}{p_0 + |\boldsymbol{\kappa}||\mathbf{p}| \cos \boldsymbol{\theta}}, \quad (4.35)$$

$$u_{front} = (1 \pm \boldsymbol{\kappa} \cos \boldsymbol{\theta}). \quad (4.36)$$

Mesmo para um "background" pequeno ($|\boldsymbol{\kappa}| \ll 1$), pode ocorrer que $|u_g| > 1$ e $u_{front} > 1$ para alguns valores de $p_0, |\mathbf{p}|$. Isto é suficiente para provocar a violação da causalidade. Para a relação (4.25), temos:

$$u_g = \frac{dp_0}{d|\mathbf{p}|} = \frac{|\mathbf{p}|(1 - \mathbf{k}^2 \sin^2 \theta) - 2p_0|\boldsymbol{\kappa}| \cos \boldsymbol{\theta}}{p_0 + |\boldsymbol{\kappa}||\mathbf{p}| \cos \boldsymbol{\theta}}, \quad (4.37)$$

$$u_{front} = (1 \pm \boldsymbol{\kappa} \cos \boldsymbol{\theta}). \quad (4.38)$$

Da mesma maneira, para esta expressão pode ser verificada que $|u_g| > 1$ para alguns valores de $p_0, |\mathbf{p}|$, que implica violação de causalidade. Assim, concluímos que esta teoria é estável e não-causal.

4.3.2 A análise da unitariedade

A análise da unitariedade deste modelo é efetuada aqui através da saturação dos propagadores com correntes externas, que deve ser implementada calculando-se o propagador saturado (SP), uma quantidade escalar dada como se segue:

$$SP = J^{*\mu} \Delta_{\mu\nu} J^\nu. \quad (4.39)$$

A corrente (J^μ) satisfaz a lei de conservação ($\partial_\mu J^\mu = 0$), que é escrita como $p_\mu J^\mu = 0$ no espaço dos momentos. Esta condição pode ser útil nesta análise. De acordo com este

método, a análise da unitariedade é assegurada sempre que a parte imaginária da saturação SP (nos pólos do propagador) é positiva. Uma maneira para efetuar a saturação consiste em determinar os autovalores do propagador nos pólos do propagador.

Começamos nossa análise pelo pólo associado com a Eq. (4.24), para o qual $p^2 = -2p_0(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p})$. Sem perda de generalidade, adotamos o 4-momento $p^\mu = (p_0, 0, 0, p_3)$, com o qual temos $A = \kappa_3 p_3$, e $p_3^2 = p_0^2 + 2p_0 p_3 \kappa_3$. Neste pólo, a matriz do propagador é escrita como:

$$\Delta_{\alpha\beta} = R_1 \begin{pmatrix} -(2\kappa_3 p_3 p_0) & p_3^2 \kappa_1 & p_3^2 \kappa_2 & 0 \\ p_3^2 \kappa_1 & 0 & 0 & p_0 p_3 \kappa_1 \\ p_3^2 \kappa_2 & 0 & 0 & p_0 p_3 \kappa_2 \\ 0 & p_0 p_3 \kappa_1 & p_0 p_3 \kappa_2 & 2p_0 p_3 \kappa_3 \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

onde $R_1 = -[(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)p_3^2]^{-1}$ é o resíduo de D_1^{-1} efetuado no pólo $p^2 = -2p_0(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p})$. Com $\kappa_3 = 0$, os autovalores da matriz (4.40) são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -[(p_3^4 + p_0^2 p_3^2)(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)]^{1/2}$, $\lambda_4 = [(p_3^4 + p_0^2 p_3^2)(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)]^{1/2}$. Como um destes autovalores é positivo e o outro negativo, obtemos uma saturação negativa, $SP < 0$, que implica em violação de unitariedade.

Uma análise similar pode ser realizada para o pólo associado com a Eq. (4.25), $p^2 + 2p_0(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p}) = \boldsymbol{\kappa}^2 \mathbf{p}^2 - (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p})^2$. Seguindo a prescrição $p^\mu = (p_0, 0, 0, p_3)$, temos $p_0^2 = p_3^2(1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2) + 2p_0 p_3 \kappa_3$. A matriz do propagador, neste pólo, é escrita como:

$$\Delta_{\alpha\beta} = R_2 \begin{pmatrix} -p_0^2 + p_3^2 - 2p_0 p_3 \kappa_3 & p_3^2 \kappa_1 & p_3^2 \kappa_2 & 0 \\ p_3^2 \kappa_1 & (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)p_3^2 & 0 & p_0 p_3 \kappa_1 \\ p_3^2 \kappa_2 & 0 & (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)p_3^2 & p_0 p_3 \kappa_2 \\ 0 & p_0 p_3 \kappa_1 & p_0 p_3 \kappa_2 & p_0^2 - p_3^2 + 2p_0 p_3 \kappa_3 \end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

onde $R_2 = [(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)p_3^2]^{-1}$ é o resíduo de D_1^{-1} efetuado no pólo $p^2 = -2p_0(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p}) + \boldsymbol{\kappa}^2 \mathbf{p}^2 - (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{p})^2$. Com $\kappa_3 = 0$, os autovalores desta matriz são $\{0, p_3^2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2), \frac{1}{2}p_3^2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) - a, \frac{1}{2}p_3^2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) + a\}$, com

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{4(p_0^2 - p_3^2)^2 + 4p_3^4(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) + p_3^4(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^2 + 4p_0^2 p_3^2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)}. \quad (4.42)$$

Como um dos autovalores é negativo, a saturação pode resultar negativa, o que implica em violação de unitariedade também neste pólo. Como foi observado a violação de unitariedade para o *background* $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2, 0)$, tal violação deve também ocorrer para caso geral $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$.

É ainda instrutivo mencionar que as relações de dispersão (4.27, 4.32) podem ser obtidas diretamente das equações de Maxwell (2.28-2.31). Escrevendo os campos elétrico e magnético na representação de Fourier, $\mathbf{E}(r) = \tilde{E}(p) \exp(-ip \cdot r)$, $\mathbf{B}(r) = \tilde{B}(p) \exp(-ip \cdot r)$, na ausência de fontes, tais equações de Maxwell assumem a forma:

$$\mathbf{p} \cdot \tilde{E} + \boldsymbol{\kappa} \cdot (\mathbf{p} \times \tilde{B}) = 0, \quad (4.43)$$

$$\mathbf{p} \times \tilde{B} + p_0 (\tilde{B} \times \boldsymbol{\kappa}) + p_0 \tilde{E} + \mathbf{p} \times (\tilde{E} \times \boldsymbol{\kappa}) = 0, \quad (4.44)$$

$$\mathbf{p} \times \tilde{E} - p_0 \tilde{B} = 0, \quad \mathbf{p} \cdot \tilde{B} = 0. \quad (4.45)$$

Destas expressões, é obtida a seguinte equação para as componentes do campo elétrico:

$$M^{jl} \tilde{E}^l = 0, \quad (4.46)$$

onde

$$M^{jl} = [p^l p^j - p_0 p^j k^l - p_0 p^l k^j + (p^2 + 2p_0 p^i k^i)]. \quad (4.47)$$

Este operador pode ser representado como uma matriz 3×3 ,

$$M^{jl} = \begin{bmatrix} T + p_1^2 - 2p_0 p_1 k_1 & p_1 p_2 - p_0 p_1 k_2 - p_0 p_2 k_1 & p_1 p_3 - p_0 p_1 k_3 - p_0 p_3 k_1 \\ p_1 p_2 - p_0 p_1 k_2 - p_0 p_2 k_1 & T + p_2^2 - 2p_0 p_2 k_2 & p_2 p_3 - p_0 p_2 k_3 - p_0 p_3 k_2 \\ p_1 p_3 - p_0 p_1 k_3 - p_0 p_3 k_1 & p_2 p_3 - p_0 p_2 k_3 - p_0 p_3 k_2 & T + p_3^2 - 2p_0 p_3 k_3 \end{bmatrix}, \quad (4.48)$$

onde $T = p^2 + 2p_0(\mathbf{p} \cdot \mathbf{k})$, e cujo determinante é uma soma de 60 termos. Após uma simplificação cuidadosa, este determinante assume a forma:

$$\det M^{jl} = p_0^2 [p^4 + p^2(A^2 + 4Ap_0 - \mathbf{k}^2 \mathbf{p}^2) - 2Ap_0 \mathbf{k}^2 \mathbf{p}^2 + 2A^3 p_0 + 4A^2 p_0^2]. \quad (4.49)$$

A condição $\det M^{jl} = 0$, que proporciona soluções não triviais para a Eq. (4.46), fornece também as relações de dispersão deste modelo. Este cálculo confirma as relações de dispersão (4.24, 4.25).

