

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

MÁRCIO DA SILVA TAVARES

ESTUDO DO POTENCIAL DE INTERAÇÃO ELÉTRON-ELÉTRON
NO CONTEXTO DA TEORIA DE MAXWELL-CHERN-SIMONS-
PROCA COM VIOLAÇÃO DE LORENTZ

São Luís
2006

MÁRCIO DA SILVA TAVARES

ESTUDO DO POTENCIAL DE INTERAÇÃO ELÉTRON-ELÉTRON
NO CONTEXTO DA TEORIA DE MAXWELL-CHERN-SIMONS-
PROCA COM VIOLAÇÃO DE LORENTZ

Dissertação apresentada ao programa de Pós-
Graduação em Física da Universidade Federal do
Maranhão para obtenção do grau de mestre em
Física.

Orientador: Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira
Junior

São Luís
2006

Tavares, Márcio da Silva.

Estudo do potencial de interação elétron-elétron no contexto da teoria de Maxwell-Chern-Simons-Proca com violação de Lorentz / Márcio da Silva Tavares. – 2007.

91.

Texto impresso (fotocópia)

Orientador: Manoel Messias Ferreira Junior

Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Física, Universidade Federal do Maranhão, 2007.

1. Eletróns. 2. Eletrodinâmica Planar. 3. I. Orientador: Ferreira Junior, Manoel Messias. II. Título.

CDU 539.124

ESTUDO DO POTENCIAL DE INTERAÇÃO ELÉTRON-ELÉTRON NO CONTEXTO DA TEORIA DE MAXWELL-CHERN-SIMONS- PROCA COM VIOLAÇÃO DE LORENTZ

Dissertação apresentada ao programa de Pós-
Graduação em Física da Universidade Federal do
Maranhão para obtenção do grau de mestre em
Física.

Aprovada em 03/10/2006

BANCA EXAMINADORA

.....
Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Jr
Doutor em Física
Universidade Federal do Maranhão – UFMA

.....
Prof. Dr. Ricardo Renan Landim Carvalho
Doutor em Física
Universidade Federal do Ceará – UFC

.....
Prof. Dr. Adalto Rodrigues Gomes
Doutor em Física
Centro Federal de Educação Tecnológica do Maranhão – CEFET-MA

DEDICATÓRIA

Dedico...

A DEUS,
a minha família,
a minha namorada,
aos companheiros.

AGRADECIMENTOS

Agradeço....

A Deus, por me conceder saúde e me iluminar durante toda a minha vida,
A meus pais, pela suas pelepas e constantes incentivos,
A minha irmã pela suas colaborações,
A minha namorada pela sua presença,
A meus colegas de labuta,
Ao professor Manoel Messias Ferreira Junior, pela sua colaboração e paciência,
A Universidade Federal do Maranhão,
A Fapema, pelos seus incentivos.

*“Tu és digno, Senhor e Deus nosso, de receber a glória,
a honra e o poder, porque criaste todas as coisas, e por
tua vontade elas existiram e foram criadas.”
Apocalipse 4:11.*

Resumo

Este trabalho é iniciado com a apresentação de um *overview* sobre os principais modelos teóricos da eletrodinâmica planar (QED₃), para quais são estudadas as respectivas soluções clássicas. Isto é feito através da obtenção das equações de onda, que fornecem as respectivas soluções para os campos e potenciais. Na sequência, efetua-se o cálculo do potencial de interação e^-e^- no contexto dos modelos planares de Maxwell-Chern-Simons (MCS) e Maxwell-Chern-Simons-Proca (MCS-Proca), o que é realizado dentro do regime de validade da aproximação de Born, onde o potencial de interação é dado pela transformada de Fourier da amplitude de espalhamento Möller (calculada a *tree level*, no regime não relativístico). Nesse ínterim, levanta-se a perspectiva de investigar a influência de um termo violador de Lorentz sobre a interação elétron-elétron. Como ferramental teórico para realizar tal investigação, adota-se a versão planar do modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw, acoplado ao setor de Dirac. Seguindo o procedimento já estabelecido, o potencial de interação elétron-elétron é obtido para o caso de um *background* do tipo-tempo, $v^\mu = (v^0, \vec{0})$. Tal potencial, por ter um comportamento assintótico do tipo logarítmico, não é adequado para representar interações físicas em (1+2) dimensões. Como investigação final desse trabalho, aborda-se esta mesma questão no contexto do modelo planar de MCS-Proca com violação de Lorentz (originado da redução dimensional do modelo de Higgs-Abeliano de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw). Suplementando-se tal modelo com o setor de Dirac devidamente acoplado com o campo de gauge (A^μ) e escalar (φ), e usando os mesmos procedimentos de cálculo já adotados, obtém-se a expressão do potencial de interação elétron-elétron, que se revela totalmente blindado. Tal potencial exhibe uma região de poço, que implica em atratividade, o que pode ser relevante na tentativa de explicar a formação de pares elétron-elétron no contexto deste modelo teórico.

Sumário

1	Introdução	5
2	Eletrodinâmica Planar	15
2.1	Introdução	15
2.2	Eletrodinâmica Maxwell em 1+2 dimensões	16
2.3	Eletrodinâmica Chern-Simons	19
2.4	Eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons	22
2.5	Eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons-Proca	25
2.6	Observações finais	28
3	Cálculo do potencial de interação elétron-elétron no contexto das teorias de MCS e MCS-Proca	29
3.1	Introdução	29
3.2	O modelo planar de MCS para o cálculo de espalhamento Möller	32
3.2.1	Análise do caráter atrativo ou repulsivo do potencial MCS	37
3.3	O modelo planar MCS-Proca para o cálculo de amplitude e^-e^-	39
3.4	Conclusão	44
4	Investigação da interação elétron-elétron no contexto da teoria de Maxwell-Chern-Simons na presença do background violador de Lorentz	45
4.1	Introdução	45
4.2	Modelo Planar de MCS com violação de Lorentz	48

4.3	A amplitude de espalhamento Möller	49
4.4	O potencial de interação elétron-elétron	51
4.4.1	O potencial escalar	51
4.4.2	O potencial de Gauge	52
4.5	Observações e Conclusão	54
5	Interação elétron-elétron no contexto do Modelo Planar de Maxwell-Chern-Simons-Proca com violação de Lorentz	57
5.1	Introdução	57
5.2	O modelo planar Higgs-Abeliano com violação de Lorentz	59
5.3	A amplitude de espalhamento Möller	62
5.4	O potencial de interação elétron-elétron	64
5.4.1	O potencial escalar	64
5.4.2	O potencial de gauge	66
5.5	Observações Finais	73
6	Conclusão	76

Lista de Figuras

3.1	Gráfico do potencial de MCS pela distância (r) para os seguintes valores de parâmetros: $L = 1, s = 1eV$ (linha pontilhada em forma de caixa); $L = 1, s = 5eV$ (linha pontilhada em forma de cruz); $L = 1, s = 20eV$ (linha contínua).	37
3.2	Gráfico simultâneo do potencial de MCS e MCS efetivo para os seguintes valores de parâmetros: $m_e = 5 \times 10^5 eV, e_3^2 = 9eV, s = 10, L = 10$ (curva contínua e curva pontilhada em caixa superpostas); $s = 50, L = 1$ (curva contínua e curva pontilhada em círculo superpostas).	40
3.3	Gráfico comparativo dos potenciais de MCS e MCS-Proca para os seguintes valores de parâmetros: $m_e = 10^5 eV, L = 1, s = 2eV, M_A = 20eV$. O potencial de MCS-Proca decai rapidamente a zero.	43
3.4	Gráfico simultâneo do potencial de MCS-Proca e MCS-Proca efetivo para os seguintes valores de parâmetros: $m_e = 5 \times 10^5 eV, e_3^2 = 16eV, L = 1, s = 20, M_A = 2eV$ (curva contínua e curva pontilhada em caixa superpostas); $s = 1, M_A = 30eV$ (curva contínua e curva pontilhada em círculo superpostas).	44
4.1	Gráfico do potencial efetivo realizado para $s = 10eV, m = 2000eV, v_0 = 8eV, L = 1$	54

5.1	Gráfico simultâneo do potencial escalar da eq.(5.29) (linha contínua) e o potencial da eq. (4.13) (linha pontilhada em cruz). Aqui, para ambos os gráficos foi usado: $s = 20, M_A = 2, v_0 = 2eV$	66
5.2	Construção simultânea do gráfico potencial de gauge da eq.(5.42) (linha contínua) e o potencial de gauge da eq.(4.17) (linha pontilhada) para dois conjuntos de valores de parâmetros: $s = 20eV, L = 1, m_e = 10^5, M_A = 3, v_0 = 13eV$ (linha fina contínua e curva pontilha em caixas); $s = 20eV, L = 1, m_e = 10^5, M_A = 3, v_0 = 17eV$ (linha espessa contínua e linha pontilhada em círculos).	70
5.3	Gráfico do potencial de gauge para os seguintes conjuntos de parâmetros: $m_e = 10^5eV, L = 1, s = 20, M_A = 2eV, v_0 = 0$ (linha contínua); $v_0 = 10eV$ (linha pontilhada em cruz); $v_0 = 15 eV$ (linha pontilhada em círculo); $v_0 = 18 eV$ (linha pontilhada em caixa).	71
5.4	Construção simultânea dos gráficos do potencial gauge (5.42) e do potencial efetivo (5.45) para os seguintes conjuntos de parâmetros: $s = 20, L = 1, m_e = 10^5, M_A = 2, v_0 = 10$ (linhas contínua fina e pontilhada em forma de caixas coincidentes); $s = 20, L = 1, m_e = 10^5, M_A = 2, v_0 = 15eV$ (linhas contínua espessa e pontilhada em forma de círculos coincidentes).	73

Capítulo 1

Introdução

As pesquisas sobre fenômenos naturais tem acompanhado o homem em toda a sua evolução, e o estudo da Física e da Matemática tem se revelado como uma das ferramentas mais bem sucedidas para descrever a natureza em sua ilimitada riqueza de aspectos. Sem dúvida, o desenvolvimento da Física ao longo dos século XIX e, principalmente, ao longo do século XX, tem colocado o homem no patamar de penetrar cada vez mais fundo nos segredos do Universo, tanto em escala cosmológica quanto microscópica.

Um dos fenômenos mais interessantes já descobertos, que provoca grande fascínio, é a supercondutividade, descoberto em pesquisas envolvendo sistemas a baixíssimas temperaturas, atingidas através de técnicas de criogenia. Em 1908, Kamerlingh-Onnes conseguiu liquefazer o hélio ($T_c \simeq 4K$), obtendo a partir de então condições de atingir temperaturas menores que $1K$. Três anos depois Kamerlingh-Onnes [1], ao estudar as propriedades do mercúrio, percebeu que a sua resistividade anulava-se abaixo de $4K$, descobrindo desta forma o fenômeno da supercondutividade. Este efeito foi logo em seguida observado também em outros metais. Uma outra característica marcante de um supercondutor, além da resistividade nula, é o fato do campo magnético ser nulo (efeito Meissner-Ochsenfeld [2], descoberto em 1933) em seu interior. Do ponto de vista microscópico, a primeira explicação consistente para a supercondutividade surgiu com a teoria BCS (Bardeen, Cooper, Schrieffer)[3], que propõe a troca de fônons como elemento-chave para a interação atrativa

que determina a formação dos pares de elétrons correlacionados (pares de Cooper). Nesta teoria, são os elétrons que possuem energia próxima a da superfície de Fermi que trocam e sofrem interação atrativa. Tal teoria foi muito bem sucedida ao obter o gap de energia que separa o estado fundamental do supercondutor (condensado BCS) do espectro de excitação de 1-partícula e explicar toda a fenomenologia do efeito já conhecida na época.

Quando se estuda supercondutividade, é usual distinguir entre supercondutores tipo I e tipo II. A supercondutividade tipo I ocorre em geral em metais puros (constituídos com um só elemento químico), sendo bem explicada pela teoria BCS. A sua termodinâmica é bem descrita em termos de uma transição de segunda ordem da fase normal para a fase supercondutora, controlada em termos de parâmetros externos tais como a temperatura e o campo magnético. Os supercondutores tipo-I apresentam um valor bem definido de campo crítico H_c (dependente da temperatura), acima do qual a amostra volta à fase normal. Simultaneamente a esta transição, o campo externo penetra na amostra, destruindo a fase supercondutora. No caso dos supercondutores tipo-II, geralmente constituídos por ligas metálicas, o comportamento termodinâmico é descrito em termos de dois valores de campo crítico, H_{1c} e H_{2c} . Neste caso, quando o campo magnético externo cresce, atingindo o valor crítico H_{1c} , o mesmo penetra na amostra de forma não-homogênea (na forma de fluxóides), determinando o aparecimento dos vórtices magnéticos. Esta é a chamada fase de Abrikosov, em homenagem ao físico que primeiro descreveu as suas propriedades [4]. Ao se elevar ainda mais o valor do campo externo, atinge-se o valor crítico H_{2c} , ocorrendo então a segunda transição de fase, na qual há penetração total do campo magnético externo na amostra, voltando-se para a fase do metal-normal. A supercondutividade tipo-II é adequadamente descrita através da teoria fenomenológica de Landau-Ginzburg, desenvolvida nos anos 50.

A física dos supercondutores voltou a passar por um processo de grande excitação quando em 1986 foi descoberta a supercondutividade de alta temperatura crítica-SAT_c, por Berdnorz & Müller[5]. Tal fenômeno foi observado inicialmente em um composto cerâmico à base bário, lantânio, cobre e oxigênio. Na verdade, como ficou claro mais tarde,

tais compostos exibem uma estrutura estratificada em forma de planos de cobre-oxigênio (Cu-O), separados entre si por planos de outros óxidos e terras raras, uma estrutura denominada de perovskita. É na região entre os planos de Cu-O que ocorre o transporte de carga (supercorrente), que assinala o comportamento planar destes supercondutores. Obviamente, tal estrutura estratificada em planos implica numa forte anisotropia, que se manifesta em várias características deste efeito, inclusive na simetria do parâmetro de ordem (função de onda que representa a forma do par de Cooper). Apesar da explicação satisfatória para a supercondutividade BCS, a supercondutividade de alta- T_c (SAT_c), ainda é objeto de muitas controvérsias, não existindo atualmente uma teoria consensual para explicar tal efeito. Explicar esse fenômeno passa obviamente por propor um novo mecanismo teórico para descrever a formação dos pares de Cooper em meio à estrutura destas cerâmicas supercondutoras, abordando também a questão da simetria do parâmetro de ordem [6]. Atualmente, a lista de mecanismos teóricos já propostos para descrever este fenômeno é enorme, passando inclusive pela aplicação do ferramental teórico da QED_3 .

O estudo da Eletrodinâmica Quântica Planar- QED_3 recebeu grande impulso no início dos anos 80, a princípio como uma extrapolação da eletrodinâmica quântica convencional a 3 dimensões, motivada pela sua possível conexão com as teorias quadridimensionais no regime de temperatura finita¹ [7]. As particularidades e singularidades destas teorias (em relação à QED_4) passaram a representar uma razão adicional para envidar maiores esforços nesta linha de pesquisa. Neste sentido, a Eletrodinâmica Quântica Planar (QED_3) foi sendo desenvolvida com um ferramental teórico apropriado para tratar de questões fundamentais da Teoria de Campos e Partículas (confinados ao mundo tridimensional), como a quantização, spin, e suas interações [8]. No início dos anos 90, entretanto, as teorias 3-dimensionais mudaram de perfil quando também se mostraram adequadas para tratar alguns sistemas da Matéria Condensada. Decerto, o aparecimento de apli-

¹É fato conhecido que teorias 4-dimensionais, quando analisadas a temperatura finita ($T > 0$), tornam-se 3-dimensionais, uma vez que uma das dimensões é "compactificada" ao longo do mecanismo de introdução de temperatura no sistema.

cações da QED₃ ao efeito Hall quântico² [9] e à SAT_c³ trouxe uma nova perspectiva às teorias tridimensionais, o que tem ocasionado, nos últimos anos, uma grande produção de trabalhos. De fato, poucos anos após a descoberta da SAT_c, alguns físicos da área de teoria de campos decidiram propor a aplicação do ferramental da Eletrodinâmica Quântica Planar (QED₃) na tentativa de explicar tal efeito. Deste esforço, surgiu a chamada teoria da supercondutividade aniônica, onde a nascente teoria dos ânions (partículas de spin fracionário geradas dentro do contexto da teoria de Chern-Simons) foi usada para propor a existência de um estado superconductor. Com a demonstração da viabilidade de

²O efeito Hall quântico - EHQ - é caracterizado pela quantização da condutividade Hall ($\sigma_{xy} = ne^2/h$, onde n é um inteiro) e pela quase anulação da condutividade longitudinal ($\sigma_{xx} \rightarrow 0$) de um gás de elétrons bidimensional submetido à ação de um intenso campo magnético ($B > 10T$) ortogonal, a baixíssimas temperaturas ($T < 4K$). A condutividade Hall é universal, pois depende apenas de constantes fundamentais (acoplamento eletromagnético e constante de Planck), sendo independente de particularidades (impurezas, estrutura, etc...) do “background” em que se forma o gás bidimensional. Esta universalidade é, na verdade, uma conseqüência da quantização dos níveis de Landau e do fato da condutividade (em $D = 1 + 2$) não depender das extensão espacial da amostra. Na sua versão original, denominada efeito Hall quântico inteiro - EHQI- os elétrons são considerados livres, estando sujeitos à ação apenas do campo magnético; os primeiros níveis de Landau estão totalmente preenchidos, ($v = n$, fator de ocupação inteiro), correspondendo ao que se chama de líquido quântico incompressível. O palco para a manifestação do EHQ é um gás de elétrons bidimensional quantizado em níveis de Landau, que surgem em decorrência da ação do campo magnético. Estes níveis são altamente degenerados, o que implica em uma grande concentração de estados em valores bem definidos de energia, correspondendo ao que se denomina de localização de Landau, um fenômeno típico de 2-dimensões. Devido à alta intensidade deste campo, os elétrons de spin-up e spin-down apresentam um significativo “splitting Zeeman” , equivalente a um gap, de modo que cada nível de Landau, em termos efetivos, separa-se em dois, cada um dos quais com todos os elétrons na mesma polarização (partículas indistinguíveis).

³Tanto o efeito Hall quântico quanto a supercondutividade figuram como duas das mais sensacionais descobertas físicas do século XX, ambas tendo em comum o fato de serem manifestações macroscópicas de um fenômeno quântico (coerência). A supercondutividade de alta-T_c ocorre em sistemas estratificados em planos Cu-O, enquanto o efeito Hall quântico foi inicialmente observado nas junções de metal-óxido-semicondutor (MOS) e, logo depois, nas heteroestruturas de semicondutores (junções de Al_xGa As - Ga_{1-x} As), estruturas estas capazes de criar um poço bidimensional para confinamento de elétrons, ou seja, um gás de elétrons degenerado em 2 dimensões (GED-2D).

construção de um modelo aniónico supercondutor[10], a QED₃ começou a ser admitida como um bom ferramental teórico para a descrição desse fenômeno.

Outra tentativa de obter um mecanismo capaz de induzir a formação dos pares elétron-elétron, dentro do contexto teórico da QED₃, é considerar a amplitude de espalhamento associada à interação entre as partículas. Portanto, obedecendo a um típico problema de espalhamento, em que o potencial espalhador decai a zero para algumas regiões finitas, estaremos interessados em medir os efeitos do espalhamento Möller em grandes distâncias (maiores que o alcance do potencial), haja visto, que não se pode colocar um detector em uma região muito próxima. As observações são sempre feitas por detectores localizados em grandes distâncias em relação ao centro espalhador. Nessas regiões o efeito do potencial espalhador não é considerável, o que nos possibilita garantir que tal potencial se configura como a transformada de Fourier da amplitude Möller associada (aproximação de Born). Tal procedimento está descrito em maiores detalhes na introdução do Cap.III.

Em 1990, Carroll-Field-Jackiw [11] propuseram uma versão da eletrodinâmica de Maxwell corrigida por um termo tipo de Chern-Simons ($\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}v^\mu A^\nu F^{\alpha\beta}$), definido em (1+3) dimensões, que estipulava um acoplamento do campo de gauge com um *background* fixo indutor da violação de Lorentz (v^μ), no contexto da eletrodinâmica de Maxwell usual, a fim de verificar se a simetria de Lorentz corresponde a uma simetria exata da natureza, ou se reflete apenas uma aproximação. Comparando os resultados teóricos do seu modelo com dados observacionais de galáxias distantes, conseguiram estabelecer limites rigorosos sobre o parâmetro de quebra de Lorentz. Alguns anos mais tarde, incentivados pelo trabalho realizado por CFJ, Colladay & Kostelecky [12] construíram uma extensão do modelo padrão mínimo, o Modelo Padrão Estendido (MPE), incorporando termos violadores de Lorentz em todos os setores da interação. Tais termos são obtidos via quebra espontânea de simetria de um teoria mais fundamental, válida numa escala de energia mais alta (escala de Planck). Como resultado, a teoria resultante preserva a estrutura de gauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, a renormalizilidade, causalidade, estabilidade, além de exibir conservação do tensor energia momento. Recentemente, o MPE tem motivado muitos

trabalhos interessantes [13]-[14], investigando a violação de Lorentz em diversos aspectos diferentes.

A violação de Lorentz não é obviamente definida no domínio de sistemas de baixas energias; neste domínio é mais conveniente falar-se em quebra da covariância de Galileu. Quando se deseja aplicar o formalismo da teoria quântica de campos para tratar problemas de matéria condensada, existe a necessidade de extrair o limite não-relativístico, que corresponde ao limite de baixas energias. Seguindo essa linha de investigação, é possível estabelecer uma correspondência direta entre a quebra das simetrias de Lorentz e de Galileu, quando a escala de energia é substancialmente reduzida. Assim, podemos afirmar que a violação de Galileu para sistemas de matéria condensada tem como contrapartida a violação de Lorentz nos sistemas relativísticos. Essa correspondência geral é adotada neste presente trabalho, focalizando na investigação da interação elétron-elétron no regime de baixas energias (por meio de uma abordagem de teoria de campos) em um ambiente teórico com violação de Lorentz.

