

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Estudo de Colisões kink-antikink e Espalhamento
por Contorno**

Fred Jorge Carvalho Lima

ORIENTADOR: ADALTO RODRIGUES GOMES DOS SANTOS FILHO

CO-ORIENTADOR: KLÉBER ZUZA NÓBREGA

SÃO LUÍS, DEZEMBRO DE 2016

Estudo de Colisões kink-antikink e Espalhamento por Contorno

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Física.

Orientador: Adalto Rodrigues Gomes dos Santos Filho

Doutor em Física - UFMA

SÃO LUÍS, DEZEMBRO DE 2016

Lima, Fred Jorge Carvalho

Estudo de Colisões kink-antikink e Espalhamento
por Contorno. / Fred Jorge Carvalho Lima.

- São Luís : O Autor, 2016.

xxxii, 87 folhas : il., fig., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Maranhão.

Programa de Pós-Graduação em Física, 2016.

Inclui bibliografia e glossário.

1. Defeitos topológicos 2. Kinks

3. Modelos integráveis 4. Modelos não-integráveis I. Título.

007.32 CDD(22.ed.) MEI2008-049

FRED JORGE CARVALHO LIMA

Estudo de Colisões kink-antikink e Espalhamento por Contorno

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Física.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Adalto Rodrigues Gomes dos Santos Filho (Orientador)

UFMA

Prof. Dr. Luciano Casarini

UFES

Prof. Dr. Luis Rafael Benito Castro

UFMA

Prof. Dr. Kléber Zuza Nóbrega (Co-orientador)

IFMA

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus. Agradeço ao Prof. Dr. Adalto me orientar durante o mestrado, por seus incetivos e pelo aprendizado que vem me oportunizando desde da graduação. Quero agradecer ao Prof. Dr. Kléber Zuza Nóbrega pela co-orientação deste trabalho, agradecendo-o também pelos conhecimentos adquiridos durante a disciplina de tópicos que ministrou. Agradeço ainda ao prof. Dr. Fabiano de Carvalho Simas pelas valiosas discussões teóricas; estas foram muito úteis para que consolidasse o entendimento acerca dos temas deste trabalho. Agradeço ao Prof. Rodolfo Casana pelo suporte dado através da coordenação do programa. Agradeço aos professores do programa com os quais tive a oportunidade de estudar: Rodolfo Casana, Eduardo Diniz, Edilberto Oliveira Silva, Luís Rafael Benito, Adalto Rodrigues Gomes e Eduardo da Hora. Agradeço também à secretaria do programa na pessoa de Lucimary Ferreira.

Quero agradecer à minha mãe, Vanda Maria C Lima, que tem sido a minha base de sustentação durante todos esses anos. Agradeço também aos meus irmãos e amigos.

Finalmente, agradeço ao povo brasileiro, que por meio da CAPES financiou este estudo.

Resumo

Nesta dissertação é realizado um estudo de colisões de defeitos topológicos em modelos de campos escalares reais de natureza integrável e não-integrável, em $(1 + 1)$ dimensões. Como teoria integrável, estuda-se o modelo sine-Gordon; como teorias não-integráveis estuda-se os modelos ϕ^4 , duplo sine-Gordon e ϕ^6 . O estudo de colisões é realizado através da solução numérica da equação de movimento. Para tanto, as soluções topológicas para cada modelo são primeiramente encontradas por meio do formalismo de Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfeld (BPS). Os resultados são explicados qualitativamente através de um mecanismo de troca de energia que envolve os modos normais de vibração das soluções *kinks*. Tal mecanismo elucidada a grande diferença na dinâmica de modelos integráveis e não-integráveis. Também é realizado um estudo de colisões de *kinks* em uma semi linha, com condição de contorno de Neumann, para os modelo ϕ^4 e ϕ^6 . Os resultados mostram uma variedade de novos comportamentos que não são observados em colisões *kink-antikink* no espaço ilimitado.

Palavras chave: Defeitos topológicos, kinks, Modelos integráveis, Modelos não-integráveis.

Abstract

In this dissertation is performed a study of collisions of topological defects in both integrable and non-integrable models of $(1+1)$ dimensional scalar real fields. As integrable theory it is studied the sine-Gordon model; as non-integrable theories it is studied the ϕ^4 , double sine-Gordon and ϕ^6 models. The research of collision is made through numerical solution of the motion equation. For this purpose, first are obtained the topological solutions for each model by using the Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfeld (BPS) formalism. We explained the results analytically through of a exchange energy mechanism, which is associated to the normal vibrational modes of kinks solutions. This mechanism explains the large difference between dynamics of the integrable and non-integrable models. It is also carried out a study of kinks collision for both ϕ^4 and ϕ^6 on a half line with a Neumann boundary condition. The results show a variety of new features which do not observed for kink-antikink collisions on full line.

Key-words: Topological defects, kinks, integrable models, non-integrable models

Sumário

1	Introdução	1
2	Campo Escalar Real	6
2.1	Formulação Lagrangeana	6
2.2	Método de Bogomol'nyi	9
2.3	Análise perturbativa das soluções estáticas	11
3	Modelos Integráveis	15
3.1	Modelo Sine-Gordon (SG)	15
4	Modelos Não-Integráveis	23
4.1	Modelo $\lambda\phi^4$	23
4.2	Duplo Sine-Gordon	36
4.2.1	Colisões kink-antikink para $\eta = -\frac{1}{2}$	40
4.3	Modelo ϕ^6	44
5	Espalhamento em Barreiras de Contorno	51
5.1	Modelo $\lambda\phi^4$	51
5.1.1	Soluções e condições de contorno	52
5.1.2	Energia na Fronteira	54
5.2	Colisão <i>Antikink-Fronteira</i>	58
5.3	Modelo ϕ^6	65
5.3.1	Soluções e condição de contorno	65
5.3.2	Energias na Fronteira	66
5.4	Colisão <i>Antikink-Fronteira</i>	67

5.4.1	Resultados e Discussão	68
6	Conclusão	70
	Referências Bibliográficas	72
A	Métodos Numéricos	78
A.1	Diferenças Finitas	78
B	Força Estática	81
B.1	Modelo ϕ^4	81
B.1.1	Força estática de interação kink-antikink no modelo ϕ^4	81
B.1.2	Força de interação entre o antikink e a Fronteira	83
B.2	Modelo ϕ^6	84
B.2.1	Força entre kinks.	84
B.2.2	Força entre o kink e a Fronteira	86

Lista de Figuras

1.1	Exemplo cotidiano de quebra espontânea de simetria. a) Os pontos 1a, 3a e 3c são indiferentes diante da estratégia do símbolo ●, b) uma vez escolhido o ponto 3c, a configuração mudará para 1.1c.	2
3.1	Potencial, modelo sine-Gordon	16
3.2	Potencial $V_{Sch}(x)$ e a autofunção do modo zero $\eta_0(x)$	19
3.3	Perfil inicial estático <i>kink-antikink</i> para o modelo sine-Gordon.	20
3.4	Colisão <i>kink</i> com <i>antikink</i> no modelo sine-Gordon. $v_{ini} = 0.2$. a) Malha 3D da evolução espaço-temporal do perfil: verde representa o vácuo $\phi_v = 0$, amarelo $\phi_v = 2\pi$ e azul $\phi_v = -2\pi$. b) recorte de a) em $x = 0$. c) recorte de a) em $t = 180$, mostrando que após a colisão o perfil interpola entre 0 e -2π	21
4.1	Potencial $\lambda\phi^4$ para $\lambda = 2$ e $m = \sqrt{2}$	24
4.2	Perfil estático para uma colisão do tipo <i>kink-antikink</i>	27
4.3	a) Colisão <i>kink-antikink</i> para $v_i = 0.25$. tendo como estado final um <i>bion</i> . b) centro de massa do campo escalar $\phi(x = 0, t)$ em $x = 0$ em função do tempo com $v_i = 0.18$, mostrando o aspecto caótico do <i>bion</i>	29
4.4	a) Colisão <i>kink-antikink</i> para $v_i = 0.2$, resultando em <i>two-bounce</i> . b) centro de massa do campo escalar $\phi(x = 0, t)$ em $x = 0$ em função do tempo com $v_i = 0.2$	30
4.5	a) Evolução do campo escalar $\phi(x, t)$ com $v_i = 0.36$, mostrando uma colisão do tipo <i>one-bounce</i> . b) recorte do campo $\phi(x = 0, t)$ em $x = 0$ em função do tempo para $v_i = 0.36$. A colisão é caracterizada pelo pico de mínimo.	30
4.6	a) $v_i = 0.226$, <i>two-bounce</i> que pertence a segunda janela; $n = 2$, b) $v_i = 0.2386$ <i>two-bounce</i> na terceira janela; $n = 3$	32

4.7	a) Número da janela n acrescido por 2 <i>versus</i> T_{12} b) Número de bounces (Nb) <i>versus</i> velocidade inicial	34
4.8	a) Janelas de 3-bounces na vizinhança das janelas de 2-bounces. b) Zoom da região em vermelho de a), mostra a vizinhança da segunda janela de <i>two-bounces</i> . É possível ver as janelas de <i>four-bounces</i> nas proximidades das janelas de <i>three-bounces</i>	36
4.9	$V(\phi)$ para $\eta = -1.0$	38
4.10	$V(\phi)$ para a) $\eta = -0.2$, b) $\eta = +0.2$	39
4.11	$V(\phi)$ para $\eta = +1.0$	39
4.12	$n = -1$. a) <i>small kink</i> b) <i>large kink</i>	41
4.13	Colisões de <i>kinks</i> no modelo DsG com $\eta = -1/2$: a) Número de <i>bounces versus</i> v_i b) Janelas de <i>three-bounces</i> na vizinhança de uma janela de <i>two-bounce</i>	43
4.14	$\eta = -1.0$. Em alta velocidades, um par de <i>small kinks</i> decai em um par de <i>large kinks</i>	44
4.15	Potencial do modelo ϕ^6	45
4.16	Potencial de perturbação V_{sch} para um individual <i>antikink</i> $\phi_{(1,0)}(x)$	48
4.17	Acima de uma velocidade crítica v_{cr} o par $K\bar{K}$ decai em um $\bar{K}K$ no setor topológico $(0, -1)$	48
4.18	Tempo entre a primeira (linha preta) , segunda (linha vermelha) e terceira (linha verde) colisão para $(1, 0) + (0, 1)$. Para janelas de <i>two-bounces</i> , o tempo para a terceira colisão diverge.	49
4.19	Potencial de perturbação (linha sólida) e configurações iniciais (linha tracejada) para os pares ordenados: a) $(0, 1) + (1, 0)$ e b) $(1, 0) + (0, 1)$	50
5.1	Soluções Estáticas, $H = \frac{1}{2}$	53
5.2	X_0 e X_1 em função de H	53
5.3	Energias em função de H	57
5.4	Todas as configurações de energia possíveis em função de H	58
5.5	Configurações iniciais para a) $H > 0$ dada por (5.25). b) $H < 0$ dada por (5.28).	60
5.6	Número de <i>bounces</i> por v_i para a) $H = -0.1$, b) $H = -0.2$. Em c) temos o <i>antikink</i> na velocidade crítica de repulsão para $H = -0.2$; $v_i = 0.171992022$	61
5.7	Janela zero. Não existe nenhuma oscilação entre os dois grandes mínimos.	62

5.8	Número de <i>bounces versus</i> v_i : a) $H = 0$ reproduz o modelo ϕ^4 ; b) $H = +0.2$. . .	63
5.9	Colisão <i>antikink</i> -fronteira para $H = 0.9$. a) $v_i = 0.35$, b) $v_i = 0.37$ formação de um par $K\bar{K}$ c) $v_i = 0.39$ Formação de um <i>bulk oscillon</i>	64
5.10	X_0 em função de H no modelo ϕ^6	66
5.11	Estrutura de <i>two-bounce</i> para: a) $H = 0.1H_{max}$, b) $H = 0.2H_{max}$. Em c) vemos uma colisão do tipo <i>two-bounce</i> quando $v_i = 0.06242$ e $H = 0.1H_{max}$	68
5.12	a) Primeira janela de <i>two-bounce</i> para $H = 0.2H_{max}$. b) Formação de um <i>bulk oscillon</i> para $v_i = 0.3$, com $H = 0.9H_{max}$	69

Capítulo 1

Introdução

O princípio de mínima ação, proposto por William Hamilton, é aquele que, dos princípios e leis da física, melhor sintetiza o comportamento da natureza. Em suma este princípio nos diz que, dentre todos os caminhos possíveis para que um fenômeno aconteça, a natureza escolherá aquele pelo qual uma certa quantidade, denominada *ação*, será extrema [1]. Seguindo esse princípio, na teoria clássica de campos, quando se considera a menor *ação* possível, pode-se, em certas teorias, obter soluções de mínima energia. Por essa razão o estudo de campos escalares tem sido muito útil para descrição de diversos fenômenos naturais, nos quais entende-se que a natureza utiliza uma quantidade mínima de energia. Têm-se como exemplo, a coloração de alguns seres vivos, tais como algumas espécies de flores e as zebras; fenômenos da termodinâmica, como transições de fase e a magnetização de materiais ferromagnéticos que também podem ser descritos através de uma teoria de campo escalar adequada.

Nesta Dissertação, nossa atenção estará voltada para teorias de campos escalares que admitem quebra espontânea da simetria [2], gerando uma configuração topológica. É esse tipo de solução que ao longo dos anos tem sido utilizada para uma variedade de estudos [3,4].

Outro conceito importante no estudo de uma teoria física é o conceito de quebra espontânea de simetria. Uma quebra espontânea de simetria ocorre quando um sistema físico tem a possibilidade de escolher entre dois ou mais estados que são indiferentes para ele, ou seja, ambos são igualmente satisfatórios. Por fins didáticos, vamos ilustrar uma situação de quebra espontânea de simetria. Para isso considere uma situação comum ao jogo que é popularmente conhecido como: *jogo da velha*. Nesse jogo o objetivo é fazer uma linha, coluna ou diagonal com o mesmo símbolo. Considere então a configuração da figura 1.1a, e que próximo jogador é o que está

usando o símbolo ●. Existe uma simetria entre as escolhas indicadas pelas coordenadas $1a$ e $3c$, já que cada uma dessas duas possibilidades deixará ● com as mesmas chances de vencer, as figuras 1.1b e 1.1c representam tais situações. No entanto, após escolher $1a$ ou $3c$ a simetria inicial já não existe, ou seja, ela foi espontaneamente (naturalmente) quebrada, dependendo da escolha do jogador ▲, uma nova simetria poderá se estabelecer. Na física também ocorre algo semelhante, pois a quebra de uma simetria inicial também pode levar à uma simetria residual, isto acontece, por exemplo, em teorias inicialmente simétricas por um grupo $SO(n)$, com $n \geq 2$, cuja simetria residual é o grupo $SO(n-1)$ [2].

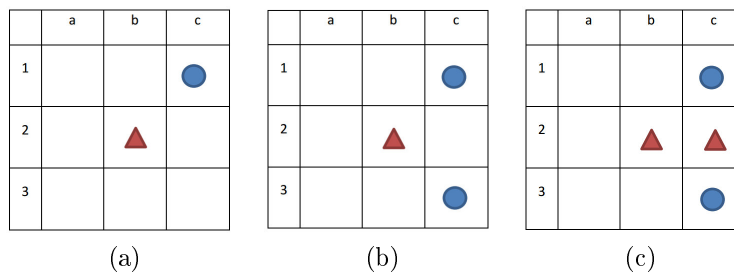


Figura 1.1: Exemplo cotidiano de quebra espontânea de simetria. a) Os pontos $1a$, $3a$ e $3c$ são indiferentes diante da estratégia do símbolo ●, b) uma vez escolhido o ponto $3c$, a configuração mudará para 1.1c.

Uma solução topológica é aquela que, em $(1+1)$ dimensões, faz uma interpolação entre dois estados de mínima energia, em um cenário com mais dimensões, a interpolação acontece entre conjuntos de estados de mínima energia. A região do potencial que permite a interpolação de uma solução topológica é chamada, neste trabalho, de setor topológico. Dependendo da forma do potencial, podem existir um ou mais setores topológicos que podem ser equivalentes ou não. Por exemplo, o modelo ϕ^4 possui um setor topológico, que é a única região de interpolação possível; o potencial do modelo ϕ^6 possui dois setores topológicos, sendo o ponto $\phi = 0$ comum a ambos os setores; o modelo sine-Gordon possui infinitos setores topológicos, no entanto, todos são equivalentes entre si. Para uma solução topológica, a densidade de energia é bem comportada e localizada em alguma região finita do espaço. Um campo com tal configuração de energia é chamado de sóliton topológico, ou simplesmente de *sóliton* [5]. Na natureza pode-se considerar, por exemplo, uma flor com duas cores, sendo que cada cor representa um estado fundamental de mínima energia. Assim, em uma dada região da flor, ela apresentará uma interpolação de uma cor para outra, gerando um defeito topológico na região de interpolação.

O estudo de colisões de defeitos é relevante por ser um estudo da dinâmica de um modelo,

através da interação entre os *solitons*. Por exemplo, em uma teoria de campos relativística as equações dinâmicas são determinadas unicamente por uma generalização relativística da equação de Euler-Lagrange para campos estáticos, nesse caso, um *boost* de Lorentz é aplicado à solução estática, dessa forma, o *soliton* pode se mover com uma velocidade arbitrária, menor que a velocidade da luz. A natureza da colisão pode ou não ser dissipativa, contudo, se tem mostrado que em quase todos os casos, *solitons* podem se comportar como partículas [5].

A seguir, apresentamos a divisão estrutural deste trabalho.

Esta dissertação, em grande parte, consiste de uma revisão sobre colisões de defeitos topológicos nos seguintes modelos de campos escalares: sine-Gordon, $\lambda\phi^4$, sine-Gordon duplo e ϕ^6 . A relevância deste estudo é assegurada pelas diversas investigações, acerca de tais modelos, descritas na literatura da segunda metade do século XX [6].

O capítulo 2, apresenta uma revisão para campos escalares reais em $(1+1)$ dimensões. Neste capítulo são apresentadas as definições que serão úteis no decorrer deste trabalho, dando ênfase às soluções conhecidas como estados BPS. O capítulo é finalizado com o estudo da estabilidade destas soluções.

No capítulo 3 é feita uma revisão onde se apresenta as principais características dos modelos integráveis. Especificamente na seção 3.1 estuda-se o mais relevante dentre os modelos integráveis: o modelo sine-Gordon, na ocasião são obtidas as soluções estáticas para a equação de movimento deste modelo, e após a análise de estabilidade dessas soluções, apresentam-se as possíveis soluções de estados ligados. Na parte final deste capítulo é apresentado o resultado da colisão entre um *kink* e um *antikink*.