4.4 O propagador de gauge do setor paridade-par

Consideramos agora o cálculo do propagador para a eletrodinâmica associada com o setor de paridade-par do tensor $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$. Neste caso, estamos interessados nas componentes não-birrefringentes do setor de paridade-par, localizadas na matriz $\tilde{\kappa}_{e-}$ e no elemento de traço.

A fim de isolar o setor de paridade-par, tomamos como nulo o setor de paridade-ímpar ($\kappa_{DB} = \kappa_{HE} = 0$). O setor de paridade-par é restringido pela condição ($\kappa_{DE} = -\kappa_{HB}$), que implica $\tilde{\kappa}_{e+} = 0$ e pela seguinte parametrização expressa em (3.2). Portanto, estamos interessados em calcular as componentes $(\kappa_{DE})^{jk} = -2W^{0j0k}$ e $(\kappa_{HB})^{jk} = \frac{1}{2}\epsilon^{jpk}\epsilon^{klm}W^{pqlm}$.

Os elementos não-nulos são dados como

$$2W^{0101} = 2W^{2323} = -n, \quad (4.50)$$

$$2W^{0202} = 2W^{3131} = -n, \quad (4.51)$$

$$2W^{0303} = 2W^{2121} = -n, \quad (4.52)$$

$$2W^{0102} = 2W^{2331} = -(\kappa_{DE})^{12}, \quad (4.53)$$

$$2W^{0103} = 2W^{2321} = -(\kappa_{DE})^{13}, \quad (4.54)$$

$$2W^{0203} = 2W^{3121} = -(\kappa_{DE})^{23}, \quad (4.55)$$

onde n é dado pela expressão (3.3), e os elementos $(\tilde{\kappa}_{e-})^{ii}$, da diagonal principal da matriz $\tilde{\kappa}_{e-}$, estão sendo tomados como nulos.

Por motivo de simplicidade, retemos apenas o elemento de traço [$(\kappa_{DE})^{12} = (\kappa_{DE})^{13} = (\kappa_{DE})^{23} = 0$, $n \neq 0$]. Este modelo é então representado pela seguinte lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(1+n)\mathbf{E}^2 - (1-n)\mathbf{B}^2] - \rho A_0 + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}. \quad (4.56)$$

Neste caso, a matriz 4.13 é escrita como

$$\tilde{S}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} n\mathbf{p}^2 & -np_1p_0 & -np_2p_0 & -np_3p_0 \\ -np_1p_0 & np_0^2 + np_2^2 + np_3^2 & -np_1p_2 & -np_3p_1 \\ -np_2p_0 & -np_1p_2 & np_0^2 + np_1^2 + np_3^2 & -np_3p_2 \\ -np_3p_0 & -np_3p_1 & -np_3p_2 & np_0^2 + np_1^2 + np_2^2 \end{pmatrix}, \quad (4.57)$$

onde o operador da matriz completa $\tilde{D}^{\mu\nu}$ é

$$\tilde{D}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} p^2 - n\mathbf{p}^2 & np_1p_0 & np_2p_0 & np_3p_0 \\ np_1p_0 & b - np_2^2 - np_3^2 & np_1p_2 & np_3p_1 \\ np_2p_0 & np_1p_2 & b - np_1^2 - np_3^2 & np_3p_2 \\ np_3p_0 & np_3p_1 & np_3p_2 & b - np_1^2 - np_2^2 \end{pmatrix}, \quad (4.58)$$

com $b = -p^2 - np_0^2$.

O determinante do propagador da matriz é uma soma de 35 diferentes termos que pode ser simplificada para a forma

$$\det \tilde{D}^{\mu\nu} = -(1+n)p^4[p_0^4(1+n)^2 - 2(1-n^2)p_0^2\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^4(1-n)^2], \quad (4.59)$$

$$\det \tilde{D}^{\mu\nu} = -(1+n)p^4[(1+n)p_0^2 - (1-n)\mathbf{p}^2]^2. \quad (4.60)$$

A matriz do propagador, escrita em primeira ordem em n , é dada então por

$$\Delta_{\alpha\beta} = \frac{1}{D_2} \begin{pmatrix} -(1+3n)p^2 - 5\mathbf{p}^2 & -np_0p_1 & -np_0p_2 & -np_0p_3 \\ -np_0p_1 & p^2 + 2np_0^2 + np_1^2 & np_1p_2 & np_1p_3 \\ -np_0p_2 & np_1p_2 & p^2 + 2np_0^2 + np_2^2 & np_2p_3 \\ -np_0p_3 & np_1p_3 & np_2p_3 & p^2 + 2np_0^2 + np_3^2 \end{pmatrix}, \quad (4.61)$$

onde

$$D_2 = (1+n)[(1+n)p_0^2 - (1-n)\mathbf{p}^2]^2, \quad (4.62)$$

$$D_2 = (1+n)^3[p_0^2 - \alpha\mathbf{p}^2]^2. \quad (4.63)$$

$$D_2 = (1+n)^3[p^2 + (1-\alpha)\mathbf{p}^2]^2. \quad (4.64)$$

onde $\alpha = (1-n)/(1+n)$. O fato deste propagador apresentar um pólo de segunda ordem em $p_0^2 = \alpha\mathbf{p}^2$ coloca a unitariedade desta teoria automaticamente sob suspeita. Entretanto, uma resposta categórica sobre a preservação ou violação da unitariedade deve ser obtida através da análise da matriz do resíduo do propagador.

4.4.1 Relações de dispersão e análise de consistência

As relações de dispersão neste caso são obtidas dos pólos do propagador, que são dados por $D_2 = 0$. Estas relações são importantes para analisar a estabilidade da teoria. Considerando a expressão (4.62), surge a seguinte relação:

$$p_0^2 - \alpha\mathbf{p}^2 = 0, \quad (4.65)$$

cujas raízes são

$$p_0 = \pm \sqrt{\frac{(1-n)}{(1+n)}} |\mathbf{p}|. \quad (4.66)$$

Essas relações de dispersão revelam um modelo sem birrefringência, uma vez que ambos os modos possuem a mesma velocidade de fase ($u_{ph} = p_0/|\mathbf{p}|$). A estabilidade deste modelo é assegurada, uma vez que o modo de energia p_{0+} é sempre positiva e p_{0-} é reinterpretado como representativo de uma anti-partícula de energia positiva. A causalidade desses modos parece ser violada, uma vez que a relação (4.66) fornece

$$p^2 = -\frac{2n}{(1-n)}p_0^2 < 0. \quad (4.67)$$

Contudo, a velocidade de grupo ($u_g = dp_0/d|\mathbf{p}|$),

$$u_g = \pm \sqrt{\frac{(1-n)}{(1+n)}}, \quad (4.68)$$

é sempre menor que 1 ($u_g < 1$), implicando num modo causal. Assim, concluímos que este modelo tem estabilidade e causalidade asseguradas.

Para a análise da unitariedade, começamos considerando a matriz do resíduo calculada nos pólos do propagador. Como proposta de cálculo, tomamos o 4-momento como $p = (p_0, 0, 0, p_3)$, o que conduz a $p_0 = \pm \sqrt{\frac{(1-n)}{(1+n)}}p_3$. A matriz do propagador é reescrita como:

$$\Delta_{\alpha\beta} = R \begin{pmatrix} -\frac{5+3n}{(1-n)}p_0^2 & 0 & 0 & -np_0p_3 \\ 0 & -\frac{2n^2}{(1-n)}p_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2n^2}{(1-n)}p_0^2 & 0 \\ -np_0p_3 & 0 & 0 & -\frac{2n^2}{(1-n)}p_0^2 + np_3^2 \end{pmatrix}, \quad (4.69)$$

onde $R = 0$ é o resíduo de D_2^{-1} nos pólos do propagador. Os autovalores da matriz do propagador são $\frac{2n^2}{(1-n)}p_0^2$. Como o resíduo R é nulo, a saturação SP resulta nula, o que é consistente com a preservação da unitariedade, a despeito do pólo ser de segunda ordem. Assim, afirmamos que o modelo representado pela lagrangeana (4.56) é estável, causal e unitário. Logo, um procedimento de quantização consistente pode ser realizado para este modelo.