Neste presente trabalho, usamos o ferramental da QED₃ para estudar a interação elétron-elétron num contexto planar, ou seja, em (1+2) dimensões. Mais especificamente, calculamos o potencial de interação elétron-elétron no contexto de alguns modelos de eletrodinâmica planar na presença de um *background* indutor da violação da simetria de Lorentz. Como ponto de partida, fazemos uma revisão dos principais aspectos clássicos das eletrodinâmicas planares de Maxwell, Chern-Simons, Maxwell-Chern-Simons e Maxwell-Chern-Simons-Proca, dando especial atenção às soluções clássicas dos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} , assim como dos potenciais escalar e vetor. Em seguida, apresentamos a dedução do potencial de interação elétron-elétron no contexto da teoria planar de Maxwell-Chern-Simons (MCS), discutindo o comportamento do potencial obtido. Tal potencial é obtido como a transformada de Fourier da amplitude de espalhamento Möller (aproximação de Born), que é calculada a *tree-level* através da implementação das regras de Feynman para o espalhamento elétron-elétron (intermediado pelo campo de MCS), onde as 3-correntes fermiônicas são escritas em termos das soluções da equação de Dirac em (1+2) dimen-

sões. A justificativa para proposição desta idéia reside no fato do termo de Chern-Simons conceder massa topológica ao fóton planar, assegurando desta forma, uma interação de gauge com comportamento assintótico do tipo $1/r^2$, a qual está associado um potencial de interação de longo alcance (blindado apenas no infinito). Observe que, no contexto da eletrodinâmica planar, este é um comportamento mais adequado para representar uma interação física, quando comparado com a interação coulombiana pura, que implica num potencial do tipo logarítmico (confinante). Na sequência, é deduzido o potencial de interação no contexto da teoria de Maxwell-Chern-Simons-Proca, que exhibe um comportamento totalmente blindado, em consequência da presença da massa de Proca. Importante destacar que tanto o potencial de MCS quanto o de MCS-Proca são verdadeiramente repulsivos e, portanto, incapazes de determinar a formação de um par elétron-elétron.

Uma maneira eficiente de obter um potencial de interação e^-e^- atrativo consiste na consideração do modelo de MCS na presença do setor de Higgs, que ao sofrer uma quebra espontânea de simetria (QES), origina massa de Proca para o campo de gauge e um campo escalar de Higgs. Tomando como ponto de partida uma lagrangeana em que o campo de Higgs (ϕ) exhibe um acoplamento quártico com o campo fermiônico - $y\bar{\psi}\psi\phi^*\phi$ (vide refs. [15]), após a QES o campo fermiônico exhibe um acoplamento de Yukawa - $y\bar{\psi}\psi H$ - com o campo de Higgs (parametrizado como $\phi = v + H + i\chi$ no ato da quebra espontânea), o que gera uma nova contribuição para a amplitude de espalhamento Möller e um novo termo de interação escalar (atrativo). Neste caso, o potencial total resulta igual ao potencial escalar (advindo da troca de um bóson de Higgs) somado ao potencial de gauge (advindo da troca de um fóton de MCS-Proca); tal potencial revela-se atrativo sempre que a contribuição advinda da intermediação escalar supera a interação advinda da intermediação de gauge. Nesta situação, o potencial total pode ser atrativo independentemente do caráter repulsivo do potencial de gauge. Vemos assim que o setor de Higgs é um elemento decisivo para a obtenção de um potencial elétron-elétron atrativo, desde que convenientemente acoplado ao setor fermiônico.

Uma outra alternativa teórica para a obtenção de um potencial elétron-elétron atrativo,

independente da presença do setor de Higgs, é através da consideração de um *background* fixo, responsável pela quebra da simetria de Lorentz no sistema, ou seja, considerando-se um modelo de eletrodinâmica planar na presença da violação da simetria de Lorentz. Tal procedimento é realizado em detalhes no Cap.IV, onde o potencial de interação elétron-elétron é derivado no âmbito de um modelo planar de MCS com violação de Lorentz. Mais especificamente, tal modelo planar é obtido da redução dimensional do modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw[16], realizada na ref.[17], que conduz a uma eletrodinâmica planar composta pelo setor de MCS acoplada a um campo de Klein-Gordon (não massivo), e na presença *background* violador de Lorentz, v_μ (no caso, um 3-vetor fixo). Interessante destacar, que as soluções clássicas desta eletrodinâmica já foram analisadas e determinadas (no regime estático) na ref.[18], onde se verifica que a presença do termo de violação de Lorentz induz modificações relevantes nas equações de movimento dos campos \vec{E} e B e suas soluções, o mesmo ocorrendo para com os potenciais A_0 e \mathbf{A} . Uma das modificações observadas é a formação de um poço na forma do potencial escalar A_0 , o que pode ser entendido como o prenúncio de um comportamento atrativo para uma interação elétron-elétron derivada no contexto de uma situação dinâmica. Outra mudança observada é o comportamento confinante do potencial escalar (A_0), que volta a exibir um comportamento logarítmico. Tendo como antecedentes a análise das soluções clássicas deste modelo, o passo seguinte consiste em obter o potencial de interação elétron-elétron no contexto deste modelo teórico, usando o mesmo procedimento (ilustrado no Cap.III) adotado para derivar os potenciais de MCS e MCS-Proca. De início, este cálculo foi realizado para um *background* do tipo-tempo, $v_\mu = (v_0, \vec{0})$, na ref.[19]. Neste caso, a amplitude de espalhamento Möller é composta por dois termos: um advindo da intermediação do campo escalar de Klein-Gordon (originado da redução dimensional), outro advindo da intermediação do campo de gauge (observe que aqui não há campo de Higgs). Seguindo o procedimento padrão adotado a baixas energias, o potencial de interação corresponde à transformada de Fourier da amplitude de espalhamento (aproximação de Born). Como resultado, é obtido um potencial composto por um termo de interação escalar e outro de

interação de gauge, ambos exibindo a presença da região de poço para alguns valores dos parâmetros do modelo, o que implica em atratividade. Uma característica marcante dos potenciais de interação obtidos é o caráter assintótico logarítmico, que verdadeiramente não constitui um comportamento físico compatível com sistemas reais. Cálculos similares foram também desenvolvidos para o caso de um *background* tipo-espaço, $v_\mu = (0, \vec{v})$, sendo encontrados potenciais também dotados de uma região de poço (atratividade), e dotados de anisotropia, uma vez que as soluções agora passam a depender da direção estabelecida pelo 3-vetor fixo [20]. Ademais, foi observado que tais soluções anisotrópicas continuam a exibir o mesmo comportamento assintótico logarítmico.

No Cap.V, apresentamos a contribuição original dessa dissertação de mestrado, que consiste em analisar a interação elétron-elétron no contexto da eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons-Proca (dotada de violação de Lorentz). O modelo planar usado como arcabouço teórico é derivado da redução dimensional do modelo Higgs-Abeliano de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw, definido em (1+3) dimensões [16]. Tal redução dimensional foi realizada com sucesso no trabalho da ref.[21], onde foi obtida uma eletrodinâmica planar composta pelo setor de MCS-Proca, acoplada a um campo de Klein-Gordon pelo termo de quebra de Lorentz (termo que contém o *background* fixo). Nessa referência, foi também analisada a consistência deste modelo planar, tendo-se mostrado que o mesmo é totalmente consistente (causal, unitário e estável). Portanto, é no contexto teórico deste modelo planar que o potencial de interação e^-e^- será calculado. As soluções clássicas desta eletrodinâmica planar já foram determinadas na ref. [14], onde tais soluções foram obtidas para o caso de um background tipo-espaço e tipo-tempo, sendo observadas alterações significativas, induzidas pelo background, em ambos os casos.

A principal motivação para a presente proposta de trabalho advém da necessidade de obtenção de um potencial de interação blindado, ou seja, que exiba um comportamento rapidamente decrescente com a distância, uma vez que interações blindadas e^-e^- são mais convenientes para descrever a física de baixas energias em sistemas reais. Devido à presença do termo de massa de Proca, tudo leva a crer que o potencial a ser obtido neste

caso será totalmente blindado.

Uma vez de posse do modelo planar com setor de Higgs estabelecido na referência [21], o primeiro passo é considerar a quebra espontânea de simetria (QES), cuja principal consequência é conceder um termo de massa para os campo de Klein-Gordon e para o campo de gauge de MCS. Em seguida, o setor de Dirac é introduzido na lagrangeana, adequadamente acoplado ao campo escalar e ao campo de gauge. A partir de então, o procedimento adotado é o mesmo do Cap.IV: calcula-se as amplitude de espalhamento Möller mediadas pelo campo escalar de Klein-Gordon e pelo campo de gauge de MCS-Proca. O potencial de interação advém da transformada de Fourier de tais amplitudes. Como resultado, é obtido um potencial escalar e um potencial de gauge totalmente blindados, constituídos por combinações de funções de Bessel modificadas. Ademais, é observado que o potencial escalar, associado com a interação de Yukawa, é sempre atrativo, enquanto o potencial de gauge é dotado de uma região de poço, o que pode assegurar sua atratividade. O potencial de interação e^-e^- total é constituído pela superposição das contribuições escalar e gauge: ($V_{total} = V_{escalar} + V_{gauge}$). Este pode ser atrativo nas regiões que o potencial escalar sobrepujar o potencial *gauge* ou quando ambos forem negativos. Dado que o potencial escalar é sempre atrativo e o potencial de gauge é dotado de uma região de poço, podemos concluir que o potencial total pode sempre apresentar uma região atrativa. Este resultado é relevante em conexão com a possibilidade de induzir a formação de estados ligados e^-e^- no contexto do presente modelo teórico.

Capítulo 2

Eletrodinâmica Planar

2.1 Introdução

Tecnicamente, existem dois esquemas teóricos para estudar a eletrodinâmica planar: (i) a redução dimensional de 4 para 3-dimensões ($\text{QED}_{1+3} \rightarrow \text{QED}_{1+2}$) ou (ii) a definição intrínseca da eletrodinâmica já em 1+2 dimensões, sendo que as variáveis de campos vetoriais são definidas como 3-vetores, não fazendo qualquer menção à terceira componente espacial. Dentro da proposta da redução dimensional, adota-se um *ansatz* onde todos os campos não dependem ou deixam de depender da terceira dimensão espacial, de modo que a derivada das variáveis de campo em relação a x_3 são consideradas nulas, ou seja: $\partial(\text{field})/\partial x^3 = 0$. No setor fermiônico, a redução dimensional ocorre de uma maneira muito simples, sendo que cada espinor 4-dimensional Ψ , definido em quatro dimensões em termos de quatro componentes, pode ser parametrizado em (1+2) dimensões em termos de dois espinores de duas componentes cada, satisfazendo a álgebra de Dirac em 1+2-dimensões. Em relação aos campos vetoriais, podemos verificar que cada 4-vetor (quadri-dimensional) origina um 3-vetor e um escalar sobre o grupo $\text{SO}(1,2)$, ou seja: $T^{\hat{\mu}} \rightarrow (T^\mu, t)$, onde $\hat{\mu} = 0, 1, 2, 3, 4$; $\mu = 0, 1, 2$, $t = T^{(3)}$, $T^\mu = (T^0, T^{(1)}, T^{(2)})$. Neste e no próximo capítulo, os campos são definidos naturalmente em (1+2) dimensões, seguindo a proposta (ii). Nos capítulos IV e V, os modelos planares estudados são obtidos da redução

dimensional de um modelo primordial definido em (1+3) dimensões.

Neste presente capítulo, apresentamos a nível clássico um *overview* sobre os principais modelos que constituem a eletrodinâmica planar. Neste sentido, primeiramente é analisada a eletrodinâmica planar de Maxwell, focalizando nas equações de movimento e na natureza escalar do fóton que intermedeia a propagação desse campo. Em seguida, abordaremos a eletrodinâmica de Chern-Simons (CS), conhecida por conceder uma massa topológica ao fóton e por induzir quebra da simetria de paridade e da inversão temporal. É interessante observar que, como modelo isolado, a eletrodinâmica de CS não exibe propagação dinâmica, pois suas equações de movimento não conduzem a uma equação de onda. Ademais, é importante enfatizar que tal teoria constitui a base para o entendimento da física dos ânions (partículas de spin fracionário), sendo portanto muito útil e relevante no âmbito da física planar. Para conceder dinâmica à teoria Chern-Simons, basta adicionar o termo de Maxwell a sua lagrangeana, constituindo assim a chamada eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons. Por fim, analisamos o modelo de Maxwell-Chern-Simons-Proca (MCS-Proca), no qual o fóton apresenta duas componentes de massa (topológica e de Proca).

2.2 Eletrodinâmica Maxwell em 1+2 dimensões

Como procedimento inicial, optamos por estudar a eletrodinâmica planar de Maxwell considerando o campo A_μ intrinsecamente definido em (1+2) dimensões, ou seja, $A_\mu = (A_0, A_1, A_2)$. Neste caso, a lagrangeana do campo de Maxwell acoplado a um termo de corrente é dado por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A^\mu J_\mu, \quad (2.1)$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor intensidade do campo eletromagnético, dado segundo a definição usual: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Este tensor pode ser representado por uma matriz de nove componentes, que devido a sua natureza anti-simétrica, apresenta apenas três graus de

liberdade, sendo dois associados ao campo elétrico (E_x, E_y) e o terceiro associado ao campo magnético (B), que em (1+2) se comporta como um escalar (dado que o rotacional em duas dimensões produz um escalar). Mais especificamente, o campo magnético tem natureza pseudo-escalar, denominação dada devido ao comportamento desta quantidade perante a operação de paridade (P), sob a qual sofre uma inversão de sinal: $B \xrightarrow{P} -B$.

Assim como ocorre em (1+3) dimensões, o tensor de campo tem suas componentes escritas em termos dos campos \vec{E} e B , de fato:

$$F^{0i} = \partial_t A^i + \partial_i A_0 = -E^i, \quad (2.2)$$

$$F^{ij} = -\epsilon_{ij} \partial^i A^j = -B. \quad (2.3)$$

Escrevendo explicitamente todas as componentes do tensor, o mesmo pode ser expresso na forma matricial:

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y \\ E_x & 0 & -B \\ E_y & B & 0 \end{bmatrix}.$$

Para obter as equações de movimento, aplica-se o princípio de Hamilton, que conduz à equação Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\nu A_\mu)} = 0. \quad (2.4)$$

Aplicando então a eq.(2.4) sobre a lagrangeana (2.1), obtemos $\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$, que conduz às equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho, \quad (2.5)$$

$$\nabla B + \partial_t \vec{E}^* = -J^*, \quad (2.6)$$

onde a eq.(2.6) pode também ser escrita na forma $\nabla^* B - \partial_t \vec{E} = -\vec{J}$, sendo que $\nabla^* = (\partial_y, -\partial_x)$ é o dual do operador gradiente. A definição das componentes do vetor dual é $E^{i*} = \epsilon_{ij} E^j$, o que implica em $\vec{E}^* = (E_y, -E_x)$. A terceira equação de movimento,

$$\nabla \times \vec{E} - \partial_t B = 0, \quad (2.7)$$

advém da identidade de Bianchi, $\partial_\mu F^{\mu*} = 0$, onde $F^{\mu*}$ é o tensor dual do campo eletromagnético, dado pela definição $F^{\mu*} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\gamma} F_{\nu\gamma}$. Diferentemente do que ocorre em (1+3) dimensões, $F^{\mu*}$ é agora um 3-vetor: $F^{\mu*} = (B, -\vec{E}^*)$.

Neste contexto, o tensor $F^{\mu\nu}$ de *rank-2* possui um dual $F^{\mu*}$ de *rank-1*, situação em que é evidenciada a quebra da dualidade, fato confirmado pela natureza vetorial do campo elétrico e pseudo-escalar do campo magnético. Percebe-se assim que, diferentemente da eletrodinâmica usual, a eletrodinâmica planar não exibe a simetria de dualidade em circunância alguma.

Partindo-se do conjunto de equações de Maxwell apresentadas, podemos obter as equações de onda para os campos \vec{E} e B :

$$\partial_t^2 \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -\vec{\nabla} \rho - \partial_t \vec{j}, \quad (2.8)$$

$$\partial_t^2 B - \nabla^2 B = \vec{\nabla} \times \vec{j}, \quad (2.9)$$

onde foram usadas as seguintes identidades vetoriais: $\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^*(\nabla \times \vec{E}) = \nabla^2 \vec{E}$ e $\nabla \times \nabla^* B = -\nabla^2 B$, válidas em (1+2) dimensões. Usando as relações $B = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, $\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \nabla A_0$, ainda podemos escrever as equações para as componentes do 3-potencial, que satisfazem equações de onda não-homogêneas:

$$\square A_0 = \rho, \quad (2.10)$$

$$\square \vec{A} = \vec{j}. \quad (2.11)$$

Na ausência de fontes ($\rho = j = 0$), tais equações recaem na forma de equações homogêneas, usualmente válidas em (1+3) dimensões, a saber: $\square \vec{E} = 0$, $\square B = 0$, $\square A_0 = 0$,

$$\square \vec{A} = 0.$$

Tais equações de onda admitem soluções tipo onda-plana. Isto é facilmente demonstrado propondo-se soluções na forma:

$$\vec{E} = E_0 \exp \left[i \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - wt \right) \right], \quad (2.12)$$

$$B = B_0 \exp \left[i \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - wt \right) \right], \quad (2.13)$$

que tomadas em conjunto com as equações de Maxwell, implicam nas seguintes relações:

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0, \quad (2.14)$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = -wB, \quad (2.15)$$

$$-w\vec{E} = k^* B. \quad (2.16)$$

Das equações acima, é possível chegar a conclusões importantes acerca da eletrodinâmica planar de Maxwell: (i) o campo elétrico é perpendicular à direção de propagação da onda definida pelo vetor \vec{k} ; (ii) o campo planar de Maxwell propaga apenas um grau de liberdade, pois conhecendo-se a direção de propagação, determina-se a direção do campo elétrico e por conseguinte do campo escalar, que está definido em termos destes dois. As perturbações do sistema físico apresentam um caráter escalar (spin zero), que retrata o que se denomina de fóton planar. Vemos desta forma que, a despeito do tensor $F^{\mu\nu}$ possuir 3 graus de liberdade (*off shell*), a teoria presente tem o número de graus de liberdade reduzido para 1 grau (*on shell*), como resultado da consideração dos vínculos associados com as equações de movimento; portanto, em comparação com a eletrodinâmica convencional, na qual o fóton tem natureza vetorial, na eletrodinâmica planar, o fóton assume característica de uma partícula escalar, pois é descrito por apenas um grau de liberdade.

2.3 Eletrodinâmica Chern-Simons

A eletrodinâmica planar exhibe novas e interessantes propriedades quando o chamado termo de Chern-Simons é considerado. A lagrangeana que descreve tal teoria é apresen-

tada abaixo:

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{s}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho - A_\mu J^\mu, \quad (2.17)$$

onde está incluído o termo de acoplamento do campo com a 3-corrente, que representa a fonte de matéria do campo. O termo Chern-Simon é usualmente conhecido como termo topológico, pois o mesmo não contribui para o tensor energia-momento e não depende da métrica do sistema. É também instrutivo analisar o papel deste termo sobre as simetrias discretas do sistema. O mesmo provoca a quebra das simetrias de paridade (P) e inversão temporal (T), conservando a simetria (PT) e a simetria de conjugação de carga (C). Ademais, esta lagrangeana é invariante de Lorentz e de gauge. De fato, sob a ação de uma transformação de gauge $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda$, a lagrangeana do sistema varia por um termo de divergência total, a saber: $\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{s}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho \right)$, que se anula em superfícies distantes.

Em termos das coordenadas do espaço-tempo e do 3-vetor A_μ , as transformações de paridade e inversão temporal em um sistema planar, estão dadas por:

$$x_\mu \xrightarrow{P} x_\mu^{(P)} = (x_0, -x_1, x_2), \quad A_\mu \xrightarrow{P} A_\mu^{(P)} = (A_0, -A_1, A_2), \quad (2.18)$$

$$x_\mu \xrightarrow{T} x_\mu^{(T)} = (-x_0, x_1, x_2), \quad A_\mu \xrightarrow{T} A_\mu^{(T)} = (A_0, -A_1, -A_2). \quad (2.19)$$

A transformação de paridade em $(1 + 3)$ dimensões consiste numa reflexão em relação a um plano que contém a origem do sistema, alterando a sua natureza de *right-handed* para *left-handed*, ou vice-versa, o que implica em fazer $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$. Já em $(1 + 2)$ dimensões, a operação de paridade deve consistir em uma reflexão em relação a apenas um dos eixos que compõe o plano, uma vez que a reflexão relativa aos dois eixos resultaria em uma rotação de π no plano, o que configuraria uma transformação contínua, em oposição à natureza discreta da reversão espacial.

A reversão temporal, por sua vez, está definida em $(1 + 2)$ dimensões da mesma forma que em 4-dimensões. A ação do operador (T) sobre os observáveis deve pautar-se

pela invariabilidade da dinâmica do sistema após sua aplicação. Retornando à eq.(2.17), podemos submetê-la a ação da equação de Euler-Lagrange, procedimento que conduzirá à seguinte equação de movimento:

$$J^\mu = \frac{s}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha} F_{\nu\alpha}. \quad (2.20)$$

Tomando-se a divergência desta equação, obtemos a relação de continuidade, que implicará também na identidade de Bianchi, pois: $\partial_\mu J^\mu = 0 \rightarrow \epsilon^{\mu\nu\alpha} \partial_\mu F_{\nu\alpha} = 0 \rightarrow \partial_\mu F^{\mu*} = 0$. Podemos ainda extrair da eq.(2.20) as equações de movimento para os campos de Chern-Simons, resultando em:

$$B = -\frac{\rho}{s}, \quad (2.21)$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{s} \vec{J}^*, \quad (2.22)$$

onde fizemos uso de $\vec{J}^* = (J_y, -J_x)$. Além destas, partindo da identidade de Bianchi, verificamos a existência da uma terceira equação de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} + \partial_t B = 0. \quad (2.23)$$

Como uma interpretação das equações de movimento de Chern-Simons, podemos chegar a conclusões importantes: (i) este modelo não apresenta dinâmica, refletindo o fato de o campo de Chern-Simons não satisfazer equações de onda e se propagar como um puro gauge; (ii) atrelado a toda carga, há um fluxo de campo magnético. Este fato é uma decorrência direta da eq.(2.21), que estabelece a proporcionalidade entre o campo magnético e a densidade de carga, que implica numa relação direta entre a carga e fluxo magnético. Vemos assim que, na teoria de Chern-Simons, uma carga em repouso gera tanto campo elétrico quanto magnético.

De início, vamos idealizar uma distribuição puntiforme de carga $\rho(r) = e_3 \delta(r - r_i)$, onde r_i localiza a posição de carga no plano. Integrando-se o campo magnético no espaço em torno de um círculo que contém a carga, obtemos o fluxo magnético por este círculo,

que resulta em ser igual à carga elétrica:

$$\int B d^2 \vec{r} = \phi_n = -\frac{e_3}{s}, \quad (2.24)$$

onde ϕ_n representa o fluxo magnético vinculado à partícula. Este resultado, obtido para uma partícula, pode ser generalizado para todas as partículas presentes no plano. A auto-interação entre a carga elétrica e seu fluxo magnético é nula, mas a interação da carga e os fluxóides de outras partículas não pode ser desprezada, originando interessantes consequências quânticas associadas ao efeito Aharonov-Bohm, que em sua essência implica na possibilidade de uma estatística arbitrária ou fracionária. Neste cenário surgem os ânions, partículas descritas por uma estatística fracionária (apresentam spin fracionário).