O capítulo 4 é uma revisão dos principais resultados da literatura científica no que se refere ao estudo de colisões de defeitos em modelos não-integráveis. O capítulo se inicia com o estudo do modelo $\lambda\phi^4$, são obtidas as soluções estáticas, *kink* e *antikink*, para a equação de movimento e então, como passo seguinte, é feita a análise de estabilidade através pequenas perturbações para estas soluções, obtendo uma equação de Schrödinger para o campo perturbado. Percebe-se que o estudo das possíveis soluções de estado ligado, bem como soluções de estado de espalhamento, da equação de Schrödinger, é fundamental para a compreensão da dinâmica do campo. Em seguida apresenta-se o comportamento do campo nas colisões *kink-antikink* para o modelo $\lambda\phi^4$, ricos padrões na dinâmica do sistema *kink-antikink* são observados, tais comportamento já são bem conhecidos na literatura científica [3, 4, 7–10]. Dentre eles Apresenta-se as estruturas

conhecidas como janelas de *two-bounces*, que vem sendo alvo de diversos estudos desde a década de 1970 [11]. Apresentamos também o aspecto fractal das janelas de *two-bounces*, que abre caminho para o conhecimento das janelas de *multi-bounces* presentes em teorias não-integráveis. A explicação para os fenômenos observados é feita através do mecanismo de troca de energia, responsável por explicar o surgimento das “janelas de *multi-bounces*” presentes em colisões de modelos não-integráveis. Na seção 4.2, é feito um estudo de revisão acerca do modelo sine-Gordon duplo, tal modelo, dependendo de um parâmetro η , pode ou não admitir natureza não-integrável, por isso, nesta dissertação η , é escolhido de forma a garantir a natureza não-integrável do modelo, mais especificamente as simulação são feitas para $\eta < -1/4$. Este modelo tem sua relevância garantida por suas diversas aplicações em física da Matéria Condensada [6, 12, 13]. Na seção 4.3 é feita uma revisão sobre os resultados de colisões entre *kinks*¹ para o modelo ϕ^6 , um contra-exemplo do mecanismo de troca de energia, proposto por D. Campbell em 1983, é apresentado, uma vez que fenômenos de ressonância são observados mesmo na ausência de um modo interno de vibração por parte das soluções *kinks* do modelo [14].

O capítulo 5 apresenta, em forma de revisão, um estudo recente [15] sobre colisões de *kinks* no modelo $\lambda\phi^4$, neste estudo, admite-se uma condição de contorno de Neumann em $x = 0$, desta forma o espaço é limitado, tornando-se uma linha semi-infinita em $(1 + 1)$ dimensões. Falando de forma mais objetiva, neste cenário o *kink* ou *antikink* se desloca a partir de uma certa posição $-x_0 < 0$, indo em direção barreira com contorno apropriado em $x = 0$. Analisa-se o efeito do contorno sobre a estrutura de janelas de *two-bounce*, além do que, novos comportamentos, dos quais até então não se tinha relato científico, são apresentados.

A contribuição desta dissertação é apresentada na seção 5.3, onde estuda-se a colisão de *kinks* do modelo ϕ^6 na linha semi-infinita com condição de contorno de Neumann em $x = 0$, onde a derivada do campo deve ser igual a um campo H . A motivação para tal estudo é verificar se os fenômenos observados no modelo da seção 5.1 ainda são observados em um cenário de maior não-linearidade, que é o caso do modelo ϕ^6 , além da verificação de possíveis novos comportamentos. Nossas simulações são feitas no setor topológico que compreende os mínimos do potencial $\phi_{min} = 0$ e $\phi_{min} = 1$, nesse setor as soluções são aceitáveis somente quando $H > 0$. As colisões realizadas mostram que os novos fenômenos observados no modelo da seção 5.1 também acontecem no cenário do modelo ϕ^6 com contorno, no entanto neste a

¹Neste trabalho, usamos o termo *kinks* para se referir à uma configuração *kink-antikink*.

velocidade crítica de escape tem um comportamento diferente. É importante ressaltar que já existem na literatura, trabalhos sobre colisão de *kinks* em um espaço limitado, citamos como exemplo, os trabalhos envolvendo a colisão de *kinks* com impurezas, no modelo sine-Gordon e $\lambda\phi^4$, conforme [16, 17].

O capítulo 6, apresenta as principais conclusões deste trabalho. O apêndice A, apresenta o método numerico utilizado neste trabalho. O apêndice B uma revisão da dedução da força estática entre *antikink-kink* e *antikink-fronteira* para o modelo $\lambda\phi^4$ e também para o modelo ϕ^6 .

Capítulo 2

Campo Escalar Real

Campos escalares são apropriados para descrever sistemas físicos com infinitos graus de liberdade, ou seja, um sistema físico contínuo [18]. O formalismo mais adequado para descrever um sistema físico contínuo é o lagrangeano, felizmente existe uma grande semelhança entre o formalismo lagrangeano de sistemas discretos e contínuos, por isso, um leitor que já esteja familiarizado com tal formalismo para sistemas discretos, não encontrará dificuldades no estudo de sistemas contínuos.

A seguir, estuda-se o formalismo lagrangeano para um campo escalar real em $(1 + 1)$ dimensões. Apesar de sua simplicidade, o campo escalar unidimensional tem sido amplamente utilizado na literatura científica, pois muitos sistemas físicos tridimensionais mantêm suas características quando analisados em uma dimensão espacial, por exemplo, as paredes de domínios existentes em materiais ferromagnéticos [19].

2.1 Formulação Lagrangeana

A física de um campo escalar real em $(1+1)$ dimensões é descrita pela densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.1)$$

onde $\mu = 0, 1$ e $\phi = \phi(x, t)$. O termo cinético da densidade Lagrangeana (2.1) é descrito pelo quadrado de uma taxa de variação, o segundo termo da densidade lagrangeana, $V(\phi)$, é denominado de potencial. É o potencial que determina o rumo particular cada teoria física.

Por definição, a ação é dada por

$$S = \int d^2x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (2.2)$$

Nas expressões acima e no restante deste trabalho utiliza-se o sistema de unidades $\hbar = c = 1$.

Como próximo passo a ser seguido, em uma analogia com a mecânica analítica, deve-se procurar obter as equações de movimento para o campo ϕ . Na mecânica analítica, quando a lagrangeana depende apenas das coordenadas generalizadas e suas respectivas derivadas, ao minimizar a variação da ação obtêm-se a equação de Euler-Lagrange. Como a Lagrangeana (2.1) depende apenas do campo ϕ e de sua derivada, a aplicação do princípio de Hamilton $\delta S = 0$ [2, 18] deve conduzir a equação de Euler-Lagrange (equação de movimento) para o campo ϕ . Esta declaração é confirmada através do seguinte desenvolvimento matemático:

$$\delta S = \int d^2x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right] = 0, \quad (2.3)$$

sendo que $\delta (\partial_\mu \phi) = \partial_\mu (\delta \phi)$.

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta \phi). \quad (2.4)$$

Substituindo (2.4) em (2.3), podemos escrever a variação da ação como

$$\delta S = \int d^2x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] \delta \phi = 0.$$

Como $\delta \phi$ é arbitrário [2], temos que

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (2.5)$$

Como esperado, a utilização do princípio de mínima ação nos conduziu a equação de Euler-Lagrange para o campo ϕ . Agora, a substituição da Lagrangeana na equação de Euler-Lagrange, resulta na equação de movimento para o campo escalar $\phi(x, t)$.

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.6)$$

Se a métrica é tal que $\partial_0 = \partial^0 = \frac{\partial}{\partial t}$ e $\partial_1 = -\partial^1 = -\frac{\partial}{\partial x}$, a equação (2.6) se torna

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.7)$$

Consideremos agora, transformações na variável interna do campo, ou seja, translações na seguinte forma para $\phi(x^\mu)$:

$$\phi(x^\mu) \rightarrow \phi'(x^\mu) = \phi(x^\mu + \varepsilon^\mu) \implies \delta \mathcal{L} = \varepsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L}.$$

O teorema de Noether para translações nos leva a seguinte equação de conservação [2, 18]

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \right] = 0,$$

onde a quantidade entre colchetes é o tensor de energia momento

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.8)$$

$T_{\mu\nu}$ é uma matriz com quatro elementos em (1 + 1) dimensões. Os elementos da diagonal principal são identificados como $\mathcal{E} = T_{00}$ sendo a densidade de energia e $p = T_{11}$ sendo a pressão [20].

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi) \quad (2.9)$$

$$p = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - V(\phi) \quad (2.10)$$

O momento, por sua vez, é [5]

$$P_i = - \int T_{0i} dx. \quad (2.11)$$

Até aqui, o campo escalar foi considerado em sua forma mais geral, apresentando dependência em relação ao espaço e ao tempo. Um caso de particular interesse é considerar que o campo ϕ não apresente mudanças com o passar do tempo, isto é, quando o campo é considerado estático. Por exemplo, *solitons*, que são objeto de estudo neste trabalho, têm como característica fundamental uma forma estável e localizada, tal forma pode ser descrita por um campo estático

$\phi = \phi(x)$. A substituição de um campo estático $\phi(x)$ na equação de movimento (2.7) resulta

$$-\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.12)$$

As soluções da equação (2.12) são conhecidas como *soluções estáticas*. A densidade de energia e pressão para soluções estáticas são

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi) \quad (2.13)$$

e

$$p = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 - V(\phi) \quad (2.14)$$

respectivamente. A energia do campo estático é então obtida por integração da densidade de energia (2.13).

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E} dx$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi) \right] dx. \quad (2.15)$$

2.2 Método de Bolgomol'nyi

Em 1976 E.B. Bolgomol'nyi publicou um método que permite encontrar a energia mínima do campo [21]. Esse método consiste em um truque de completar quadrados na expressão da energia (2.15). O método de Bolgomol'nyi tem sido expresso atualmente em termo da função denominada superpotencial $W(\phi)$, que se relaciona com $V(\phi)$ da seguinte forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2. \quad (2.16)$$

Logo, $V(\phi)$ pode ser expresso em termos de $W(\phi)$, quando $V(\phi)$ for positivo em toda sua extensão. A energia em termos do superpotencial fica

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2 \right] dx.$$

Agora, completa-se o quadrado da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \mp \frac{dW}{d\phi} \right)^2 \pm 2 \frac{d\phi}{dx} \frac{dW}{d\phi} \right] dx \\
 E &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \mp \frac{dW}{d\phi} \right)^2 \pm \frac{dW}{dx} \right] dx \\
 E &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \mp \frac{dW}{d\phi} \right)^2 dx \pm W \Big|_{\phi(-\infty)}^{\phi(\infty)}. \tag{2.17}
 \end{aligned}$$

O termo da integral é positivo, então se anularmos esse termo, teremos certeza que a energia encontrada é a energia mínima. Essa certamente é uma das vantagens que se tem com a expressão (2.17). A anulação do termo na integral em (2.17) conduz à seguinte condição:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{dW(\phi)}{d\phi}. \tag{2.18}$$

Esta é uma equação de primeira ordem para o campo ϕ . Podemos escrevê-la em termos do potencial da seguinte forma:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V}. \tag{2.19}$$

E assim a busca pela energia mínima nos fez encontrar equações de primeira ordem, enquanto na abordagem usual (2.12), as equações são de segunda ordem. O formalismo desenvolvido a partir de $W(\phi)$ em (2.16), resultando nas equações (2.18) e (2.19) é o *formalismo BPS* (Bogomol'nyi, Prasad, Sommerfield) [21, 22]. As soluções da equação de primeira ordem (2.18) também são conhecidas como *estados BPS*.

Substituindo (2.18) em (2.17) encontramos a energia mínima do campo.

$$E_{min} = \pm W \Big|_{-\infty}^{\infty} = \|W(\phi(\infty)) - W(\phi(-\infty))\| \tag{2.20}$$

A expressão (2.20) é um importante resultado, pois mostra que é possível conhecer energia do campo antes mesmo de conhecer sua solução de forma explícita, conhecendo apenas seu comportamento assintótico. Devido a isso, diz-se que $E_{min} = \Delta W$ é um invariante topológico, pois só depende dos valores de W nas fronteiras.

Há ainda na literatura, um outro método que também resulta em equações de primeira

ordem; tal método foi proposto por Schaposnik e Vega [23]. Dessa vez se chega as equações de primeira ordem (para vórtices em 1+2 dimensões) considerando a conservação do tensor de energia momento. No entanto, o método de Schaposnik apesar de resultar nas mesmas equações de primeira ordem do método de Bolgomol'nyi , não nos garante que a energia é mínima.

2.3 Análise perturbativa das soluções estáticas

Sabemos pelo princípio de Hamilton [1, 18], que fenômenos físicos naturais, acontecem por um caminho de energia mínima. Por isso, nesta dissertação estaremos lidando com soluções de mínima energia que sejam estáveis. Já mostramos através da equação (2.20) que os estados BPS são soluções com mínima energia. Nesta seção analisamos a estabilidade dessas soluções, seguindo os passos de [20].

Iniciamos adicionando pequenas perturbações $\eta(x, t)$ à solução estática $\phi_s(x)$

$$\phi_p(x, t) = \phi_s(x) + \eta(x, t). \quad (2.21)$$

A seguir substituímos $\phi_p(x, t)$ na equação de movimento e, já que $|\eta(x, t)| \ll |\phi(x)|$ em (2.21), podemos considerar somente termos lineares em $\eta(x, t)$. Dessa forma, obtemos a seguinte igualdade:

$$\left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{d^2 V(\phi)}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_s} \eta = 0. \quad (2.22)$$

Como a solução estática depende somente de x , podemos assumir que a perturbação tenha a forma

$$\eta(x, t) = \sum_k \eta_k(x) e^{i\omega_k t}. \quad (2.23)$$

Após substituir (2.23) na equação (2.22), obtemos a seguinte equação do tipo Schrödinger

$$\hat{H}\eta_k(x) = \omega_k^2 \eta_k(x), \quad (2.24)$$

onde o operador Hamiltoniano tem a seguinte forma

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_{sch}(x), \quad (2.25)$$

e onde

$$V_{sch}(x) = \left. \frac{d^2 V(\phi)}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_s}. \quad (2.26)$$

Adiante nos referimos à $V_{sch}(x)$ como potencial de Schrödinger ou potencial de perturbações.

Assim como na Mecânica Quântica, $V_{sch}(x)$ admite dois tipos de soluções: soluções de estados ligados e estados de espalhamento. As funções de onda de estados ligados são caracterizadas por serem bem localizadas em uma região finita do espaço, essa condição faz com que no infinito, tais soluções tendam a zero. Se a energia da partícula aumenta de modo a ser maior que o potencial $V_{sch}(x)$, dizemos que chegamos no espectro contínuo de soluções, na faixa de energias do espectro contínuo, as autofunções são ondas planas, e portanto não são bem localizadas [24, 25].

A estabilidade das soluções estáticas exige autovalores positivos em (2.24). Ou seja, teremos soluções estáveis sempre que $\omega_k^2 \geq 0$ em (2.24), pois se $\omega_k^2 < 0$, a forma de $\eta(x, t)$ mudaria consideravelmente, e isto indicaria uma solução não estável. A autofunção obtida quando $\omega_k^2 = 0$ é conhecida como modo zero, ou modo translacional. É importante destacar que independente da forma explícita do potencial $V(\phi)$ a equação de Schrödinger sempre admite uma solução para o modo zero [26]. Para provar a existência do modo zero, diferenciamos (2.12) em relação a x em $\phi = \phi_s(x)$. O resultado é

$$\begin{aligned} \left[-\frac{d^3 \phi}{dx^3} + \frac{d}{d\phi} \left(\frac{dV(\phi)}{d\phi} \right) \frac{d\phi}{dx} \right]_{\phi=\phi_s} &= 0, \\ \left[-\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) + \frac{d^2 V(\phi)}{d\phi^2} \frac{d\phi}{dx} \right]_{\phi=\phi_s} &= 0, \\ \left[-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2 V(\phi)}{d\phi^2} \right]_{\phi=\phi_s} \phi'_s(x) &= 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

que é exatamente (2.24) para $\omega_k = 0$. Vemos também que a autofunção de modo translacional

é:

$$\eta_k(x) \propto \frac{d\phi_s}{dx}. \quad (2.28)$$

Em termos do formalismo BPS (2.16) o Hamiltoniano (2.25) se torna

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + [W_{\phi\phi}^2 + W_{\phi}W_{\phi\phi\phi}]_{\phi=\phi_s(x)}. \quad (2.29)$$

A vantagem desta descrição é que podemos agora escrever \hat{H} através do produto de operadores

$$\hat{H} = \hat{S}_{\pm}^{\dagger} \hat{S}_{\pm}, \quad (2.30)$$

desde que

$$\hat{S}_{\pm} = -\frac{d}{dx} \pm W_{\phi\phi} \Big|_{\phi=\phi_s(x)} \quad e \quad \hat{S}_{\pm}^{\dagger} = \frac{d}{dx} \pm W_{\phi\phi} \Big|_{\phi=\phi_s(x)},$$

e assim, em termos dos estados BPS escrevemos (2.24) como

$$\hat{S}_{\pm}^{\dagger} \hat{S}_{\pm} \eta_k(x) = \omega_k^2 \eta_k(x). \quad (2.31)$$

Com isso podemos mostrar que o espectro de autovalores de \hat{H} é positivo. Fazemos isso escrevendo (2.24) em sua base de *autoestados* [24, 27]

$$\langle \eta_k | \hat{H} | \eta_k \rangle = \langle \eta_k | \omega_k^2 | \eta_k \rangle.$$

$$\langle \eta_k | \hat{S}_{\pm}^{\dagger} \hat{S}_{\pm} | \eta_k \rangle = \langle \eta_k | \omega_k^2 | \eta_k \rangle.$$

Aplicando uma relação de completeza $\Lambda = \sum_l |\eta_l\rangle \langle \eta_l|$ entre os operadores, obtemos que

$$\omega_k^2 = \sum_l \left| \langle \eta_l | \hat{S}_{\pm} | \eta_k \rangle \right|^2 \geq 0, \quad (2.32)$$

e dessa forma mostramos que \hat{H} tem um espectro de autovalores positivos e, como consequência podemos dizer que as soluções de estado BPS são estáveis.

Finalizamos esta seção, observando que o modo zero em (2.30) satisfaz a seguinte igualdade

$$\frac{d\eta_0(x)}{dx} = \pm W_{\phi\phi} \eta_0(x), \quad (2.33)$$

Separando as variáveis e integrando, encontramos que o modo zero para soluções BPS pode ser escrito como

$$\eta_0(x) = A \frac{dW}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_s}. \quad (2.34)$$

A constante A é determinada pela condição de normalização¹ de $\eta_0(x)$. Lembrando da relação (2.18), vemos que esse resultado está em perfeito acordo com (2.28).