Capítulo 5

Conclusão

O presente trabalho está ambientado no contexto do setor de gauge do MPE de Kostelecký & Colladay. No capítulo 1, revisamos o método das Funções de Green na resolução de equações de onda para os potenciais escalar e vetor no regime estático para a eletrodinâmica usual de Maxwell. Este método revela-se extremamente eficaz na busca por soluções de equações diferenciais inhomogêneas. No capítulo 2, foi analisada a eletrodinâmica de Maxwell na presença de termos violadores de Lorentz contidos no termo CPT-par ($W_{\alpha\nu\rho\varphi}F^{\alpha\nu}F^{\rho\varphi}$), especificamente os termos pertencentes ao setor paridade-ímpar deste tensor. Foram estudadas as soluções clássicas provenientes desta eletrodinâmica estendida por meio do método de Green. O objetivo era verificar a influência da violação da simetria de Lorentz sobre as soluções clássicas da eletrodinâmica de Maxwell. As soluções obtidas para os campos E e B revelaram que os setores elétrico e magnético são acoplados pelo vetor violador k . Foi observado que contribuições em primeira ordem no vetor k para o setor elétrico são induzidas pela corrente, enquanto que as contribuições em primeira ordem para o setor magnético são induzidas pelas cargas. Como a busca por um limite restritivo sobre o parâmetro de quebra deve envolver uma expressão de primeira ordem em k , consideramos um experimento baseado nas correções de primeira ordem sobre o campo magnético induzidas por cargas estáticas. Como resultado, foi obtido $\kappa < 10^{-16}$, um bom resultado para um experimento passível de realização em laboratório.

No capítulo 3, focamos sobre o setor de paridade-par do tensor $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$. Analisamos como os seis coeficientes não-birrefringentes deste setor alteraram as soluções clássicas da

eletrodinâmica usual de Maxwell. Neste contexto, observou-se que os termos de paridade-par não acoplam os setores elétrico e magnético (no mínimo no regime estacionário efetuado). Novamente, utilizou-se o método de Green para obtermos as soluções para as equações de onda. Por conseguinte, obteve-se os campos elétrico e magnético modificados proporcionais aos parâmetros VL em primeira ordem. Em seguida, realizou-se uma aproximação dipolar para os devidos campos e encontrou-se as soluções para fontes pontuais e para fontes extensas espacialmente. Por fim, apresentamos um experimento factível em ser realizado em laboratório, envolvendo o efeito de primeira ordem de VL sobre o potencial escalar. Como resultado, conseguimos obter um limite superior para o coeficiente VL bastante restritivo: $(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} < 2.9 \times 10^{-20}$. Este resultado está no patamar dos melhores "upper bounds" da literatura.

No capítulo 4, foi calculado o propagador da eletrodinâmica de Maxwell suplementada pelo termo CPT-par do SME. Analisou-se primeiramente os aspectos de causalidade e estabilidade para o setor de paridade-ímpar do tensor $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$, a partir das relações de dispersão provenientes do propagador para este setor. Conclui-se que a teoria é estável e não-causal. Em seguida, analisou-se o aspecto de unitariedade da teoria, a partir do resíduo de cada pólo associado. Verificou-se que ocorre violação da unitariedade para o referido setor. Uma análise similar foi realizada para o setor de paridade-par do tensor $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$, onde a partir do propagador obtido para este setor foi possível efetuar a análise de estabilidade, causalidade e unitariedade. Conclui-se que a teoria para este setor é estável, causal e unitária. Portanto, os métodos de quantização podem ser aplicados para este setor, ou seja, pode ser descrito satisfatoriamente por uma teoria quântica de campos.

Uma continuação interessante para este trabalho consiste no cálculo de soluções não-estacionárias (dependentes do tempo), que permitam descrever a evolução dos campos com o tempo. Para viabilizar este estudo, é necessário calcular a função de Green dependente do tempo. De posse desta, poderemos realizar cálculos de emissão de radiação por cargas aceleradas (tipo síncrotron) e cargas em MRU (Cerenkov). Sem dúvida, este caminho constitui uma interessante possibilidade teórica.

Apêndice A

Cálculo do potencial escalar gerado por uma esfera carregada

Neste Apêndice, demonstramos o resultado da Eq. (3.46). O ponto de partida é o potencial escalar da Eq. (3.28),

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ (1-n) \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} \int d^3\mathbf{r}' \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_j}{2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') \right\}. \quad (\text{A.1})$$

aqui reescrito na forma

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ (1-n) \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{(\tilde{\kappa}_{e-})^{ab}}{2} \partial_a I_b \right\}, \quad (\text{A.2})$$

onde

$$I_b = \int d^3\mathbf{r}' \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_b}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}'),$$

e foi utilizado:

$$\begin{aligned} (\tilde{\kappa}_{e-})^{ab} \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_a(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_b}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} &= -(\tilde{\kappa}_{e-})^{ab} \left\{ \partial_a \left[\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_b}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] - \frac{\delta_{ab}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right\}, \\ (\tilde{\kappa}_{e-})_{ii} &= \text{tr}(\tilde{\kappa}_{e-}) = 0. \end{aligned}$$

Partindo da densidade de carga para uma esfera de raio R ,

$$\rho(\mathbf{r}') = \frac{q}{4\pi R^2} \delta(r' - R), \quad (\text{A.3})$$

calculamos a sua transformada de Fourier,

$$\tilde{\rho}(\mathbf{p}) = \int d^3\mathbf{r}' e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}'} \rho(\mathbf{r}') = \frac{q}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta' \sin\theta' \int_0^\infty dr' r'^2 e^{ipr' \cos\theta'} \delta(r' - R),$$

que resulta igual a:

$$\tilde{\rho}(\mathbf{p}) = q \frac{\sin(pR)}{pR}. \quad (\text{A.4})$$

Para calcular a integral I_b , usamos o resultado da integral (2.52), aqui reescrito na forma:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{\mathbf{p}^2}. \quad (\text{A.5})$$

Com isto, obtemos:

$$\begin{aligned} I_b &= 4\pi \int d^3\mathbf{r}' \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{\mathbf{p}^2} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')_b \rho(\mathbf{r}'), \\ I_b &= 4\pi i \frac{q}{R} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{p}^2} \frac{\partial}{\partial p_b} \left[e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \frac{\sin(pR)}{p} \right]. \end{aligned}$$

Derivando em relação a p_b , temos:

$$\begin{aligned} I_b &= 4\pi \frac{q}{R} \left\{ r_b \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{\mathbf{p}^2} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \frac{\sin(pR)}{p} \right) + \partial_b \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{\mathbf{p}^2} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \frac{\sin(pR)}{p^3} \right) \right. \\ &\quad \left. - R \partial_b \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{\mathbf{p}^2} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \frac{\cos(pR)}{p^2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Resolvendo as três integrais, resulta:

$$I_b = \int d^3\mathbf{r}' \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_b}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}') = \frac{q}{r} r_b - \frac{qR^2}{3r^3} r_b,$$

de modo que:

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ (1-n) \frac{q}{r} - \frac{(\tilde{\kappa}_{e-})^{ab}}{2} \left[\frac{\delta_{ab}}{r} - \frac{r_a r_b}{r^3} - R^2 \frac{\delta_{ab}}{3r^3} + R^2 \frac{r_a r_b}{r^5} \right] \right\}, \quad (\text{A.6})$$

Lembrando-se que $(\tilde{\kappa}_{e-})_{ab} \delta_{ab} = \text{tr}(\tilde{\kappa}_{e-}) = 0$, o potencial gerado pela esfera de raio R assume a forma:

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ (1-n) \frac{q}{r} + \frac{(\tilde{\kappa}_{e-})^{ab}}{2} \left[\frac{r_a r_b (r^2 - R^2)}{r^5} \right] \right\}. \quad (\text{A.7})$$

Referências Bibliográficas

- [1] H. Müller, C. Braxmaier, S. Herrmann, A. Peters, and C. Lämmerzahl, *Phys. Rev. D* **67**, 056006 (2003); H. Müller, S. Herrmann, A. Saenz, A. Peters, and C. Lämmerzahl, *Phys. Rev. D* **68**, 116006 (2003); M.A. Humphrey, D.F. Phillips, E.M.Mattison, R.F.C.Vessot, R.E.Stoner, and R.L.Walsworth, *Phys. Rev. A* **68**, 063807 (2003); D. Bear, R.E. Stoner, R.L.Walsworth, V. A. Kostelecky, and C. D. Lane, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5038 (2000); Erratum-ibid. 89 (2002) 209902; D. F. Phillips, M. A. Humphrey, E. M. Mattison, R. E. Stoner, R. F C. Vessot, R. L. Walsworth, *Phys. Rev. D* **63**, 111101(R) (2001); H. Müller, *Phys. Rev. D* **71**, 045004 (2005); N. Russell, *Phys. Scripta* **72**, C38 (2005).
- [2] H. Müller, S. Herrmann, C. Braxmaier, S. Schiller, and A. Peters, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 020401 (2003); H. Müller, P.L. Stanwix, M. E. Tobar, E. Ivanov, P. Wolf, S. Herrmann, A. Senger, E. Kovalchuk, and A. Peters, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 050401 (2007).
- [3] J.A. Lipa, J.A. Nissen, S.Wang, D. A. Stricker, D. Avaloff, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 060403 (2003); P. Wolf, S. Bize, A. Clairon, G. Santarelli, M. E. Tobar and A. N. Luiten, *Phys. Rev. D* **70**, 051902(R) (2004); P. L. Stanwix, M.E. Tobar, P. Wolf, C.R. Locke, and E. N. Ivanov, *Phys. Rev. D* **74**, 081101(R) (2006).
- [4] H. Belich, T. Costa Soares, M. A. Santos, M. T.D. Orlando, " *Violação da simetria de Lorentz*", *Revista Brasileira de Ensino de Física* **29**, 57 (2007).
- [5] R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and N. Russell, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1432 (1997); R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and N. Russell, *Phys. Rev. D* **57**, 3932 (1998); R. Bluhm, V.A. Kostelecky, C. D. Lane, and N. Russell, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 090801 (2002); R. Bluhm and V.A. Kostelecky, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1381 (2000); R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and C. D. Lane, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1098 (2000); R. Bluhm, V.A. Kostelecky, and N. Russell,