Conclusivamente, a teoria de Chern-Simons acoplada com a corrente de matéria, $J^\mu = (\rho, \vec{j})$, estabelece a base para o entendimento do mecanismo que leva à composição e realização da física dos ânions. Pela eq.(2.20) podemos escrever o campo de gauge $A^\mu(\vec{x}, t)$ em termos de uma corrente particular. A liberdade gauge pode ser fixada na formulação Hamiltoniana tomando $A_0 = 0$ e impondo $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. Temos então:

$$A^i(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi s} \int d^2 y \epsilon^{ij} \frac{(x^j - y^j)}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} \rho(\vec{y}, t) = \frac{e_3}{2\pi s} \sum_{a=1}^N \epsilon^{ij} \frac{(x^j - x_a^j(t))}{|\vec{x} - \vec{x}_a(t)|^2}. \quad (2.25)$$

Esta é a solução do vetor potencial para um sistema de N ânions localizados nas posições x_a do plano.

2.4 Eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons

Embora o campo de Chern-Simons se propague como puro gauge, podemos conceder propagação dinâmica a esse campo simplesmente adicionando à lagrangeana de CS o termo de Maxwell, fato que proporciona equações de onda para os campos elétricos e magnéticos. A teoria de Maxwell-Chern-Simons está descrita pela lagrangeana seguinte:

$$\mathcal{L}_{CS} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{s}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho - A_\mu J^\mu, \quad (2.26)$$

onde foi considerada a presença do acoplamento do campo com a 3-corrente. Com a utilização da equação de Euler-Lagrange, obtemos a equação de movimento:

$$-\partial_\nu F^{\nu\mu} + \frac{s}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} = J^\mu. \quad (2.27)$$

Avaliando a equação acima e a identidade de Bianchi, escrevemos as equações de movimento para os campos (\vec{E} e B):

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho + sB, \quad (2.28)$$

$$-\partial_t \vec{E} + \nabla^* B = j + s\vec{E}^*, \quad (2.29)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t B. \quad (2.30)$$

As eqs.(2.28) e (2.29) são oriundas da eq.(2.27), enquanto que a eq.(2.30) advém da identidade de Bianchi. Manipulando essas expressões obtemos as equações de onda para os campos elétricos e magnéticos:

$$(\square + s^2)B = \vec{\nabla} \times \vec{j} - s\rho, \quad (2.31)$$

$$(\square + s^2)\vec{E} = s\vec{j}^* - \partial_t \vec{j} - \nabla\rho, \quad (2.32)$$

Novamente, será útil escrevermos as equações de onda para os potenciais, obtidas de manipulações algébricas das equações precedentes:

$$\square(\square + s^2)A_0 = \square\rho + s\nabla \times \vec{j}, \quad (2.33)$$

$$\square(\square + s^2)\vec{A} = -s\nabla^*\rho + \square\vec{j} - s\partial_t J^*. \quad (2.34)$$

No regime estacionário, as equações de onda assumem a forma:

$$(\nabla^2 - s^2)B = -\vec{\nabla} \times \vec{j} + s\rho, \quad (2.35)$$

$$(\nabla^2 - s^2)\vec{E} = -s\vec{j}^* + \nabla\rho, \quad (2.36)$$

$$\nabla^2 (\nabla^2 - s^2) A_0 = -\nabla^2 \rho + s\nabla \times \vec{j}, \quad (2.37)$$

$$\nabla^2 (\nabla^2 - s^2) \vec{A} = -s\nabla^* \rho - \nabla^2 \vec{j} - s\partial_t J^*. \quad (2.38)$$

Notamos aqui que ambos os potenciais obedecem a uma equação diferencial não homogênea de quarta ordem, uma diferença significativa em relação ao resultado da teoria de Maxwell pura, onde os potenciais satisfazem equações de segunda ordem. As eqs.(2.33) e (2.34) também evidenciam uma nova realidade: o potencial escalar recebe contribuição da densidade de carga e da densidade de corrente. Em tal formalismo, o potencial escalar, devido à uma distribuição de carga estática, irá diferir daquele associado com a mesma distribuição de carga em movimento, desde que $\nabla \times \vec{j} \neq 0$. Isto ocorre porque tanto ρ quanto \vec{j} atuam como fonte de A_0 . O mesmo ocorre com o potencial vetor, que também é gerado por distribuições de carga ρ e de corrente \vec{j} .

Considerando agora uma distribuição de carga pontual, representada por uma função delta de Dirac, $\rho(r) = e_3\delta(r)$, a eq.(2.37) fornece:

$$\nabla^2 (\nabla^2 - s^2) A_0(r) = -e_3\nabla^2\delta(r). \quad (2.39)$$

A solução para o potencial escalar pode ser encontrada através do método de Green, que é implementado escrevendo-se a transformada de Fourier para a expressão do potencial escalar,

$$A_0(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\vec{k} [e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tilde{A}_0(k)], \quad (2.40)$$

e substituindo-a na eq. (2.39), que resulta em: $\tilde{A}_0(k) = e_3/[\mathbf{k}^2 + s^2]$, onde $\mathbf{k}^2 = \vec{k}^2$. O potencial escalar é então obtido como a transformada de Fourier de $\tilde{A}_0(k)$, através da eq. (2.40), o que conduz a:

$$A_0(r) = \frac{e_3}{2\pi} K_0(sr). \quad (2.41)$$

Pelo mesmo procedimento e, partindo da eq.(2.38), podemos encontrar a solução para o potencial vetor, dada como segue:

$$\vec{A}(r) = \frac{e_3}{2\pi} \left[\frac{1}{sr} (1 - srK_1(sr)) \hat{r}^* \right], \quad (2.42)$$

o qual próximo da origem ($r \ll 1$), tende a zero [$\vec{A}(r) \rightarrow 0$] e decai com $1/r$ para $r \rightarrow \infty$. Partindo destas soluções dos potenciais e usando $B = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, $\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \nabla A_0$, obtemos os campos elétrico e magnético:

$$\vec{E}(r) = \frac{e_3 s}{2\pi} K_1(sr) \hat{r}, \quad (2.43)$$

$$B(r) = -\frac{e_3 s}{2\pi} K_0(sr). \quad (2.44)$$

Como é de se esperar, trata-se de duas soluções blindadas para os campos \mathbf{E} e B , uma consequência do caráter massivo do fóton de MCS. É fato bem conhecido que uma carga puntual estática em $(1 + 2)$ dimensões gera um potencial escalar logarítmico quando os fótons não são massivos. Portanto, concedendo massa aos fótons, observamos que o comportamento do potencial escalar é dramaticamente modificado de um logaritmo (comportamento confinante) para uma função Bessel- K_0 (comportamento de curtíssimo alcance, associado com seu decaimento assintótico do tipo exponencial).

2.5 Eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons-Proca

No modelo de Maxwell-Chern-Simons-Proca, a partícula de gauge exibe duas contribuições de massa, associadas aos termos de Chern-Simons e de Proca. No caso, a massa de Proca advém de uma quebra espontânea de simetria (QES), onde o mecanismo de Higgs se encarrega de gerar tal massa para o fóton. Portanto, o modelo de Maxwell-Chern-Simons

na presença do setor de Higgs, e considerado na fase da simetria quebrada (pós QES), tem seu setor de gauge dado pela seguinte Lagrangeana:

$$\mathcal{L}_{MCSP} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{s}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho + \frac{M_A^2}{2}A^\mu A_\mu - A_\mu J^\mu. \quad (2.45)$$

Desta, obtemos a seguinte equação de movimento:

$$-\partial_\nu F^{\mu\nu} + \frac{s}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} + M_A^2 A^\mu = J^\mu, \quad (2.46)$$

que produz as duas equações de Maxwell não homogêneas:

$$\rho + sB = \nabla \cdot \vec{E} + M_A^2 A_0, \quad (2.47)$$

$$-\partial_t \vec{E} + \nabla^* B = \vec{J} + s\vec{E}^* - M_A^2 \vec{A}. \quad (2.48)$$

Novamente, a terceira equação é obtida da identidade de Bianchi, a saber, $(\nabla \times \vec{E} = -\partial_t B)$. Podemos ainda escrever as equações de onda para os campos elétricos e magnéticos:

$$(\square + M_A^2 + s^2)B = \vec{\nabla} \times \vec{j} - s\rho + sM_A^2 A_0, \quad (2.49)$$

$$(\square + M_A^2 + s^2)\vec{E} = -\nabla\rho - \partial_t \vec{j} + s\vec{j}^* - M_A^2 s\vec{A}^*. \quad (2.50)$$

Após algumas manipulações algébricas, são obtidas equações de quarta ordem para o potencial escalar e vetor:

$$\square (\square + 2M_A^2 + s^2) A_0 + M_A^4 A_0 = (\square + M_A^2)\rho + s\nabla \times \vec{j}, \quad (2.51)$$

$$\square (\square + 2M_A^2 + s^2) \vec{A} + M_A^4 \vec{A} = (\square + M_A^2) \vec{j} - s\nabla^* \rho - s\partial_t J^*. \quad (2.52)$$

Considerando o regime estático e uma distribuição de carga pontual, resulta:

$$[\nabla^2 (\nabla^2 - 2M_A^2 - s^2) + M_A^4] A_0(r) = -e_3[\nabla^2 - M_A^2]\delta(r), \quad (2.53)$$

$$[\nabla^2 (\nabla^2 - 2M_A^2 - s^2) + M_A^4] \vec{A}(r) = -e_3 s \nabla^* \delta(r). \quad (2.54)$$

As soluções para $A_0(r)$ e $\vec{A}(r)$ são obtidas pelo método de Green, propondo-se transformada de Fourier para estes potenciais, como representado pela eq.(2.40). Resolvendo para $\widetilde{A}_0(k)$ e $\widetilde{A}(k)$, obtemos: $\widetilde{A}_0(k) = e_3[\mathbf{k}^2 + M_A^2]/[\mathbf{k}^2(\mathbf{k}^2 + 2M_A^2 + s^2) + M_A^4]$, $\widetilde{A}(k) = e_3 s \nabla^*/[\mathbf{k}^2(\mathbf{k}^2 + 2M_A^2 + s^2) + M_A^4]$. Calculando agora as transformadas de Fourier destas quantidades, resulta:

$$A_0(r) = \frac{e_3}{2\pi} [C_+ K_0(m_+ r) + C_- K_0(m_- r)], \quad (2.55)$$

$$\vec{A}(r) = \frac{e_3}{2\pi} \{-c[m_+ K_1(m_+ r) - m_- K_1(m_- r)]\hat{r}^*\}, \quad (2.56)$$

onde $\hat{r}^* = (\hat{y}, -\hat{x})$ é o dual do versor radial e são usadas as seguintes constantes:

$$m_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[(2M_A^2 + s^2) \pm |s| \sqrt{s^2 + 4M_A^2} \right], \quad (2.57)$$

$$C_{\pm} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{|s|}{\sqrt{s^2 + 4M_A^2}} \right], \quad B = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 4M_A^2}}. \quad (2.58)$$

Próximo da origem ($r \rightarrow 0$), tais soluções se comportam como $A_0(r) \rightarrow \frac{e}{2\pi} [-\ln(r)]$ e $\vec{A}(r) \rightarrow 0$, o que mostra o comportamento logarítmico repulsivo para o potencial escalar, enquanto o potencial vetor se anula. Longe da origem, tais potenciais decaem exponencialmente, como reflexo da natureza massiva das intermediações.

Partindo-se das expressões dos potenciais escalar e vetor, poderemos encontrar facilmente as expressões para os campos elétricos e magnéticos:

$$\vec{E}(r) = \frac{e_3}{2\pi} \{C_+ m_+ K_1(m_+ r) + C_- m_- K_1(m_- r)\} \hat{r}, \quad (2.59)$$

$$B(r) = \frac{e_3}{2\pi} \{-B[m_+^2 K_0(m_+ r) - m_-^2 K_0(m_- r)]\}. \quad (2.60)$$

Observamos que os campos \mathbf{E} e B são constituídos por combinações lineares de funções K_0 e K_1 , resultando num comportamento totalmente blindado.

2.6 Observações finais

Neste capítulo, analisamos alguns aspectos básicos da eletrodinâmica clássica em $(1 + 2)$ dimensões, envolvendo os modelos de Maxwell, Chen-Simons, Maxwell-Chern-Simons e Maxwell-Chern-Simons-Proca. Tomando como ponto inicial as respectivas lagrangeanas, obtemos as correspondentes equações de movimento e equações de onda para as intensidades dos campos e potenciais, em cada um destes modelos. Exceto no caso do modelo de Chern-Simons, que não exhibe equações de onda (propagação dinâmica), verificamos que tanto os campos \mathbf{E} e B , quanto os potenciais A_0 e \mathbf{A} , satisfazem equações de onda bem definidas. No caso dos modelos de MCS e MCS-Proca, as equações de onda satisfeitas pelos potenciais são de quarta ordem e não homogêneas. Usando o método de Green simplificado, obtemos as soluções os potenciais (A_0 e \mathbf{A}) e os campos (\mathbf{E} e B) correspondentes a uma carga puntiforme.

Capítulo 3

Cálculo do potencial de interação elétron-elétron no contexto das teorias de MCS e MCS-Proca

3.1 Introdução

Na década de 90, a QED₃ (Eletrodinâmica Quântica Planar) foi tema de intensas e diversas investigações, no intuito de avaliar as possibilidades de aplicação do seu ferramental teórico para explicar fenômenos importantes ligados à Física da matéria condensada, como exemplo a SAT_c e o efeito Hall quântico. Dado o caráter planar destes fenômenos, alguns modelos teóricos novos, tais como os derivados da QED₃, foram usados para tentar explicá-los.

As tentativas de obter estados ligados para pares de elétrons fazendo-se uso da eletrodinâmica planar de Maxwell-Chern-Simons (MCS) remontam ao início da década de 90. A idéia central consistia no emprego do termo de Chern-Simons, com o objetivo de conceder massa aos fótons planares³, assegurando uma interação de gauge de comportamento $1/r^2$,

³É fato conhecido que a interação coulombiana tem caráter confinante em (1+2) dimensões, ou seja, é descrita por um potencial logarítmico, de alcance infinito que cresce com a distância. Uma maneira eficiente de obter um potencial de interação não confinante consiste em conceder massa ao fóton, que

a qual estaria associada um potencial atrativo. O trabalho pioneiro coube a Kogan [22], que fez uso da técnica de espalhamento de teoria de campos, no limite não-relativístico, com a finalidade de obter o potencial de interação entre dois elétrons; como resultado, encontrou um potencial que se revelou atrativo no caso da interação de dipolo magnético (associada ao spin) ser dominante sobre a repulsão coulombiana. Na mesma perspectiva, Groshev e Poppitz [23] calcularam a equação de Schrödinger não relativística partindo da expressão do potencial conseguido para um par elétron-elétron, cuja análise mostrou ser a interação magnética de spin a responsável pelo aparecimento de um poço no potencial de 2-elétrons para alguns valores do termo CS. Em seguida, Girotti *et al.* [24] adotaram a teoria de MCS para calcular, o potencial de interação para dois elétrons, obtendo o chamado potencial de MCS, que segundo estes autores poderia ser atrativo para alguns valores dos parâmetros. Este resultado foi então contestado por Hagen [25], que mostrou que o mesmo era redução imprópria do potencial Aharonov-Bohm, haja visto que o termo quadrático $A_\mu A^\mu$, que pertence ao potencial Aharonov-Bohm, não aparecia no resultado da ref. [24], implicando na quebra da simetria de gauge. Em contrapartida, Girotti *et al.* [26] afirmaram que o potencial de Aharonov-Bohm só aparece completo quando o campo eletromagnético é externo, situação na qual o termo $A_\mu A^\mu$ é essencial para garantir a invariância de gauge da equação de Schrödinger. Numa outra referência, Dobroliubov *et al.* [27] analisaram esta questão do ponto de vista da validade do regime perturbativo, definido no contexto da teoria de MCS para para $\lambda^{-1} \ll 1$ onde λ é o parâmetro estatístico - $\lambda = s/e_3^2$. Chegaram então à conclusão que o resultado da ref.[24] foi obtido no regime em que a massa topológica é muito menor que a massa do elétron ($s \ll m_e$), que implica em λ pequeno, condição que se situa fora do regime perturbativo. Neste regime, portanto, os termos em $1/\lambda^2$ não podem mais ser desprezados, podendo vir a ser tão significativos a ponto de alterar um resultado estabelecido a *tree-level*. Como resultado desta análise, fica estabelecido que temos de levar em consideração o diagrama de troca de dois fótons, que proporciona uma contribuição em ordem $1/\lambda^2$ à amplitude de

passa então a intermediar uma interação decrescente com a distância, o que é fisicamente mais apropriado.

espalhamento, resgatando assim a invariância de gauge do resultado e obtendo o potencial de interação correto em (1+2) dimensões. Na ref.[27] ainda são analisadas diversas situações nas quais os espalhamentos e^-e^- , e^+e^+ , podem vir a proporcionar estados ligados, resultado que se configura quando a interação do dipólo magnético supera a repulsão coulombiana (p/ cargas iguais), e quando a massa topológica é maior que a massa do elétron ($s > m_e \cong 500.000eV$).

Outro trabalho que exhibe potenciais de interação elétron-elétron obtidos a partir da amplitude Möller, calculada no regime não-relativístico, é o da ref.[29], onde Georgelin e Wallet tomaram como ponto de partida duas lagrangeanas de MCS, a primeira com campo de gauge acoplado não-minimamente a férmions, a segunda com o campo de gauge acoplado não-minimamente a bósons, de maneira a considerar a introdução no problema do momento magnético anômalo do elétron. O termo de acoplamento não-mínimo quebra a renormalizabilidade do sistema, o que restringe a realização dos cálculos de espalhamento obrigatoriamente a *tree-level*. Trabalhando nesta condição, e dentro do limite perturbativo, $1/\lambda \ll 1$, eles obtiveram um potencial atrativo para férmions ($V_{\psi\psi} < 0$), e também para bósons escalares ($V_{\varphi\varphi} < 0$), na aproximação não-relativística. A presença do acoplamento não mínimo é apontado como fator-chave para a produção do potencial atrativo entre cargas iguais. A principal importância deste método reflete-se na atratividade do potencial, observada mesmo no limite da massa topológica muito pequena $s \ll m_e$.

De todos os modelos citados, somente o da ref.[29] revela-se compatível sob a perspectiva de aplicação para descrever a física de alguns sistemas da matéria condensada, onde deve valer $s \ll m_e$. Importante destacar que essa condição invalida a aplicação de qualquer um dos outros modelos para explicar a formação de pares ligados no âmbito de sistemas da matéria condensada, onde as excitações físicas exibem energia com várias ordens de grandeza abaixo da magnitude da massa do elétron ($E \ll m_e$). Veremos também que, a introdução do setor de Higgs, no cenário da eletrodinâmica MCS, trará à luz uma contribuição atrativa ao potencial de interação, que supera a contribuição repulsiva, também independentemente da condição ($s > m_e$). Observamos assim que a teoria de MCS

com setor de Higgs (MCS-Proca) pode ser tomada como um ferramental teórico para a obtenção de um potencial total atrativo. Nas seções seguintes, estudaremos a obtenção do potencial de interação elétron-elétron no contexto das eletrodinâmicas planares de MCS e MCS-Proca. Tais resultados são tomados como referência de comparação nos capítulos seguintes dessa dissertação.

3.2 O modelo planar de MCS para o cálculo de espalhamento Möller

O ponto de partida para o cálculo do potencial de interação elétron-elétron é a definição da lagrangeana planar que descreve o campo de gauge de MCS em interação com o campo espinorial de Dirac:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{s}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha}A^\mu\partial^\nu A^\alpha - \frac{1}{2\lambda}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m_e)\psi, \quad (3.1)$$

onde $\mathcal{D} = \equiv (\not{\partial} + ie_3\not{A})$ é a derivada covariante que estabelece o acoplamento mínimo do elétron com o campo eletromagnético enquanto $(1/2\lambda)(\partial_\mu A^\mu)^2$ representa o termo de fixação de gauge.

No presente modelo teórico, dois elétrons interagem através da troca de um fóton planar de MCS, que atua como mediador da interação eletromagnética (entre ambos). Tal interação é representada a *tree-level* pelo seguinte diagrama de Feynman.

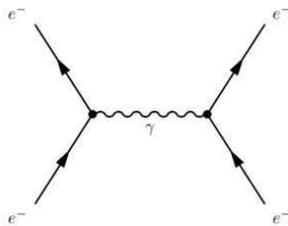


Diagrama de Feynman ilustrativo da interação elétron-elétron

Dentro da eletrodinâmica quântica, a este diagrama está associada uma amplitude de probabilidade (\mathcal{M}), que reflete a possibilidade deste tipo de espalhamento ocorrer.

No contexto da aproximação de Born, o potencial que descreve a interação entre os dois elétrons é obtido como sendo a transformada de Fourier da amplitude de espalhamento de Möller, sendo esta obtida a partir da aplicação das regras de Feynman ao diagrama da figura anterior. Para a sua determinação, é necessário encontrar o propagador do campo de gauge, que é responsável pela intermediação da interação efetiva entre os elétrons (férmions)⁴. O propagador aparece imbutido dentro das regras de Feynman (para o cálculo da amplitude de espalhamento), sendo o elemento de comunicação entre os vértices do diagrama (pontos onde ocorre a interação). No caso da teoria de MCS, o propagador de gauge é representado abaixo:

$$D_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2 - s^2} \left(\Theta_{\mu\nu} - i s \epsilon_{\mu\alpha\nu} \frac{k^\alpha}{k^2} \right) - i \lambda \frac{k_\mu k_\nu}{k^4}, \quad (3.2)$$

onde $\Theta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$. Detendo a forma do propagador, podemos agora realizar a construção da amplitude de espalhamento Möller, a partir da qual tomamos a transformada de Fourier para a devida construção do potencial de interação (aproximação de Born). Para escrever a amplitude associada ao processo de espalhamento, temos que observar as regras de Feynman⁵ para a interação elétron-campo de gauge, considerando a lagrangeana (3.1), da qual obtemos os vértices da interação $(ie\gamma^\mu)$ ⁶. De acordo com as regras de Feynman aplicadas a este diagrama, a amplitude de espalhamento Möller assume a forma:

$$-i\mathcal{M} = -e_3^2 \bar{u}(p'_1) \gamma^\mu u(p_1) D_{\mu\nu}(k) \bar{u}(p'_2) \gamma^\nu u(p_2). \quad (3.3)$$

Tal expressão pode ser escrita em uma forma mais compacta com a utilização dos termos das 3-correntes fermiônicas:

⁴No contexto das teorias de campos, todas as interações físicas, sendo elas de gauge ou não, são transmitidas por partículas mediadoras. A ação das partículas mediadoras é, portanto, conduzir a informação constitutiva da interação entre as partículas fonte, como elétrons, prótons, nêutrons, etc. Nesse sentido, conhecer o propagador corresponde a identificar como essa interação se propaga.