¹A condição de normalização adotada neste trabalho é: $\int f^*(x) f(x) dx = 1$, onde $f^*(x)$ é o complexo conjugado da função $f(x)$.

Capítulo 3

Modelos Integráveis

Na âmbito da mecânica clássica, um sistema Hamiltoniano completamente integrável, dimensionalmente finito com $2n$ graus de liberdade, tem n constantes de movimento. Em teorias de campos escalares, uma condição necessária para um sistema ser completamente integrável se deve a existência de um número infinito de constantes de movimento [28], isto é, um número infinito de grandezas físicas conservadas. A natureza conservativa desses sistemas pode ser notada ao se estudar os processos de colisões. De fato, um comportamento comum em sistemas integráveis, é que após a colisão o soliton sofre apenas uma mudança de fase, e o centro de massa do sistema não perde energia; a colisão é elástica. A solução da equação KdV e solitons no modelo sine-Gordon são exemplos de modelos que exibem essa característica peculiar aos modelos integráveis [5]. A seguir, apresentamos uma revisão sobre o modelo sine-Gordon, uma teoria completamente integrável muito estudada no século XX.

3.1 Modelo Sine-Gordon (SG)

Em 1970, Rubinstein modificou o termo de massa da equação $\frac{1}{2}(\phi_t^2 - \phi_x^2 - m^2\phi^2) = 0$ por uma função periódica de ϕ com período de 2π . Em seguida, encontrou $2m^2(1 - \cos\phi)$ como sendo a forma mais simples que se reduz à $m^2\phi^2$, quando ϕ é pequeno, se tornando então a equação de Klein-Gordon para o limite de pequenas amplitudes [29]. A seguir, são apresentadas importantes características deste modelo, que ficou conhecido como sine-Gordon. Este modelo é o mais estudado entre os modelos integráveis, a razão para isto é, principalmente, sua aplicação em várias de áreas da física, como, física de partículas, ótica não-linear, deslocamento de cristais

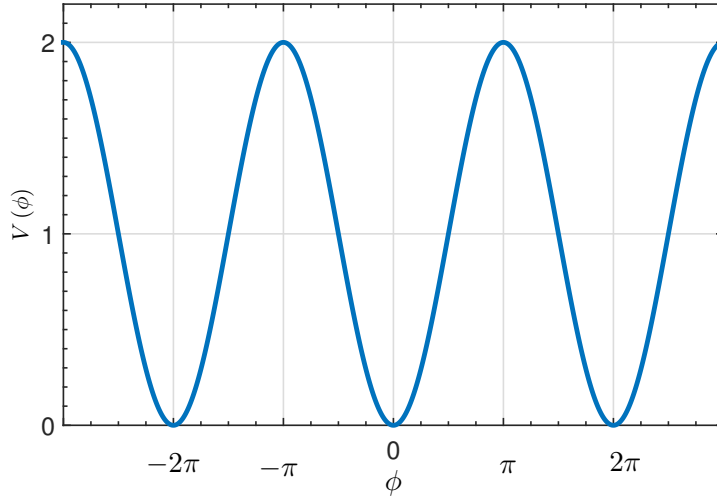


Figura 3.1: Potencial, modelo sine-Gordon

e ferromagnetismo [30].

O modelo sine-Gordon em $(1 + 1)$ dimensões é descrito pela seguinte Lagrangeana ($m = 1$).

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - (1 - \cos \phi), \quad (3.1)$$

assim, o potencial é

$$V(\phi) = (1 - \cos \phi). \quad (3.2)$$

Vemos pela figura 3.1 que o modelo sine-Gordon é invariante sobre $\phi \rightarrow \phi + 2\pi n$, com n sendo inteiro positivo. Os mínimos do potencial, em termos de n , são dados por $\phi_{0n} = 2\pi n$. A equação de movimento para o modelo sine-Gordon é

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \sin \phi = 0. \quad (3.3)$$

Esta equação foi usada por Frenkel e Kontorova para estudar a propagação de um *slip* em uma cadeia de átomos elasticamente ligados, colados sobre uma outra cadeia de átomos similares [31,32]. A aplicação do formalismo de primeira para este modelo, resulta na seguinte expressão:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2(1 - \cos \phi)}.$$

Integrando ambos os termos, obtemos

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \cos \phi}} = \pm \int \sqrt{2} dx.$$

Usando a substituição $t = \tan\left(\frac{\phi}{4}\right)$, podemos escrever que

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \cos \phi}} = \int \frac{d\phi}{\sqrt{2} \sin(\phi/2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{4dt}{1+t^2} \frac{1+t^2}{2t} = \sqrt{2} \ln t. \quad (3.4)$$

Dessa forma encontramos que

$$x = \pm \ln \tan\left(\frac{\phi}{4}\right),$$

e assim, obtemos a solução estática como sendo

$$\phi_s(x) = 4 \arctan(e^x). \quad (3.5)$$

Esta é a solução *kink* do modelo sine-Gordon, que interpola entre os mínimos 0 e 2π . A solução *antikink*, que interpola entre 2π e 0 pode ser obtida pela permutação $x \rightarrow -x^1$, em razão da simetria Z_2 do potencial. O *kink* (*antikink*) é um defeito de caráter topológico, pois ele interpola entre dois diferente estados de mínima energia do sistema. O superpotencial $W(\phi)$ do modelo é dado por

$$W = \mp 4 \cos\left(\frac{1}{2}\phi\right). \quad (3.6)$$

Então, utilizando (2.20), vemos que a energia da solução estática (3.5) é: $E = E_{BPS} = 8$.

Conforme demonstrado em [33], sempre que existir uma solução estática, do tipo (3.5), pode-se obter uma solução de onda viajante associada à solução estática. Em síntese, a solução de onda viajante é obtida pela aplicação de um *boost* de Lorentz. Tal procedimento resulta em um *kink* (ou *antikink*) cujo centro de massa viaja a partir de uma posição x_0 , com uma velocidade $0 < |v| < 1$. Matematicamente, o *kink* viajante é expresso por

$$\phi_K [Z(x, x_0, v, t)] = 4 \arctan(e^Z), \quad (3.7)$$

onde $Z(x, x_0, v, t) = \gamma(x - x_0 - vt)$, $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ é o fator de contração de Lorentz e x_0 é a

¹A solução $\phi_K(x) = -\phi_K(x)$ é um *antikink* que interpola entre os mínimos de potencial 0 e -2π

posição do centro de massa do *kink*. Como visto adiante, a solução viajante (3.7) é utilizada na colisão de *kinks* para o modelo sine-Gordon.

Agora, o objetivo é realizar uma análise perturbativa da solução estática (3.5). Isto é feito considerando pequenas perturbações, em torno da solução estática, na seguinte forma:

$$\phi_{pert.} = \phi_s(x) + e^{i\omega t}\eta(x). \quad (3.8)$$

Conforme pode-se verificar, a parte real de (3.8) é equivalente ao campo perturbado (2.21). Então, após substituir ϕ_{pert} na equação de movimento e linearizar com respeito a $\eta(x)$, obtêm-se a equação:

$$-\frac{d^2\eta(x)}{dx^2} + \cos(4 \arctan(e^x))\eta(x) = \omega^2\eta(x). \quad (3.9)$$

Percebemos que esta é a equação (2.24) para o modelo sine-Gordon. Comparando percebe-se ainda que

$$V_{sch}(x) = \cos(4 \arctan(e^x)). \quad (3.10)$$

A equação (3.9) somente possui solução de estado ligado para $\omega = \omega_0 = 0$. Como mencionado na seção 2.3, a solução relacionada à essa auto energia é conhecida como "modo zero" ou "modo de translação" do *kink*. Então, após a análise perturbativa da solução estática, para o modelo sine-Gordon, conclui-se o *kink* deste modelo possui apenas um modo de translação associado à auto-energia $\omega_0 = 0$. Por resolução direta da equação (3.9), encontra-se o "modo zero" como sendo

$$\eta_0(x) = \frac{1}{2}C_1 \operatorname{sech}(x), \quad (3.11)$$

a constante de normalização é $C_1 = \sqrt{2}$. Por outro lado, também pode-se obter este resultado lembrando que, uma vez conhecida a solução BPS de um modelo, não é mais necessário resolver a equação (3.9), diretamente, para obter a solução modo zero $\eta_0(x)$, pois basta fazer uso da expressão (2.34) para encontrar $\eta_0(x)$ de forma mais prática. Verifiquemos então, a praticidade de (2.34) para o modelo sine-Gordon. Usando a solução BPS $\phi_s = 4 \arctan(e^x)$ e o

superpotencial $W = -4 \cos(\frac{1}{2}\phi)$ na expressão (2.34), obtêm-se que:

$$\eta_0(x) = 2A \sin(2 \arctan(e^x)). \quad (3.12)$$

Normalizando, têm-se $A = \sqrt{\frac{1}{8}}$. Assim, após encontradas as constantes de normalização, está verificado que os dois métodos, de fato, nos conduzem a mesma solução, sendo, no entanto, a expressão (2.34) mais prática para o caso de soluções BPS. O modo zero normalizado é :

$$\eta_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sech}(x). \quad (3.13)$$

A figura 3.2 ilustra o potencial de perturbações, $V_{Sch}(x)$, juntamente com a autofunção associada ao modo de translação. Observe que, como já descrevemos, a autofunção é bem localizada, se anulando em quaisquer dos infinitos $x = \pm\infty$. O estudo referente aos estados ligados para o potencial de perturbação tem papel de destaque na explicação do comportamento observado em colisões de defeitos. A não-existência de outra solução de estado ligado, além do modo zero, para a equação (3.9), implica que não deve existir interações (fenômenos de ressonância) entre um *kink* e um *antikink*, que venham a colidir um com o outro. No Capítulo (4), são apresentados exemplos de interações entre *kink-antikink*, quando o modelo possui além do modo zero, um outro modo, chamado de modo vibracional ou ainda " *internal shape mode* ".

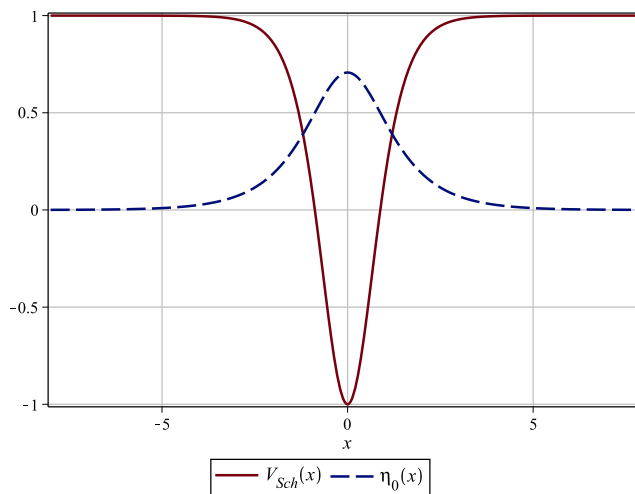


Figura 3.2: Potencial $V_{Sch}(x)$ e a autofunção do modo zero $\eta_0(x)$

Agora, diante do resultados analíticos obtido, a colisão de *kinks* no modelo sine-Gordon pode ser realizada. Para realizar esta colisão calculamos numericamente a evolução da equação de

movimento (3.3). Como esta é uma equação diferencial parcial de segunda ordem, precisaremos ao menos de duas condições iniciais para que a solução se torne possível. Essas condições são obtidas a partir da configuração inicial, conforme descrevemos a seguir.

Como configuração inicial, considera-se um *kink* (3.7) que interpola entre os mínimos 0 e 2π localizado em uma posição $-x_0$, com $x_0 > 0$, se deslocando com velocidade $v_i > 0$, e um *antikink* correspondente na posição x_0 se deslocando com velocidade $-v_i$. Estas condições são matematicamente expressas por:

$$\phi(x, t = 0) = \phi_K [Z(x, -x_0, v_i, 0)] + \phi_K [-Z(x, x_0, -v_i, 0)] - 2\pi, \quad (3.14)$$

ou seja,

$$\phi(x, t) = 4 \arctan \{ \exp [\gamma (x + x_0)] \} + 4 \arctan \{ \exp [\gamma (-x + x_0)] \} - 2\pi.$$

Esta condição representa o *perfil inicial* espacial, que pode ser observado na figura (3.3) em dois possíveis momentos t_1 e t_2 , com $t_1 > t_2$, para que possamos perceber de que forma ambos *kink* e *antikink* se aproximam um do outro. A outra condição inicial é dada pela derivada temporal de (3.14) no instante $t = 0$, isto é:

$$\dot{\phi}(x, 0) = \dot{\phi}_K [Z(x, -x_0, v_i, 0)] + \dot{\phi}_K [-Z(x, x_0, -v_i, 0)] \quad (3.15)$$

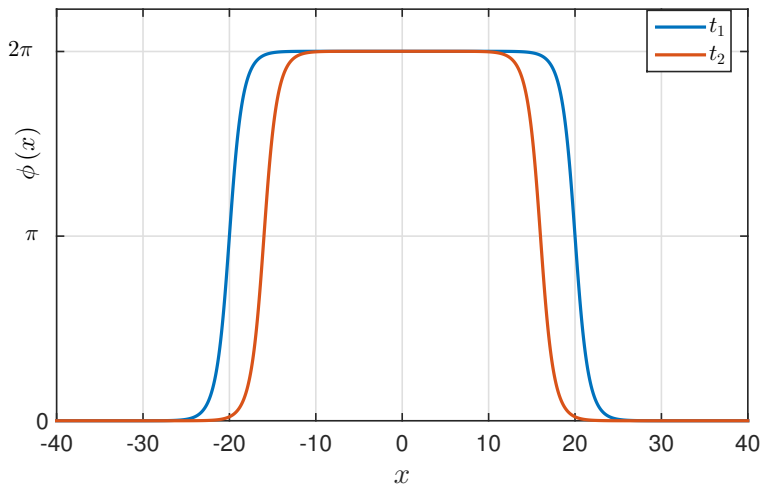


Figura 3.3: Perfil inicial estático *kink-antikink* para o modelo sine-Gordon.

Utilizamos um método de diferenças finitas com aproximação de 4^a ordem (veja o apêndice A.1), a propagação no domínio do tempo é realizada através do método de Runge-Kutta de 4^a ordem.

A figura 3.4 ilustra $\phi(x, t)$ quando $v_i = 0.2$. Vemos que no modelo sine-Gordon os *kinks* se aproximam até um ponto de encontro, onde ocorre uma colisão elástica, no entanto, o *kink* e o *antikink* que retornam após a colisão mudam para um outro estado de vácuo do potencial, ou seja, inicialmente tanto *kink* como *antikink* interpolam entre os vácuos do potencial $\phi_v = 0$ e $\phi_v = 2\pi$, após a colisão, ambos passam a interpolar entre os vácuos $\phi_v = 0$ e $\phi_v = -2\pi$. Tal mudança é mais claramente ilustrada na figura 3.4b, que mostra a evolução do perfil inicial em $x = 0$, e também pela figura 3.4c, que é uma “fatia” de 3.4a para o tempo $t = 180$.

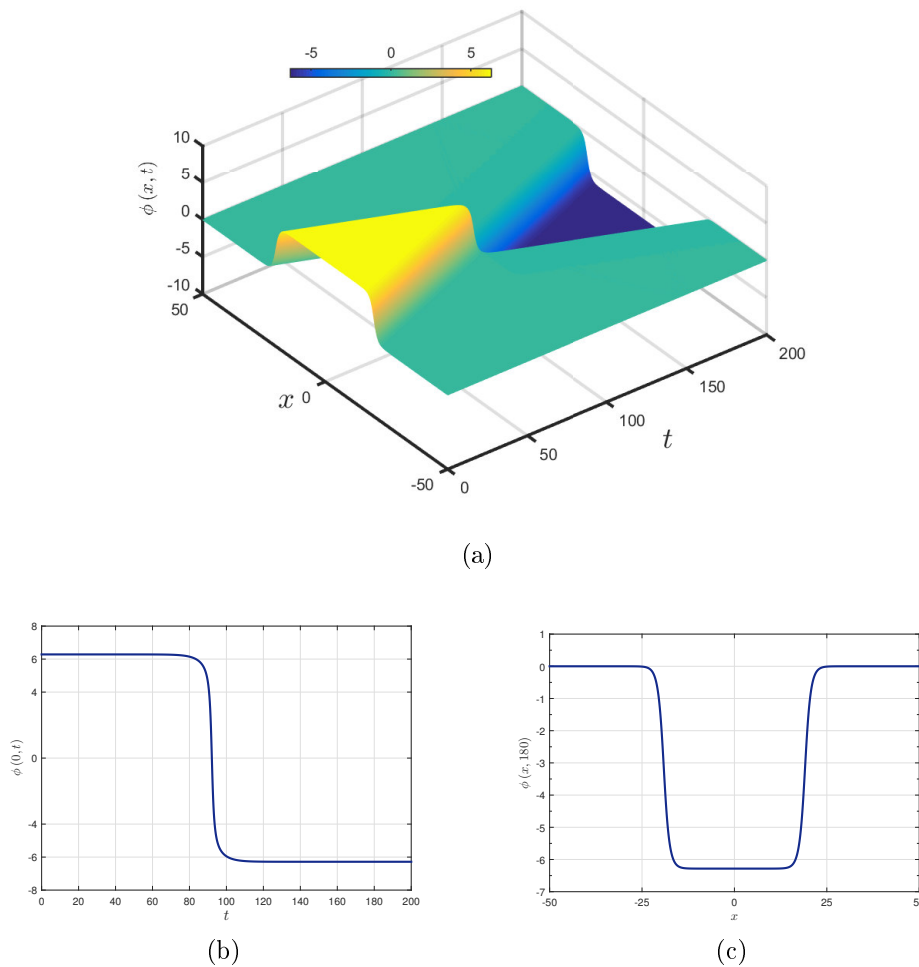


Figura 3.4: Colisão *kink* com *antikink* no modelo sine-Gordon. $v_{ini} = 0.2$. a) Malha 3D da evolução espaço-temporal do perfil: verde representa o vácuo $\phi_v = 0$, amarelo $\phi_v = 2\pi$ e azul $\phi_v = -2\pi$. b) recorte de a) em $x = 0$. c) recorte de a) em $t = 180$, mostrando que após a colisão o perfil interpola entre 0 e -2π .

O fato de a colisão no Modelo sine-Gordon ser elástica está diretamente relacionado à ausência de um modo vibracional (*shape mode*) na solução da equação de perturbações (3.9). Em uma colisão, solitons podem perder energia em forma de radiação², este não é o caso do modelo SG, pois observamos pelas figuras 3.4b e 3.4c a ausência de qualquer radiação.