- Phys. Rev. Lett.* **82**, 2254 (1999); V.A. Kostelecky and C. D. Lane, *Phys. Rev. D* **60**, 116010 (1999).
- [6] A. P. Baeta Scarpelli and J. A. Helayel-Neto, *Phys. Rev. D* **73**, 105020 (2006); N.M. Barraz, Jr., J.M. Fonseca, W.A. Moura-Melo, and J.A. Helayel-Neto, *Phys. Rev. D* **76**, 027701 (2007); M.N. Barreto, D. Bazeia, and R. Menezes, *Phys. Rev. D* **73**, 065015 (2006); J.W. Moffat, *Int. J. Mod. Phys. D* **12** 1279 (2003); F. W. Stecker and S.T. Scully, *Astropart. Phys.* **23**, 203 (2005); H. Belich *et al.*, *Phys. Rev. D* **68**, 065030 (2003); E. O. Iltan, *Eur. Phys. J. C* **40**, 269 (2005); *Mod. Phys. Lett.* **A19**, 327 (2004); *JHEP* 0306 (2003) 016; T. Mariz, J.R. Nascimento, A.Yu. Petrov, L.Y. Santos, A.J. da Silva, *Phys. Lett.* **B 661**, 312 (2008); M. Gomes, J.R. Nascimento, E. Passos, A.Yu. Petrov, A.J. da Silva, *Phys.Rev. D* **76**, 047701 (2007); A.F. Ferrari, M. Gomes, A.J. da Silva, J.R. Nascimento, E. Passos, A.Yu. Petrov., *Phys. Lett.* **B 652**, 174 (2007); O. Bertolami and D.F. Mota, *Phys. Lett.* **B 455**, 96 (1999).
- [7] A. Einstein, *Ann. der Physik* **17**, 981 (1905).
- [8] T.D. Lee and C.N. Yang, *Phys. Rev.* **104**, 254 (1956)
- [9] K. Moriyasu, *An Elementary Primer for Gauge Theory*, World Scientific Publishing Co Pte Ltd., Cingapore, 1983.
- [10] S.M. Carroll, G.B. Field and R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **41**, 1231 (1990).
- [11] D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev. D* **55**, 6760 (1997); D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev. D* **58**, 116002 (1998); S. R. Coleman and S. L. Glashow, *Phys. Rev. D* **59**, 116008 (1999).
- [12] V. A. Kostelecky and S. Samuel, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 224 (1989); *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1811 (1991); *Phys. Rev. D* **39**, 683 (1989); *Phys. Rev. D* **40**, 1886 (1989), V. A. Kostelecky and R. Potting, *Nucl. Phys. B* **359**, 545 (1991); *Phys. Lett. B* **381**, 89 (1996); V. A. Kostelecky and R. Potting, *Phys. Rev. D* **51**, 3923 (1995).
- [13] Green, George, *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of the Electricity and Magnetism*, arXiv:0807.0088v1.
- [14] Duffy, Dean G., *Green's Functions with Applications*, Chapman & Hall/CRC, 2001.

- [15] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc, 3^a Edição, 1999.
- [16] R. Casana, M.M. Ferreira Jr, C. E. H. Santos, *Phys. Rev. D* **78**, 025030 (2008).
- [17] R. Casana, M.M. Ferreira Jr, C. E. H. Santos, *Phys. Rev. D* **78**, 105014 (2008).
- [18] R. Casana, M.M. Ferreira Jr, A. R. Gomes, Paulo R. D. Pinheiro, arXiv:0812.1813, "Stationary solutions for the parity-even sector of the CPT-even and Lorentz-covariance-violating term of the standard model extension", trabalho aceito para publicação no EPJC (European Physical Journal C).
- [19] V. A. Kostelecky and M. Mewes, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 251304 (2001); V. A. Kostelecky and M. Mewes, *Phys. Rev. D* **66**, 056005 (2002).
- [20] V. A. Kostelecky and M. Mewes, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 140401 (2006).
- [21] A. Kobakhidze and B.H.J. McKellar, *Phys. Rev. D* **76**, 093004 (2007).
- [22] C. Kaufhold and F. R. Klinkhamer, *Phys. Rev. D* **76**, 025024 (2007).
- [23] F.R. Klinkhamer and M. Risse, *Phys. Rev. D* **77**, 016002 (2008); F.R. Klinkhamer and M. Risse, *Phys. Rev. D* **77**, 117901 (A) (2008).
- [24] F.R. Klinkhamer and M. Schreck, *Phys. Rev. D* **78**, 085026 (2008).
- [25] Q. G. Bailey and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev. D* **70**, 076006 (2004).
- [26] R. Montemayor and L.F. Urrutia, *Phys. Rev. D* **72**, 045018 (2005); X. Xue and J. Wu, *Eur. Phys. J. C* **48**, 257 (2006); A.A. Andrianov and R. Soldati, *Phys. Rev. D* **51**, 5961 (1995); *Phys. Lett. B* **435**, 449 (1998); A.A. Andrianov, R. Soldati and L. Sorbo, *Phys. Rev. D* **59**, 025002 (1998); M. B. Cantcheff, *Eur. Phys. J. C* **46**, 247 (2006); M. B. Cantcheff, C.F.L. Godinho, A.P. Baeta Scarpelli, J.A. Helayël-Neto, *Phys. Rev. D* **68**, 065025 (2003).
- [27] C. Adam and F. R. Klinkhamer, *Nucl. Phys. B* **607**, 247 (2001); *Nucl. Phys. B* **657**, 214 (2003); A. P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo, J.A. Helayel-Neto, *Phys. Rev. D* **67**, 085021 (2003).

- [28] H. Belich, M. M. Ferreira Jr, J.A. Helayel-Neto, M. T. D. Orlando, *Phys. Rev. D* **68**, 025005 (2003); H. Belich Jr., T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr., J.A. Helayel-Neto, *Eur. Phys. J. C* **42**, 127 (2005).
- [29] R. Lehnert and R. Potting, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 110402 (2004); R. Lehnert and R. Potting, *Phys. Rev. D* **70**, 125010 (2004); B. Altschul, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 041603 (2007); *Phys. Rev. D* **75**, 105003 (2007); *Nucl. Phys. B* **796**, 262 (2008).
- [30] R. Jackiw and V. A. Kostelecký, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3572 (1999); J. M. Chung and B. K. Chung *Phys. Rev. D* **63**, 105015 (2001); J.M. Chung, *Phys.Rev. D* **60**, 127901 (1999); G. Bonneau, *Nucl.Phys. B* **593**, 398 (2001); M. Perez-Victoria, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2518 (1999); M. Perez-Victoria, *JHEP* **0104**, 032 (2001); O.A. Battistel and G. Dallabona, *Nucl. Phys. B* **610**, 316 (2001); O.A. Battistel and G. Dallabona, *J. Phys. G* **28**, L23 (2002); *J. Phys. G* **27**, L53 (2001); A. P. B. Scarpelli, M. Sampaio, M. C. Nemes, and B. Hiller, *Phys. Rev. D* **64**, 046013 (2001); T. Mariz, J.R. Nascimento, E. Passos, R.F. Ribeiro and F.A. Brito, *JHEP* **0510** (2005) 019.
- [31] J.M. Fonseca, A.H. Gomes, W.A.Moura-Melo, *Phys. Let. B* **671**, 280 (2009); R. Casana, M.M. Ferreira Jr., J. S. Rodrigues, *Phys. Rev. D* **78**, 125013 (2008).