⁵As regras de Feynman para cálculo de amplitudes de espalhamento podem ser encontradas em diversos livros texto. Ver ref.[28].

⁶Os mesmos estão inseridos no termo de acoplamento mínimo $(ie\gamma^\mu \bar{\psi} A_\mu \psi)$.

$$J^\mu(p_1) = \bar{u}(p_1')\gamma^\mu u(p_1) , \quad (3.4)$$

$$J^\nu(p_2) = \bar{u}(p_2')\gamma^\nu u(p_2), \quad (3.5)$$

e deste modo, obtendo:

$$-i\mathcal{M} = -e_3^2 J^\mu(p_1) D_{\mu\nu}(k) J^\nu(p_2) . \quad (3.6)$$

No intuito de calcular as 3-correntes, faz-se necessário primeiramente escrever explicitamente os espinores $u(p)$, que representam a solução da equação de Dirac planar,

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (3.7)$$

e satisfazem a condição de normalização:

$$\bar{u}(p) u(p) = 1 \quad (3.8)$$

Para chegar às soluções da eq.(3.7), é necessário definir o conjunto das matrizes γ^μ , em $(1 + 2)$ dimensões, que satisfazem a álgebra $so(1, 2)$, ou seja, $[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2i\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \gamma_\alpha$. No caso, as matrizes $\gamma^\mu = (\sigma_z, -i\sigma_x, i\sigma_y)$ são as próprias matrizes de Pauli assim descritas:

$$\gamma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

De posse dessas informações, escrevermos a solução espinorial de energia positiva e o espinor conjugado, como mostrado a seguir:

$$u(p) = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{bmatrix} E+m \\ -ip_x - p_y \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\bar{u}(p) = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} [E+m \quad - (ip_x - p_y)]. \quad (3.11)$$

O espalhamento Möller pode ser analisado no referencial do centro de massa (CM), onde os momentos dos elétrons interagentes são opostos antes e após a "troca de interação". Deste modo, podemos escrever:

$$p_1^\mu = (E, p, 0), \quad p_2^\mu = (E, -p, 0), \quad (3.12)$$

que representam os 3-momentos antes do choque, e

$$p_1'^\mu = (E, p \cos \theta, p \sin \theta), \quad p_2'^\mu = (E, -p \cos \theta, -p \sin \theta), \quad (3.13)$$

que representam os 3-momentos após o choque.

Neste ponto, voltando à eq.(3.6) será útil escrevermos as componentes da 3-corrente, cujas formas são dadas como se segue:

$$J^0(p_1) = J^0(p_2) = \frac{1}{2m(E+m)} [(E+m)^2 + p^2 e^{i\theta}], \quad (3.14)$$

$$J^1(p_1) = \frac{p}{2m} (1 + e^{i\theta}) = -J^1(p_2), \quad (3.15)$$

$$J^2(p_1) = -J^2(p_2) = \frac{ip}{2m} (1 - e^{i\theta}). \quad (3.16)$$

Estamos agora em total condição de finalizar o cálculo da amplitude de espalhamento,

$$-i\mathcal{M} = -e_3^2 J^\mu(p_1) \left[\frac{-i}{k^2 - s^2} \left(g_{\nu\mu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - i s \epsilon_{\mu\alpha\nu} \frac{k^\alpha}{k^2} \right) - i\lambda \frac{k_\mu k_\nu}{k^4} \right] J^\nu(p_2). \quad (3.17)$$

É observado que os termos $k_\mu J^\mu$ não contribuem no cálculo da amplitude corrente-corrente, devido à lei de conservação de corrente ($\partial_\mu J^\mu = 0$), que equivale a $k_\mu J^\mu = 0$. Calculando os termos da amplitude corrente-corrente individualmente, escrevemos:

$$J^\mu(p_1) g_{\mu\nu} J^\nu(p_2) = 1, \quad (3.18)$$

$$J^\mu(p_1) \epsilon_{\mu\alpha\nu} k^\alpha J^\nu(p_2) = \left[\frac{\vec{k}^2}{m_e} - \frac{2i}{m_e} \vec{k} \times \vec{p} \right]. \quad (3.19)$$

onde $\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)$, além de que fez-se uso do "momento de transferência", definido por $k^\mu = p_1^\mu - p_2^\mu = (0, p(1 - \cos \theta), -p \sin \theta)$. Por conseguinte, retornamos agora à amplitude de espalhamento de MCS, que assume a forma:

$$\mathcal{M}_{MCS} = e_3^2 \left[\left(1 - \frac{s}{m_e}\right) \frac{1}{[\mathbf{k}^2 + s^2]} - \frac{2i s}{m_e} \frac{\vec{k} \times \vec{p}}{[\mathbf{k}^2 (\mathbf{k}^2 + s^2)]} \right]. \quad (3.20)$$

Como uma etapa final, resta obter o potencial de interação como sendo a transformada de Fourier da eq.(3.20),

$$V_{MCS}(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathcal{M}_{MCS} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^2k, \quad (3.21)$$

onde $d^2k = kdkd\theta$. Substituindo a amplitude de espalhamento na eq.(3.21), temos como resultado:

$$V_{MCS}(r) = \frac{e_3^2}{(2\pi)} \left[\left(1 - \frac{s}{m_e}\right) K_0(sr) - \frac{2L}{m_e sr^2} [1 - srK_1(sr)] \right], \quad (3.22)$$

onde $L = \vec{r} \times \vec{p}$ é o momento angular, que tem natureza escalar em $(1+2)$ dimensões. Aqui, foram usados os seguintes resultados:

$$\int_0^{2\pi} e^{ikr \cos \theta} d\theta = 2\pi J_0(kr), \quad (3.23)$$

$$\int_0^\infty \frac{k J_0(kr)}{[\mathbf{k}^2 + s^2]} dk = K_0(sr), \quad (3.24)$$

$$\int e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \frac{\vec{k} \times \vec{p}}{[\mathbf{k}^2 (\mathbf{k}^2 + s^2)]} d^2k = -i\vec{p} \times \nabla \left[\int_0^\infty \frac{k J_0(kr)}{[\mathbf{k}^2 (\mathbf{k}^2 + s^2)]} dk \right], \quad (3.25)$$

$$\int_0^\infty \frac{k J_0(kr)}{[\mathbf{k}^2 (\mathbf{k}^2 + s^2)]} dk = -\frac{1}{s^2} [\ln(r) + K_0(sr)]. \quad (3.26)$$

Podemos discutir o comportamento do potencial V_{MCS} através de uma análise gráfica, o que é feito na Fig. [3.1], pela qual se percebe que o potencial de interação de MCS revela-se sempre repulsivo para valores dos parâmetros s, L . Em outros gráficos, foi também observado que variações sensíveis no valor do momento angular (L) implicam em alterações muito pequenas no comportamento deste potencial. Tais gráficos, entretanto, não são aqui apresentados. Ainda em relação à Fig. [3.1], percebemos que o potencial apresenta decaimento tanto mais rápido quanto maior for o valor da massa topológica, o que é um resultado esperado.

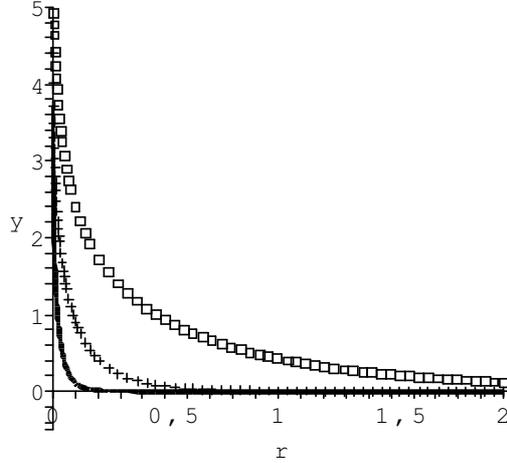


Figura 3.1: Gráfico do potencial de MCS pela distância (r) para os seguintes valores de parâmetros: $L = 1, s = 1eV$ (linha pontilhada em forma de caixa); $L = 1, s = 5eV$ (linha pontilhada em forma de cruz); $L = 1, s = 20eV$ (linha contínua).

3.2.1 Análise do caráter atrativo ou repulsivo do potencial MCS

A discussão da atratividade do potencial de MCS deve ser realizada com cuidado e não pode ser baseada somente na expressão contida na eq.(3.22). Acontece que, especificamente em (1+2) dimensões, um resultado estabelecido a *tree-level* pode ser alterado por contribuição de 1-loop (associada a diagramas de 2-fótons), como discutido na introdução deste capítulo. Este fato foi colocado em evidência pela controvérsia envolvendo o caráter atrativo/repulsivo do potencial MCS [30], na qual foi mostrado que tal potencial é verdadeiramente repulsivo (ao invés de atrativo) quando são levados em conta os diagramas de 2-fótons que asseguram a invariância de gauge. Em resumo, tal discussão mostrou que o comportamento correto de um potencial interação em (1+2) dimensões somente pode ser obtido se os diagramas de 1-loop são levados em consideração. O problema é que o cálculo de tais diagramas é extremamente árduo. Existe, entretanto, um caminho para contornar o difícil cálculo desses diagramas, obtendo o resultado associado aos mesmos sem ter que calculá-los explicitamente. O caminho consiste em requerer a invariância de

gauge da equação de Pauli,

$$\left[\frac{(\mathbf{p} - e_3 \mathbf{A})^2}{m_e} + e_3 \phi(r) - \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{m_e} \right] \Psi(r, \phi) = E \Psi(r, \phi), \quad (3.27)$$

mantendo-a completa no limite não-relativístico⁷. A invariância de gauge da equação de Pauli é assegurada pela presença do termo \mathbf{A}^2 , que obviamente não aparece no contexto dos cálculos perturbativos realizados a baixas energias (uma vez que este é associado com um processo de permuta de dois fótons). A necessidade de considerar o termo A^2 reside no fato de, em (1+2) dimensões, a contribuição destes diagramas de 1-loop poder vir a ser tão relevante quanto os resultados obtidos a *tree-level* (veja Hagen and Dobroliubov [30]). Portanto, tanto este termo quanto a barreira centrífuga devem ser mantidos como termos de correção ao potencial de MCS, conduzindo a um potencial efetivo, válido para a equação de Schrödinger derivada da eq.(3.27). Tal potencial efetivo é o responsável pela representação da verdadeira interação elétron-elétron do modelo MCS no limite não-relativístico.

Para mostrar o caminho de obtenção deste potencial explicitamente, escrevemos o operador laplaciano,

$$\left[\partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r + r^{-2} \partial^2 / \partial \phi^2 \right],$$

correspondente ao termo p^2 da eq.(3.27), o qual quando age na função de onda total, $\Psi(r, \phi) = R_{nl}(r)e^{i\phi l}$, gera o termo repulsivo de barreira centrífuga, $l^2/m_e r^2$. Tal termo é então adicionado a $e_3^2 A \cdot A / m_e$, já presente na eq.(3.27), assim produzindo o potencial efetivo:

$$V_{eff}(r) = V_{gauge}(r) + l^2 / (m_e r^2) + e_3^2 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) / m_e. \quad (3.28)$$

O potencial vetor, \mathbf{A} , advindo da solução clássica do modelo planar descrito pela lagrangeana eq.(2.26), já foi calculado no Cap.II, sendo dado por:

$$\mathbf{A}(r) = \frac{e_3}{(2\pi)} \frac{1}{sr} [1 - sr K_1(sr)] \hat{r}^*, \quad (3.29)$$

⁷No regime de baixas energias (limite não-relativístico), a equação de Dirac recai na equação de Pauli, que corresponde à equação de Schrödinger na presença do campo eletromagnético externo, e do termo de interação spin-órbita ($\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$).

Consequentemente, o potencial efetivo assume a forma final:

$$V_{eff}(r) = V_{gauge}(r) + \frac{L^2}{m_e r^2} + \frac{e_3^2}{m_e} \left(\frac{e_3}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{s^2 r^2} [1 - sr K_1(sr)]^2. \quad (3.30)$$

Na expressão acima, o primeiro termo corresponde ao potencial eletromagnético, ao passo que o segundo inclui a barreira centrífuga ($L^2/m_e r^2$), enquanto o último é termo de Aharonov-Bohm, que inclui o termo de troca de dois fótons. Esse é o potencial efetivo invariante de gauge que representa a correta interação elétron-elétron de MCS observada à baixas energias, quando a análise é tomada fora do regime perturbativo. Interessante ainda ressaltar que o potencial da eq.(3.30) pode ser facilmente escrito na seguinte forma compacta:

$$V_{eff}(r) = \frac{e_3^2}{(2\pi)} \left(1 - \frac{s}{m_e} \right) K_0(sr) + \frac{1}{m_e r^2} \left[L - \frac{e_3^2}{\pi s} [1 - sr K_1(sr)] \right]^2. \quad (3.31)$$

Baseado nesta expressão completa, resta verificar se a interação elétron-elétron pode vir a ser atrativa em alguma região, o que pode ser feito através da análise gráfica comparativa do potencial efetivo com o potencial de MCS, como exibido na Fig. [(3.2)]. Tal figura mostra que ambos potenciais exibem a mesma forma, resultando em gráficos superpostos, para diferentes valores de parâmetros adotados. Baseado na igualdade dos potenciais de MCS e MCS efetivo, exibidos nesta figura e confirmada para muitos outros valores de parâmetros, podemos concluir que o potencial efetivo exibe o mesmo comportamento repulsivo do potencial de MCS. Tal análise revela que tal potencial é na verdade repulsivo para quaisquer valores dos parâmetros, ao contrário do que afirmado por Girotti *et al.*[24].

3.3 O modelo planar MCS-Proca para o cálculo de amplitude e^-e^-

Como uma continuação natural da primeira seção deste capítulo, pretendemos agora derivar o potencial de interação elétron-elétron no contexto da teoria de Maxwell-Chern-

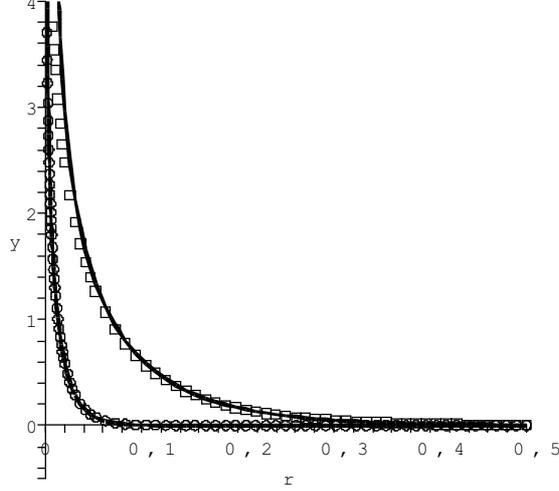


Figura 3.2: Gráfico simultâneo do potencial de MCS e MCS efetivo para os seguintes valores de parâmetros: $m_e = 5 \times 10^5 eV$, $e_3^2 = 9eV$, $s = 10$, $L = 10$ (curva contínua e curva pontilhada em caixa superpostas); $s = 50$, $L = 1$ (curva contínua e curva pontilhada em círculo superpostas).

Simons-Proca, onde o termo de massa de Proca advém de um processo de quebra espontânea de simetria (QES). Para efeito de cálculo, trabalhamos na fase de simetria espontaneamente quebrada, estabelecida após a QES, na qual os fótons adquirem componente de massa de Proca devido ao mecanismo de Higgs. Com o intuito de obter o potencial de interação e^-e^- no contexto deste modelo teórico, adotamos o mesmo procedimento da secção anterior: cálculo da amplitude de espalhamento Möller seguido das transformadas de Fourier.

O ponto de partida é a lagrangeana de MCS-Proca, supletamentada pelo setor de Dirac minimamente acoplado ao campo de gauge:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{s}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha}A^\mu\partial^\nu A^\alpha + \frac{M_A^2}{2}A^\mu A_\mu + \bar{\psi}(i\not{D} - m_e)\psi. \quad (3.32)$$

Para o devido cálculo da amplitude de espalhamento, devemos conhecer a forma do

propagador associado com tal modelo, dado como se segue:

$$D_{\mu\nu} = i \left\{ \frac{(k^2 - M_A^2)}{\boxplus(k)} g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \left[\frac{k^4 - (s^2 + M_A^2) k^2}{M_A^2 \boxplus(k)} \right] - \frac{is}{\boxplus(k)} \epsilon_{\mu\alpha\nu k^\alpha} \right\}, \quad (3.33)$$

onde foi usado a seguinte definição:

$$\boxplus(k) = [k^2 - M_A^2]^2 - s^2 k^2. \quad (3.34)$$

Substituindo a expressão deste propagador na amplitude de espalhamento, dada pela eq.(3.6), obtemos:

$$\mathcal{M}_{MCSP} = e_3^2 \left[\frac{(\mathbf{k}^2 + M_A^2)}{\boxplus(k)} - \frac{s}{\boxplus(k)} \left(\frac{\mathbf{k}^2}{m_e} - \frac{2i}{m_e} \vec{k} \times \vec{p} \right) \right], \quad (3.35)$$

onde foram usadas as expressões para as 3-correntes dadas nas eqs.(3.18), (3.19). De posse da amplitude de espalhamento, podemos calcular o potencial de interação elétron-elétron; para tanto basta tomar a transformada de Fourier da amplitude encontrada na eq.(3.35), ou seja, $V_{MCSP}(r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathcal{M}_{MCSP} \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r}) d^2k$.

Para que tal integração seja factível, é necessário primeiramente fatorar os denominadores dos termos da amplitude da eq.(3.35). Desta forma, escrevemos:

$$\frac{\mathbf{k}^2 + M_A^2}{\boxplus(k)} = \frac{A_+}{\mathbf{k}^2 + m_+^2} + \frac{A_-}{\mathbf{k}^2 + m_-^2}, \quad (3.36)$$

onde:

$$A_\pm = \frac{1}{2} (1 \pm s / \sqrt{s^2 + 4M_A^2}), \quad (3.37)$$

$$m_\pm^2 = \frac{1}{2} \left[2M_A^2 + s^2 \pm |s| \sqrt{4M_A^2 + s^2} \right] \quad (3.38)$$

Prosseguindo com os cálculos, obtemos uma primeira contribuição para o potencial (associada com o termo $(\mathbf{k}^2 + M_A^2) / \boxplus(k)$ da amplitude), na forma:

$$V_I = \frac{e^2}{(2\pi)} [A_+ K_0(m_+ r) + A_- K_0(m_- r)]. \quad (3.39)$$

O mesmo procedimento pode ser aplicado para o segundo termo da amplitude (3.33), cuja fatoração implica em:

$$\frac{s}{\boxplus(k)} = - \left(\frac{B}{\mathbf{k}^2 + m_+^2} - \frac{B}{\mathbf{k}^2 + m_-^2} \right), \quad (3.40)$$

onde:

$$B = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 4M_A^2}}. \quad (3.41)$$

O potencial de interação pode ser assim escrito:

$$V_{II} = \frac{e_3^2}{(2\pi)^2} \frac{B}{m_e} \int \left[\frac{(\mathbf{k}^2 - 2i \vec{k} \times \vec{p})}{\mathbf{k}^2 + m_+^2} - \frac{(\mathbf{k}^2 - 2i \vec{k} \times \vec{p})}{\mathbf{k}^2 + m_-^2} \right] e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} d^2 k, \quad (3.42)$$

cujas soluções conduzem ao resultado seguinte:

$$V_{II} = \frac{e_3^2}{(2\pi)} \left\{ \frac{2B L}{m_e r} [m_+ K_1(m_+ r) - m_- K_1(m_- r)] - \frac{B}{m_e} [m_+^2 K_0(m_+ r) - m_-^2 K_0(m_- r)] \right\}.$$

Isto evidencia que o potencial total de interação entre os elétrons será:

$$V_{MCS P}(r) = \frac{e_3^2}{(2\pi)} \left\{ [A_+ - \frac{B}{m_e} m_+^2] K_0(m_+ r) + (A_- + \frac{B}{m_e} m_-^2) K_0(m_- r) + \frac{2B L}{m_e r} [m_+ K_1(m_+ r) + m_- K_1(m_- r)] \right\}, \quad (3.43)$$

onde foi usado:

$$\int_0^\infty \frac{k^3 J_0(kr)}{[\mathbf{k}^2 + m^2]} dk = -m^2 K_0(mr). \quad (3.44)$$

Como uma consequência da presença da massa de Proca, o potencial obtido revela-se totalmente blindado, o que o faz decair rapidamente a zero. O gráfico da Fig. [3.3] exhibe exatamente uma comparação entre os potenciais de MCS e MCS-Proca, onde se percebe

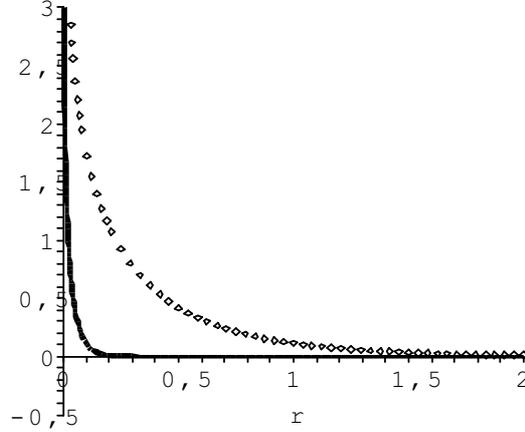


Figura 3.3: Gráfico comparativo dos potenciais de MCS e MCS-Proca para os seguintes valores de parâmetros: $m_e = 10^5 eV$, $L = 1$, $s = 2eV$, $M_A = 20eV$. O potencial de MCS-Proca decai rapidamente a zero.

a rapidez com que o potencial V_{MCSP} decai a zero, quando comparado como o potencial de MCS.