²Não se trata de radiação eletromagnética. São ondas planas de pequenas amplitudes através das quais o centro de massa do sistema perde energia.

Capítulo 4

Modelos Não-Integráveis

4.1 Modelo $\lambda\phi^4$

A partir da metade dos anos 70 do século XX, em virtude do aprimoramento dos sistemas computacionais algébricos e também devido ao desenvolvimento do *método de espalhamento inverso*¹, começou-se a estudar com mais atenção as propriedades dos chamados modelos não-integráveis, uma vez que estes não apresentam solução analítica exata, necessitando de métodos numéricos para o estudo de suas dinâmicas. Dentre esses modelos, sem dúvida, o que mais tem se destacado é a teoria do potencial $\lambda\phi^4$. Isto se deve à rica dinâmica presente neste modelo. Nesta seção, é feita uma descrição desse modelo utilizando os conceitos de campos clássicos, estudados no capítulo 2 desta dissertação. Logo em seguida, estuda-se colisões *kink-antikink* para outros dois modelos e apresenta-se, como revisão, alguns efeitos interessantes observados na literatura científica, acerca de tais modelos.

A descrição em $(1 + 1)$ dimensões da teoria ϕ^4 é feita pela seguinte lagrangeana.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - V(\phi),$$

sendo o potencial [9]

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} \left(\frac{m^2}{\lambda} - \phi^2 \right)^2. \quad (4.1)$$

Assim o Hamiltoniano do sistema é:

¹Method of Inverse Scattering Problem - MISP

$$H[\phi] = \frac{1}{2} \int \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} \left(\frac{m^2}{\lambda} - \phi^2 \right)^2 \right) dx.$$

E a equação de Euler-Lagrange é

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) - m^2 \phi + \lambda \phi^3 = 0. \quad (4.2)$$

A solução da equação (4.2) é desenvolvida em termos das constante m e λ , no entanto, é importante enfatizar que tais constantes devem ser escolhidas de forma que o potencial apresente quebra espontânea de simetria e que a energia seja limitada inferiormente [2]. Se estabelecemos a relação $m = \sqrt{\lambda}$, então basta escolher $\lambda > 0$ para que a teoria apresente quebra espontânea de simetria, sendo a energia do sistema limitada inferiormente. A figura 4.1 mostra o gráfico do potencial (4.1) para $\lambda = 2$.

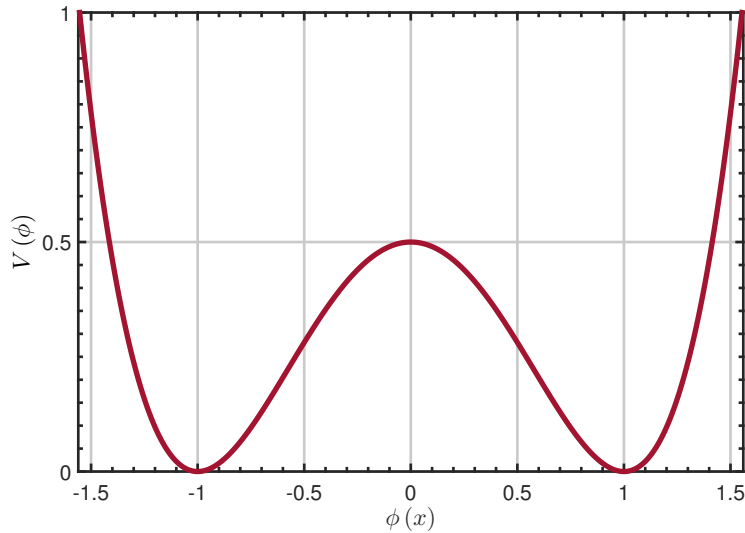


Figura 4.1: Potencial $\lambda\phi^4$ para $\lambda = 2$ e $m = \sqrt{2}$

Como abordado no capítulo 2, é útil apresentar a função superpotencial, que está vinculada ao potencial por $W_\phi = \pm\sqrt{2V(\phi)}$, uma vez que esta conduz à soluções estáticas de energia mínima através da expressão (2.20). Para o potencial (4.1), temos que $W(\phi)$ é expresso por

$$W(\phi) = \frac{m^2}{\sqrt{2\lambda}}\phi - \sqrt{\frac{\lambda}{18}}\phi^3. \quad (4.3)$$

As soluções estáticas, são então obtidas por (2.18), resultando nas seguintes equações de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \left[\frac{m^2}{\sqrt{2\lambda}} - \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \phi^2 \right]. \quad (4.4)$$

A solução para o sinal “+” é dada por

$$\phi_K(x) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh\left(\frac{mx}{\sqrt{2}}\right). \quad (4.5)$$

A solução $\phi_K(x)$ é conhecida como *kink* do potencial $\lambda\phi^4$, a solução para o sinal “−” da equação (4.4) é obtida pela permutação $x \rightarrow -x$, e é conhecida como *antikink*, sendo denotada por $\phi_{\bar{K}}(x)$. Novamente, a solução viajante é obtida pela aplicação de um *boost* de Lorentz, ou seja

$$\phi_K(x, v_i, t) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh\left(\gamma \frac{m}{\sqrt{2}} (x - v_i t)\right). \quad (4.6)$$

O potencial (fig. 4.1) apresenta dois mínimos degenerados $\phi_{\pm} = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$, que são os vácuos da teoria. Considerando pequenas perturbações em torno do vácuo $\phi = \phi_{\pm} + \chi(x, t)$, na equação de movimento (4.2) e considerando apenas termos lineares em χ , têm-se a seguinte equação

$$\chi_{tt} - \chi_{xx} + 2m^2\chi = 0. \quad (4.7)$$

As soluções no espectro contínuo da equação (4.7) são ondas planas, cuja relação de dispersão é dada por $\omega^2 = k^2 + 2m^2$. Isso significa que perturbações em torno do vácuo da teoria correspondem a partículas de massa $\mu = m\sqrt{2}$ [6]. Agora observa-se o que acontece quando pequenas perturbações são adicionadas à solução do kink. Tal situação é descrita pela expressão

$$\phi(x, t) = \phi_K(x) + \xi(x, t), \quad (4.8)$$

com $x_0 = 0$ em ϕ_K e $|\xi| \ll |\phi_K|$. Substituindo a solução ligeiramente perturbada, (4.8), na equação de movimento (4.2) e linearizando com respeito a η , obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - m^2 \xi + 3m^2 \tanh^2\left(\frac{m}{\sqrt{2}}x\right) \xi = 0, \quad (4.9)$$

e substituindo $\xi(x, t) = e^{-i\omega t}\eta(x)$, obtêm-se

$$-\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - 3m^2\text{sech}^2\left(\frac{m}{\sqrt{2}}x\right)\eta = (\omega^2 - 2m^2)\eta \quad (4.10)$$

Novamente, esta é uma equação estacionária de Schrödinger, pois pode ser escrita na forma

$$-\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + V_{sch}(x)\eta = \omega^2\eta.$$

Nesse caso o potencial de Schrödinger é novamente obtido pela derivada segunda do potencial com $\phi = \phi_K$, isto é,

$$V_{sch}(x) = \left. \frac{d^2V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_K} = 2m^2 - 3m^2\text{sech}^2\left(\frac{mx}{\sqrt{2}}\right). \quad (4.11)$$

A busca por soluções de estados ligados para esse potencial, nos leva a uma situação diferente da observada para o modelo sG na seção 3.1. Nesse caso existem duas soluções no espectro discreto (soluções de estados ligados) de V_{sch} . As auto energias com as respectivas auto função são:

- Para $\omega_0 = 0$

$$\eta_0(x) = \left(\frac{3m}{4\sqrt{2}}\right)^{1/2} \text{sech}^2\left(\frac{mx}{\sqrt{2}}\right). \quad (4.12)$$

- Para $\omega_1^2 = \left(\frac{3}{2}m^2\right)$

$$\eta_1(x) = \left(\frac{3m}{2\sqrt{2}}\right)^{1/2} \tanh\left(\frac{mx}{\sqrt{2}}\right) \text{sech}\left(\frac{mx}{\sqrt{2}}\right). \quad (4.13)$$

Assim, a solução da equação (4.9) para ω_1 fica

$$\xi(x, t) = e^{-i\omega_1 t}\eta_1(x).$$

A solução (4.12) é o modo de translação, já a solução (4.13) é o modo oscilatório do *kink*, que é conhecido na literatura como “*internal shape mode*” [4, 34]. O conhecimento acerca dessas soluções é fundamental para o entendimento dos ricos e diversos comportamentos presentes em colisão de *kinks* na teoria ϕ^4 . Para $\omega_k^2 \geq 2m^2$, a equação (4.10) admite soluções do espectro contínuo. As soluções do espectro contínuo foram obtidas na referência [9].

Passamos agora ao estudo de colisão entre *kinks* no modelo ϕ^4 . A colisão *kink-antikink* nesse modelo apresentou padrões intrigantes, primeiramente observados em estudo numérico,

realizado por Ablowitz, Kruskal e Ladik [11]. O primeiro passo para estudo de colisões de kinks topológicos é a definição do perfil inicial, conforme já visto no capítulo anterior. Em nossos estudos, percebemos que o perfil inicial precisa satisfazer as seguintes condições:

1. Ser formado pela soma das soluções estáticas de mínima energia, ou seja, solução da equação de primeira ordem.
2. O perfil inicial precisa ir em $x = \pm\infty$ para um mesmo valor de mínimo do potencial. A região média do perfil deve ir para um mínimo adjacente do potencial.

A definição do perfil, é de fundamental importancia, pois é ele que determina em que sentido da energia potencial a colisão está acontecendo, uma vez que, a região central do perfil especifica o mínimo inicial, enquanto que os pontos limites determinam a energia potencial adjacente para a qual o sistema se moverá. Por exemplo, se no modelo ϕ^4 o ponto médio do perfil se encontra no mínimo $\phi_{min} = 1$, os pontos limites $x = \pm\infty$ devem está no mínimo $\phi_{min} = -1$. Nesse caso, o estado final da colisão tendem a se estabelecer, a menos que estejamos no espectro contínuo, no mínimo de potencial $\phi_{min} = -1$. Como o potencial ϕ^4 apresenta simetria Z_2 , na pratica não se notará mudanças em relação à ordem inversa do perfil inicial. Isto implica que podemos fazer uma colisão do tipo *kink* com *antikink* (o que indica que o *kink* parte de uma posição $-x_0 < 0$ e o *antikink* parte uma posição $x_0 > 0$) ou uma colisão do tipo *antikink* com *kink* que, em ambos os casos, teremos os mesmo resultados, devido à simetria Z_2 do potencial. No entanto, como veremos na seção 4.3, para o potencial ϕ^6 , que possui três mínimos, a escolha do perfil é fundamental para os resultados da colisão.

Neste trabalho, realiza-se uma colisão tipo *kink-antikink*, conforme esquematizado abaixo.

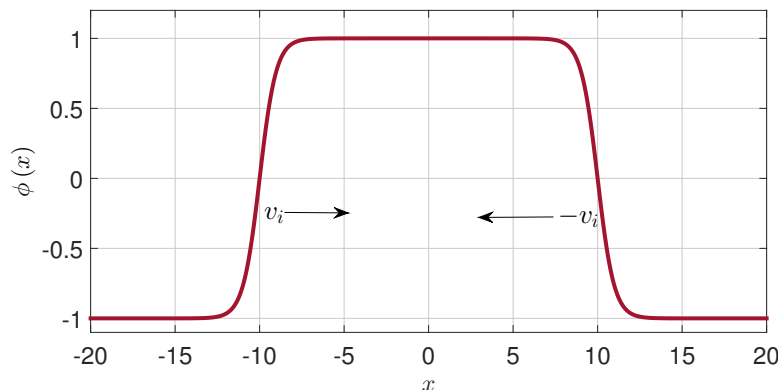


Figura 4.2: Perfil estático para uma colisão do tipo *kink-antikink*

A partir de agora consideramos $\lambda = 2$ e $m = \sqrt{2}$. A primeira condição inicial é dada pelo perfil:

$$\phi(x, 0) = \phi_K(x + x_0, v_i, 0) - \phi_K(x - x_0, -v_i, 0) - 1,$$

a outra condição inicial é dada por

$$\dot{\phi}(x, 0) = \dot{\phi}_K(x + x_0, v_i, 0) - \dot{\phi}_K(x - x_0, -v_i, 0).$$

Essas condições são utilizadas para resolver a equação de movimento (4.2) numericamente. Para tal, novamente faz-se uso do método de diferenças finitas de 4^ª ordem para o cálculo da solução em x e do método Runge-Kutta de 4^ª ordem, para o cálculo da função temporal.

Agora passaremos a análise, em caráter de revisão, da colisão no modelo ϕ^4 . Em geral, o comportamento final obtido em colisões de sólitons depende da velocidade inicial v_i . Ocorre que, em modelos não-integráveis, como o ϕ^4 , essa dependência é ainda mais acentuada. Já no primeiro estudo numérico do ϕ^4 , realizado por Martin Kruskal, Mark Ablowitz e Joel Ladik (AKL) [11] foram observadas características intrigantes - a “ponta do iceberg”, por assim dizer. Quando encontraram comportamento até então inédito; eles escreveram:

“Finalmente, observamos que (2c) ’ (a teoria ϕ^4) ’ apresenta um fenômeno que não foi notado por nós em nenhum outro cálculo, também não foi notado por Kudryavtsev. Conforme v_i diminui para $v_i = 0.3$, v_f diminui 0.135. Em $v_i = 0.25$, um estado oscilatório é observado. No entanto, conforme v_i diminui para 0.2 o estado oscilatório volta a emitir ondas em uma pequena região em torno de $v_i = 0.2$. Na verdade em $v_i = 0.2$, v_f é encontrada sendo 0.155 , que é maior do que a v_f observada quando $v_i = 0.3$! Um pouco abaixo de $v_i = 0.2$ um estado oscilatório torna a aparecer. Subseqüentes reduções de v_i também resultam em forma de onda oscilatória. O motivo da notável ’ ressonância ’ entre essas ondas interagentes não-periódicas e a radiação, ainda não são completamente entendidos ” Estudos posteriores mostraram que a

“ressonância” observada por (AKL) é na verdade apenas uma, de uma sequência de ressonâncias, e a explicação para o surgimento de tais “ressonâncias” foi proposta Campbell, Schonfeld e Wingate (CSW) na referência [3].

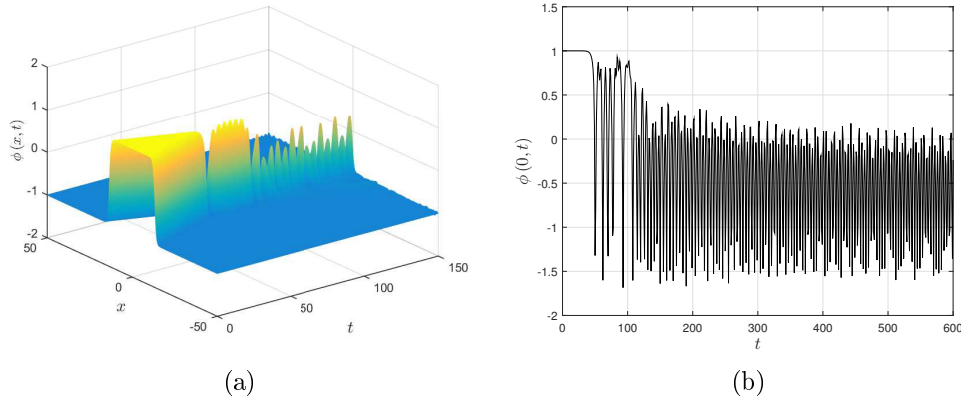


Figura 4.3: a) Colisão kink-antikink para $v_i = 0.25$. tendo como estado final um *bion*. b) centro de massa do campo escalar $\phi(x = 0, t)$ em $x = 0$ em função do tempo com $v_i = 0.18$, mostrando o aspecto caótico do *bion*.

Agora, apresentamos as principais características notadas nas colisões *kink-antikink*:

Na colisão de *kinks* em modelos não-integráveis nem sempre teremos como resultado final, dois *kinks* se propagando. Para algumas velocidades iniciais v_i , após a colisão, os *kinks* se ligam um ao outro, formando um estado oscilatório muito duradouro, pois após formado esse estado tende a decair muito lentamente em radiação. Esse estado é conhecido na literatura como *bion*. Esse é o comportamento ao qual (AKL) mostraram ter encontrado em $v_i = 0.25$ e em velocidades abaixo de 0.2. A figura 4.3a, apresenta o resultado da colisão para $v_i = 0.25$, é possível perceber como os *kinks* ficam presos um ao outro por um longo tempo. Os autores da referência [4] mostraram que o *bion* é caótico. A figura 4.3b é o resultado da colisão para $v_i = 0.18$, onde ver-se o centro de massa $\phi(0, t)$ do estado *bion* em função do tempo, através dessa figura podemos ter noção do aspecto caótico que é comum a um estado *bion*.

Dependendo da velocidade inicial, outro fenômeno muito interessante ocorre. Após colidirem uma primeira vez, os *kinks* se afastam um do outro e em um tempo posterior tornam a colidir pela segunda vez, depois dessa segunda colisão os *kinks* se separam definitivamente refletindo ao outro. Esse fenômeno é conhecido como *two-bounce*. A figura 4.4a mostra a evolução da colisão *kink-antikink* para $v_i = 0.2$, na figura 4.4b vemos a mesma colisão na “linha” do centro de massa, ou seja, um recorte da figura 4.4a em $x = 0$. Em gráficos desse tipo a colisão é caracterizada, por um pico de mínimo, por isso em $v_i = 0.2$ vemos dois picos de mínimo. Outra característica observada, é que existe, no caso da figura 4.4b, apenas uma pequena oscilação

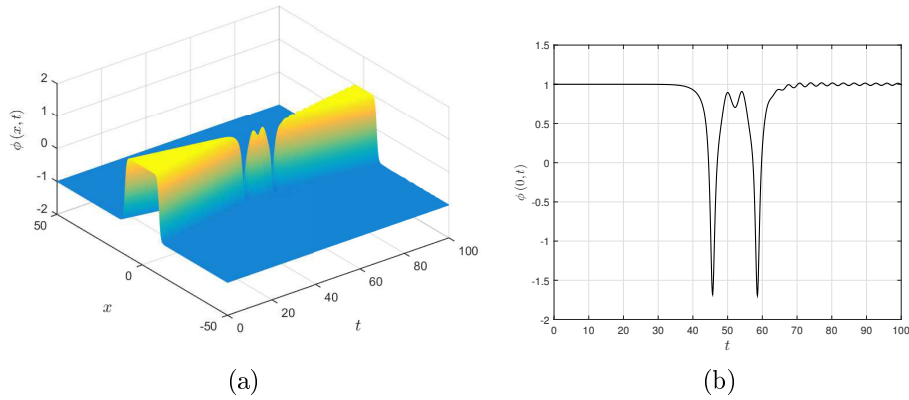


Figura 4.4: a) Colisão kink-antikink para $v_i = 0.2$, resultando em *two-bounce*. b) centro de massa do campo escalar $\phi(x = 0, t)$ em $x = 0$ em função do tempo com $v_i = 0.2$.