Stationary solutions for the parity-even sector of the CPT-even and Lorentz-covariance-violating term of the standard model extension

Rodolfo Casana¹, Manoel M. Ferreira Jr.^{1,a}, A.R. Gomes², Paulo R.D. Pinheiro¹

¹Departamento de Física, Universidade Federal do Maranhão (UFMA), Campus Universitário do Bacanga, São Luís, MA, 65085-580, Brazil

²Departamento de Ciências Exatas, Centro Federal de Educação Tecnológica do Maranhão, São Luís, Maranhão, 65025-001, Brazil

Received: 6 February 2009 / Revised: 19 April 2009
 © Springer-Verlag / Società Italiana di Fisica 2009

Abstract In this work, we focus on some properties of the parity-even sector of the CPT-even electrodynamics of the standard model extension. We analyze how the six non-birefringent terms belonging to this sector modify the static and stationary classical solutions of the usual Maxwell theory. We observe that the parity-even terms do not couple the electric and magnetic sectors (at least in the stationary regime). The Green's method is used to obtain solutions for the field strengths E and B at first order in the Lorentz-covariance-violating parameters. Explicit solutions are attained for point-like and spatially extended sources, for which a dipolar expansion is achieved. Finally, an Earth-based experiment is presented that can lead (in principle) to an upper bound on the anisotropic coefficients as stringent as $(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} < 2.9 \times 10^{-20}$.

PACS 11.30.Cp · 12.60.-i · 41.20.-q · 41.20.Cv

1 Introduction

In recent years, investigations concerning Lorentz symmetry violation have been undertaken mainly in the context of the standard model extension (SME) developed by Colladay and Kostelecky [1–3], which incorporates Lorentz-invariance-violating (LIV) terms in all sectors of the usual standard model of the fundamental interactions. The Abelian or electromagnetic sector of the SME is composed of a CPT-even and a CPT-odd part. The CPT-odd sector is represented by the Carroll–Field–Jackiw term, $\varepsilon_{\beta\alpha\rho\varphi} V^\beta A^\alpha F^{\rho\varphi}$, whose properties were first examined in [4]. The investigations on this electrodynamics have been performed in a broad perspective, addressing aspects as diverse as the con-

sistency and quantization of the model [5–9], radiative corrections [10–25], classical solutions [26–28], Cerenkov radiation [29–32], cosmic background radiation [33, 34], and other features [35–39]. More recently, the CPT-even sector, represented by the term $W_{\alpha\nu\rho\varphi} F^{\alpha\nu} F^{\rho\varphi}$, has been investigated as well, embracing the study of small deviations of the Maxwell electrodynamics stemming from this term and some attempts of imposing upper bounds on the LIV parameters [40–51].

The Lagrangian density of the CPT-even electrodynamics of the Standard Model Extension has the form

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\nu} F^{\alpha\nu} - \frac{1}{4} W_{\alpha\nu\rho\varphi} F^{\alpha\nu} F^{\rho\varphi} - J_\alpha A^\alpha, \quad (1)$$

where the background tensor $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$ has the same symmetries as the Riemann tensor [$W_{\alpha\nu\rho\varphi} = -W_{\nu\alpha\rho\varphi}$, $W_{\alpha\nu\rho\varphi} = -W_{\alpha\nu\varphi\rho}$, $W_{\alpha\nu\rho\varphi} = W_{\rho\varphi\alpha\nu}$] and a double null trace, $W^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta} = 0$, implying 19 components. This tensor $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$ can be written in terms of four 3×3 matrices κ_{DE} , κ_{DB} , κ_{HE} , κ_{HB} , defined in [45–47] as

$$\begin{aligned} (\kappa_{DE})^{jk} &= -2W^{0j0k}, & (\kappa_{HB})^{jk} &= \frac{1}{2}\epsilon^{j\rho\varphi} \epsilon^{klm} W^{\rho\varphi lm}, \\ (\kappa_{DB})^{jk} &= -(\kappa_{HE})^{kj} = \epsilon^{kpq} W^{0j\rho q}. \end{aligned} \quad (2)$$

The matrices κ_{DE} , κ_{HB} contain the parity-even components and possess together eleven independent components, while κ_{DB} , κ_{HE} possess together eight components and describe the parity-odd sector of $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$. Four tilde matrices and one trace element can be written as suitable combinations of κ_{DE} , κ_{DB} , κ_{HE} , κ_{HB} :

$$\begin{aligned} (\tilde{\kappa}_{e+})^{jk} &= \frac{1}{2}(\kappa_{DE} + \kappa_{HB})^{jk}, \\ (\tilde{\kappa}_{e-})^{jk} &= \frac{1}{2}(\kappa_{DE} - \kappa_{HB})^{jk} - \frac{1}{3}\delta^{jk}(\kappa_{DE})^{ii}, \end{aligned} \quad (3)$$

^ae-mail: manojr07@ibest.com.br

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\kappa}_{o+})^{jk} &= \frac{1}{2}(\kappa_{DB} + \kappa_{HE})^{jk}, \\
 (\tilde{\kappa}_{o-})^{jk} &= \frac{1}{2}(\kappa_{DB} - \kappa_{HE})^{jk}, \quad \tilde{\kappa}_{tr} = \frac{1}{3}(\kappa_{DE})^{ii}.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

From the eleven independent components of the matrices $\tilde{\kappa}_{e+}, \tilde{\kappa}_{e-}$, the five elements enclosed in $\tilde{\kappa}_{e+}$ are constrained by birefringence to the level of 1 part in 10^{32} (see [45–47]), the remaining six non-birefringent ones (the trace element and the five components of the matrix $\tilde{\kappa}_{e-}$) to be constrained by other methods. From the eight elements of the parity-odd sector, five (contained in the matrix $\tilde{\kappa}_{o-}$) are tightly bounded by birefringence, there remaining only three components (belonging to $\tilde{\kappa}_{o+}$), which were parameterized as the κ vector [48], written as $\kappa^j = \frac{1}{2}\epsilon^{j pq}(\kappa_{DB})^{pq}$. In some recent papers [49, 50], the absence of Cerenkov radiation from ultrahigh-energy cosmic rays (UHECRs) has been used to state bounds at the level of 1 part in 10^{18} on the nine non-birefringent terms of $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$, belonging both to the parity-even and parity-odd sectors.

In [41], there was performed an analysis focused on the three non-birefringent components (κ^j) of the parity-odd sector of W (the parity-even components were taken as null in order to isolate the parity-odd sector physics). The stationary classical solutions for the Maxwell electrodynamics modified by these three LIV coefficients were properly evaluated by means of the Green’s method. With these solutions was described a device able to yield a nice upper bound, $\kappa^j < 10^{-16}$, in the context of an Earth-based experiment.

The aim of the present work is to study the stationary aspects of the classical electrodynamics stemming from the parity-even sector of the tensor $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$. For that, we use the following parameterization: $\kappa_{DE} = -\kappa_{HB}$, and we consider as null the parity-odd sector. The goal is to determine how the six non-birefringent parity-even components modify the classical and stationary solutions for Maxwell electromagnetism. Certainly, the idea is also to use the results obtained to properly constrain the magnitude of the LIV coefficients.

This work is organized as follows. In Sect. 2, we write the wave equations and modified Maxwell equations and apply the Green method in order to obtain the required stationary solutions. In Sect. 3, we present our final remarks and describe a measurement device able to yield an upper bound on the LIV parameter as stringent as $(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} < 2.9 \times 10^{-20}$.