Da mesma forma como descrito no caso do potencial de MCS, a interação real de MCS-Proca é dada por um potencial efetivo da forma (3.28). No caso, como o potencial vetor está dado pela eq.(2.56), obtemos:

$$V_{eff_MCSP}(r) = V_{MCSP}(r) + \frac{L^2}{m_e r^2} + \frac{e_3^2}{m_e} \left(\frac{e_3}{2\pi} \right)^2 B^2 [m_+ K_1(m_+ r) - m_- K_1(m_- r)]^2. \quad (3.45)$$

No intuito de discutir a eventual atratividade deste potencial efetivo, construímos um gráfico comparativo do potencial de MCS com o potencial efetivo da eq. (3.45), como exibido na Fig. [(3.4)]. Tal figura mostra que ambos potenciais exibem a mesma forma, resultando em gráficos superpostos, para diferentes valores de parâmetros adotados. Baseado na igualdade dos potenciais de MCS e MCS efetivo, exibidos nesta figura e confirmada para muitos outros valores de parâmetros, podemos concluir que o potencial efetivo exibe o mesmo comportamento repulsivo do potencial de MCS-Proca.

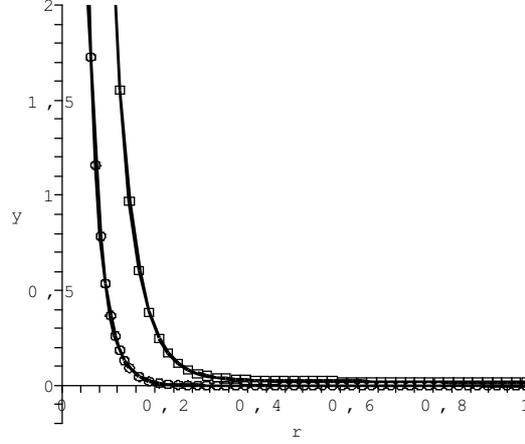


Figura 3.4: Gráfico simultâneo do potencial de MCS-Proca e MCS-Proca efetivo para os seguintes valores de parâmetros: $m_e = 5 \times 10^5 eV$, $e_3^2 = 16eV$, $L = 1$, $s = 20$, $M_A = 2eV$ (curva contínua e curva pontilhada em caixa superpostas); $s = 1$, $M_A = 30eV$ (curva contínua e curva pontilhada em círculo superpostas).

3.4 Conclusão

No presente Capítulo, calculamos o potencial de interação elétron-elétron no contexto da teoria Maxwell-Chern-Simons e Maxwell-Chern-Simons-Proca, dentro do regime de validade da aproximação de Born. Em ambos os casos, o potencial encontrado é na verdade repulsivo, indicando que tais modelos teóricos, na forma proposta neste capítulo, são inadequados para proporcionar a formação de pares elétron-elétron. Mostramos ainda que o potencial efetivo, gauge-invariante, difere dos respectivos potenciais por uma quantidade numérica desprezível, exibindo ambos o mesmo comportamento físico para todos os conjuntos de valores de parâmetros testados. O ferramental teórico apresentado neste capítulo será usado nos capítulos seguintes para investigar o potencial de interação elétron-elétron na presença do *background* violador de Lorentz. Como veremos, tal *background* mostra-se capaz de induzir um comportamento atrativo no potencial de interação elétron-elétron.

Capítulo 4

Investigação da interação elétron-elétron no contexto da teoria de Maxwell-Chern-Simons na presença do background violador de Lorentz

4.1 Introdução

Recentemente, teorias com violação da simetria de Lorentz têm sido o foco de intensa investigação [12],[13]. Em um recente trabalho, um modelo da eletrodinâmica planar dotado de violação de Lorentz [17] foi obtido da redução dimensional de uma eletrodinâmica de Maxwell suplementada com o termo de Carroll-Field-Jackiw (CFJ) [11]. A consistência desse modelo foi analisada, revelando um modelo globalmente estável, causal e unitário para ambos os tipos de *background*, tipo-tempo e tipo-espaço[17]. O fato da unitariedade ser garantida torna possível realizar, em princípio, a quantização consistente desse modelo, que assim figura como um candidato para situações onde a quantização

dos modos seja uma condição real (tal como nos fenômenos da matéria condensada). Em uma investigação posterior [18], as equações de movimento (para os campos \vec{E} e \vec{B} e potenciais) correspondentes a esse modelo planar, foram determinadas e resolvidas no regime estático. Os resultados obtidos diferem das soluções da eletrodinâmica pura MCS por correções dependentes do *background*, que alteram o comportamento físico de tais soluções. Na verdade, tais soluções exibem um comportamento tipicamente não massivo (no setor elétrico) para o caso de um *background* tipo-tempo e um comportamento anisotrópico para o caso de um *background* tipo-espaço. Foi também observado a possibilidade de obtenção de uma interação atrativa elétron-elétron como uma consequência da existência de uma região de poço no comportamento do potencial escalar (A_0).

Uma vez que a simetria de Lorentz é quebrada, a equivalência entre todas as referências inerciais é perdida e cada referencial inercial começa a perceber uma física diferente. É um fato bem conhecido que sistemas da matéria condensada (SMC) não são dotados de simetria de Lorentz, mas respeitam a simetria de Galileu, que assume um status de uma genuína simetria no domínio de sistemas isotrópicos a baixa energias. Supondo que SMC pode ser tratado como o limite de baixas energias de um modelo relativístico, resulta uma correspondência direta entre as quebras de simetrias de Lorentz e de Galileu, no sentido de que um SMC com violação de simetria de Galileu pode ter como contrapartida um sistema relativístico dotado com quebra da covariância de Lorentz.

Modelos teóricos planares capazes de fornecer potencial de interação e^-e^- atrativo são relevantes no sentido que podem constituir um ferramental teórico para tratar a condensação de pares de Cooper, uma característica fundamental de sistemas supercondutores.

Uma boa motivação para investigar o potencial de interação elétron-elétron em meio a um *background* violador da simetria de Lorentz são as soluções clássicas obtidas na ref.[18], que mostram que o background fixo induz efeitos significativos sobre as soluções clássicas, inclusive tornando o potencial escalar (A_0) atrativo para alguns valores de parâmetros (no âmbito de uma configuração estática). Tal resultado levou ao estudo do potencial de interação e^-e^- no âmbito de uma situação dinâmica, como ocorre no caso do espalhamento

Möller.

No presente capítulo, investigamos a interação de dois férmions no contexto da eletrodinâmica planar de SMC com violação de Lorentz, tendo como objetivo principal a obtenção do potencial de interação elétron-elétron e a inspeção de sua possível atratividade. Portanto, a proposta é calcular o potencial de interação e^-e^- exibindo e salientando as correções induzidas pelo um *background* fixo sobre o resultado Maxwell-Chern-Simons puro, obtido no capítulo III. Para isto, tomamos como ponto de partida o modelo de eletrodinâmica planar obtido via redução dimensional do modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw, estudado na ref.[17]. Tal modelo é composto por uma lagrangeana de MCS suplementada por um setor de Klein-Gordon não massivo, acoplado ao campo de gauge por meio de um termo de violação de Lorentz (termo que envolve o *background* violador).

De posse desse modelo planar, o setor de Dirac é então introduzido na lagrangeana do sistema, exibindo um acoplamento mínimo com o campo de gauge e um acoplamento de Yukawa com o campo escalar. Levando em conta as premissas estabelecidas no Cap.III, realizamos o cálculo da amplitude de espalhamento Möller, da qual a interação e^-e^- é obtida (de acordo com a aproximação de Born) por meio das transformadas de Fourier. O potencial aqui deduzido é composto por duas contribuições, uma escalar e outra de gauge, uma vez que a interação e^-e^- é mediada pelo campo escalar não massivo e pelo campo de gauge massivo. O potencial escalar, ausente no contexto do modelo MCS puro é sempre negativo, e pode conduzir a uma interação global atrativa, independentemente do sinal da contribuição de gauge. No caso do potencial de gauge, o mesmo apresenta uma dependência em termos do background que implica em modificações qualitativas, tais como a possibilidade de ser atrativo para alguns valores dos parâmetros, mesmo quando considerado na presença da barreira centrífuga e o termo de Pauli (A^2). Ambos os potenciais escalar e de gauge possuem dependências logarítmica, o que se revela com um comportamento não blindado, não compatível com a natureza da interação física em (1+2) dimensões. Tal fato está associado à natureza não massivo do campo de Klein-Gordon e ao anulamento da blindagem do setor de gauge, efeito já observado na ref.[18].

4.2 Modelo Planar de MCS com violação de Lorentz

O ponto de partida é a lagrangeana eq.(4.1) obtida da redução dimensional da eletrodinâmica de Maxwell-CFJ [17], a qual conduz à eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons acoplada com o campo escalar não massivo (φ) e ao *background* fixo (v^μ) através do termo de violação de Lorentz($\varphi\epsilon_{\mu\alpha\beta}v^\mu\partial^\alpha A^\beta$). Ademais, é considerada a presença do campo fermiônico (ψ) minimamente acoplado ao campo de gauge (A_μ) ao mesmo tempo que exibe um acoplamento tipo Yukawa com o campo escalar (φ):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1+2} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{s}{2}\epsilon_{\mu\nu k}A^\mu\partial^\nu A^k - \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + \varphi\epsilon_{\mu\nu k}v^\mu\partial^\nu A^k - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2 \\ & + \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m_e)\psi - y\varphi(\bar{\psi}\psi). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Aqui, a derivada covariante, $\mathcal{D}\psi \equiv (\partial + ie_3 A)\psi$, estabelece o acoplamento mínimo, enquanto o termo $\varphi(\bar{\psi}\psi)$ reflete o acoplamento Yukawa. Os propagadores do campo escalar (φ) e do campo de gauge (A_μ) foram apropriadamente calculados na ref.[17], sendo dados abaixo:

$$\begin{aligned} \langle A^\mu(k) A^\nu(k) \rangle = & i \left\{ -\frac{1}{k^2 - s^2} \theta^{\mu\nu} - \frac{\alpha(k^2 - s^2) \boxtimes(k) + s^2(v \cdot k)^2}{k^2(k^2 - s^2) \boxtimes(k)} \omega^{\mu\nu} - \right. \\ & - \frac{s}{k^2(k^2 - s^2)} S^{\mu\nu} + \frac{s^2}{(k^2 - s^2) \boxtimes(k)} \Lambda^{\mu\nu} - \frac{1}{(k^2 - s^2) \boxtimes(k)} T^\mu T^\nu + \\ & + \frac{s}{(k^2 - s^2) \boxtimes(k)} [Q^{\mu\nu} - Q^{\nu\mu}] + \frac{is^2(v \cdot k)}{k^2(k^2 - s^2) \boxtimes(k)} [\Sigma^{\mu\nu} + \Sigma^{\nu\mu}] - \\ & \left. - \frac{is(v \cdot k)}{k^2(k^2 - s^2) \boxtimes(k)} [\Phi^{\mu\nu} - \Phi^{\nu\mu}] \right\}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\langle \varphi\varphi \rangle = \frac{i}{\boxtimes(k)} [k^2 - s^2], \quad (4.3)$$

onde: $\boxtimes(k) = [k^4 - (s^2 - v \cdot v) k^2 - (v \cdot k)^2]$, enquanto os tensores de 2-rank estão definidos como se segue:

$$\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu}, \quad \omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu / \square, \quad S_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\kappa\nu} \partial^\kappa, \quad Q_{\mu\nu} = v_\mu T_\nu, \quad (4.4)$$

$$T_\nu = S_{\mu\nu} v^\mu, \quad \Lambda_{\mu\nu} = v_\mu v_\nu, \quad \Sigma_{\mu\nu} = v_\mu \partial_\nu, \quad \Phi_{\mu\nu} = T_\mu \partial_\nu. \quad (4.5)$$

4.3 A amplitude de espalhamento Möller

O potencial de interação elétron-elétron é dado pela transformação de Fourier da amplitude de espalhamento Möller no limite de baixas energias (aproximação de Born). No caso do espalhamento Möller não-relativístico, somente o canal-t (espalhamento direto) [33] é levado em conta, uma consequência da retomada da noção clássica de trajetória no limite não relativístico. Da eq.(4.1), seguem as regras de Feynman para os vértices de interação : $V_{\psi\varphi\psi} = iy; V_{\psi A\psi} = ie_3 \gamma^\mu$, de modo que as amplitudes de espalhamento elétron-elétron são escritas como:

$$-i\mathcal{M}_\varphi = \bar{u}(p'_1)(iy)u(p_1) [\langle\varphi\varphi\rangle] \bar{u}(p'_2)(iy)u(p_2), \quad (4.6)$$

$$-i\mathcal{M}_A = \bar{u}(p'_1)(ie_3 \gamma^\mu)u(p_1) [\langle A_\mu A_\nu\rangle] \bar{u}(p'_2)(ie_3 \gamma^\nu)u(p_2), \quad (4.7)$$

com $\langle\varphi\varphi\rangle$ e $\langle A_\mu A_\nu\rangle$ sendo os propagadores do campo escalar e do fóton. As expressões eqs.(4.6) e (4.7) representam as amplitudes de espalhamento para os elétrons de igual polarização mediadas pelo campo escalar e de gauge, respectivamente. Os espinores $u(p)$ representam a solução (de energia positiva) para a equação de Dirac, $(\not{p} - m_e)u(p) = 0$, identificados nas eqs.(3.10) e (3.11) (vide Cap.III). Aqui são obedecidas as mesmas relações para os momentos no referencial do centro de massa, dadas pelas equações eqs.(2.35) e (3.13).

Considerando a condição de normalização (3.8), satisfeita pelos espinores considerados, a amplitude de espalhamento associada ao setor escalar pode ser escrita como se mostra,

$$\mathcal{M}_{scalar} = y^2 \frac{[k^2 - s^2]}{[k^4 - (s^2 - v \cdot v) k^2 - (v \cdot k)^2]}, \quad (4.8)$$

que para o caso um *background* puramente tipo tempo, $v^\mu = (v_0, \vec{0})$, tem a seguinte forma:

$$\mathcal{M}_{scalar} = -y^2 \frac{[\mathbf{k}^2 + s^2]}{\mathbf{k}^2 [\mathbf{k}^2 + w^2]}, \quad (4.9)$$

onde: $w^2 = (s^2 - v_0^2)$, e foi utilizada a seguinte expressão geral para o momento de transferência: $k^\mu = (0, \mathbf{k})$.

No que se refere ao setor de gauge, somente seis termos do propagador $\langle A^\mu(k) A^\nu(k) \rangle$ contribuem para a amplitude de espalhamento $(\theta^{\mu\nu}, S^{\mu\nu}, \Lambda^{\mu\nu}, T^\mu T^\nu, Q^{\mu\nu}, Q^{\nu\mu})$, como consequência da lei de conservação da corrente ($k_\mu J^\mu = 0$). Os dois primeiros termos fornecem, no limite não relativístico, a amplitude de espalhamento de Maxwell-Chern-Simons (MCS), já obtida na ref.[24] e no Cap.III:

$$\mathcal{M}_{MCS} = e_3^2 \left\{ \left(1 - \frac{s}{m_e} \right) \frac{1}{\mathbf{k}^2 + s^2} - \frac{2s}{m} \frac{i \vec{k} \times \vec{p}}{\mathbf{k}^2 (\mathbf{k}^2 + s^2)} \right\}. \quad (4.10)$$

A amplitude corrente-corrente total mediada por uma partícula de gauge massiva corresponde à soma das quatro contribuições:

$$\mathcal{M}_{gauge} = \mathcal{M}_{MCS} + \mathcal{M}_\Lambda + \mathcal{M}_{TT} + \mathcal{M}_{QQ},$$

onde $\mathcal{M}_\Lambda, \mathcal{M}_{TT}, \mathcal{M}_{QQ}$ são termos de correção dependentes do *background* associadas com os termos $\Lambda^{\mu\nu}, T^\mu T^\nu, Q^{\mu\nu}, Q^{\nu\mu}$ do propagador. Para calcular os três últimos termos, primeiramente devemos escrever as seguintes amplitudes corrente-corrente:

$$\begin{aligned} J^\mu(p_1) (T_\mu T_\nu) J^\nu(p_2) &= -2 \frac{p^4}{m} v_0^2 e^{i\theta} [1 - \cos \theta], \\ J^\mu(p_1) (\Lambda_{\mu\nu}) J^\nu(p_2) &= v_0^2, \\ J^\mu(p_1) (Q_{\mu\nu} - Q_{\nu\mu}) J^\nu(p_2) &= 2 \frac{p^2}{m_e} v_0^2 [1 - \cos \theta - i \sin \theta], \end{aligned}$$

calculadas levando em conta a forma das 3-correntes eqs.(3.14), (3.15), (3.16) e a forma dos operadores eqs.(4.2) e (4.3).

O primeiro termo não contribui para o potencial de interação, uma vez que o cálculo é realizado dentro da aproximação não-relativística ($p^2 \ll m^2$). Os outros dois termos

conduzem a uma relevante contribuição para a amplitude de espalhamento total, dada a seguir:

$$\mathcal{M}_\Lambda = -\frac{e_3^2 s^2 v^2}{\mathbf{k}^2 [\mathbf{k}^2 + s^2] [\mathbf{k}^2 + w^2]}, \quad (4.11)$$

$$\mathcal{M}_{QQ} = \frac{e_3^2 s v_0^2}{m_e} \frac{1}{[\mathbf{k}^2 + s^2] [\mathbf{k}^2 + w^2]} \left\{ 1 - \frac{2i \vec{k} \times \vec{p}}{\mathbf{k}^2} \right\}, \quad (4.12)$$

onde $\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)$ é definido nos termos do momento \vec{p}_1, \vec{p}_2 dos elétrons antes do choque.

4.4 O potencial de interação elétron-elétron

4.4.1 O potencial escalar

De acordo com aproximação de Born, o potencial de interação escalar é dado pela transformada de Fourier da amplitude de espalhamento eq.(4.9), devidamente expresso na eq.(3.21). Esta integral pode ser resolvida de forma exata, resultando na seguinte expressão:

$$V_{scalar}(r) = -\frac{y^2}{(2\pi)} \left\{ \left[1 + \frac{s^2}{w^2} \right] K_0(sr) - \frac{s^2}{w^2} \ln r \right\}. \quad (4.13)$$

Esse potencial revela-se negativo próximo da origem e repulsivo no momento em que o termo logaritmico passa a dominar o termo de Bessel. Próximo da origem, o potencial exibe um comportamento genuinamente logaritmico, uma vez que $K_0(x) \rightarrow -\ln x$ (para $x \rightarrow 0$). Distante da origem, a função de Bessel decai exponencialmente enquanto que o segundo termo cresce logaritmicamente. Em (1+2)-dimensões, o comportamento logaritmico é um resultado consistente com uma interação não blindada. Então, o potencial aqui obtido, no contexto de uma configuração dinâmica, exibe a aniquilação da blindagem deduzida na ref.[18], ao nível de um cálculo estático. O resultado que é exibido na eq.(4.13) reflete a estrutura da amplitude escalar, o qual possui um pólo não massivo ($1/\mathbf{k}^2$) e um pólo massivo ($1/[\mathbf{k}^2 + w^2]$).

4.4.2 O potencial de Gauge

Realizando a transformada de Fourier da amplitude de espalhamento \mathcal{M}_{MCS} , obtemos o potencial de Maxwell-Chern-Simons:

$$V_{MCS}(r) = \frac{e^2}{(2\pi)} \left[\left(1 - \frac{s}{m_e}\right) K_0(sr) - \frac{2}{m_e s} [1 - srK_1(sr)] \frac{L}{r^2} \right], \quad (4.14)$$

onde $L = \vec{r} \times \vec{p}$ é o momento angular (um escalar no espaço de duas dimensões).

Os potenciais de interação associados às amplitudes $\mathcal{M}_\Lambda, \mathcal{M}_{QQ}$, podem ser também obtidos por meio de transformações de Fourier exatas, resultando nas seguintes expressões:

$$V_\Lambda(r) = \frac{e^2}{(2\pi)} \left\{ \frac{v_0^2}{w^2} \ln r + \frac{s^2}{w^2} K_0(wr) - K_0(sr) \right\}, \quad (4.15)$$

$$V_{QQ}(r) = \frac{e^2}{(2\pi)} \left\{ \frac{s}{m_e} [K_0(wr) - K_0(sr)] - \frac{2s}{m_e} \frac{L}{r^2} \left[\frac{v_0^2}{s^2 w^2} - \frac{1}{w} r K_1(sr) + \frac{1}{s} r K_1(wr) \right] \right\}. \quad (4.16)$$

O potencial de interação de gauge, $V_{gauge}(r) = V_{MCS} + V_\Lambda + V_{QQ}$, toma então a seguinte forma final:

$$V_{gauge}(r) = \frac{e^2}{(2\pi)} \left\{ -2(s/m_e)K_0(sr) + [s/m_e + s^2/w^2]K_0(wr) + (v_0^2/w^2) \ln r - \frac{2}{m_e s} \frac{L}{r^2} [(1 + v_0^2/w^2) - (s^2/w)rK_1(sr)] \right\}. \quad (4.17)$$

É instrutivo notar que no limite do anulamento do *background* ($v_0 \rightarrow 0$), obtemos $V_\Lambda, V_{QQ} \rightarrow 0$, retornando ao resultado do caso MCS puro, dado pela eq.(4.14). Obviamente, esse é um resultado esperado, uma vez que V_Λ e V_{QQ} são contribuições ao potencial meramente induzidas pela presença do *background*. Tomando o limite $r \rightarrow 0$ na expressão eq.(4.17), obtemos o comportamento do potencial próximo da origem, isto é,

$$V_{gauge}(r) \simeq \frac{e_3^2}{(2\pi)} \left\{ C - (1 - s/m_e - 2Ls/m_e) \ln r \right\} \quad (4.18)$$

onde C é uma constante. Distante da origem, apenas o termo logarítmico permanece como dominante, ou seja:

$$V_{gauge}(r) \simeq \frac{e_3^2}{(2\pi)} \left[\frac{v_0^2}{w^2} \right] \ln r. \quad (4.19)$$

As eqs.(4.18), (4.19) mostram que o potencial de gauge comporta-se logaritmicamente próximo e distante da origem, o que coloca novamente em evidência a aniquilação da blindagem observada na ref.[18], agora manifesta ao nível de um cálculo dinâmico. Nas proximidades da origem, esse potencial pode ser atrativo (para $s > m_e/(1 + L)$) ou repulsivo (para $s < m_e/(1 + L)$). Nesse capítulo é suposto que $s^2 > v_0^2$, o que implica que o potencial seja repulsivo no limite assintótico ($r \rightarrow \infty$). No caso $s > m_e/(1 + l)$, no qual o potencial é negativo próximo da origem e repulsivo assintoticamente, surge uma região de poço, onde o potencial é atrativo. Tal comportamento é uma premissa necessária para a formação de um estado ligado elétron-elétron. Já no caso em que $s < m_e/(1 + L)$, no qual o potencial é repulsivo próximo e distante da origem, apenas uma análise gráfica pode efetivamente revelar a existência de uma região de poço (atrativa) intermediária. A interação real corresponde ao potencial de interação total composto pela contribuição escalar e de gauge: $V(r) = V_{escalar} + V_{gauge}$. Esse potencial total se torna atrativo em regiões na quais o potencial escalar é negativo, superando a contribuição repulsiva de gauge, e em regiões para as quais o potencial de gauge também é negativo. Então, verifica-se que o potencial pode sempre ser negativo em alguma região, o que é um resultado relevante concernentemente à possibilidade de obtenção de um estado ligado e^-e^- no contexto teórico deste modelo particular.