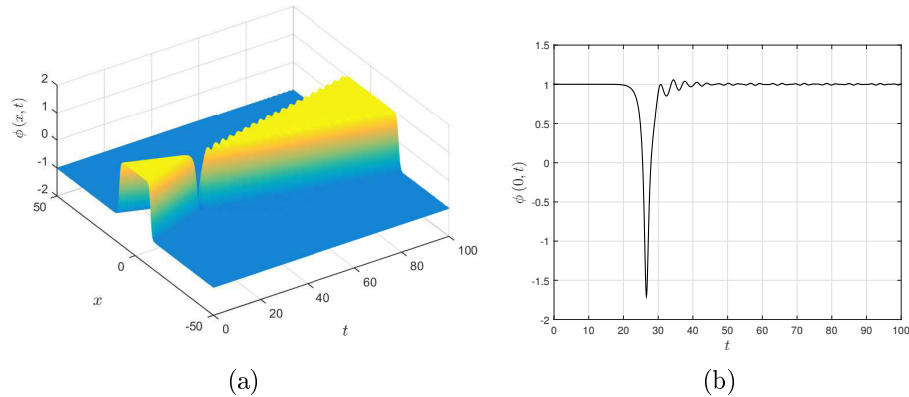


Figura 4.5: a) Evolução do campo escalar $\phi(x, t)$ com $v_i = 0.36$, mostrando uma colisão do tipo *one-bounce*. b) recorte do campo $\phi(x = 0, t)$ em $x = 0$ em função do tempo para $v_i = 0.36$. A colisão é caracterizada pelo pico de mínimo.

entre os dois picos de mínimos. Essa observação não deve ser menosprezada pois, como se pode ver adiante, as oscilações entre os dois picos mínimos podem nos dar informação para explicar o comportamento *two-bounce*, assim como se tornará útil para classificar os tipos de *two-bounces*.

Finalmente, observa-se que se a velocidade inicial é maior que uma certa velocidade crítica v_{cr} , então o *kink* irá colidir uma única vez (*one-bounce*) escapando para o infinito logo após a colisão. A velocidade crítica no modelo ϕ^4 foi estimada numericamente como sendo $v_{cr} = 0.2598$.

One-bounces, *two-bounces* e o *estado bion* são os principais (não únicos) fenômenos observados em colisões de *kinks* no modelo ϕ^4 . A explicação para todos esses cenários utiliza o conceito

de troca de energia entre o modo translacional, dado por (4.12), e o modo vibracional (*shape mode*), dado por (4.13), que é uma solução localizada que pode armazenar energia próximo ao centro do *kink*. Na primeira colisão, o modo translacional irá perder parte da energia para o modo vibracional, onde essa energia ficará armazenada. O estado final de *bion* ocorre em baixas velocidades porque durante a colisão há tempo suficiente para que haja um um fluxo de energia considerável do modo translacional para o modo vibracional. Dessa forma, o modo translacional fica com pouca energia, e assim o *kink* não consegue escapar para o infinito formando assim o estado oscilatório, que inicialmente pode ter grandes amplitudes, mas que depois de um longo tempo irá decair, devido a lenta perda de energia por radiação.

Para *one-bounces* a situação é contrária. O modo translacional tem energia relativamente alta, e no momento da colisão, não há tempo suficiente para transferência de energia entre o modo de translação e o vibracional. Dessa forma, o *kink* tem a energia do seu modo de translação praticamente inalterada, o que possibilita que ele escape para o infinito. No contexto do modelo ϕ^4 , altas energias existem para $v_i > v_{cr} = 0.2598$.

Uma situação nova acontece no caso de *two-bounces*. O *kink* se move inicialmente com certa velocidade $v_i < v_{cr}$, quando acontece a primeira colisão, o modo translacional perde certa quantidade de energia para o modo vibracional. No entanto, essa quantidade não é tão grande, como no caso de formação do *bion*. Assim, continuando com uma quantidade de energia considerável no modo translacional, o *kink* consegue se afastar a uma certa distância, mas não a ponto de escapar para o infinito. Depois de certo tempo T_{12} acontece uma segunda colisão. Na segunda colisão ocorre nova transferência de energia entre os modos de translação e vibracional, só que dessa vez no sentido contrário, de modo que, a energia que estava armazenada no modo vibracional retorna para o modo translacional e, dessa forma depois da segunda colisão o *kink* finalmente consegue escapar para o infinito.

O fenômeno de *two-bounce* não ocorre somente quando a velocidade é exatamente $v_i = 0.2$, ocorre também para qualquer velocidade em uma região em torno $v_i = 0.2$, de forma mais específica, a região em torno de $v_i = 0.2$ é: $0.192575 < v_i < 0.203425$, conforme [4]. Isso significa que para qualquer v_i , que estiver nesse intervalo, o *kink* irá colidir duas vezes, com uma pequena oscilação entre as colisões (veja fig.(4.4b)). Estudos posteriores ao trabalho de (AKL) mostraram, com localização mais precisa, ainda mais faixas de velocidades onde ocorrem *two-bounces* [3, 4, 10]. Essas faixas de velocidades iniciais, onde o *kink* escapa para o

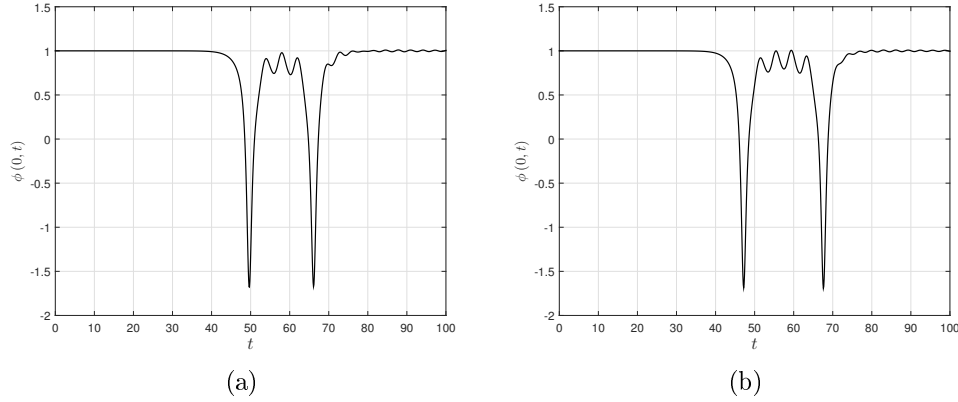


Figura 4.6: a) $v_i = 0.226$, *two-bounce* que pertence a segunda janela; $n = 2$, b) $v_i = 0.2386$ *two-bounce* na terceira janela; $n = 3$

infinito após colidir duas vezes, ficaram conhecidas na literatura como “janelas” de *two-bounces* (*two-bounce windows*).

Atualmente se tem conhecimento sobre a existência de um grande número de janelas de *two-bounces*, que estão localizadas entre $v_i = 0.192575$ e a velocidade crítica $v_{cr} = 0.2598$. A classificação dessas janelas é feita pelo número de pequenas oscilações n que existem entre os dois picos de mínimo. Por exemplo, podemos ver pela figura 4.4b $n = 1$ (existe um pequeno mínimo entre os dois grandes mínimos), assim $v_i = 0.2$ pertence a primeira janela. Na figura 4.6a mostramos uma colisão para $v_i = 0.226$ que pertence a segunda janela (dois pequenos mínimos), e na figura 4.6b mostramos uma colisão na terceira janela de *two-bounce*. É possível que notar que a cada janela o número de oscilações entre os picos de mínimos é acrescentado por um.

A explicação dos fenômenos descritos acima, foi proposta por David Campbell *et al.* na referência [3], ficando conhecida como *Mecanismo de troca de energia*. Com base no Mecanismo de troca de energia, os autores (CSW) apresentaram uma teoria de caráter semi-fenomenológico, ou seja, eles não apresentaram um desenvolvimento analítico para suas conclusões, mas através dos dados de suas simulações postularam que fenômenos de ressonância (*two-bounces*) acontecem quando uma certa condição é satisfeita. Essa condição foi apresentada como sendo:

$$\omega_1 T_{12} = 2\pi n + \delta, \quad (4.14)$$

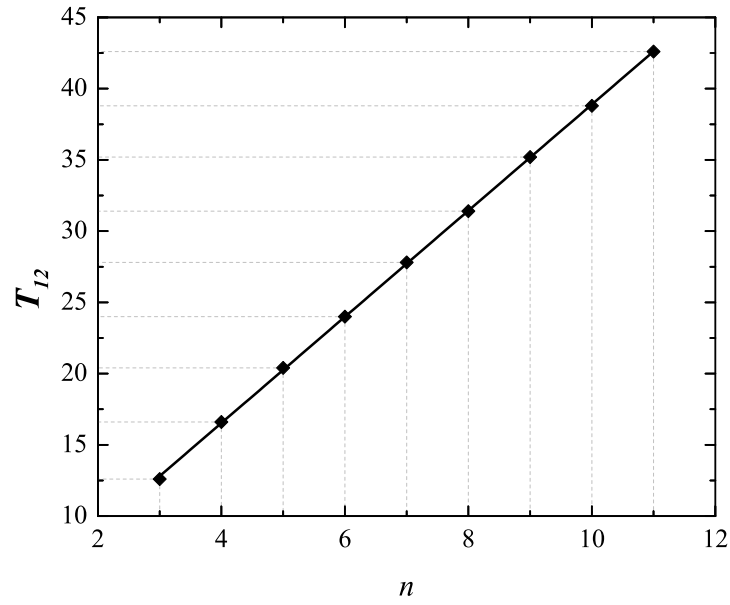
onde ω_1 é a frequência do modo vibracional (4.13), T_{12} é o tempo entre a primeira e a segunda colisão, n é o número da janela de *two-bounce* e, δ é uma constante de fase. Se esta explicação está correta, temos que o modo vibracional é aniquilado quando a condição (4.14) é satisfeita, e assim o modo de translação tem sua energia restaurada, e é isso que permite que o *kink* escape, após a segunda colisão. Dito de forma mais objetiva: *two-bounces ocorrem somente quando a condição (4.14) é satisfeita*. A fim de verificar a validade da condição (4.14) para os nossos dados, observamos os resultados que obtivemos para as nove primeiras janelas de *two-bounces*. Na figura (4.7a) mostramos os nove pontos (em vermelho) que correspondem ao centro de cada uma das janelas e, o eixo vertical que indica tempo entre a primeira e segunda colisão. A linha sólida é obtida por ajuste de linear. O *slop* da linha sólida foi encontrado igual a 3.727, este valor é bem próximo do esperado $\frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \approx 3.63^2$. Desta forma atestamos a validade do mecanismo de troca de energia.

Outra expressão de caráter semi-fenomenológico, apresentada em [3, 34], é uma relação do tempo entre as duas colisões (T_{12}) com as velocidades iniciais no centro da n -ésima janela de *two-bounce* e a velocidade crítica v_{cr} . Essa relação é dada por:

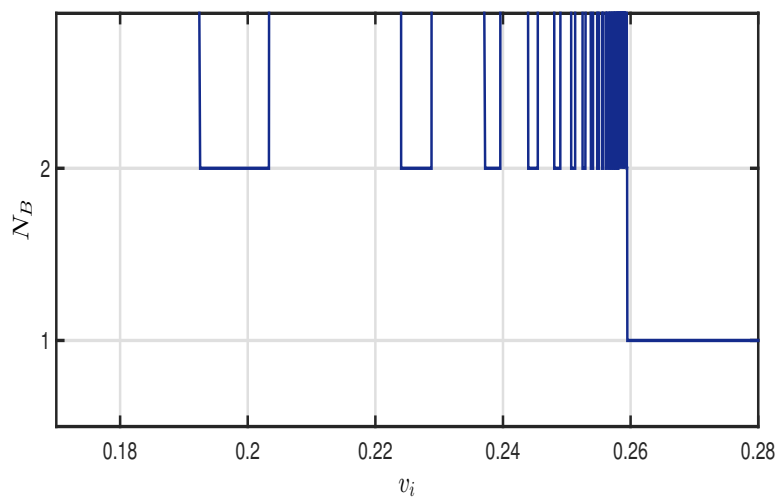
$$v_n = \sqrt{v_{cr}^2 - \left(\frac{\alpha\omega_1}{2\pi n + \delta} \right)^2} \quad (4.15)$$

A constante α é obtida “experimentalmente” através da relação semi-fenomenológica $T_{12}(v) = \alpha (v_{cr}^2 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$ proposta por (CWS), v_n é a velocidade no centro da n -ésima janela de *two-bounce*. Além de fornecer uma previsão de velocidade inicial para o centro de uma dada janela, a equação (4.15) nos faz perceber que deve existir um número relativamente grande de janelas a medida que vamos nos aproximamos da velocidade crítica v_{cr} . De fato, simulações feitas com maior precisão verificaram a existência de 35 novas janelas de *two-bounce* [7], verificou-se também que elas ficam cada vez mais próximas a medida que nos aproximamos de v_{cr} , sendo cada vez mais estreitas (a referência [34] estima que para n grande, a largura da janela decai com $1/n^3$). A figura 4.7b é bem didática para ilustrar essas tendências, essa figura mostra o número de colisões (Nb) para cada velocidade inicial v_i na faixa $0.18 \leq v_i \leq 0.28$. O gráfico é limitado

²Em seu trabalho, Campbell utiliza a constante $m = 1$; assim, em seu trabalho $\omega_1 = \sqrt{3/2}$, resultando em um *slop* de $\frac{2\pi}{\omega_1} = 5.2$. Em nossas simulações, estamos considerando $m = \sqrt{2}$, e por isso $\omega_1 = \sqrt{3}$.



(a)



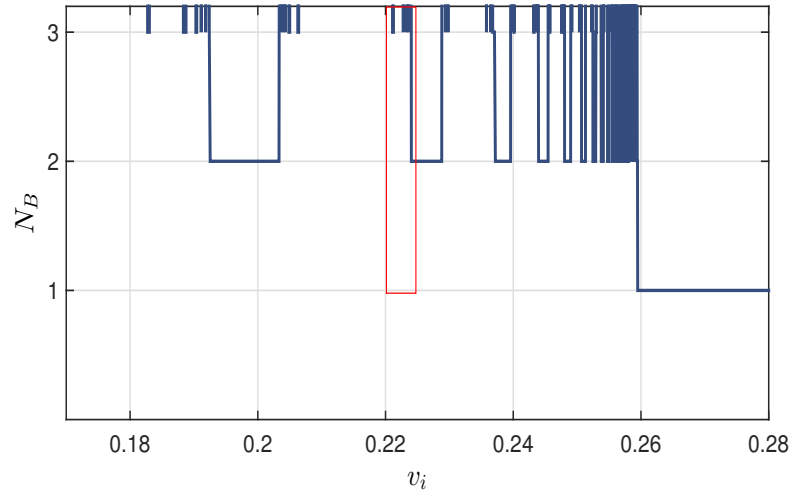
(b)

Figura 4.7: a) Número da janela n acrescido por 2 *versus* T_{12} b) Número de bounces (Nb) *versus* velocidade inicial

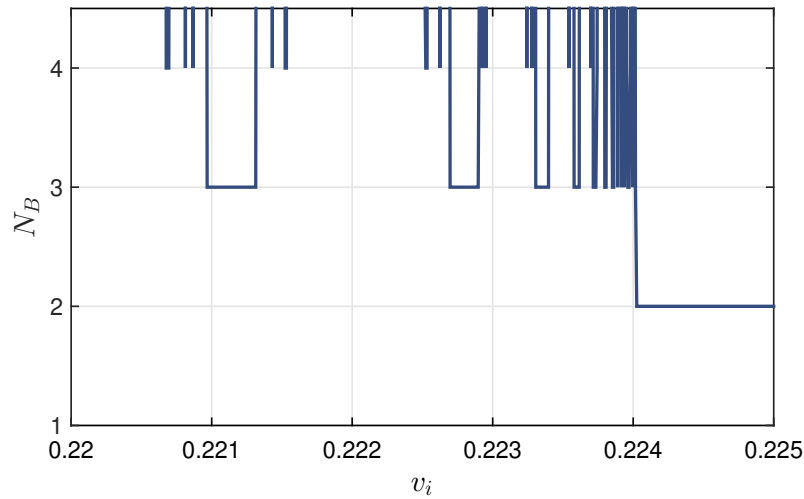
ao caso de duas colisões e dessa forma as janelas de *two-bounces* ficam perfeitamente ilustradas [35, 36]. É possível perceber que as janelas de *two-bounces* ficam cada vez mais estreitas a medida que nos aproximamos da velocidade crítica v_{cr} , assim a vizinhança de v_{cr} é uma região com grande densidade de janelas de *two-bounces*.

Seguindo esse roteiro, o trabalho de Peter Aninos e seus colaboradores [23] obteve destaque. Eles observaram que a descrição dos fenômenos de ressonância observados até então é mais complexo, pois não depende somente de colisões tipo *two-bounces*. Ao analisar a região entre duas janelas de *two-bounces*, eles perceberam que essa região não é formada somente por estado de *bion* existindo também nessa região as chamadas *n-bounces* com $n \geq 3$, as quais também nos referimos como *multi-bounces*. Por exemplo, observaram regiões de janelas *three bounces*, nas quais o *kink* escapa para o infinito após uma terceira colisão. O mais interessante foi perceber que as de janelas de *multi-bounces* estão ordenadas de forma bastante regular, formando uma estrutura *fractal*, da seguinte forma: A toda vizinhança de uma janela de *two-bounces* estão associadas uma série de janelas de *three-bounces*; a toda vizinhança de uma janela de *three-bounces* estão associadas uma série de janelas de *four-bounces*, e assim por diante. Podemos então perceber que: *janelas de (n+1)-bounces são encontradas na vizinhança de uma janela de n-bounces*. A figura 4.8a mostra as janelas de *three-bounces* estão localizadas nas vizinhanças das janelas de *two-bounces*. Quando aplicamos um *zoom* na região em vermelho da figura 4.8a obtemos então uma figura muito semelhante a anterior, sendo que agora podemos ver as janelas de *4-bounces* na vizinhanças de janelas de *3-bounces*. Estudos posteriores mostraram que a estrutura hierárquica da janelas de *multi-bounces* seria perfeitamente fractal somente na ausência de radiação [6].