2 Wave equations and stationary classical solutions

Here, the focus is on the classical properties of the parity-even part of the tensor W , particularly on those produced by the six non-birefringent components (located in the matrix $\tilde{\kappa}_{e-}$ plus the trace element $\tilde{\kappa}_{tr}$). Hence, we take the parity-odd sector as null ($\kappa_{DB} = \kappa_{HE} = 0$) to isolate the physics

of the even sector. Further, we adopt the following parameterization: $(\kappa_{DE}) = -(\kappa_{HB})$, which implies $(\tilde{\kappa}_{e+}) = 0$, by considering the stringent bound imposed by birefringence data [45–47]. Moreover, it implies the following relation for the non-birefringent components:

$$(\tilde{\kappa}_{e-})^{jk} = (\kappa_{DE})^{jk} - n\delta^{jk}, \quad n = \frac{1}{3}\delta^{jk} \text{Tr}(\kappa_{DE}).
 \tag{5}$$

In order to evaluate the classical solutions of this model, we write the wave equation for the four-potential

$$\square A^\alpha - 2W^{\alpha\nu\rho\lambda}\partial_\nu\partial_\rho A_\lambda = J^\alpha,
 \tag{6}$$

which yields two differential equations, one for the scalar potential, and one for the vector potential,

$$\begin{aligned}
 [(1+n)\partial_t^2 - (1+n)\nabla^2 - (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij}\partial_i\partial_j]A_0 \\
 + (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij}\partial_i\partial_t A_j = \rho,
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 [(1+n)\partial_t^2 - (1-n)\nabla^2]A_i - 2n\partial_t\partial_i A_0 - (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij}\partial_t E_j \\
 - \epsilon_{ipj}(\tilde{\kappa}_{e-})^{jl}\partial_p B_l = j_i,
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

where we have used $E_j = -F_{0j}$, $B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ipj}F_{pj}$, $(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} = (\tilde{\kappa}_{e-})_{ij}$. At the stationary regime, such equations are read

$$[(1+n)\nabla^2 + (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij}\partial_i\partial_j]A_0 = -\rho,
 \tag{9}$$

$$[(1-n)\nabla^2]A_i + \epsilon_{ipj}(\tilde{\kappa}_{e-})^{jl}\partial_p B_l = -j_i.
 \tag{10}$$

These equations reveal that the electric and magnetic sectors are decoupled (in the stationary regime) in contrast with the electrodynamics of the parity-odd sector, in which these sectors are entirely entwined (see [41]). Applying the differential operator $\epsilon_{abi}\partial_b$ to (10), we obtain the following differential equation for the magnetic field:

$$\begin{aligned}
 [((1-n)\delta_{al} - (\tilde{\kappa}_{e-})^{al})\nabla^2 + (\tilde{\kappa}_{e-})^{jl}\partial_a\partial_j]B_l \\
 = -(\nabla \times j)_a.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

While the homogeneous Maxwell equations remain unmodified ($\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$), the inhomogeneous ones (Gauss and Ampere law) are altered, taking the form

$$(1+n)\nabla \cdot \mathbf{E} - (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij}\partial_i E_j = \rho,
 \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 (1+n)\partial_t E_i - (1-n)(\nabla \times \mathbf{B})_i + \epsilon_{ijr}(\tilde{\kappa}_{e-})^{rl}\partial_j B_l \\
 + (\tilde{\kappa}_{e-})^{iq}\partial_t E_q = -j_i.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

In the stationary regime, the latter equation provides

$$(1-n)(\nabla \times \mathbf{B})_i - \epsilon_{ijr}(\tilde{\kappa}_{e-})^{rl}\partial_j B_l = j_i,
 \tag{14}$$

which under the action of the operator curl operator ($\epsilon_{abi}\partial_b$) yields the same expression as (11).

2.1 The Green’s function for the scalar potential

The solution for the scalar potential may be obtained by the Green’s method. The Green’s function for (9) fulfills

$$[(1+n)\nabla^2 + (\tilde{\kappa}_{e-})_{ij}\partial_i\partial_j]G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \quad (15)$$

and the scalar potential is given as

$$A_0(\mathbf{r}) = -\int G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'. \quad (16)$$

The Green’s function in Fourier space is given as $G(r-r') = (2\pi)^{-3} \int d^3p \tilde{G}(\mathbf{p}) \exp[-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]$, so that we obtain

$$\tilde{G}(\mathbf{p}) \simeq -\frac{1}{\mathbf{p}^2} \left[1 - n - (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} \frac{p_i p_j}{\mathbf{p}^2} \right], \quad (17)$$

at first order in the LIV parameters. Remembering that the LIV coefficients are small, we used $[1+n+(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} \times p_i p_j / \mathbf{p}^2]^{-1} \simeq [1-n-(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} p_i p_j / \mathbf{p}^2]$. Carrying out the inverse Fourier transform, the Green’s function takes the following form:

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \left\{ (1-n) \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} (\mathbf{r}-\mathbf{r}')_i (\mathbf{r}-\mathbf{r}')_j}{2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right\}. \quad (18)$$

It presents a genuine Coulomb contribution screened by the factor $(1-n)$ and a non-Coulomb contribution related to the LIV non-isotropic coefficients $(\tilde{\kappa}_{e-})_{ij}$. The overall behavior, r^{-1} , remains the same as happens in the Maxwell electrodynamics.

Using the Green function (18) and (16), the scalar potential due to a general charge distribution $[\rho(\mathbf{r}')]$ is

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ (1-n) \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} \int d^3\mathbf{r}' \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_i (\mathbf{r}-\mathbf{r}')_j}{2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') \right\}, \quad (19)$$

which implies the following electric field strength:

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ (1-n) \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} - (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + 3(\tilde{\kappa}_{e-})^{lj} \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_l (\mathbf{r}-\mathbf{r}')_j (\mathbf{r}-\mathbf{r}')^i}{2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5} \right\}. \quad (20)$$

With this expression, we may immediately evaluate the scalar potential and electric field strength for a point-like charge at rest $[\rho(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r}')]$, yielding

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi} \left\{ (1-n) \frac{1}{r} + (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} \frac{r_i r_j}{2r^3} \right\}, \quad (21)$$

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi} \left\{ \left(1-n + \frac{3}{2} (\tilde{\kappa}_{e-})^{lj} \frac{r_l r_j}{r^2} \right) \frac{r^i}{r^3} - (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} \frac{r_j}{r^3} \right\}. \quad (22)$$

The scalar potential and the electric field present a genuine Coulomb contribution, with the screening factor $(1-n)$, and a non-Coulomb contribution related to the LIV coefficient $(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij}$. This latter term leads to variations of the scalar potential and electric field along a circular path around the point-like charge. Such an effect can be used to impose an upper bound on the LIV parameters, as will be described in Sect. 3.

From the expressions (19) and (20), for an arbitrary charge distribution, we express the scalar potential and the electric field in the dipolar approximation ($|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1} = r^{-1} + \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'/r^3$):

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ (1-n) \left[\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{P}_e}{r^3} \right] + \frac{(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij}}{2r^3} \times \left[r_i r_j \left(q + 3 \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{P}_e}{r^2} \right) - r_i P_{ej} - r_j P_{ei} \right] \right\}, \quad (23)$$

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ (1-n) \left[\frac{q}{r^3} r^i - \left(\frac{P_e^i}{r^3} - \frac{3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{P}_e)}{r^5} r^i \right) \right] - (\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} \frac{1}{r^3} \left(q r_j - P_{ej} + 3 \frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{P}_e)}{r^2} r_j \right) + 3(\tilde{\kappa}_{e-})^{lj} \frac{r_l r_j}{2r^5} \left[q r^i - P_e^i + 5 \frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{P}_e)}{r^2} r^i \right] - 3(\tilde{\kappa}_{e-})^{lj} \frac{r_l P_{ej}}{r^5} r^i \right\}, \quad (24)$$

where $q = \int \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$ and $\mathbf{P}_e = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$ is the electric dipole moment. The LIV terms in $(\tilde{\kappa}_{e-})^{lj}$ break the radial symmetry, giving a non-Coulomb behavior to the static solutions. Despite the large number of terms in these solutions, we verify that the electric field preserves the r^{-2} and the r^{-3} decaying behaviors for the monopole and dipole moments, respectively, as occurs in the pure Maxwell electrodynamics. Obviously, it is a consequence of the dimensionless character of the LIV coefficients.

2.2 The Green’s function for the magnetic field

Now, we search for an explicit solution for the magnetic field. The Green’s function for the magnetic field equation

of motion (11) is written as

$$\begin{aligned} & [((1-n)\delta_{al} - (\tilde{\kappa}_{e-})^{al})\nabla^2 + (\tilde{\kappa}_{e-})^{jl}\partial_a\partial_j]G_{lb}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\ & = \delta_{ab}\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \end{aligned} \tag{25}$$

Using the Fourier representation and having much care in the tensor inversion procedure, we obtain in momentum space

$$\tilde{G}_{ab}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{\mathbf{p}^2} \left[(1+n)\delta_{ab} + (\tilde{\kappa}_{e-})_{ab} - (\tilde{\kappa}_{e-})_{cb} \frac{p_a p_c}{\mathbf{p}^2} \right]. \tag{26}$$

Performing the inverse Fourier transformation, we attain the following expression:

$$\begin{aligned} G_{ab}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = & -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left\{ (1+n)\delta_{ab} + \frac{(\tilde{\kappa}_{e-})_{ab}}{2} \right. \\ & \left. + \frac{(\tilde{\kappa}_{e-})_{cb}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_a(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_c}{2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \right\}, \end{aligned} \tag{27}$$

with which the magnetic field is then written as

$$B^i(\mathbf{r}) = -\int d^3\mathbf{r}' G_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')(\nabla' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}'))^j. \tag{28}$$