Uma importante discussão faz referência à questão da atratividade do potencial de gauge. Como este é o potencial de interação derivado no contexto da teoria planar de MCS (com violação de Lorentz), valem aqui as mesmas precauções apontadas na seção (3.2.1) do Cap.III. Portanto, fica claro que para analisar corretamente o comportamento do potencial de gauge à baixas energias, é necessário adicionar a barreira centrífuga e o termo A^2 ao potencial de gauge já obtido previamente. Surge então a necessidade de determinar a forma algébrica do potencial \vec{A} , o que não foi feito na ref.[18], mas que pode ser realizado, sabendo que tal vetor satisfaz as seguintes equações diferenciais acopladas:

$$\nabla^2 (\nabla^2 - s^2) \vec{A} - v_0 \nabla^2 \nabla^* \varphi = s \nabla^* \rho, \quad (4.20)$$

$$v_0 \nabla \times \vec{A} - \nabla^2 \varphi = 0, \quad (4.21)$$

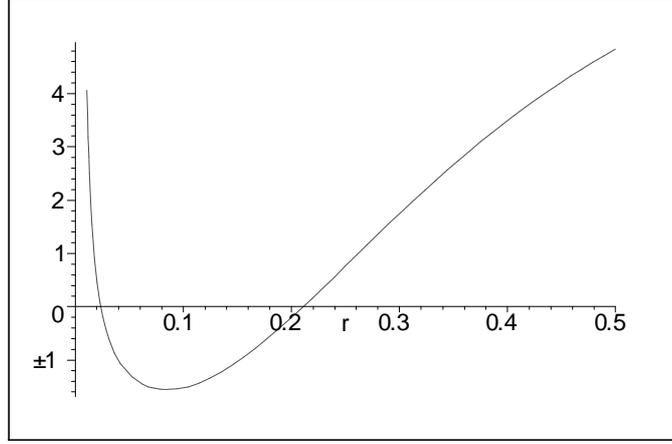


Figura 4.1: Gráfico do potencial efetivo realizado para $s = 10eV, m = 2000eV, v_0 = 8eV, L = 1$.

derivadas no limite estático. A solução dessas equações fornecem a seguinte solução estática:

$$\vec{A}(r) = \frac{e}{2\pi} \frac{s^2}{w^2} [1 - wrK_1(wr)] \hat{r}^*. \quad (4.22)$$

Com isto, o potencial efetivo assume a forma:

$$V_{eff}(r) = V_{gauge}(r) + \frac{L^2}{m_e r^2} + \frac{e_3^2}{m_e} \left(\frac{e_3}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{s^2}{w^2}\right)^2 [1 - wrK_1(wr)]^2. \quad (4.23)$$

A possibilidade de formação do estado ligado elétron-elétron é associada à existência de uma região na qual o potencial efetivo é negativo, exibindo a forma de um poço. A figura [4.1] mostra que tal exigência é perfeitamente satisfeita para alguns valores de parâmetros.

4.5 Observações e Conclusão

Nesse Capítulo, consideramos o espalhamento Möller no contexto de uma eletrodinâmica planar de Maxwell-Chern-Simons com violação de Lorentz induzida por um *background* puramente tipo-tempo. O potencial de interação foi calculado como uma trans-

formação de Fourier da amplitude de espalhamento (aproximação de Born) estabelecida no limite não-relativístico. O potencial de interação exhibe duas contribuições distintas: uma escalar atrativa (representando a interação da forma de Yukawa) e uma de gauge (mediada por um campo de gauge MCS). A interação escalar de Yukawa, como esperado, revela-se sempre negativa. Isto torna possível obter um potencial globalmente atrativo, independente do caráter (repulsivo ou atrativo) do potencial de gauge. Na prática, tal interação pode ser atribuída a um processo de troca de fônons, os quais representam excitações físicas escalares em muitos sistemas de interesse. A interação de gauge é composta por um potencial de MCS corrigido por uma contribuição dependente do *background*, o que implica em relevantes modificações físicas sobre o mesmo. A ausência da blindagem, primeiramente observada na ref.[18], torna-se agora manifesta no contexto de um cálculo dinâmico (através da onipresença do termo logarítmico)⁸. As correções dependentes do *background* são tais que conduzem a um potencial de gauge atrativo para alguns valores dos parâmetros, o que constitui um resultado promissor com a finalidade de explicar a formação do par de Cooper, premissa necessária para a realização de um sistema supercondutor. Outra característica bem definida de tais sistemas planares de alta- T_c , diz respeito à simetria do parâmetro de ordem (obtido dos pares de Cooper), o qual é descrito espacialmente por uma onda-d anisotrópica [6]. Uma estrutura teórica capaz de proporcionar uma interação elétron-elétron anisotrópica é o primeiro passo para a obtenção de anisotropia do parâmetro de ordem. Esse é exatamente o resultado esperado a ser obtido no caso de um *background* puramente tipo-espaço, onde o potencial de espalhamento e^-e^- pode ser indentificado como o calculado no contexto de um MCS dotado com uma direção privilegiada no espaço. Portanto, uma vez que a anisotropia do SMC constitui um exemplo onde a quebra de simetria de Galileu ocorre, tal sistema pode ser tratado como sendo o limite de baixas energias de uma eletrodinâmica com violação de Lorentz na presença

⁸Embora potenciais logarítmicos satisfaçam a lei de Gauss em (1+2) dimensões, não conduzem a uma boa interpretação física para sistemas como os estudados aqui. Tais comportamentos se mostram de forma aceitável em sistemas essencialmente confinantes, como os contemplados em cromodinâmica quântica.

de um *background* tipo-espaço puro.

A pesar de que o potencial obtido pelo implemento do termo violador de Lorentz ser dotado de atratividade, tais potenciais evidenciam um comportamento assintótico logarítmico, inadequado para representar interações físicas. Entretanto, tal comportamento indesejado podem vir a ser eliminados se o campo de gauge exibir uma componente de massa adicional, tal como o termo de Proca. Em um trabalho recente [21], foi realizado a redução dimensional do modelo Higgs-Abelian com violação de Lorentz na presença do termo CFJ, resultando em uma eletrodinâmica planar de Maxwell-Chern-Simons-Proca acoplado a um campo massivo de Klein-Gordon (φ). Uma característica particular desse tipo de modelo de Higgs é a presença dos modos totalmente blindados: todas as excitações físicas são massivas, produzindo interações de curtíssimo alcance. A consideração do espalhamento de Möller nesse contexto teórico, como veremos no próximo capítulo, conduzirá a um potencial de interação inteiramente blindado, no qual os termos logarítmicos são convenientemente substituídos por funções tipo Bessel K_n .

Uma extensão natural deste estudo consiste em estudar o potencial de interação e^-e^- para um caso de *background* puramente tipo-espaço. Tais cálculos foram realizados no trabalho da ref.[14] seguindo um procedimento geral similar ao aqui desenvolvido. A diferença principal vem à tona no momento de calcular as transformadas de Fourier, que neste caso não podem ser resolvidas exatamente. Tornam-se solúveis apenas no regime em que o *background* é muito menor que a massa topológica ($v \ll s$).

Capítulo 5

Interação elétron-elétron no contexto do Modelo Planar de Maxwell-Chern-Simons-Proca com violação de Lorentz

5.1 Introdução

Um modelo teórico que prevê uma interação elétron-elétron atrativa poderia ser considerado, em princípio, como um bom ferramental para tratar apropriadamente a questão do emparelhamento elétron-elétron em um sistema planar. De fato, se uma interação atrativa elétron-elétron é obtida no contexto de um dado modelo planar, o mesmo pode ser visto como o primeiro elo de conexão com a questão da formação do par de Cooper na SAT_c . Como já dito, essa prática foi iniciada com a aplicação da teoria de Maxwell-Chern-Simons (MCS) [22]-[24] para estudo da interação elétron-elétron no âmbito de um sistema planar. Entretanto, logo foi estabelecido que o modelo de MCS não implica em uma interação atrativa no regime de massas topológicas pequenas ($s \ll m_e$), que é exatamente o regime compatível com sistemas de baixas energias. É também fato conhecido

que com a inclusão do setor de Higgs [15], [31], uma interação atrativa pode ser obtida, desde que seja considerado um acoplamento do campo fermiônico com o setor de Higgs na forma: $\bar{\psi}\psi\phi^*\phi$ (que origina o termo de acoplamento de Yukawa do campo fermiônico com o setor de Higgs depois da QES). Por outro lado, verificamos no capítulo IV que a teoria de MCS, quando considerada na presença de um background fixo indutor da violação de Lorentz [19]-[20], pode também produzir um potencial atrativo e^-e^- (na ausência do setor de Higgs).

O presentecapítulo tem por principal objetivo investigar a interação elétron-elétron no contexto de um sistema planar Higgs-Abeliano com violação de Lorentz. Devido ao mecanismo de Higgs, os campos representativos das intermediações físicas tornam-se massivos, produzindo assim uma interação elétron-elétron blindada (mais conveniente para descrever a física de baixas energias), ao invés de um comportamento logarítmico observado nas refs.[19]-[20]. Como um ferramental teórico para estudar esta interação, é adotado um modelo planar com a presença da violação de Lorentz, cuja consistência já foi convenientemente analisada na literatura ⁹. De fato, adota-se como arcabouço teórico para realização de cálculos deste capítulo, a versão planar do modelo Higgs-Abeliano de Carroll-Field-Jackiw[16], estabelecida na ref.[21], onde sua consistência também já foi estabelecida (revelando-se um modelo totalmente causal, unitário e estável). Tal modelo é composto pelo setor de MCS com o campo de Higgs acoplado a um campo não massivo de Klein-Gordon - φ (advindo do processo de redução dimensional) e o *background* violador de Lorentz. Esse modelo é submetido à quebra espontânea de simetria (QES), na qual os campos de gauge e de Klein-Gordon adquirem massa. Na sequência, o setor de Dirac é apropriadamente incorporado à lagrangeana do modelo, exibindo um acoplamento mínimo e de Yukawa com o campo de gauge (A_μ) e o campo escalar (φ), respectivamente. Tendo estabelecido a lagrangeana inicial, a tarefa agora será obter um potencial de interação elétron-elétron para o caso de um *background* puramente tipo-tempo e discutir sua

⁹Essa escolha assegura que o modelo adotado, aqui analisado a *tree-level*, pode ser consistentemente quantizado em outras aplicações específicas.

possível atratividade. O procedimento é similar ao adotado nas refs.[19]-[20]: partindo da lagrangeana conhecida, obtém-se as amplitudes de espalhamento Möller para as intermediações escalar e de gauge, cuja transformada de Fourier conduz ao potencial de interação. No presente caso, o resultado é um potencial totalmente blindado, composto por uma soma das contribuições potenciais de gauge e escalar. Esse potencial total exhibe uma região de poço (comportamento atrativo) mesmo na presença da barreira centrífuga e do termo invariante de gauge \mathbf{A}^2 , confirmando assim o seu caráter atrativo e sua possível relevância para a formação de pares elétron-elétron em sistemas planares. Tais resultados estão contidos na ref. [40].

Este trabalho está disposto como se segue. Na Sec.II, o modelo reduzido encontrado na ref.[21] suplementado pelo setor fermiônico é brevemente descrito. Na Sec.III, são apresentados os espinores que representam a solução da equação de Dirac bidimensional, e são calculadas as amplitudes de espalhamento Möller associadas com as intermediações escalar e de gauge. Na Sec.IV, são calculados os potenciais de interação condizentes com os setores de gauge e escalar, e é realizada a discussão dos resultados. Na Sec.V são apresentadas as observações finais.

5.2 O modelo planar Higgs-Abeliano com violação de Lorentz

Primeiramente, devemos apresentar o modelo planar que serve como referencial teórico para os cálculos realizados neste capítulo. O ponto inicial é o modelo Higgs-Abeliano de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (MCFJ) [16], definido em (1+3)-dimensões, e consistente com a eletrodinâmica de MCFJ suplementada com o setor de Higgs:

$$\mathcal{L}_{1+3} = \left\{ -\frac{1}{4} F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \frac{1}{4} \varepsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}\hat{\lambda}} v_{\hat{\mu}} A_{\hat{\nu}} F_{\hat{\kappa}\hat{\lambda}} + (D^{\hat{\mu}}\phi)^* D_{\hat{\mu}}\phi - V(\phi^*\phi) + A_{\hat{\nu}} J^{\hat{\nu}} \right\}, \quad (5.1)$$

onde $v_{\hat{\mu}}$ é o *background* fixo de violação de Lorentz, $\hat{\mu}$ varia de 0 a 3, $D_{\hat{\mu}}\phi = (\partial_{\hat{\mu}} + ieA_{\hat{\mu}})\phi$ é a derivada covariante, e $V(\phi^*\phi) = m^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2$ representa o potencial escalar responsável pela QES ($m^2 < 0$ e $\lambda > 0$). Em trabalho anterior, esse modelo foi submetido a uma redução dimensional, procedimento no qual a terceira coordenada espacial é "congelada", implicando: $\partial_3\chi \rightarrow 0$. Ao mesmo tempo, a terceira componente do vetor potencial origina um campo escalar, $A^{(3)} \rightarrow \varphi$, enquanto a terceira componente do *background* dá origem à massa topológica: $v^{(3)} \rightarrow s$. Esse processo produz uma eletrodinâmica planar com violação de Lorentz na presença do setor de Higgs [21]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1+2} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + \frac{s}{2}\epsilon_{\mu\nu k}A^\mu\partial^\nu A^k - \varphi\epsilon_{\mu\nu k}v^\mu\partial^\nu A^k + (D_\mu\phi)^*(D_\mu\phi) \\ & - e^2\varphi^2(\phi^*\phi) - V(\phi^*\phi) - A_\mu J^\mu - \varphi J, \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde os índices gregos (sem chapéu) agora correm de 0 a 2. Uma vez estabelecido o modelo planar com violação de Lorentz, o mesmo é submetido ao processo de quebra espontânea de simetria, o que proporciona massa para os campos de gauge e escalar [21]. Tendo o intuito de realizar uma análise a *tree-level*, somente os termos bilineares e de acoplamento dos campos, de gauge e escalar, com as correntes, devem ser mantidos na lagrangeana após a QES. Com isto, escrevemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1+2} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}M_A^2\varphi^2 + \frac{s}{2}\epsilon_{\mu\nu k}A^\mu\partial^\nu A^k - \varphi\epsilon_{\mu\nu k}v^\mu\partial^\nu A^k + \frac{1}{2}M_A^2A_\mu A^\mu - \\ & - A_\mu J^\mu - \varphi J, \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde $M_A^2 = 2e^2\langle\phi\phi\rangle$, sendo $\langle\phi\phi\rangle$ o valor esperado no vácuo do campo ϕ . A razão pela qual o campo de Higgs não aparece na equação acima é que o mesmo mantém acoplamentos de ordem maior que 2 com outros campos. Como é bem conhecido, esses termos de acoplamento não são levados em consideração em um cálculo realizado a *tree-level*. A solução clássica desse modelo planar está encontrada na ref.[14], onde os efeitos do *background* sobre a eletrodinâmica de MCS-Proca foram exaustivamente analisadas. Foi também observado que o potencial escalar (A_0), no caso de um *background* puramente

tipo-tempo exibe um comportamento atrativo, o qual pode ser visto como uma indicação de que um resultado similar que pode ser obtido para o potencial de gauge elétron-elétron, a ser calculado em uma configuração dinâmica, tal como o espalhamento Möller.

Agora, é necessário introduzir o campo espinorial adequadamente acoplado ao campo de gauge (A_μ) e ao campo escalar (φ). Na ausência de fontes, a lagrangeana de interação é tomada na forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1+2}^{broken} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}M_A^2\varphi^2 + \frac{s}{2}\epsilon_{\mu\nu k}A^\mu\partial^\nu A^k - \varphi\epsilon_{\mu\nu k}v^\mu\partial^\nu A^k + \\ & + \frac{1}{2}M_A^2A_\mu A^\mu + \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m_e)\psi - y\varphi(\bar{\psi}\psi). \end{aligned} \quad (5.4)$$

O termo $\mathcal{D}\psi \equiv (\not{\partial} + ie_3\not{A})\psi$ estabelece o acoplamento mínimo, enquanto que $\varphi(\bar{\psi}\psi)$ reflete o acoplamento de Yukawa com o campo escalar. O campo fermiônico (ψ) é um espinor de duas componentes com estado de polarização "up", representando a solução de energia positiva da equação de Dirac bidimensional, $(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0$, aqui escrita no espaço dos momentos. A dimensão de massa dos campos e dos parâmetros envolvidos na eq.(5.4) é:

$$\varphi = [A^\mu] = 1/2, [\psi] = 1, [s] = [v^\mu] = 1, [e_3] = [y] = 1/2.$$

Nota-se que ambas constantes de acoplamento, e_3 , y , exibem dimensão de [massa]^{1/2}, um resultado usual em (1+2) dimensões. No trabalho da ref.[21], os propagadores do campo escalar (φ) e de gauge (A_μ) são apropriadamente calculados, apresentando a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle A^\mu(k) A^\nu(k) \rangle = & i \left\{ -\frac{(k^2 - M_A^2)}{\boxplus(k)}\theta^{\mu\nu} + \frac{(k^2 - M_A^2) \boxtimes \boxplus - \lambda^2 s^2 M_A^2 k^2}{M_A^2(k^2 - M_A^2) \boxtimes(k) \boxplus(k)}\omega^{\mu\nu} - \frac{s}{\boxplus}S^{\mu\nu} \right. \\ & + \frac{s^2 k^4}{(k^2 - M_A^2) \boxtimes(k) \boxplus(k)}\Lambda^{\mu\nu} - \frac{(k^2 - M_A^2)}{\boxtimes(k) \boxplus(k)}T^\mu T^\nu + \\ & + \frac{s k^2}{\boxtimes(k) \boxplus(k)}[Q^{\mu\nu} - Q^{\nu\mu}] + \frac{i(v \cdot k)s^2 k^2}{(k^2 - M_A^2) \boxtimes(k) \boxplus(k)}[\Sigma^{\mu\nu} + \Sigma^{\nu\mu}] - \\ & \left. - \frac{is(v \cdot k)}{\boxtimes(k) \boxplus(k)}[\Phi^{\mu\nu} - \Phi^{\nu\mu}] \right\}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\langle \varphi\varphi \rangle = i \frac{\boxplus(k)}{\boxtimes(k)(k^2 - M_A^2)}, \quad (5.6)$$

com:

$$\boxtimes(k) = k^4 - (2M_A^2 + s^2 - v \cdot v) k^2 + M_A^4 - (v \cdot k)^2, \quad (5.7)$$

$$\boxplus(k) = (k^2 - M_A^2)^2 - s^2 k^2. \quad (5.8)$$

Os operadores projetores $\theta_{\mu\nu}, \omega_{\mu\nu}, S_{\mu\nu}, Q_{\mu\nu}, T_\nu, \Lambda_{\mu\nu}, \Sigma_{\mu\nu}, \Phi_{\mu\nu}$, estão convenientemente definidos nas eqs.(4.4), (4.5). Naturalmente, tais propagadores são essenciais para o cálculo das amplitudes associadas com o espalhamento Möller, questão esta desenvolvida na próxima secção.

5.3 A amplitude de espalhamento Möller

No contexto de uma interação definida no regime de baixas energias (regime não-relativístico), a aproximação de Born é válida como uma boa aproximação. Consequentemente, o potencial de interação é obtido da transformação de Fourier da amplitude de espalhamento Möller. Da eq.(5.4), são extraídas as regras de Feynman para os vértices de interação envolvendo os férmions: $V_{\psi\varphi\psi} = iy; V_{\psi A\psi} = ie_3\gamma^\mu$. Portanto, as amplitude de espalhamento e^-e^- são lidas na forma:

$$-i\mathcal{M}_\varphi = \bar{u}(p'_1)(iy)u(p_1) [\langle \varphi\varphi \rangle] \bar{u}(p'_2)(iy)u(p_2), \quad (5.9)$$

$$-i\mathcal{M}_A = \bar{u}(p'_1)(ie_3\gamma^\mu)u(p_1) [\langle A_\mu A_\nu \rangle] \bar{u}(p'_2)(ie_3\gamma^\nu)u(p_2). \quad (5.10)$$

Aqui, $\langle \varphi\varphi \rangle$ e $\langle A_\mu A_\nu \rangle$ são obviamente os propagadores do fóton e do campo escalar dados nas eqs.(5.5), (5.6). A amplitude de espalhamento, das eqs.(5.9) e (5.10), são escritas para os elétrons de igual polarização mediados pelo campo escalar e de gauge, respectivamente. Os espinores $u(p)$ são definidos como aparecem nas eqs.(3.10) e (3.11), enquanto os momentos dos elétrons no referencial do centro de massa (CM) seguem a prescrição já adotada.

Começando com as eqs.(5.6), (5.9) e com as definições anteriores para os espinores eqs.(3.10), (3.11), momentos dos elétrons no referencial do C.M.eqs.(3.12), (3.13) e as correntes eqs.(3.14), (3.15), (3.16), a amplitude de espalhamento associada com a intermediação escalar é escrita na forma:

$$\mathcal{M}_{scalar} = y^2 \frac{\boxplus(k)}{\boxtimes(k)(k^2 - M_A^2)}. \quad (5.11)$$

No caso de um *background* puramente tipo-tempo, $v^\mu = (v_0, \vec{0})$, e considerando a expressão geral para a "transferência do momento", $k^\mu = (0, \mathbf{k})$, essa amplitude assume a forma:

$$\mathcal{M}_{scalar} = -y^2 \frac{[\mathbf{k}^4 + (2M_A^2 + s^2)^2 \mathbf{k}^2 + M_A^4]}{[\mathbf{k}^4 + (2M_A^2 + s^2 - v_0^2) \mathbf{k}^2 + M_A^4][\mathbf{k}^2 + M_A^2]}, \quad (5.12)$$

cuja transformada de Fourier conduzirá ao potencial que representa a interação elétron-elétron mediada pelo campo escalar φ .