Passaremos agora ao estudo de outros modelos de caráter não-integrável, veremos que as características descritas para o modelo ϕ^4 são mantidas pela natureza não-integrável desses modelos.



(a)



(b)

Figura 4.8: a) Janelas de 3-*bounces* na vizinhança das janelas de 2-*bounces*. b) Zoom da região em vermelho de a), mostra a vizinhança da segunda janela de *two-bounces*. É possível ver as janelas de *four-bounces* nas proximidades das janelas de *three-bounces*.

4.2 Duplo Sine-Gordon

Outra teoria de caráter não integrável é o Duplo sine-Gordon (DsG). Este foi usado, no final do século XX como modelo para muitos sistemas físicos, como por exemplo, a dinâmica do spin de um superfluido ^3He na fase B [6, 37, 38], algumas características da propagação de pulsos óticos ultracurtos em um meio degenerado [39], excitações não-lineares em uma cadeia

compressível de dipolos XY sob condições de acoplamento piezoelétrico [40], macro-moléculas, dentre outras aplicações, conforme [6, 38]. O estudo mais completo acerca desse modelo é encontrado na referência [12], que apresenta o resultado do estudo de colisões *kink-antikink* para diferentes setores topológicos do potencial. Uma motivação para tal estudo pode ter sido a comparação entre os fenômenos de ressonância já observados em colisões do tipo *kink* com *antikink* no modelo ϕ^4 .

O Modelo Duplo sine-Gordon é expresso pela seguinte densidade lagrangeana.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - V(\phi).$$

Onde o potencial $V(\phi)$ tem a seguinte forma

$$V(\phi) = -\frac{4}{1+|4\eta|} \left(\eta \cos \phi - \cos \frac{\phi}{2} \right). \quad (4.16)$$

E portanto, o campo $\phi(x, t)$ satisfaz a seguinte equação de movimento

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{2}{1+|4\eta|} \left[2\eta \sin \phi - \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \right] = 0, \quad (4.17)$$

onde η é um parâmetro que pode assumir qualquer valor real, ou seja, $-\infty \leq \eta \leq \infty$. A variação do parâmetro η faz com que o potencial diferentes estruturas no que se refere aos setores topológicos. É importante destacar os dois casos limites para η : quando $\eta \rightarrow \pm\infty$ o potencial $V(\phi)$ se reduz a um potencial sine-Gordon para o campo ϕ , enquanto que quando $\eta \rightarrow 0$ o potencial se reduz a um sine-Gordon para a variável $\phi/2$. Note-se também que $V(\phi)$ é periódico por 4π . O comportamento de $V(\phi)$ pode ser adequadamente separado em quatro regiões, sobre as quais comentamos a seguir.

- Região I: $\eta < -\frac{1}{4}$
 - Nesta região (veja 4.9), o potencial tem três setores de mínimos, que podem ser considerados como setores topológicos, no entanto, os setores $[-4\pi + \phi_0, -\phi_0]$ e $[\phi_0, 4\pi - \phi_0]$, $\phi_0 = 2 \arccos(1/4\eta)$, são equivalentes, pois são simétricos em relação a $\phi = 0$. Assim, é preciso estudar apenas um desses setores. Se descartamos o setor $[-4\pi + \phi_0, -\phi_0]$, restará então o intervalo $[-\phi_0, 4\pi]$, que possui dois setores topológicos. Por exemplo, no caso específico em que $\eta = -1/2$, o intervalo a ser

considerado será $[-4\pi/3, 4\pi]$, nesse intervalo existirão dois setores topológicos, ao invés dos três iniciais. Esses dois setores apresentam estados degenerados de mínima energia, porém, como eles são separados por barreiras de potencial não-equivalentes, devem existir dois tipos de soluções *kink-antikink*. Da mesma forma que [12] neste trabalho, essas diferentes soluções são denominadas: *large kink*, solução relativa ao setor $[-\phi_0, \phi_0]$; *small kink*, solução relativa ao setor $[\phi_0, 4\pi - \phi_0]$.

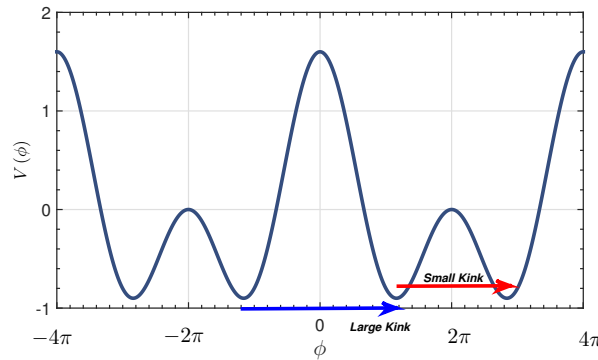


Figura 4.9: $V(\phi)$ para $\eta = -1.0$

- Região II: $-\frac{1}{4} < \eta < 0$ e Região III: $0 < \eta < \frac{1}{4}$
 - Em ambas as regiões II e III (figuras 4.10a e 4.10b respectivamente) o potencial possui caráter periódico mais notável, apresentando apenas um tipo de mínimo, sendo este separado por máximos equivalentes. Assim, nessas regiões o potencial se aproxima do modelo sine-Gordon, sendo perfeitamente integrável na região II ($-\frac{1}{4} < \eta < 0$). A região III ($0 < \eta < \frac{1}{4}$) se diferencia do modelo sine-Gordon por apresentar um estado vibracional, dessa forma os *kinks* não passam um pelo outro como no modelo sG (veja fig. 3.4), todavia nessa região também não são observadas janelas de *two-bounces*; o fenômeno observado nessa região é o que chamamos de *quasi-ressonâncias*. Quasi-ressonâncias são caracterizadas pelo longo tempo entre a segunda e terceira colisão (T_{23}) entre os *kinks*, por esta razão, regiões de quasi-ressonância se assemelham a regiões de *two-bounces* e, dessa forma ambos os fenômenos parecem ter a mesma natureza, a saber: o mecanismo de troca de energia; no caso de uma quasi-

ressonância, a energia que retorna para o modo translacional, após a segunda colisão não é suficiente para que o *kink* escape para o infinito.

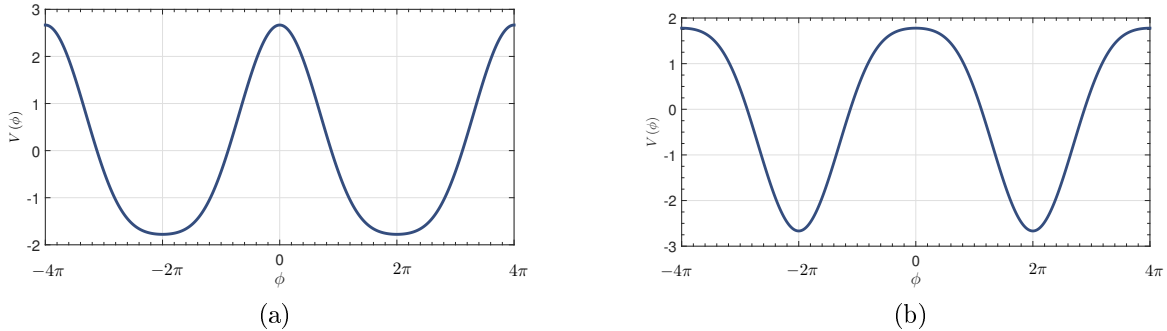


Figura 4.10: $V(\phi)$ para a) $\eta = -0.2$, b) $\eta = +0.2$

- Região IV: $\eta > \frac{1}{4}$
 - Na região $\eta > 0$ (figura 4.11) torna-se mais adequado expressar o potencial com o auxílio da seguinte substituição $\eta = \frac{1}{4} \sinh^2 R$ [13]. Apesar de nessa região o potencial apresentar dois tipos de mínimos locais, devemos observar que eles são não-degenerados, a menos que $\eta \rightarrow \infty$. Nessa região um modo vibracional também está presente e, o início do espectro contínuo é fixo em $\omega = 1$, qualquer que seja o $\eta > 0$. A diferença aqui, é que a medida que aumentamos o valor de R (nessa região $R > \ln(1 + \sqrt{2})$) as janelas de quasi-ressonância vão dando lugar às janelas de *two-bounces* propriamente ditas.

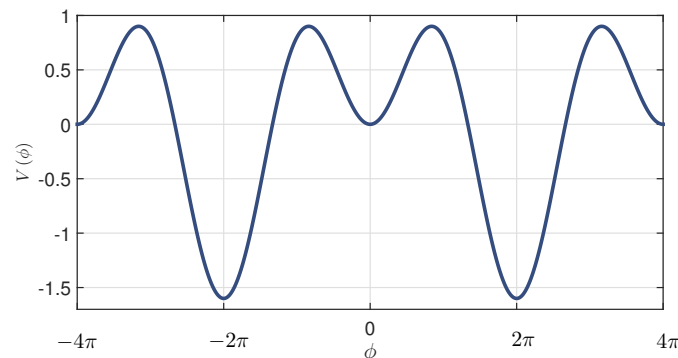


Figura 4.11: $V(\phi)$ para $\eta = +1.0$

A seguir, apresentamos um estudo de colisões, em caráter de revisão da literatura científica, somente para o setor $\eta < -\frac{1}{4}$. Os outros setores são analisados na referência [12] e, em particular, o trabalho [13] investiga colisões *kink-antikink* para $\eta > 0$.

4.2.1 Colisões kink-antikink para $\eta = -\frac{1}{2}$

Como já visto neste trabalho, as soluções tipo *kink* são estáveis e interpolam entre dois mínimos adjacentes de energia. Para $\eta < -1/4$ o potencial possui duas possibilidades para se obter soluções tipo *kink*. Ou seja, têm-se duas soluções estáticas para a equação (4.17). Uma destas soluções, de acordo com a referência [12], é expressa por:

$$\phi_{sm}(x) = 2\pi(2n+1) \pm 4 \arctan \left\{ \sqrt{\frac{|4\eta|-1}{|4\eta|+1}} \tanh \left[\sqrt{\frac{|4\eta|-1}{16|\eta|}} x \right] \right\}. \quad (4.18)$$

Da mesma forma que na referência [12], esta solução é aqui denominada: *small kink*. A solução *small kink* interpola entre os mínimos de potencial ϕ_0 e $4\pi - \phi_0$, onde $\phi_0 = 2 \arccos\left(\frac{1}{4\eta}\right)$. A energia desta solução é dada por

$$E_{sm} = \left(\frac{16}{|\eta| + 4|\eta|^2} \right)^{1/2} \left[\frac{\phi_0}{2} - \pi + \sqrt{16\eta^2 - 1} \right].$$

A outra solução é denominada *large kink*, sendo expressa da seguinte forma:

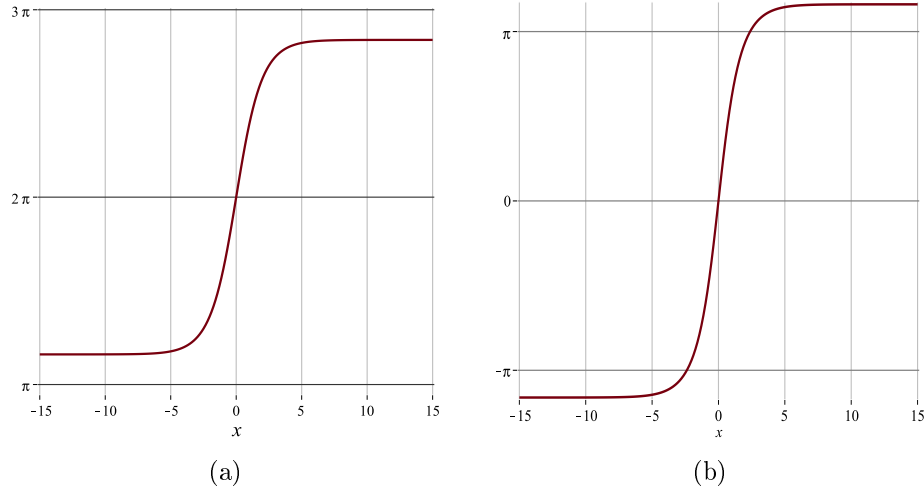
$$\phi_{lg}(x) = 4\pi n \pm 4 \arctan \left\{ \sqrt{\frac{|4\eta|+1}{|4\eta|-1}} \tanh \left[\sqrt{\frac{|4\eta|-1}{16|\eta|}} x \right] \right\} \quad (4.19)$$

Esta solução interpola entre $-\phi_0$ e ϕ_0 e tem energia

$$E_{lg} = \left(\frac{16}{|\eta| + 4|\eta|^2} \right)^{1/2} \left[\frac{\phi_0}{2} + \sqrt{16\eta^2 - 1} \right].$$

Como de costume, os sinais (+) e (-) em (4.18) e (4.19) correspondem as soluções de *kink* e *antikink* respectivamente.

Agora passaremos a investigar o processo de colisão entre *kinks* em um potencial como o mostrado na figura 4.9. Novamente, é importante estudar o potencial de perturbações $V_{sch}(x)$,


 Figura 4.12: $n = -1$. a) *small kink* b) *large kink*

pois já temos visto, nos capítulos anteriores, quão valiosas informações sobre a dinâmica da colisão ele pode nos fornecer. A equação de Schrödinger para o potencial duplo sine-Gordon fica:

$$-\frac{\partial^2 \chi(x)}{\partial x^2} + \left[\frac{4\eta \cos \phi - \cos \frac{\phi}{2}}{1 + 4|\eta|} \right]_{\phi=\phi_K} \chi(x) = \omega^2 \chi(x). \quad (4.20)$$

Essa equação admite soluções para $\omega = 0$, para ambos *large* e *small kinks*. O espectro de soluções contínuas para $\eta < -\frac{1}{4}$ tem início em [12]

$$\omega_{cont}(\eta) = \sqrt{\frac{|4\eta|-1}{|4\eta|}} \quad \eta < -1/4 .$$

Além modo translacional (solução para $\omega = 0$) há também neste setor a presença de um modo vibracional (*shape mode*), mas apenas para a solução *small kink*, solução *large kink* não possui um modo vibracional. Dessa forma, não deve existir fenômenos de ressonância em colisões envolvendo *large kinks*. Realizamos simulações da colisão entre *small kinks* $\phi_{sm}(x)$. Para tanto, aplicamos um *boost* de Lorentz à solução estática, obtendo assim uma solução viajante $\phi_{sm}(x, t) = \phi_{sm}(Z)$, com $Z = \gamma(x - x_0 - vt)$, sendo γ o fator de contração de Lorentz. A colisão consiste na solução numérica da equação (4.17) com as seguintes condições iniciais:

$$\phi(x) = \phi(x, 0) = \phi_{\bar{sm}}(x + x_0, -v_i, 0) + \phi_{sm}(x - x_0, v_i, 0) - \frac{4}{3}\pi, \quad (4.21)$$

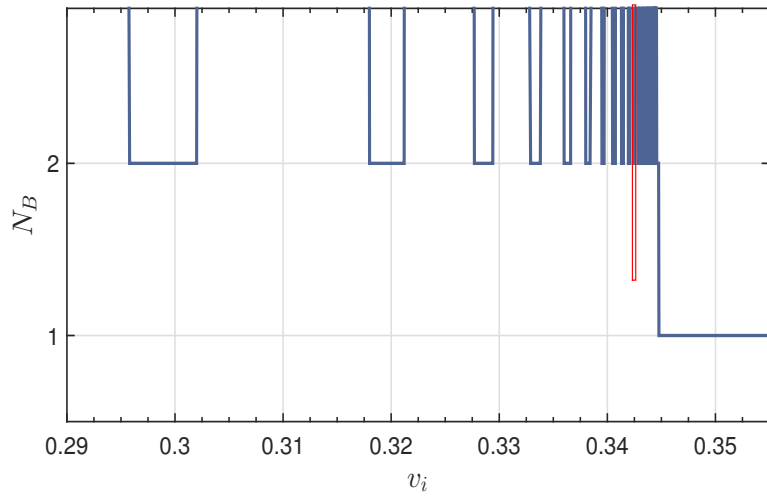
$$\dot{\phi}(x) = \dot{\phi}(x, 0) = \dot{\phi}_{\bar{s}m}(x + x_0, -v_i, 0) + \dot{\phi}_{sm}(x - x_0, v_i, 0).$$

A notação $\phi_{\bar{s}m}(x)$ indica um *small antikink*. As condições iniciais mostram que neste caso a colisão será na ordem *antikink-kink*. o que indica que o *antikink* viaja da esquerda para a direita com velocidade $v_i > 0$, estando seu centro de massa inicialmente em uma posição $-x_0$, enquanto que o *kink* viaja da direita para esquerda com uma velocidade $v_i < 0$. O parâmetro de separação foi escolhido sendo $x_0 = 25$, de forma que inicialmente ambos *kinks-antikink* estão com seus centro de massa muito distante um do outro.

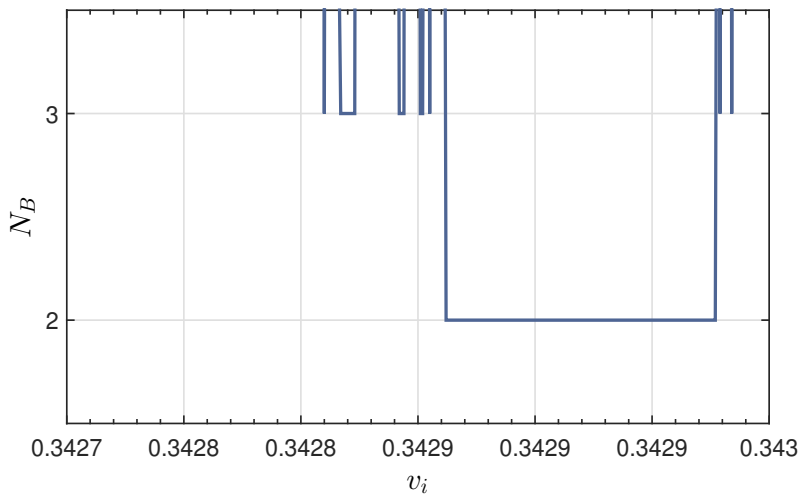
Simulamos colisões *small kink-antikink* na faixa de velocidade $0.28 < v_i < 0.35$. O resultado está em acordo com o obtido no trabalho original [12], e como esperado, verificou-se que colisões de *small kinks* do potencial duplo sine-Gordon, apresentam fenômenos de ressonância de mesma natureza daqueles observados em colisões *kink-antikink*, do potencial ϕ^4 .