It leads to the explicit solution:

$$\begin{aligned} B^i(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[(1+n)\delta_{ib} + \frac{1}{2}(\tilde{\kappa}_{e-})_{ib} \right] \right. \\ & \times \int d^3\mathbf{r}' \frac{(\nabla' \times j(\mathbf{r}'))^b}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{(\tilde{\kappa}_{e-})^{lj}}{2} \\ & \left. \times \int d^3\mathbf{r}' \left[\frac{(\nabla' \times j(\mathbf{r}'))^l}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r}-\mathbf{r}')_j (\mathbf{r}-\mathbf{r}')^i \right] \right\}. \end{aligned} \tag{29}$$

After a certain algebraic effort, a dipolar expansion for the magnetic field is achieved as well, yielding

$$\begin{aligned} B^i(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi} \left\{ (1+n) \left(-\frac{m^i}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})}{r^5} r^i \right) - (\tilde{\kappa}_{e-})^{ib} \frac{\mathbf{m}_b}{r^3} \right. \\ & \left. - (\tilde{\kappa}_{e-})_{pb} r_p r_b \left[\frac{3}{2} \frac{m^i}{r^5} - \frac{15}{2} \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})}{r^7} r^i \right] \right\}, \end{aligned} \tag{30}$$

where we have considered a localized and divergenceless current density distribution \mathbf{J} , and $\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$ is the magnetic dipole moment. In (30) the first term inside the parentheses is the usual Maxwell contribution, just corrected by the $(1+n)$ factor. The terms that are proportional to the LIV coefficients, $(\tilde{\kappa}_{e-})^{ib}$, ascribe to the solution a directional dependence or anisotropic character. In principle, such a directional dependence could be used to impose an upper bound on the LIV parameters. In Sect. 3, we show that the attained bound is not as restrictive as desired.

3 Final remarks

We should now compare these parity-even stationary solutions with the parity-odd ones derived in [41]. At the stationary regime, the main difference is that now the electric and magnetic sectors are not coupled by the LIV tensor anymore. In the parity-odd case, a stationary current is able to produce an electric field as much as a static charge can generate a magnetic field. As such an interconnection does not appear in the present case, the manifestation of pure LIV electromagnetic effects (aside from Maxwell ones), as the production of magnetic field by a static point-like charge (see [41]), are absent. Now, the LIV effects appear as small corrections for the usual Maxwell's electric and magnetic fields. Yet, the LIV effects can still be identified by means of suitable devices, as is discussed below. Apart from this difference, the solutions of the parity-even and parity-odd sectors possess some similarities. Indeed, the electric field for a point-like charge (in both sectors) exhibits an asymptotic behavior as r^{-2} , while a stationary current provides a magnetic field whose dipolar expansion is proportional to mr^{-3} . This is ascribed to the dimensionless character of the tensor W .

The attained magnetic field solution does not lead to good upper bounds on the magnitude of the parameters n and $(\tilde{\kappa}_{e-})_{ib}$ when we take as reference the Earth's magnetic field. In fact, proceeding in a similar way as in [4], we assert that the LIV tensor must not imply a magnetic field contribution larger than 10^{-4} G (otherwise it would be detected). From (30), we observe that the LIV terms are always proportional to (m/r^3) . Assuming that m represents the Earth's magnetic dipole, and R_\oplus the Earth's radius, it holds the following ratio $m/R_\oplus^3 = 0.3$ G (see [4]). This procedure, however, implies a non-restrictive bound: $n \leq 10^{-4}$.

A much better bound for the parameters $(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij}$ can be attained from the expression for the scalar potential. The idea is to evaluate the scalar potential generated by a charged sphere in different outer points located at the same distance from the center of the sphere, observing the difference of potential induced by the non-Coulomb LIV term. The starting point is the expression for the potential generated by a conducting sphere of radius R and charge q (uniformly distributed over its surface), which can be achieved by replacing the charge density for a sphere, $\rho(\mathbf{r}') = q\delta(r'-R)/(4\pi R^2)$, in (19). Using Fourier integrations (see the Appendix), the potential is (for $r > R$)

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ (1-n) \frac{q}{r} + \frac{(\tilde{\kappa}_{e-})^{ab}}{2} \left[\frac{r_a r_b (r^2 - R^2)}{r^5} \right] \right\}. \tag{31}$$

We see that the term in $(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij}$ breaks the radial symmetry of the potential, implying potential variations along a circular path around the center. We now expand the term

$(\tilde{\kappa}_{e-})^{ab} r_a r_b$ in the form

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\kappa}_{e-})^{ab} r_a r_b &= (\tilde{\kappa}_{e-})^{11} [(r_1)^2 - (r_3)^2] \\
 &+ (\tilde{\kappa}_{e-})^{22} [(r_2)^2 - (r_3)^2] \\
 &+ 2(\tilde{\kappa}_{e-})^{12} r_1 r_2 + 2(\tilde{\kappa}_{e-})^{13} r_1 r_3 \\
 &+ 2(\tilde{\kappa}_{e-})^{23} r_2 r_3,
 \end{aligned}$$

where we have used the traceless matrix

$$(\tilde{\kappa}_{e-}) = \begin{pmatrix} (\tilde{\kappa}_{e-})_{11} & (\tilde{\kappa}_{e-})_{12} & (\tilde{\kappa}_{e-})_{13} \\ (\tilde{\kappa}_{e-})_{12} & (\tilde{\kappa}_{e-})_{22} & (\tilde{\kappa}_{e-})_{23} \\ (\tilde{\kappa}_{e-})_{13} & (\tilde{\kappa}_{e-})_{23} & -(\tilde{\kappa}_{e-})_{11} - (\tilde{\kappa}_{e-})_{22} \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Then, we can conceive of an experiment to measure the electrostatic potential generated by a 1 C charged sphere of radius R (maintained in vacuum) in two distinct outer points, A and B, located at a circle of radius $r > R$ on the $x - y$ plane. We consider the points A and B symmetrically disposed in relation to the y -axis at the positions: $A = r(\cos \phi, \sin \phi, 0)$, $B = r(-\cos \phi, \sin \phi, 0)$. Then, the difference of the potential between these points is simply

$$\Delta A_0 = A_0(A) - A_0(B) = \frac{q}{4\pi} (\tilde{\kappa}_{e-})^{12} \sin 2\phi \frac{(r^2 - R^2)}{r^3}, \tag{33}$$

for $r > R$. For $\phi = \pi/4$ and a 1 C charge, such difference of potentials is equal to

$$\Delta A_0 = 9 \times 10^9 (\tilde{\kappa}_{e-})^{12} \frac{(r^2 - R^2)}{r^3}. \tag{34}$$

For attaining the best bound, we should consider the maximum value of (34). So it must be evaluated at the point $r = R\sqrt{3}$, in which the expression $(r^2 - R^2)r^{-3}$ has a maximum. For a charged sphere of unitary radius ($R = 1m$), we obtain $\Delta A_0 = 3.46 \times 10^9 (\tilde{\kappa}_{e-})^{12} V$. Given the existence of sensitive methods for measurement of the potential able to detect slight variations of 1 part in $10^{10} V$, we can infer that the voltage difference of (34) cannot be larger than $10^{-10} V$, that is, $3.46 \times 10^9 (\tilde{\kappa}_{e-})^{12} < 10^{-10}$. This condition leads to $(\tilde{\kappa}_{e-})^{12} < 2.9 \times 10^{-20}$. Choosing pairs of points on the planes $y - z$ and $x - z$, this upper limit holds equivalently for $(\tilde{\kappa}_{e-})^{23}$ and $(\tilde{\kappa}_{e-})^{13}$.

This device can also be used to set up an upper bound on the diagonal components $(\tilde{\kappa}_{e-})^{ii}$. For constraining $(\tilde{\kappa}_{e-})^{11}$, we take the points A and B in the positions: $A = r(1, 0, 0)$, $B = r(0, 0, 1)$. The difference of the potential between these points is

$$\Delta A_0 = A_0(A) - A_0(B) = \frac{q}{4\pi} (\tilde{\kappa}_{e-})^{11} \left[\frac{r^2 - R^2}{r^3} \right], \tag{35}$$

which leads to the same bound obtained for the non-diagonal components: $(\tilde{\kappa}_{e-})^{11} < 2.9 \times 10^{-20}$. Choosing two points on the $y - z$ plane, $A = r(0, 1, 0)$, $B = r(0, 0, 1)$, this bound can be stated to $(\tilde{\kappa}_{e-})^{22}$. Thus, we conclude that by means of this experiment it is possible to establish an upper bound as stringent as

$$(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij} < 2.9 \times 10^{-20},$$

for the five non-isotropic components of the traceless matrix $(\tilde{\kappa}_{e-})^{ij}$. This is a nice bound for an Earth-based experiment, as good as the best bounds stated from astrophysical data analysis of UHECRs [49, 50].