Por outro lado, no caso da intermediação realizada pelo campo de gauge, a situação é mais complicada, como uma consequência dos 11 termos presentes no propagador eq.(5.5). Entretanto, devido à lei de conservação de corrente ($k_\mu J^\mu = 0$), somente seis termos do propagador de gauge contribuem para amplitude de espalhamento ($\theta^{\mu\nu}, S^{\mu\nu}, \Lambda^{\mu\nu}, T^\mu T^\nu, Q^{\mu\nu}, Q^{\nu\mu}$). Os dois primeiros termos conduzem, no limite não-relativístico, à amplitude de espalhamento Maxwell-Chern-Simons-Proca (MCSP), que leva ao potencial de MCSP. As amplitudes corrente-corrente não-relativísticas envolvendo esses dois termos,

$$j^\mu(p_1)(\theta_{\mu\nu})j^\nu(p_2) = 1, \quad (5.13)$$

$$j^\mu(p_1)(S_{\mu\nu})j^\nu(p_2) = \mathbf{k}^2/m_e - (2i/m_e)\mathbf{k} \times \mathbf{p}, \quad (5.14)$$

são calculadas nas refs.[19], [20], e nos capítulos precedentes. A amplitude de espalhamento resultante é então dada por:

$$\mathcal{M}_{\theta S} = e_3^2 \left(\frac{(\mathbf{k}^2 + M_A^2)}{\boxplus(k)} \right) - \frac{s}{\boxplus} \left[\frac{\mathbf{k}^2}{m_e} - \frac{2i}{m_e} i\mathbf{k} \times \mathbf{p} \right] \quad (5.15)$$

A amplitude corrente-corrente associada com os outros termos do potencial de gauge são também calculadas, assumindo a forma abaixo:

$$j^\mu(p_1)(T_\mu T_\nu)j^\nu(p_2) = -2\frac{\mathbf{p}^4}{m_e}v_0^2e^{i\theta}[1 - \cos\theta]; \quad (5.16)$$

$$j^\mu(p_1)(\Lambda_{\mu\nu})j^\nu(p_2) = v_0^2; \quad (5.17)$$

$$j^\mu(p_1)(Q_{\mu\nu} - Q_{\nu\mu})j^\nu(p_2) = 2\frac{\mathbf{p}^2}{m_e}v_0^2[1 - \cos\theta - i\sin\theta]. \quad (5.18)$$

Esses termos conduzem às seguintes amplitudes de espalhamento:

$$\mathcal{M}_{TT} = 0, \quad (5.19)$$

$$\mathcal{M}_\Lambda = -\frac{e_3^2 s_0^2 v_0^2 \mathbf{k}^4}{(\mathbf{k}^2 + M_A^2) \boxtimes(k) \boxplus(k)}, \quad (5.20)$$

$$\mathcal{M}_{QQ} = -e_3^2 s_0^2 v_0^2 \frac{\mathbf{k}^2}{\boxtimes(k) \boxplus(k)} \frac{2}{m_e} \{ \mathbf{k}^2 - 2i\mathbf{k} \times \mathbf{p} \}, \quad (5.21)$$

onde $\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)$ é definido em termos dos momentos iniciais \vec{p}_1, \vec{p}_2 dos elétrons antes da colisão e $\mathbf{p}^2 = \mathbf{k}^2/[2(1 - \cos\theta)]$. A amplitude de total de espalhamento mediada pela partícula de gauge massiva corresponde à soma de quatro contribuições,

$$\mathcal{M}_{gauge} = \mathcal{M}_{\theta S} + \mathcal{M}_\Lambda + \mathcal{M}_{TT} + \mathcal{M}_{QQ}, \quad (5.22)$$

onde $\mathcal{M}_\Lambda, \mathcal{M}_{TT}$, e \mathcal{M}_{QQ} são os termos da amplitude de MCS-Proca dependentes do *background*. Note que a amplitude \mathcal{M}_{TT} foi desprezada devido a sua dependência em \mathbf{p}^4 (resultado consistente com a aproximação não-relativística, $p^2 \ll m^2$).

5.4 O potencial de interação elétron-elétron

5.4.1 O potencial escalar

Como primeiro passo rumo à obtenção do potencial de interação total, calculamos a interação relacionada com a intermediação escalar. De acordo com aproximação de Born, o potencial de interação escalar é dado pela transformação de Fourier da amplitude de espalhamento da eq.(5.12), ou seja:

$$V_{scalar}(r) = -\frac{y^2}{(2\pi)^2} \int \left[\frac{[\mathbf{k}^4 + (2M_A^2 + s^2)^2 \mathbf{k}^2 + M_A^4]}{[\mathbf{k}^4 + (2M_A^2 + s^2 - v_0^2) \mathbf{k}^2 + M_A^4][\mathbf{k}^2 + M_A^2]} \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^2\mathbf{k} \quad (5.23)$$

Nessa forma, tal integral não pode ser exatamente resolvida. Entretanto, é possível fatorar o integrando em pequenos fatores, para os quais a integração exata torna-se possível. Primeiramente, é importante notar que:

$$[\mathbf{k}^4 + (2M_A^2 + s^2 - v_0^2) \mathbf{k}^2 + M_A^4] = [\mathbf{k}^2 + M_+^2][\mathbf{k}^2 + M_-^2], \quad (5.24)$$

onde a constante M_{\pm}^2 são dadas abaixo. Depois de alguns cálculos algébricos, obtemos:

$$\frac{[\mathbf{k}^4 + (2M_A^2 + s^2)^2 \mathbf{k}^2 + M_A^4]}{[\mathbf{k}^4 + (2M_A^2 + s^2 - v_0^2) \mathbf{k}^2 + M_A^4][\mathbf{k}^2 + M_+^2]} = -\frac{(G + D)}{[\mathbf{k}^2 + M_+^2]} + \frac{(G + E)}{[\mathbf{k}^2 + M_-^2]} + \frac{(1 + D - E)}{[\mathbf{k}^2 + M_A^2]},$$

com os coeficientes e parâmetros de massa dados por:

$$C = \left[1/\sqrt{(s^2 - v_0^2)(s^2 - v_0^2 + 4M_A^2)} \right], \quad (5.25)$$

$$G = v_0^2 C, \quad D = G\alpha_+, \quad E = G\alpha_-, \quad (5.26)$$

$$\alpha_{\pm} = \frac{2M_A^2}{(s^2 - v_0^2) \pm \sqrt{(s^2 - v_0^2)(s^2 - v_0^2 + 4M_A^2)}}, \quad (5.27)$$

$$M_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[(s^2 - v_0^2 + 2M_A^2) \pm \sqrt{(s^2 - v_0^2)(s^2 - v_0^2 + 4M_A^2)} \right]. \quad (5.28)$$

Realizando a transformada de Fourier, a seguinte expressão

$$V_{scalar}(r) = \frac{y^2}{(2\pi)} \{ (G + D)K_0(M_+r) - (G + E)K_0(M_-r) - (1 + D - E)K_0(M_Ar) \}, \quad (5.29)$$

é obtida diretamente. Esse resultado revela um potencial totalmente blindado, como consequência do caráter massivo da intermediação escalar. Próximo da origem, este potencial comporta-se como um puro logaritmico, isto é:

$$\lim_{r \rightarrow 0} V_{scalar}(r) = \frac{y^2}{(2\pi)} \ln r, \quad (5.30)$$

de onde se confirma o caráter atrativo na origem. Distante da origem, este potencial decresce exponencialmente: este é exatamente o ponto onde o mesmo se diferencia do potencial escalar obtido no contexto da eletrodinâmica de MCS na presença do *background* violador de Lorentz, dado pela eq.(4.13) que apresenta um comportamento assintótico do tipo logaritmico (potencial confinante). É fato bem conhecido que tal tipo de potencial não

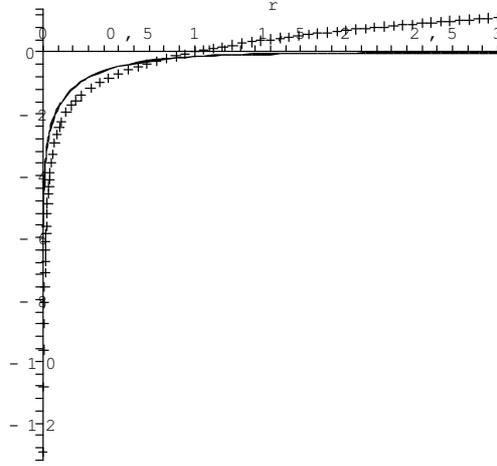


Figura 5.1: Gráfico simultâneo do potencial escalar da eq.(5.29) (linha contínua) e o potencial da eq. (4.13) (linha pontilhada em cruz). Aqui, para ambos os gráficos foi usado: $s = 20$, $M_A = 2$, $v_0 = 2eV$.

é adequado para descrever uma interação física em $(1+2)$ dimensões. Então, assinalamos a primeira vantagem advinda da introdução do setor de Higgs nesse contexto teórico: a transformação de potencial confinante, dado pela eq.(4.13), em um potencial tipo Bessel- K_0 da eq.(5.29) (inteiramente adequado para descrever uma interação planar física). O gráfico na Fig.[5.1] ilustra tal modificação no comportamento assintótico.

5.4.2 O potencial de gauge

O ponto de partida para o cálculo do potencial de gauge é a obtenção do potencial $V_{\theta S}$ a partir da transformada de Fourier da amplitude $\mathcal{M}_{\theta S}$. Tal transformação de Fourier não pode ser diretamente resolvida da eq.(5.15), a qual então é, apropriadamente fatorada na forma:

$$\mathcal{M}_{\theta S} = e_3^2 \left\{ \frac{A_+}{[\mathbf{k}^2 + m_+^2]} + \frac{A_-}{[\mathbf{k}^2 + m_-^2]} + \left[\frac{B}{[\mathbf{k}^2 + m_+^2]} - \frac{B}{[\mathbf{k}^2 + m_-^2]} \right] \left(\frac{\mathbf{k}^2}{m_e} - \frac{2i}{m_e} i\mathbf{k} \times \mathbf{p} \right) \right\}, \quad (5.31)$$

onde:

$$A_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm s/\sqrt{s^2 + 4M_A^2}), \quad (5.32)$$

$$B = 1/(\sqrt{s^2 + 4M_A^2}), \quad (5.33)$$

$$m_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[(s^2 + 2M_A^2) \pm s\sqrt{s^2 + 4M_A^2} \right]. \quad (5.34)$$

Realizando a transformada de Fourier da eq.(5.31), o seguinte potencial é obtido:

$$V_{\theta S}(r) = \frac{e_3^2}{(2\pi)} \left\{ \left[A_+ - \frac{B}{m_e} m_+^2 \right] K_0(m_+ r) + \left[A_- + \frac{B}{m_e} m_-^2 \right] K_0(m_- r) - \frac{2BL}{m_e r} \left[m_+ K_1(m_+ r) - m_- K_1(m_- r) \right] \right\}, \quad (5.35)$$

onde $L = \vec{r} \times \vec{p}$ é o momento angular (um escalar em um espaço de 2 dimensões). Interessante destacar que $V_{\theta S}$ é exatamente o potencial elétron-elétron de MCS-Proca, primeiramente obtido na ref.[15]. Próximo da origem, temos: $K_0(mr) \rightarrow -\ln r$, $K_1(mr) \rightarrow 1/(mr) + mr(\ln r)/2$, implicando no seguinte comportamento:

$$\lim_{r \rightarrow 0} V_{\theta S}(r) \rightarrow -\frac{e_3^2}{(2\pi)} \left[1 - \frac{s}{2m_e} (1 + L) \right] \ln r. \quad (5.36)$$

Uma vez que trabalhamos em um limite de pequena massa topológica, $s \ll m_e$, esse potencial exibe um comportamento sempre repulsivo próximo da origem.

O potencial de interação V_{Λ} , pode ser obtido da transformação de Fourier da amplitude de espalhamento dada na eq.(5.20); entretanto, tal amplitude deve ser previamente fatorada, ou seja:

$$\mathcal{M}_{\Lambda} = e_3^2 s^2 \left\{ \left[-C(L_+ - L_-) + h(l_+ - l_-) \right] \frac{1}{[\mathbf{k}^2 + M_A^2]} - (CN_+ - hn_+) \frac{1}{[\mathbf{k}^2 + M_+^2]} + (CN_- - hn_-) \frac{1}{[\mathbf{k}^2 + M_-^2]} \right\}, \quad (5.37)$$

com os coeficientes dados por:

$$L_{\pm} = \frac{-M_A^2}{M_{\pm}^2 - M_A^2}, \quad l_{\pm} = \frac{-M_A^2}{m_{\pm}^2 - M_A^2}, \quad N_{\pm} = \frac{M_+^2}{M_{\pm}^2 - M_A^2}, \quad n_{\pm} = \frac{m_+^2}{m_{\pm}^2 - M_A^2}, \quad h = B/s. \quad (5.38)$$

A transformação de Fourier é então executada, conduzindo a uma combinação linear de funções K_0 :

$$V_{\Lambda}(r) = \frac{e_3^2 s^2}{(2\pi)} \left\{ [-C(L_+ - L_-) + h(l_+ - l_-)] K_0(M_+ r) - (CN_+ - hn_+) K_0(M_+ r) + \right. \\ \left. + (CN_- - hn_-) K_0(M_- r) \right\}. \quad (5.39)$$

Próximo da origem, este potencial anula-se identicamente, $\lim_{r \rightarrow 0} V_{\Lambda}(r) = 0$; distante da origem, ele decai exponencialmente a zero.

Aplicando o mesmo procedimento para \mathcal{M}_{QQ} , após alguma álgebra, alcançamos o resultado:

$$\mathcal{M}_{QQ} = -\frac{e_3^2 s}{m_e} \left\{ \left[\frac{-C}{[\mathbf{k}^2 + M_+^2]} + \frac{C}{[\mathbf{k}^2 + M_-^2]} + \frac{h}{[\mathbf{k}^2 + m_+^2]} - \frac{h}{[\mathbf{k}^2 + m_-^2]} \right] (\mathbf{k}^2 - 2i\mathbf{k} \times \mathbf{p}) \right\}, \quad (5.40)$$

que conduz ao seguinte potencial resultante:

$$V_{QQ}(r) = \frac{e_3^2}{(2\pi)} \frac{s}{m_e} \left\{ \frac{2L}{r} [-C(M_+ K_1(M_+ r) - M_- K_1(M_- r)) + h(m_+ K_1(m_+ r) - \right. \\ \left. - m_- K_1(m_- r))] - C[M_+^2 K_0(M_+ r) - M_-^2 K_0(M_- r)] + \right. \\ \left. + h[m_+^2 K_0(m_+ r) - m_-^2 K_0(m_- r)] \right\}. \quad (5.41)$$

Este último potencial exibe o mesmo comportamento de V_{Λ} próximo e distante da origem, isto é; $\lim_{r \rightarrow 0, \infty} V_{QQ}(r) \rightarrow 0$. Podemos agora escrever o potencial de interação total de gauge, $V_{gauge}(r) = V_{\theta S} + V_{\Lambda} + V_{QQ}$, que depois de algumas simplificações, assume a forma explícita:

$$\begin{aligned}
V_{gauge}(r) = \frac{e_3^2}{(2\pi)} \left\{ A_+ K_0(m_+ r) + A_- K_0(m_- r) - [s^2(CN_+ - hn_+) + C \frac{s}{m_e} M_+] K_0(M_+ r) \right. \\
+ [s^2(CN_- - hn_-) + CM_-^2 s/m_e] K_0(M_- r) + \\
+ s^2 [-C(L_+ - L_-) + h(l_+ - l_-)] K_0(M_A r) \\
\left. + \frac{2L}{r} \frac{s}{m_e} C[M_+ K_1(M_+ r) + M_- K_1(M_- r)] \right\}. \tag{5.42}
\end{aligned}$$

Essa expressão completa corresponde ao potencial de MCS-Proca ($V_{\theta S}$) corrigido por termos de violação de Lorentz originadas de V_Λ, V_{QQ} . No limite de um *background* nulo ($v_0 \rightarrow 0$), temos $V_\Lambda, V_{QQ} \rightarrow 0$, permanecendo somente o potencial $V_{\theta S}$, o que mostra a consistência dos resultados obtidos. Obviamente, esse é um resultado esperado, já que, V_Λ, V_{QQ} são contribuições de potenciais induzidas meramente pela presença do *background*.

Distante da origem, esse potencial anula-se exponencialmente (de acordo com o comportamento assintótico das funções de Bessel), uma consequência do caráter massivo dos mediadores físicos. Nesse ponto, novamente o resultado difere do comportamento assintoticamente divergente, dado pela eq.(4.17). A Fig.[5.2] mostra o gráfico simultâneo do potencial de gauge da eq.(5.42) (linha contínua) e o da eq.(4.17) (linha pontilhada), que apresenta um mínimo mais pronunciado em comparação com o precedente (para o mesmo conjunto de parâmetros), e comportamento assintótico logarítmico.

Próximo da origem, os termos dependentes do *background* da eq.(5.42) tendem a zero, tal que nesse limite o potencial de gauge é inteiramente regido pela contribuição de $V_{\theta S}$; portanto, próximo da origem o potencial de gauge tem o mesmo comportamento de $V_{\theta S}$, dado abaixo:

$$V_{gauge}(r) \simeq \left\{ -\frac{e_3^2}{(2\pi)} \left[1 - \frac{s}{2m_e} (1 + L) \right] \ln r \right\}. \tag{5.43}$$

É interessante notar que esse é o mesmo comportamento do potencial de gauge encontrado no caso MCS, dado pela eq.(4.18), também obtido nas refs.[19], [20]. Como já declarado, esse potencial sempre exibirá um comportamento repulsivo próximo da origem. Esse comportamento geral é ilustrado na Fig.[5.3] para quatro conjuntos de parâmetros.

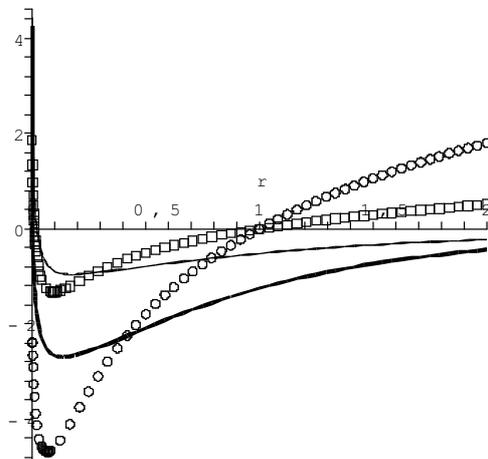


Figura 5.2: Construção simultânea do gráfico potencial de gauge da eq.(5.42) (linha contínua) e o potencial de gauge da eq.(4.17) (linha pontilhada) para dois conjuntos de valores de parâmetros: $s = 20eV, L = 1, m_e = 10^5, M_A = 3, v_0 = 13eV$ (linha fina contínua e curva pontilha em caixas); $s = 20eV, L = 1, m_e = 10^5, M_A = 3, v_0 = 17eV$ (linha espessa contínua e linha pontilhada em círculos).

Em relação à Fig.[5.3], a mesma apresenta uma comparação do potencial elétron-elétron de MCS-Proca (correspondendo ao caso em que $v_0 = 0$) com potencial de gauge completo para três diferentes de valores de v_0 . Isto mostra que o potencial de gauge desvia-se do comportamento de MSC-Proca mais apreciavelmente quanto maior for a magnitude do *background* (v_0), isto é, quanto maior é o módulo do *background*, mais profundo é o poço que constitui a região atrativa do potencial.

A atratividade do potencial gauge é descrita pela presença da região de poço (constituída por uma região de comportamento decrescente seguida de uma região de comportamento crescente), exibida no gráfico da Fig.[5.2]. Numa perspectiva dinâmica, tal curva pode ser descrita em termos de uma região, na qual o gradiente do potencial é negativo, seguida por uma região de gradiente positivo. Outro tipo de curva de potencial que implica em comportamento atrativo, é aquela para os quais o gradiente é sempre negativo

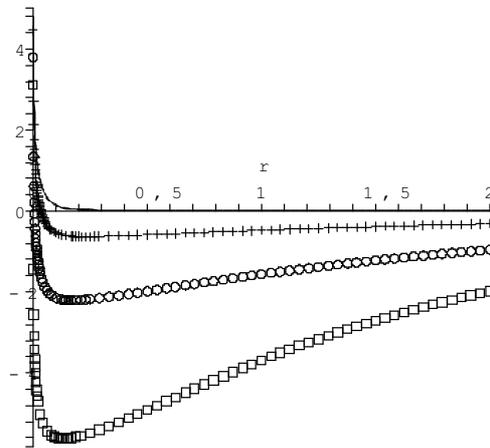


Figura 5.3: Gráfico do potencial de gauge para os seguintes conjuntos de parâmetros: $m_e = 10^5 eV, L = 1, s = 20, M_A = 2eV, v_0 = 0$ (linha contínua); $v_0 = 10eV$ (linha pontilhada em cruz); $v_0 = 15 eV$ (linha pontilhada em círculo); $v_0 = 18 eV$ (linha pontilhada em caixa).

(mas com um decréscimo módulo com o aumento da distância, ($|\nabla V| \rightarrow 0$ para $r \rightarrow \infty$). Esse é comportamento exibido pelo potencial escalar da Fig.[5.1].

A discussão do comportamento do potencial de gauge deve ser realizada com cuidado e não pode ser baseada somente na expressão contida na eq.(5.42), como já discutido nos Cap.III e Cap.IV. Por tal discussão, sabemos que a interação planar é mais corretamente descrita em termos de um potencial efetivo, dado por:

$$V_{eff}(r) = V_{gauge}(r) + L^2 / (m_e r^2) + e_3^2(A \cdot A)/m_e.$$

O potencial vetor, \mathbf{A} , advindo da solução clássica do modelo planar descrito pela lagrangeana eq.(5.3), já foi calculado na ref.[14] para o caso do *background* tipo-tempo:

$$\mathbf{A}(r) = -\frac{e_3 s}{(2\pi)} C [M_+ K_1(M_+ r) - M_- K_1(M_- r)] \hat{r}^*, \quad (5.44)$$

consequentemente, o potencial efetivo assume a forma :

$$V_{eff}(r) = V_{gauge}(r) + \frac{L^2}{m_e r^2} + \left(\frac{e_3}{2\pi}\right)^2 \frac{e_3^2 s^2 C^2}{m_e} [M_+ K_1(M_+ r) - M_- K_1(M_- r)]^2. \quad (5.45)$$

Esse é o potencial efetivo, invariante de gauge, que inclui as duas contribuições do termo- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ e da barreira centrífuga, refletindo a correta interação elétron-elétron a baixas energias. Baseado nesta expressão completa, resta verificar se a interação elétron-elétron pode vir a ser atrativa em alguma região. A análise gráfica da Fig.[5.4] ajudará a elucidar esta questão.