A figura 4.13 apresenta o comportamento do número de colisão para cada velocidade na faixa de velocidade simulada. Através desta figura torna-se bastante claro que as janelas de ressonância também estão presentes em colisões do modelo duplo sine-Gordon. Janelas de *three bounces* também são observadas, e assim como no modelo ϕ^4 , elas estão localizadas nas vizinhanças das janelas de *two-bounces*. Desta forma fica evidente que o mecanismo de troca de energia, proposto por (CSW) é também satisfatório para a análise colisões neste modelo. A existência de *multi-bounces* também se deve a troca de energia entre o modo de translação e o modo vibracional (*shape mode*). Concluimos esta seção apresentando a colisão de um *small kink* com seu respectivo *antikink* para uma alta velocidade inicial, $v_i = 0.92$ com $\eta = -1.0$. O resultado que obtido já havia sido previsto em publicações anteriores; para altas velocidades a colisão de um par de *small kinks* decai em um estado final como um par de *large kinks*. Esse fenômeno é observado na figura 4.14.

Na próxima seção, estuda-se o modelo ϕ^6 , outro potencial de auto interação do tipo polinomial. Este por sua vez é o potencial polinomial mais próximo do potencial ϕ^4 .



(a)



(b)

Figura 4.13: Colisões de *kinks* no modelo DsG com $\eta = -1/2$: a) Número de *bounces* versus v_i b) Janelas de *three-bounces* na vizinhança de uma janela de *two-bounce*

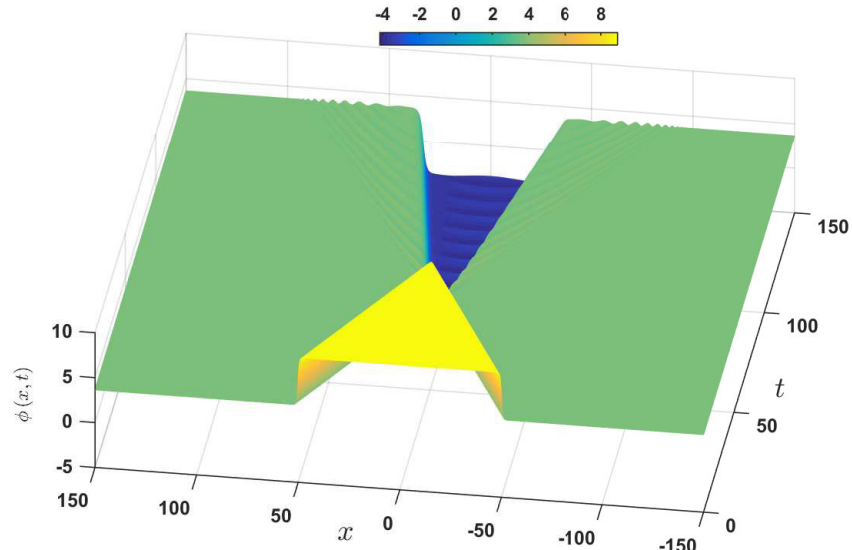


Figura 4.14: $\eta = -1.0$. Em alta velocidades, um par de *small kinks* decai em um par de *large kinks*.

4.3 Modelo ϕ^6

O modelo ϕ^6 é outro importante modelo de natureza não-integrável. Esse modelo se diferencia do modelo ϕ^4 por possuir um mínimo a mais, tendo como consequência direta que o modelo possui um outro setor topológico. Entre os potenciais polinomiais de auto interação, o ϕ^6 é o mais próximo do ϕ^4 , por esse motivo, uma das motivações para se estudar tal modelo é comparação direta com o modelo ϕ^4 . Em particular, verifica-se se os fenômenos observados em colisões *kink-antikink* do modelo ϕ^4 também são em um contexto de maior não-linearidade. Por isso, o estudo desse potencial é perfeitamente justificável, primeiramente por que vem permitindo, principalmente no contexto de colisões, explicações mais gerais para os fenômenos observados tanto no modelo ϕ^4 , como no modelo duplo sine-Gordon [14, 41].

Passaremos então a descrição analítica do modelo. Em suma, são seguidos os mesmos procedimentos já adotados nas seções anteriores. O modelo ϕ^6 é descrito, em $(1 + 1)$ dimensões pela densidade lagrangeana.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - V(\phi), \quad (4.22)$$

sendo o potencial dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(\phi^2 - 1)^2. \quad (4.23)$$

A figura 4.15 mostra a energia potencial para cada valor do campo $\phi(x)$. A equação de movimento é obtida de forma usual, por Euler-Lagrange (2.7), tornando-se nesse caso igual a

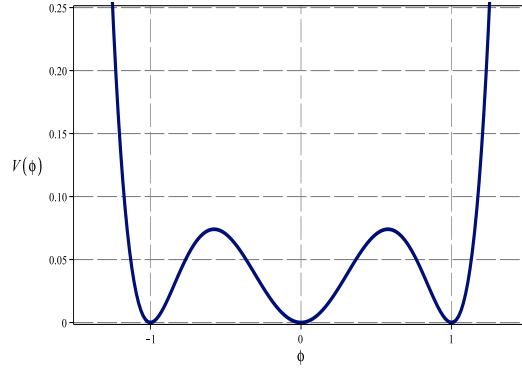


Figura 4.15: Potencial do modelo ϕ^6

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \phi(\phi^2 - 1)^2 + 2\phi^3(\phi^2 - 1) = 0. \quad (4.24)$$

Fazendo uso do formalismo de primeira ordem, estudado no capítulo 2, pode-se obter soluções estáticas da equação (4.24). Antes, vemos que uma função superpotencial $W(\phi)$ que satisfaz a condição (2.16), têm a seguinte forma no modelo ϕ^6

$$W(\phi) = \frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^4}{4}. \quad (4.25)$$

As soluções de estado BPS são obtidas utilizando a relação (2.18). Logo, para o modelo ϕ^6 as equações de primeira ordem são:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm (\phi - \phi^3). \quad (4.26)$$

O sinal superior “+”, apresenta as seguintes soluções topológicas

$$\phi_{(0,1)}(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \tanh(x))} \quad \phi_{(0,-1)}(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \tanh(x))}, \quad (4.27)$$

e o sinal inferior “-” de (4.26), resulta nas seguintes soluções topológicas

$$\phi_{(1,0)}(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \tanh(-x))} \quad \phi_{(-1,0)}(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \tanh(-x))}. \quad (4.28)$$

Os índices indicam o setor de interpolação do *kink* (*antikink*), uma vez que o modelo ϕ^6 possui dois setores topológicos: o setor de interpolação entre os mínimos $\phi_{min} = -1$ e $\phi_{min} = 0$, este é o caso do *kink* $\phi_{(-1,0)}(x)$ e do *antikink* $\phi_{(0,-1)}(x)$; o outro setor é a interpolação entre os mínimos $\phi_{min} = 0$ e $\phi_{min} = 1$, que é o caso do *kink* $\phi_{(0,1)}(x)$ e do *antikink* $\phi_{(1,0)}(x)$. A energia de cada uma das soluções (4.27) e (4.28) é obtida por utilização da equação (2.20), sendo, em ambos os casos, igual a $E_{min} = 1/4$.

Uma vez que o modelo possui dois setores topológicos, com o mínimo $\phi_{min} = 0$ em comum, nos é suficiente realizar colisões de *kinks* criados em apenas um desses setores. Nesta dissertação, é feita revisão de [14] e portanto estudaremos o espalhamento entre *kink-antikink* que interpolam entre os mínimos $\phi_{min} = 0$ e $\phi_{min} = 1$, ou seja, usaremos as soluções $\phi_{(1,0)}(x)$ e $\phi_{(0,1)}(x)$. Resultados equivalentes são obtidos quando realizamos colisões no setor que interpola entre $\phi_{min} = 0$ e $\phi_{min} = -1$ [41].

No setor que vamos analisar, existem duas configurações de perfil inicial possíveis. São elas:

- **Par** (0,1)+ (1,0) ou $K\bar{K}$

$$\phi_{K\bar{K}} = \phi_{(0,1)}(x + x_0) + \phi_{(1,0)}(x - x_0) - 1, \quad (4.29)$$

onde $x_0 > 0$. Esta configuração indica uma colisão do tipo *kink-antikink*. Estando inicialmente centro do *kink* em uma posição $x = -x_0$ e o *antikink* em uma posição $x = x_0$.

- **Par** (1,0)+ (0,1) ou $\bar{K}K$

$$\phi_{\bar{K}K} = \phi_{(1,0)}(x + x_0) + \phi_{(0,1)}(x - x_0), \quad (4.30)$$

esta configuração indica uma colisão do tipo *antikink-kink*, com o *antikink* em $x = -x_0$ e o *kink* em $x = x_0$.

A análise do setor perturbativo, como já foi comentado, nos leva a identificação de possíveis soluções de estados ligados. O potencial de Schrödinger do modelo é:

$$V_{sch}(x) = 15\phi_s^4 - 12\phi_s^2 + 1. \quad (4.31)$$

O modo zero do modelo é obtido através da expressão (2.34), sendo igual a

$$\eta_0(x) = A(\phi_s(x) - \phi_s^3(x)), \quad (4.32)$$

onde ϕ_s denota quaisquer uma das soluções estáticas (4.27), (4.28). As soluções do espectro contínuo são expressas em termos de funções hipergeométricas, conforme [42].

O modelo ϕ^6 , apresenta uma situação inédita até então, para modelos de natureza não-integrável. Quando substituimos ϕ_s na equação (4.31) qualquer uma das soluções estáticas $\phi_{(1,0)}$, $\phi_{(0,1)}$, $\phi_{(0,-1)}$ ou $\phi_{(-1,0)}$, têm-se que o potencial $V_{sch}(\phi_s)$ não possui solução de estado ligado, além da solução usual; modo zero. Dito de forma mais clara: Os *kinks* do potencial ϕ^6 , individualmente, não possuem modo vibracional interno. Na figura 4.16 mostramos como exemplo, o potencial de perturbação $V_{sch}(x)$ para a solução estática $\phi_s = \phi_{(1,0)}(x)$. Observando os resultados de colisões no modelo ϕ^4 e duplo sine-Gordon, nós esperamos que as estruturas de ressonância, tais como a faixa de janelas de *two-bounces* não sejam observadas em colisões de *kinks* do modelo ϕ^6 . No entanto, o estudo numérico realizado primeiramente por P. Dorey *et al.* [14], mostrou um comportamento completamente diferente em relação ao esperado. Primeiro, os autores perceberam que a colisão com o par $(0,1) + (1,0)$ não possui nenhuma estrutura de ressonância, sendo que para velocidades $v_i < v_{cr} \approx 0.289$, o par *kink-antikink* sempre fica armadilhado um ao outro, enquanto que para velocidade $v_i > v_{cr}$, o par $(0,1) + (1,0)$ decai em um par $(0,-1) + (-1,0)$, ou seja o par tem o estado final no outro setor topológico. Este fenômeno pode ser observado na figura 4.17. Observe que esse fenômeno é semelhante àquele observado em altas velocidade do modelo duplo sine-Gordon (veja fig. 4.14). Comparando os resultados, ver-se que este comportamento não causa surpresa, pois é o tipo de comportamento esperado por um modelo que não possui um *shape mode*.

Por sua vez, um comportamento inesperado foi observado nas colisões envolvendo o par $(1,0) + (0,1)$. Neste caso, uma rica estrutura de ressonância, estrutura de janelas de *multi-bounces*, foi observada. A estrutura termina na velocidade crítica de escape $v_{cr} \approx 0.0457$, a

partir da qual os *kinks* sempre se separam para o infinito após a primeira colisão; abaixo de v_{cr} , o comportamento se assemelha ao apresentado no modelo ϕ^4 . A figura resume os fenômenos observados 4.18 mostrando o tempo entre a primeira (preto), segunda (vermelho) e terceira colisão (verde); as janelas de *two-bounces* estão localizadas nas velocidades iniciais para as quais o tempo entre a segunda e terceira colisão divergem.

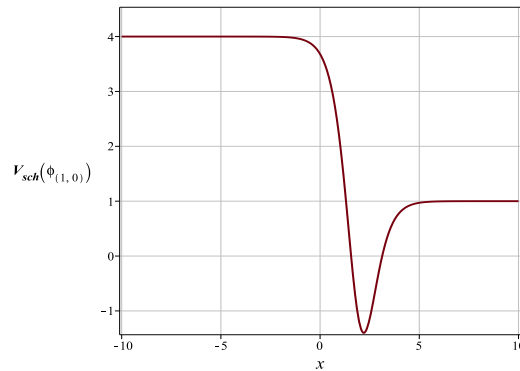


Figura 4.16: Potencial de perturbação V_{sch} para um individual *antikink* $\phi_{(1,0)}(x)$

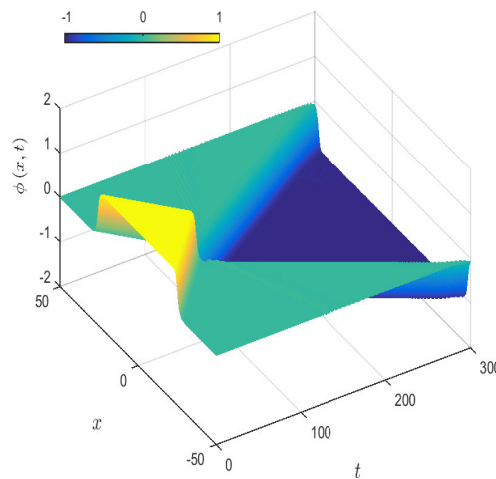


Figura 4.17: Acima de uma velocidade crítica v_{cr} o par $K\bar{K}$ decai em um $\bar{K}K$ no setor topológico $(0, -1)$

A situação descrita acima, tornou-se um contra-exemplo em relação ao conhecimento de colisões em modelos não-integráveis. Mesmo na ausência de um *shape mode* foi obtido um

comportamento semelhante ao modelo do ϕ^4 , ou seja, mesmo na ausência de um *shape mode*, para os *kinks* do ϕ^6 , a energia cinética foi de alguma forma armazenada. Os resultados obtidos pelos autores de [14] são consistentes com a existência de um mecanismo de troca de energia, porém neste mecanismo é essencial que exista uma solução *shape mode*. Dessa forma, eles foram levados a propor a existência de tal mecanismo com uma abordagem diferente daquela fora proposta por (CSW). Sabe-se que no modelo ϕ^4 , os resultados observados independem da ordem inicial da colisão, que pode ser $K\bar{K}$ ou $\bar{K}K$; isso é perfeitamente compreensível dado que V_{sch} , no ϕ^4 , (eq. 4.11) tem invariância por $x \rightarrow -x$. No entanto, como o potencial (4.31) não apresenta essa invariância, o resultado no modelo ϕ^6 depende da escolha da ordem inicial da colisão, que pode ser $K\bar{K}$ ou $\bar{K}K$. Por essa razão ao invés de substituir ϕ_s em (4.31) por soluções individuais, os autores da nova abordagem substituíram ϕ_s por cada uma das configurações $(0, 1) + (1, 0)$ (eq.4.29) ou $(1, 0) + (0, 1)$ (eq. (4.30)), procurando dessa forma, soluções de estados ligados para as configurações iniciais, e não para as soluções individuais de *kink* ou *antikink*. A figura 4.19a mostra V_{sch} para o par na configuração inicial $K\bar{K}$, ver-se que existem dois mínimos com uma grande barreira entre eles. Já a figura 4.19b, mostra V_{sch} para o par na ordem $\bar{K}K$. Neste caso, também existem dois mínimos, separados por uma barreira, todavia, neste caso a barreira é bem menor que o valor assintótico de $V_{sch}(x)$, o que torna possível a existência estado ligados.

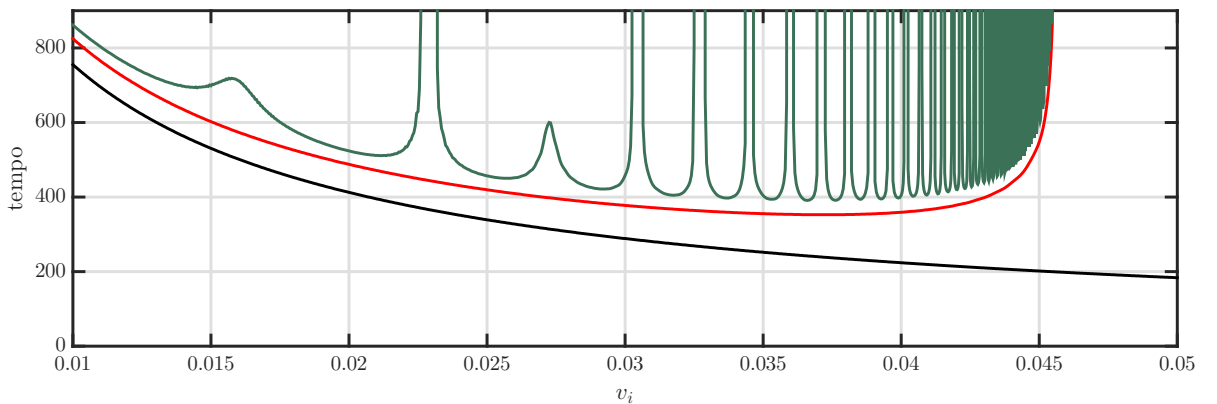


Figura 4.18: Tempo entre a primeira (linha preta), segunda (linha vermelha) e terceira (linha verde) colisão para $(1, 0) + (0, 1)$. Para janelas de *two-bounces*, o tempo para a terceira colisão diverge.

Os autores de [14], mostraram que o potencial de Schrödinger para a configuração (4.30) ($V_{sch}(\phi_{\bar{K}K})$) realmente possui soluções de estados ligados, além de possuir um modo zero, desde que o parâmetro de separação seja relativamente grande ($x_0 \geq 4$). O mesmo estudo para $V_{sch}(\phi_{K\bar{K}})$, mostra que essa configuração tem apenas o modo zero. A nova característica observada no modelo ϕ^6 é que: embora não exista um modo vibracional para os *kinks* de forma individual, a energia cinética pode ser armazenada nos estados vibracionais originados pela configuração inicial $(1, 0) + (0, 1)$. Desta forma é possível explicar o surgimento das janelas de *multi-bounces*, através da condição de ressonância de Campbell, (4.14).