As the isotropic component n does not break the spherical symmetry of the potential, this kind of experiment does not provide any way for bounding it. This component induces a slight screening on the Coulomb potential that may be interpreted as a charge screening. An experiment able to constrain n could be based on a charge or potential screening measurement. In this case, the major difficult is that the tiny LIV effect is disguised by the dominant Maxwell's behavior, avoiding its isolation. So, the LIV effect stays limited by the experimental imprecisions of the device. A two-sided bound was recently stated for this coefficient in the context of quantum electrodynamics decay processes modified by this LIV parameter [51].

Finally, we should note that this work completes the calculation of the stationary solutions of Maxwell's electromagnetism modified by the non-birefringent elements of the Abelian CPT-even and LIV sector of the standard model extension, a task initiated in [40, 41].

Acknowledgements The authors are grateful to FAPEMA (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Maranhão), to CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), and CAPES for financial support.

Appendix: Evaluation of the scalar potential generated by a charged sphere

By starting from (19), the scalar potential is rewritten as

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ (1 - n) \int d^3 \mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{(\tilde{\kappa}_{e-})^{ab}}{2} \partial_a I_b \right\}, \tag{A.1}$$

where

$$I_b = \int d^3 \mathbf{r}' \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_b}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}'), \tag{A.2}$$

and using $(\tilde{\kappa}_{e-})_{ii} = \text{tr}(\tilde{\kappa}_{e-}) = 0$, we show that

$$(\tilde{\kappa}_{e-})^{ab} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_a (\mathbf{r} - \mathbf{r}')_b}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -(\tilde{\kappa}_{e-})^{ab} \partial_a \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_b}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right].$$

Knowing that the charge density for a charged sphere of radius R is $\rho(\mathbf{r}') = q\delta(r' - R)/(4\pi R^2)$, its Fourier transform is

$$\tilde{\rho}(\mathbf{p}) = \int d^3\mathbf{r}' e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}'} \rho(\mathbf{r}') = q \frac{\sin(pR)}{pR}, \quad (\text{A.3})$$

with $p = |\mathbf{p}|$. For evaluating the integral I_b , we use the Fourier representation of the Coulomb potential

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{p^2}. \quad (\text{A.4})$$

By substituting in (A.2) and using (A.3) we obtain, after some algebraic manipulations, the following expression for I_b :

$$\begin{aligned} I_b = & 4\pi r_b \frac{q}{R} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{p^2} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \frac{\sin(pR)}{p} \right) \\ & + 4\pi \frac{q}{R} \partial_b \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{p^2} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \frac{\sin(pR)}{p^3} \right) \\ & - 4\pi q \partial_b \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{p^2} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \frac{\cos(pR)}{p^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Solving these integrals, we obtain

$$I_b = \int d^3\mathbf{r}' \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_b}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}') = \frac{q}{r} r_b - \frac{qR^2}{3r^3} r_b. \quad (\text{A.6})$$

Thus, finally, we obtain the scalar potential generated by the charged sphere of radius R for ($r > R$)

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ (1-n) \frac{q}{r} + \frac{q(\tilde{\kappa}_{e-})^{ab}}{2} \left[\frac{r_a r_b (r^2 - R^2)}{r^5} \right] \right\}. \quad (\text{A.7})$$

References

1. D. Colladay, V.A. Kostelecky, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997)
2. D. Colladay, V.A. Kostelecky, Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998)
3. S.R. Coleman, S.L. Glashow, Phys. Rev. D **59**, 116008 (1999)
4. S.M. Carroll, G.B. Field, R. Jackiw, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990)
5. C. Adam, F.R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B **607**, 247 (2001)
6. C. Adam, F.R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B **657**, 214 (2003)
7. A.P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J.L. Boldo, J.A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **67**, 085021 (2003)
8. A.A. Andrianov, R. Soldati, Phys. Lett. B **435**, 449 (1998)
9. A.A. Andrianov, R. Soldati, Phys. Rev. D **51**, 5961 (1995)
10. R. Jackiw, V.A. Kostelecky, Phys. Rev. Lett. **82**, 3572 (1999)
11. J.M. Chung, B.K. Chung, Phys. Rev. D **63**, 105015 (2001)
12. J.M. Chung, Phys. Rev. D **60**, 127901 (1999)
13. G. Bonneau, Nucl. Phys. B **593**, 398 (2001)
14. M. Perez-Victoria, Phys. Rev. Lett. **83**, 2518 (1999)
15. M. Perez-Victoria, J. High Energy Phys. **0104**, 032 (2001)
16. O.A. Battistel, G. Dallabona, Nucl. Phys. B **610**, 316 (2001)
17. O.A. Battistel, G. Dallabona, J. Phys. G **28**, L23 (2002)
18. O.A. Battistel, G. Dallabona, J. Phys. G **27**, L53 (2001)
19. A.P.B. Scarpelli, M. Sampaio, M.C. Nemes, B. Hiller, Phys. Rev. D **64**, 046013 (2001)
20. A.P.B. Scarpelli, M. Sampaio, M.C. Nemes, B. Hiller, Eur. Phys. J. C **56**, 571 (2008)
21. J.R. Nascimento, E. Passos, A.Yu. Petrov, F.A. Brito, J. High Energy Phys. **0706**, 016 (2007)
22. F.A. Brito, J.R. Nascimento, E. Passos, A.Yu. Petrov, Phys. Lett. B **664**, 112 (2008)
23. M. Gomes, T. Mariz, J.R. Nascimento, A.J. da Silva, Phys. Rev. D **77**, 105002 (2008)
24. F.A. Brito, L.S. Grigorio, M.S. Guimaraes, E. Passos, C. Wotzasek, Phys. Rev. D **78**, 125023 (2008)
25. J. Alfaro, A.A. Andrianov, M. Cambiaso, P. Giacconi, R. Soldati, Phys. Lett. B **639**, 586 (2006)
26. H. Belich, M.M. Ferreira Jr., J.A. Helayel-Neto, M.T.D. Orlando, Phys. Rev. D **68**, 025005 (2003)
27. H. Belich Jr., T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr., J.A. Helayel-Neto, Eur. Phys. J. C **42**, 127 (2005)
28. R. Casana, M.M. Ferreira Jr., C.E.H. Santos, Phys. Rev. D **78**, 025030 (2008)
29. R. Lehnert, R. Potting, Phys. Rev. Lett. **93**, 110402 (2004)
30. R. Lehnert, R. Potting, Phys. Rev. D **70**, 125010 (2004)
31. C. Kaufhold, F.R. Klinkhamer, Phys. Rev. D **76**, 025024 (2007)
32. C. Kaufhold, F.R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B **734**, 1 (2006)
33. R. Casana, M.M. Ferreira Jr., J.S. Rodrigues, Phys. Rev. D **78**, 125013 (2008)
34. J.M. Fonseca, A.H. Gomes, W.A. Moura-Melo, Phys. Lett. B **671**, 280 (2009)
35. R. Montemayor, L.F. Urrutia, Phys. Rev. D **72**, 045018 (2005)
36. X. Xue, J. Wu, Eur. Phys. J. C **48**, 257 (2006)
37. M.B. Cantcheff, Eur. Phys. J. C **46**, 247 (2006)
38. M.B. Cantcheff, C.F.L. Godinho, A.P. Baeta Scarpelli, J.A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **68**, 065025 (2003)
39. M. Frank, I. Turan, Phys. Rev. D **74**, 033016 (2006)
40. Q.G. Bailey, V.A. Kostelecky, Phys. Rev. D **70**, 076006 (2004)
41. R. Casana, M.M. Ferreira Jr., C.E.H. Santos, Phys. Rev. D **78**, 105014 (2008)
42. B. Altschul, Phys. Rev. Lett. **98**, 041603 (2007)
43. B. Altschul, Phys. Rev. D **75**, 105003 (2007)
44. B. Altschul, Nucl. Phys. B **796**, 262 (2008)
45. V.A. Kostelecky, M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **87**, 251304 (2001)
46. V.A. Kostelecky, M. Mewes, Phys. Rev. D **66**, 056005 (2002)
47. V.A. Kostelecky, M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **97**, 140401 (2006)
48. A. Kobakhidze, B.H.J. McKellar, Phys. Rev. D **76**, 093004 (2007)
49. F.R. Klinkhamer, M. Risse, Phys. Rev. D **77**, 016002 (2008)
50. F.R. Klinkhamer, M. Risse, Phys. Rev. D **77**, 117901(A) (2008)
51. F.R. Klinkhamer, M. Schreck, Phys. Rev. D **78**, 085026 (2008)