O gráfico na Fig.[5.4] mostra que o potencial de gauge e o potencial efetivo diferem um do outro, para os valores de parâmetros implementados, por uma quantidade absolutamente negligenciável, tanto que nesse caso, os gráficos apresentam uma superposição perfeita (revelando que eles correspondem numericamente ao mesmo valor). Vemos assim que, o potencial efetivo também exhibe o mesmo comportamento atrativo do potencial de gauge, mostrando que a interação pode sim ser atrativa.

Dentro da estrutura geral desse capítulo, a interação total elétron-elétron é composta pela soma das contribuições de gauge e escalar: $V_{total}(r) = V_{scalar} + V_{gauge}$. Esse potencial total sempre é atrativo na presença de uma região de poço. A configuração do potencial

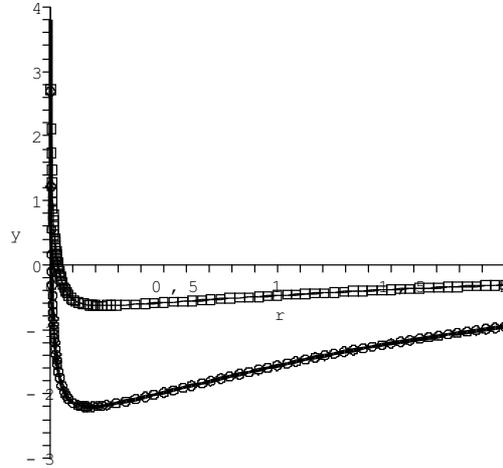


Figura 5.4: Construção simultânea dos gráficos do potencial gauge (5.42) e do potencial efetivo (5.45) para os seguintes conjuntos de parâmetros: $s = 20, L = 1, m_e = 10^5, M_A = 2, v_0 = 10$ (linhas contínua fina e pontilhada em forma de caixas coincidentes); $s = 20, L = 1, m_e = 10^5, M_A = 2, v_0 = 15eV$ (linhas contínua espessa e pontilhada em forma de círculos coincidentes).

total próximo da origem depende dos valores constantes y^2, e_3^2 . Se $y^2 > e_3^2$, o potencial total apresentará um comportamento similar ao potencial escalar da Fig.[5.1]; por outro lado, no caso em que $y^2 < e_3^2$, ele se comportará aproximadamente como o potencial gauge das Figs.[5.2]-[5.3]. Como as formas dos dois potenciais são dotadas com uma região de poço, concluímos que o potencial total pode sempre ser atrativo. Isto constitui um resultado relevante para assegurar a possibilidade de obtermos estados ligados e^-e^- no contexto desse modelo particular.

5.5 Observações Finais

Nesse capítulo, apresentamos a contribuição original dessa dissertação: o cálculo do potencial de interação elétron-elétron no contexto da eletrodinâmica de planar de Maxwell-

Chern-Simons-Proca com violação de Lorentz, obtida por redução dimensional do modelo Higgs-Abeliano de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw [16]. Para o caso de um *background* puramente tipo-tempo, o potencial de interação foi calculado a partir da transformada de Fourier da amplitude de espalhamento Möller (aproximação de Born), tomada no regime não-relativístico. O potencial total obtido apresenta duas contribuições distintas: o potencial escalar atrativo (advindo da interação de Yukawa) e o potencial de gauge (mediado pelo campo de gauge MCS-Proca). O potencial escalar, como esperado, é sempre negativo não importando se está próximo ou distante da origem, e representa uma interação totalmente blindada. Tal interação pode ser indentificada com processos de troca de fônons, que representam excitações escalares em muitos sistemas físicos de interesse. Em relação à interação de gauge, vemos que esta é composta pelo potencial repulsivo de MCS-Proca ($V_{\theta S}$), corrigido por uma contribuição dependente do *background*, a qual impõe modificações de comportamento. Na verdade, para grande valores de v_0 , o potencial de gauge exibe uma região atrativa bastante pronunciada. Ambos os potenciais, de gauge e escalar, representam interações inteiramente blindadas, uma consequência dos mediadores serem massivos (decorrência do mecanismo de Higgs). Esse resultado, em princípio, pode tornar esse potencial conveniente para descrever a interação elétron-elétron em um sistema planar real da física da matéria condensada. Essa é a principal diferença entre os potenciais de interação desse trabalho e os potenciais derivados na ref.[22], os quais apresentam um comportamento assintótico logaritmico e não são convenientes para representar uma interação física em sistemas planares de baixas energias. Então, na tentativa de considerar interações reais em sistemas planares com violação de Lorentz, devemos adotar os potenciais aqui derivados ao invés daqueles encontrados na ref.[22].

Mostramos ainda, que o potencial de interação total possui uma região atrativa, capaz de promover a formação de pares e^-e^- . Como uma aplicação possível, podemos explicitamente calcular as energias de ligação e^-e^- por meio da solução numérica da equação de Schrödinger escrita para os potenciais aqui derivados. Isto pode ser feito atribuindo valores razoáveis para parâmetros livres desse modelo, em um procedimento similar ao

realizados nas refs.[31], [32]. É esperado que um fino ajuste dos parâmetros seja capaz de fornecer energias de ligação situadas na escala de $10^{-3}eV$, escala de energia típica para o emparelhamento elétron-elétron em sistemas planares.

É importante também, enfatizar a diferença entre o potencial obtido nesse capítulo e o obtido na ref.[15], que consiste de uma contribuição repulsiva MCS-Proca adicionada a um potencial escalar atrativo. Nesse último caso, o potencial escalar atrativo advém da intermediação realizada pelo campo de Higgs, sendo que o potencial total revela-se atrativo no caso em que o potencial escalar sobrepuja a contribuição de MCS-Proca. Potanto a possibilidade de uma interação atrativa depende inteiramente da presença do modo de Higgs. Este não é o caso do presente capítulo, onde o campo da intermediação escalar advém da redução dimensional ($\varphi = A^{(3)}$), e não é o campo de Higgs, que agora responde apenas pelo caráter blindado da interação. Vemos então que o elemento verdadeiramente decisivo para a obtenção de um potencial atrativo é o *background* com violação de Lorentz, tanto na presença quanto na ausência do setor de Higgs, fato demonstrado neste capítulo e no anterior.

Capítulo 6

Conclusão

No capítulo II do presente trabalho, foram analisados alguns aspectos básicos da eletrodinâmica clássica em (1+2) dimensões, envolvendo os modelos de Maxwell, Chern-Simons, Maxwell-Chern-Simons, e Maxwell-Chern-Simons-Proca. Tomando como ponto inicial as respectivas lagrangeanas, obtemos as correspondentes equações de onda para as intensidades dos campos e potenciais em cada um destes modelos. Exceto no caso do modelo de Chern-Simons, que não exhibe equações de onda (propagação dinâmica), verificamos que tanto os campos \mathbf{E} e B , quanto os potenciais A_0 e \mathbf{A} , satisfazem equações de onda. No caso dos modelos de MCS e MCS-Proca, as equações de onda satisfeitas pelos potenciais são de quarta ordem e não homogêneas. Partindo destas equações, foram obtidas as soluções para \mathbf{E} , B , A^0 e \vec{A} para cargas pontuais e estáticas.

No capítulo subsequente, foi desenvolvido o estudo do potencial de interação e^-e^- no contexto dos modelos de MCS e MCS-Proca, partindo-se do cálculo da amplitude de espalhamento Möller derivada no regime não-relativístico. Com tal procedimento, foi obtido o potencial elétron-elétron de MCS. A análise da atratividade deste potencial foi considerada levando em conta o termo da barreira centrífuga e o termo de troca de 2 fótons. Constatou-se que o potencial efetivo resultante revela-se de fato repulsivo ao invés de (atrativo), como afirmado na ref.[24]. No caso do modelo de MCS-Proca, os mesmos passos são seguidos, implicando num potencial de interação constituído por uma

combinação linear de funções de Bessel modificadas. A interação real de MCS-Proca também é dada por um potencial efetivo derivado nos moldes do caso anterior.

Na seqüência, consideramos o espalhamento Möller no contexto de uma eletrodinâmica planar de Maxwell-Chern-Simons com violação de Lorentz induzida por um *background* puramente tipo-tempo. O potencial de interação foi calculado como uma transformação de Fourier da amplitude de espalhamento (aproximação de Born) estabelecida no limite não-relativístico. O potencial de interação exibe duas contribuições distintas: uma escalar atrativa (advinda da interação Yukawa) e uma de gauge (mediada por um campo de gauge Maxwell-Proca). A interação escalar de Yukawa, como é esperado, revela-se sempre negativa. Isto torna possível obter um potencial globalmente atrativo, independente do caráter (repulsivo ou atrativo) do potencial de gauge. Na prática, tal interação pode ser identificada com um processo de troca de fônons, os quais representam excitações físicas escalares em muitos sistemas de interesse. A interação de gauge, por sua vez, é composta por um potencial de MCS corrigido por uma contribuição dependente do *background*, o que implica em relevantes modificações físicas sobre o mesmo. A ausência da blindagem, primeiramente observada na ref.[18], torna-se agora manifesta no contexto de um cálculo dinâmico (da onipresença do termo logarítmico). As correções dependentes do *background* são tais que conduzem a um potencial de gauge atrativo para alguns valores dos parâmetros, o que constitui um resultado promissor em conexão com a possibilidade de se obter a formação do par de Cooper. Essa propriedade pode vir a ser adequadamente verificada por meio da análise numérica da equação de Schrödinger suplementada pelo potencial de interação aqui derivado. Tais análises podem eventualmente conduzir a valores das energias de ligação dos pares e^-e^- , dentro da faixa de interesse para sistemas da matéria condensada, desde que valores adequados sejam adotados para os parâmetros do modelo teórico. Se isto de fato ocorrer, tal modelo passa a se mostrar adequado para descrever a física de sistemas planares da matéria condensada.

Em (1+2) dimensões, a interação puramente coulombiana é associada com uma dependência logarítmica, que implica em um comportamento confinante. Tal comporta-

mento físico indesejado pode vir a ser eliminado se o campo de gauge exibir uma componente de massa adicional, tal como o termo de Proca, sendo este escopo de estudo do último capítulo.

No capítulo final, consideramos o espalhamento Möller no contexto da eletrodinâmica planar de Maxwell-Chern-Simons-Proca com violação de Lorentz, obtida da redução dimensional do modelo Higgs-Abeliano de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw [16]. Para o caso de um *background* puramente tipo-tempo, o potencial de interação foi calculado a partir da transformação de Fourier da amplitude de espalhamento Möller (aproximação de Born), considerada no regime não-relativístico. O potencial total obtido apresenta duas contribuições distintas: o potencial escalar atrativo (advindo da interação de Yukawa) e o potencial de gauge (mediado pelo campo de gauge MCS-Proca). O potencial escalar, como esperado, é sempre negativo não importando se está próximo ou distante da origem, e representa uma interação totalmente blindada. Tal interação pode ser indentificada com processos de troca de fônons, como já declarado antes. Em relação a interação de gauge, vemos que esta é composta pelo potencial repulsivo de MCS-Proca ($V_{\theta S}$) corrigido por uma contribuição dependente do *background*, a qual impõe modificações físicas significantes. Na verdade, para grande valores de v_0 , o potencial de gauge exibe uma região atrativa bastante pronunciada. Ambos os potenciais, de gauge e escalar, são interações inteiramente blindadas, uma consequência dos mediadores serem massivos (provinientes do mecanismo de Higgs). Dessa forma, podemos em princípio, considerar que o potencial aqui derivado pode configurar uma conveniente representação de um sistema planar real de física da matéria condensada. Ademais, verificou-se que o potencial total é dotado de uma região atrativa, garantindo, em tese, a formação dos pares e^-e^- . Uma eventual aplicabilidade seria calcular a solução numérica da equação de Schrödinger, construídas para os potenciais aqui obtidos. Isto pode ser realizado a partir de uma devida atribuição de valores aos parâmetros de tal modelo, de forma similar ao realizado nas refs.[31]-[32]. Existe uma expectativa de que, com a promoção de um ajuste fino de parâmetros, sejamos capazes de fornecer energias de ligação aos pares elétron-elétron na escala de $10^{-3}eV$, escala de

energia típica do emparelhamento elétron-elétron em sistemas planares.

Uma continuação óbvia desse trabalho consiste no cálculo do potencial elétron-elétron, no caso de um *background* puramente tipo-espaço, $v^\mu = (0, \mathbf{v})$, que representa uma direção privilegiada no espaço capaz de determinar anisotropia para as soluções. Em geral, esse é um caso mais complicado no qual os potenciais podem ser obtidos somente dentro da aproximação de $v^2/s^2 \ll 1$, como feito na ref.[20]. Esse tratamento será realizado em um trabalho subsequente.

Outro desdobramento deste trabalho, seria analisar a influência da "força de troca" sobre o potencial de interação elétron-elétron. Deste modo, devemos estudar o potencial e^-e^- para várias configurações de spin ($\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow\downarrow$). No caso, os potenciais $V_{\uparrow\uparrow}, V_{\uparrow\downarrow}, V_{\downarrow\downarrow}$ devem ser construídos a partir das soluções da equação de Dirac planar para férmions de polarização de spin *up* e *down*. A influência da força de troca (princípio de Pauli) seria descrita através da comparação dos potenciais $V_{\uparrow\uparrow}, V_{\uparrow\downarrow}, V_{\downarrow\downarrow}$ uns com os outros. É de esperar-se que a configuração de singleto de spin exiba um potencial de interação de gauge mais intenso, uma consequência da maior proximidade dos elétrons neste estado. A princípio, tal tipo de investigação pode ser iniciada com o potencial de MCS puro, devido a sua maior simplicidade.

Referências Bibliográficas

- [1] H.Karmerlingh Onnes, Leiden Comm. 120b, 122b,124c (1911).
- [2] W. Meissner and R. Ochsenfeld, Naturwissenschaften 21, 787 (1933).
- [3] L. N. Cooper, Phys. Rev. **104**, 1189 (1956); J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**,1175 (1956).
- [4] A.A.Abrikosov, Sov. Phys.JETP 5, 1174 (1957).
- [5] J. G. Bednorz and D.E. Müller, Z. Phys. **B64**, 189 (1986).
- [6] W.N. Hady et al., Phys. Rev. Lett. 70, 3999 (1993); Z.-X.Shen et. al., ibid. 70, 1553 (1993); C.C. Tsuei et. al., ibid 72, 593 (1994); A.G. Sun et. al., Phys. Rev. Lett. 72, 2267 (1994); K.A.Kouznetsov et. al., ibid. 9, 3050 (1997).
- [7] A Linde, Rep. Prog. Phys. **42**, 389 (1979); D. Gross, R. Pisarki and L. Yaffe, Rev. Mod. Phys. **53**, 43 (1981).
- [8] W. Siegel, Nucl. Phys. **B156**, 135 (1979); R. Jackiw & S. Templeton, Phys. Rev. **D 23**, 2291 (1981); J. Schonfeld, Nucl. Phys. **B185**, 157 (1981); S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Ann. Phys. **140**, 372 (1982).
- [9] K. v.Klitzing *et al.*, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980); R. B. Laughlin, Phys. Rev. **B23**, 5632 (1981); D.C. Tsui *et al.*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982); R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983). Dois excelentes artigos de revisão: H. Aoki, “Quantised

- Hall Effect”, Rep. Prog. Phys. **50**, 655 (1987); S. M. Girvin, “The Quantum Hall Effect: Novel Excitations and Broken Symmetries”, cond-mat/9907002.
- [10] S. C. Zhang, T. Hanson and S. Kivelson, Phys. Rev. Lett. **62**, 82 (1989); S. C. Zhang, Int. J. Mod. Phys. **B6**, 25 (1992).
- [11] S. M. Carroll, G. B. Field, and R. Jackiw, Phys. Rev. **D 41**, 1231 (1990).
- [12] D. Colladay and V. A. Kostelecký, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997); -ibid, Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998).
- [13] V. A. Kostelecký and S. Samuel, Phys. Rev. D **39**, 683 (1989); V. A. Kostelecký and R. Potting, Nucl. Phys. **B 359**, 545 (1991); ibid, Phys. Lett. B **381**, 89 (1996); ibid, Phys. Rev. D **51**, 3923 (1995).
- [14] H. Belich, T. Costa-Soares, M.M.Ferreira Jr. and J.A.Helayël-Neto, Eur. Phys. J. C **41**, 421 (2005).
- [15] H. Belich, O.M. Del Cima, M.M.Ferreira Jr. and J.A.Helayël-Neto, Int. J. Mod. Phys. A **16**, 4939 (2001).
- [16] A.P.Baêta Scarpelli, H. Belich, J.L.Boldo, L.A.Helayël-Neto, Phys. Rev. D **67**, 085021 (2003); A. Kostelecký, R. Lehnert, and M. Perry, ibid. **68**.123511 (2003); H. Belich et al., ibid. **68**, D065030(2003).
- [17] H. Belich, M.M.Ferreira Jr., J.A.Helayël-Neto, and M.T.D. Orlando, Phys. Rev. D **67**, 125011 (2003); -ibid, D**69**, 109903(E) (2004).
- [18] H. Belich, M.M.Ferreira, Jr., J.A.Helayël-Neto, and M.T.D. Orlando, Phys. Rev. D **68**, 025005 (2003).
- [19] M.M.Ferreira Jr, Phys. Rev. D **70**, 045013 (2004).
- [20] M.M.Ferreira Jr, Phys. Rev. D **71**, 045003 (2005).

- [21] H.Belich, M.M.Ferreira, Jr., J.A.Helayël-Neto, Eur. Phys. J. C **38**, 511(2005).
- [22] Y.I. Kogan, JETP Lett. **49**, 225 (1989).
- [23] A. Groshev and E.R. Poppitz, Phys. Lett. **B235**, 336 (1990).
- [24] H.O. Girotti *et al.*, Phys. Rev. Lett. **69**, 2623 (1992); H.O. Girotti *et al.*, Phys. Lett. **B274**, 357 (1992).
- [25] C. R. Hagen, Phys. Rev. D **31**, 848 (1985); C. R. Hagen, Phys. Rev. Lett. **71**, 202 (1993).
- [26] H.O. Girotti *et al.*, Phys. Rev. Lett. **71**, 203 (1993).
- [27] M.I. Dobroliubov, D. Eliezer, I.I. Kogan, G.W. Semenoff, R. Szabo, Mod. Phys. Lett. **A8**, 2177 (1993).
- [28] David Griffiths, *Introduction to elementary particles*, John Wiley & Sons, Inc. (1987); F. Halzen & A.D. Martin, "*Quarks & Leptons: An introductory Course in Modern Physics*", John Wiley & Sons, Inc. (1984).
- [29] Y. Georgelin, J.C. Wallet, Phys. Rev. **D50**, 6610 (1994).
- [30] C.R. Hagen, Phys. Lett. **71**, 202 (1993) ; H.O.Girotti et al., Phys. Rev. Let. **71**, 203 (1993); M.I. Dobroliubov et al., Mod. Phys. Lett. **A8**, 2177 (1993); Groshev and E.R. Poppitz, Phys. Lett. **B 235**, 336 (1990); Y. Georgelin and J.C. Wallet, Phys. Rev. **D.50**, 6610 (1994).
- [31] H.Belich, O.M. Del Cima, M.M.Ferreira Jr. and J.A.Helayël-Neto, Eur. Phys. J. B **32**, 145 (2003); -ibid, J. Phys. G: Nuclear and Particle Physics **29**, 1431 (2003).
- [32] H. Christiansen, O.M.Del Cima, M.M.Ferreira Jr. and J.A.Helayël-Neto, Int. J. Mod. Phys. **A 18**, 725 (2003).
- [33] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1967.

- [34] R. Jackiw and V. A. Kostelecký, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3572 (1999); J.M. Chung, *Phys. Lett. B* **461**, 138 (1999); J. M. Chung and B. K. Chung *Phys. Rev. D* **63**, 105015 (2001); J.M. Chung, *Phys. Rev. D* **60**, 127901 (1999); M. Perez-Victoria, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2518 (1999); R. Jackiw and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3572 (1999); G. Bonneau, *Nucl.Phys. B* **593**, 398 (2001); M. Perez-Victoria, *JHEP* 0104, 032 (2001); A. P. Baêta Scarpelli *et al.*, *Phys. Rev. D* **64**, 046013 (2001); B. Altschul, *Phys. Rev. D* **70**, 101701 (R) (2004); F.A. Brito, T. Mariz, J.R. Nascimento, E. Passos, R.F. Ribeiro, *JHEP* 0510 (2005) 019.
- [35] C. Adam and F. R. Klinkhamer, *Nucl. Phys. B* **607**, 247 (2001); C. Adam and F.R. Klinkhamer, *Phys. Lett. B* **513**, 245 (2001).
- [36] V.A. Kostelecky and R. Lehnert, *Phys. Rev. D* **63**, 065008 (2001); R. Lehnert, *Phys. Rev. D* **68**, 085003 (2003).
- [37] R. Montemayor and L.F. Urrutia, *Phys. Rev. D* **72**, 045018 (2005); Q. G. Bailey and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev. D* **70**, 076006 (2004).
- [38] A.A. Andrianov, R. Soldati, L. Sorbo, *Phys. Rev. D* **59**, 025002 (1999); A.A. Andrianov, P. Giacconi and R. Soldati, *JHEP* 0202, 030 (2002).
- [39] R. Lehnert, *Phys. Rev. D* **68**, 085003 (2003); R. Lehnert, *J. Math. Phys.* **45**, 3399 (2004).
- [40] M. M. Ferreira Jr & M. S. Tavares, "*Non-relativistic electron-electron interaction in a Maxwell-Chern-Simons-Proca model endowed with a timelike Lorentz-violating background*", hep-th/0601219, trabalho submetido à publicação.
- [41] R. Bluhm, A. Kostelecy, and C. Lane, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1098 (2000); R. Bluhm and A. Kostelecy, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1381 (2000); R. Bluhm, A. Kostelecy, C. Lane, and N. Russell, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 090801 (2002); -ibid, *Phys. Rev. D* **68**, 125008 (2003).

- [42] R. Lehnert, *Phys. Rev. D* **70**, 125010 (2004); *ibid*, *Phys. Rev.Lett.* **93**, 110402 (2004).
- [43] B. Altschul, *Phys. Rev. D* **72**, 085003 (2005); *-ibid*, *Phys. Rev. D* **70**, 056005 (2004); L.P. Colatto, A.L.A. Penna, W.C. Santos, *Eur. Phys. J. C* **36**, 79 (2004); M. Lubo, *Phys. Rev. D* **71**, 047701 (2005); P. A. Bolokhov, S. G. Nibbelink, M.Pospelov, *Phys. Rev. D* **72**, 015013 (2005); M.B. Cantcheff *et al.*, *Phys. Rev. D* **68**, 065025 (2003); H. Belich *et al.*, *Int. J. Mod. Phys. A* **21**, 2415 (2006).