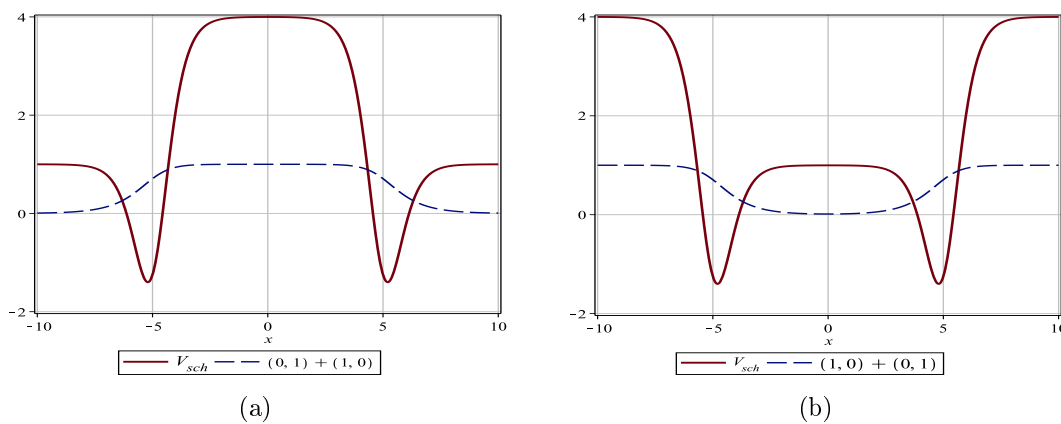


Figura 4.19: Potencial de perturbação (linha sólida) e configurações iniciais (linha tracejada) para os pares ordenados: a) $(0, 1) + (1, 0)$ e b) $(1, 0) + (0, 1)$.

Esse resultados, mostram que a análise da equação de Schrödinger para o perfil inicial tem caráter mais amplo que a análise para o defeito topológico individual. Todavia não temos certeza ainda, se podemos generalizar esta afirmação. Então, para melhor compreensão dos fenômenos observados no espalhamento de *kinks* é mais seguro que se realize o estudo da equação de Schrödinger para ambos *kinks* e configuração inicial. O modelo ϕ^4 apresenta para as suas configurações iniciais as mesmas soluções de estado ligado, que seus *kinks* individualmente apresentam, por esta razão a explicação do mecanismo de troca de energia em termos do modo vibracional do *kink* individual não apresenta problemas, no modelo ϕ^4 .

Capítulo 5

Espalhamento em Barreiras de Contorno

Este capítulo apresenta o estudo sobre colisões de *kinks* em um contexto diferentes em relação aos capítulos anteriores. Estuda-se o espalhamento¹ de um *kink* ou *antikink* na linha semi-infinita $-\infty < x \leq 0$. Na literatura científica, já existem trabalhos que envolvem o espalhamento de *kinks* em linha semi-infinita; citamos como exemplo, o estudo da interação de *kinks* com impurezas realizados para ambos os modelos sine-Gordon e ϕ^4 [16, 17]. O modelo ϕ^4 , em linha semi-infinita, é o ponto de partida para este estudo. Para tanto, os resultados da primeira seção são obtidos através do estudo [15], que é a nossa principal referência para o estudo realizado neste capítulo. Na segunda parte deste capítulo, apresentamos o trabalho que temos desenvolvido para o modelo ϕ^6 restrito à linha semi-infinita. A limitação do espaço pode ser feita por uma condição de contorno adequada [43]. Em ambos os modelos ϕ^4 e ϕ^6 , a restrição do espaço é feita por uma condição de Neumann em $x = 0$.

5.1 Modelo $\lambda\phi^4$

Esta seção, fazemos uma revisão do trabalho [15]. No entanto, temos o objetivo de fornecer uma abordagem mais clara, por isso, apresentamos alguns cálculos que não são apresentados na referência original.

¹No contexto deste trabalho, "espalhamento" é sinônimo de "colisão".

5.1.1 Soluções e condições de contorno

Consideremos o modelo ϕ^4 , descrito pela seguinte densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} (1 - \phi^2)^2. \quad (5.1)$$

A função superpotencial para este modelo é: $W(\phi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3$. Então as equações de primeira ordem 2.18 são dadas por:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm (1 - \phi^2). \quad (5.2)$$

Agora o objetivo é encontrar soluções para a equação (5.2) de forma que tais soluções satisfaçam a seguinte condição de Neumann

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=0} = H. \quad (5.3)$$

Para o sinal "+", as possíveis soluções são:

$$\phi_1 = \tanh(x - X_0), \quad \phi_2 = \tanh(x + X_0), \quad \tilde{\phi}_3 = \coth(x - X_1), \quad \tilde{\phi}_4 = \coth(x + X_1). \quad (5.4)$$

E para o sinal "-", as possíveis soluções são:

$$\tilde{\phi}_1 = -\tanh(x - X_0), \quad \tilde{\phi}_2 = -\tanh(x + X_0), \quad \phi_3 = -\coth(x - X_1), \quad \phi_4 = -\coth(x + X_1). \quad (5.5)$$

Usamos a notação $\tilde{\phi}_i(x)$, com $i = 1..4$, com o objetivo de manter a mesma notação da referência [15], note-se que $\tilde{\phi}_i(x) = -\phi_i(x)$. Já que essas soluções devem satisfazer a condição (5.3), os parâmetros X_0 e X_1 podem ser obtidos como função de H . Por exemplo, X_0 e X_1 são obtidos, em termo das soluções ϕ_1 e ϕ_3 respectivamente, da seguinte forma:

$$\frac{d(\tanh(-X_0))}{dx} = H \implies X_0(H) = \operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{\sqrt{|H|}} \right), \quad (5.6)$$

da mesma forma, para ϕ_3

$$X_1(H) = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{|H|}}\right). \quad (5.7)$$

As soluções (5.4) e (5.5) devem ser entendidas, durante a colisão, como um tipo de "barreira de fronteira", pois tais soluções permanecem fixas durante a colisão e garantem a condição de Neumann em $x = 0$. A figura (5.1) mostra o comportamento das soluções $\phi_i(x)$ quando $H = 1/2$. O comportamento de X_0 e X_1 em função de H é mostrado na figura 5.2.

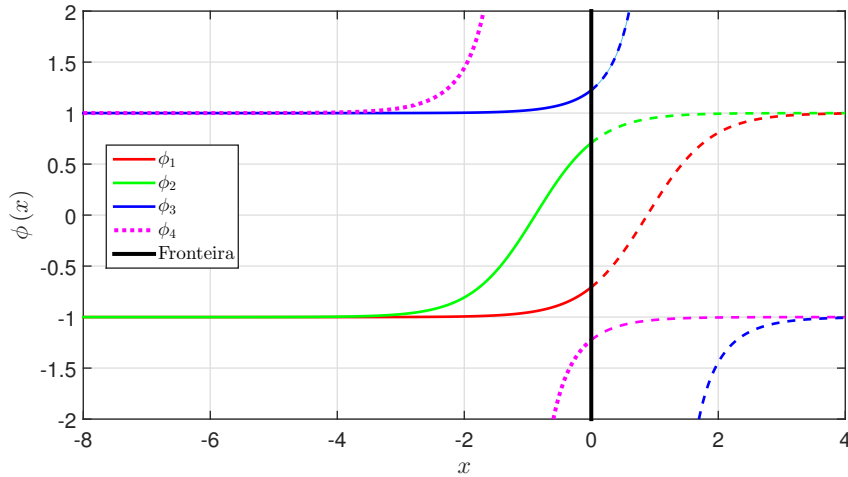


Figura 5.1: Soluções Estáticas, $H = \frac{1}{2}$.

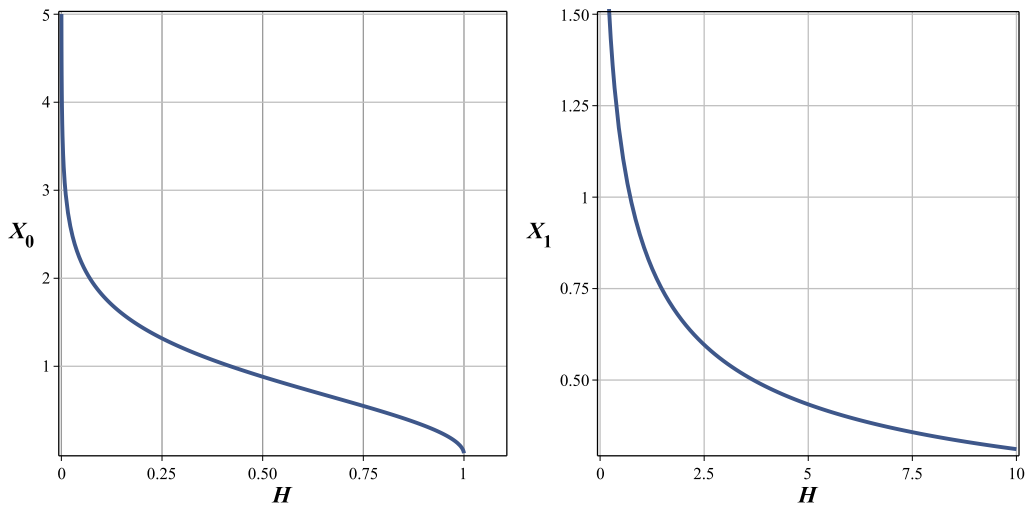


Figura 5.2: X_0 e X_1 em função de H

5.1.2 Energia na Fronteira

As soluções estáticas (5.4) e (5.5) são estado BPS, desta forma a energia dessas soluções pode ser calculada através do método de Bogomol'nyi, a expressão (2.17), no entanto, o intervalo de integração deve ser mudado para $-\infty < x \leq 0$. A existência da condição de Neumann (5.3) em $x = 0$ também contribui para a energia da solução, essa contribuição é expressa pela adição do termo de energia $-H\phi(0, t)$. Esse termo lembra o acoplamento *spin - campo magnético* [24,25], por isso, H pode ser interpretado como um “tipo de campo magnético”. Com essas consideração, a energia das soluções é dada por:

$$E[\phi] = \frac{1}{2} \int \left(\frac{d\phi}{dx} \mp \frac{dW}{d\phi} \right)^2 dx \pm W \Big|_{-\infty}^0 - H\phi(0, t). \quad (5.8)$$

A energia das soluções “barreira-fronteira” é obtida seguindo-se a seguinte rotina:

- Usa-se o primeiro termo de (5.8) $\frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{dW}{d\phi}$ fazendo $x = 0$, dessa forma, a dependência da solução, em relação ao campo H , é encontrada nesse ponto.
- A energia mínima é então calculada usando o terceiro e quarto termos de (5.8).

já vimos, para o potencial ϕ^4 temos que $\frac{dW}{d\phi} = 1 - \phi^2$ e assim podemos escrever que

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm (1 - \phi^2) \quad (5.9)$$

e

$$\pm W \Big|_{-\infty}^0 = \pm \left(\phi - \frac{1}{3}\phi^3 \right) \Big|_{-\infty}^0, \quad (5.10)$$

escolhendo o sinal superior de forma simultânea em (5.9) e (5.10), temos:

$$\phi_x = \frac{d\phi}{dx} = (1 - \phi^2). \quad (5.11)$$

A condição acima é satisfeita tanto por $\phi_1(x)$ como por $\phi_2(x)$, uma vez que, $\frac{d}{dx}(\tanh(x)) = 1 - \tanh^2(x)$. Agora deve-se observar como se comporta $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ em $x = 0$. Isto é feito utilizando-se a equação (5.11), ou seja,

$$\frac{d\phi_1(0)}{dx} = 1 - \phi_1^2(0).$$

Agora a condição de contorno $\frac{d\phi_1(0)}{dx} = H$ é utilizada, e assim, obtêm-se a seguinte igualdade

$$H = 1 - \phi_1^2(0) \implies \phi_1(0) = \pm\sqrt{1-H}. \quad (5.12)$$

Esta equação apresenta dois comportamento possíveis para $\phi_1(0)$. Para escolher o sinal corretamente em (5.12), deve-se observar que a medida que $H \rightarrow 1$, $X_0(H) \rightarrow 0^+$ e conseqüentemente a solução $\phi_1(0) = \tanh(-X_0)$ se aproxima de 0^- , por essa razão o sinal correto a ser escolhido em (5.12) é o sinal “-”. Com essa escolha, a solução, $\phi_1(0)$, fica .

$$\phi_1(0) = -\sqrt{1-H}. \quad (5.13)$$

Fazendo o mesmo procedimento para $\phi_2(x)$, encontramos que

$$\phi_2(0) = \pm\sqrt{1-H}. \quad (5.14)$$

Novamente, deve-se escolher o sinal corretamente. Nesse caso, quando $H \rightarrow 1$, $X_0 \rightarrow 0^+$ e em conseqüência a solução $\phi_2(0) = \tanh(+X_0) \rightarrow 0^+$. Assim, o sinal correto é “+”.

$$\phi_2(0) = \sqrt{1-H}. \quad (5.15)$$

Agora, uma vez obtidos $\phi_1(0)$ e $\phi_2(0)$, é possível calcular a energia destas soluções. Como essas soluções satisfazem o sinal superior em (5.8) o sinal superior também é escolhido no terceiro termo desta equação . Assim a energia mínima para a solução $\phi_1(x)$ é:

$$E[\phi_1] = \left(\phi_1 - \frac{1}{3}\phi_1^3 \right) \Big|_{-\infty}^0 - H\phi_1(0, t),$$

$$E[\phi_1] = \left(\phi_1(0) - \frac{1}{3}\phi_1^3(0) \right) - \phi_1(-\infty) + \frac{1}{3}\phi_1^3(-\infty) - H\phi_1(0, t). \quad (5.16)$$

Lembrando que $\phi_1(-\infty) = -1$ e que $\phi_1(0, t) = \phi_1(0) = -\sqrt{1-H}$, o que implica

$$E[\phi_1] = \left(-\sqrt{1-H} + \frac{1}{3}(1-H)^{\frac{3}{2}} \right) + 1 - \frac{1}{3} - H(-\sqrt{1-H})$$

$$E[\phi_1] = \frac{2}{3} - \sqrt{1-H}(1-H) + \frac{1}{3}(1-H)^{\frac{3}{2}}$$

$$E[\phi_1] = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(1-H)^{\frac{3}{2}} \quad (5.17)$$

Para ϕ_2 os limites são os mesmos de (5.16), assim, têm-se que

$$E[\phi_2] = \left(\phi_2(0) - \frac{1}{3}\phi_2^3(0) \right) - \phi_2(-\infty) + \frac{1}{3}\phi_2^3(-\infty) - H\phi_2(0, t),$$

e usando $\phi_2(-\infty) = -1$ e $\phi_2(0, t) = \phi_2(0) = \sqrt{1-H}$, obtêm-se

$$E[\phi_2] = \left(\sqrt{1-H} - \frac{1}{3}(1-H)^{\frac{3}{2}} \right) + 1 - \frac{1}{3} - H(\sqrt{1-H})$$

$$E[\phi_2] = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(1-H)^{\frac{3}{2}}. \quad (5.18)$$

Escolhendo agora o sinal inferior nas equações (5.9) e (5.10), temos a seguinte equação:

$$\phi_x = \frac{d\phi}{dx} = \phi^2 - 1.$$

A equação acima é satisfeita por $\phi_3(x)$ e por $\phi_4(x)$, pois, $\frac{d}{dx}(-\coth(x)) = \coth^2(x) - 1$. Seguindo os mesmos passos feitos para $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ obtêm-se que

$$\phi_3(0) = \pm\sqrt{1+H}, \quad (5.19)$$

nesse caso, quando $H \rightarrow 0$, $X_1 \rightarrow +\infty$. Assim a solução $\phi_3(0) = -\coth(-X_1) \rightarrow 1^+ > 1$, logo a raiz nesse limite será positiva, isto indica que o sinal correto em 5.19 é o sinal “+”

$$\phi_3(0) = \sqrt{1+H}. \quad (5.20)$$

A energia dessa solução é então:

$$E[\phi_3] = \phi_3(-\infty) - \frac{1}{3}\phi_3^3(-\infty) - \phi_3(0) + \frac{1}{3}\phi_3^3(0) - H\phi_3(0, t)$$

$$E[\phi_3] = 1 - \frac{1}{3} - \sqrt{1+H} + \frac{1}{3}(1+H)^{\frac{3}{2}} - H\sqrt{1+H}$$

$$E[\phi_3] = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(1+H)^{\frac{3}{2}}. \quad (5.21)$$

A figura 5.3 mostra o comportamento das energias obtidas. Percebe-se que quando H cresce até 1, ϕ_2 se junta com ϕ_1 e desaparecem, ficando somente ϕ_3 como solução para $H > 1$.

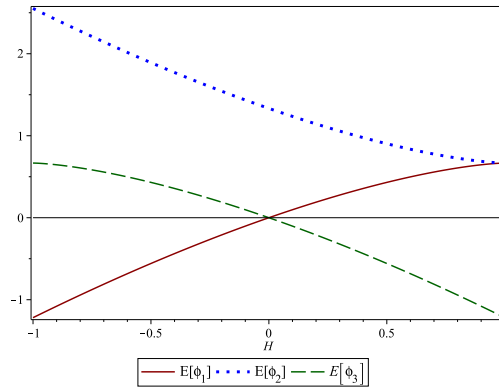


Figura 5.3: Energias em função de H

Seguindo a rotina descrita nos cálculos anteriores, pode-se calcular também energia para as soluções do tipo $\tilde{\phi}_i = -\phi_i$. Os resultados obtidos são:

$$E[\tilde{\phi}_1] = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(1+H)^{\frac{3}{2}}, \quad (5.22)$$

$$E[\tilde{\phi}_2] = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(1+H)^{\frac{3}{2}} \quad (5.23)$$

e

$$E[\tilde{\phi}_3] = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(1-H)^{\frac{3}{2}}. \quad (5.24)$$

De onde vemos que $E[\tilde{\phi}_1] = E[\phi_3]$, $E[\tilde{\phi}_2] = E[\phi_4]$ e, $E[\tilde{\phi}_3] = E[\phi_1]$. Após o cálculo de $E[\tilde{\phi}_1]$, $E[\tilde{\phi}_2]$ e $E[\tilde{\phi}_3]$, percebemos que apenas $E[\tilde{\phi}_2]$ tem um comportamento novo em relação as energias (5.13), (5.15) e (5.21). A figura 5.4 mostra todas as configurações de energia mínima possíveis para este modelo.

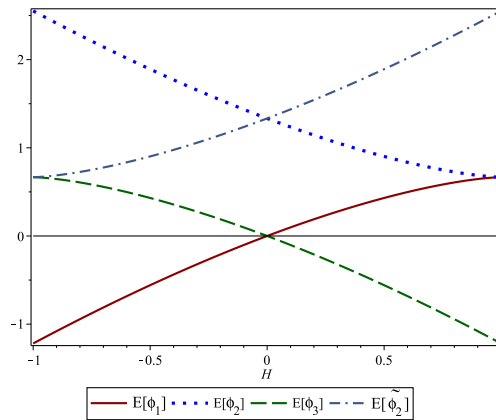


Figura 5.4: Todas as configurações de energia possíveis em função de H

5.2 Colisão *Antikink-Fronteira*

Assim como nos modelos anteriores, neste modelo a correta definição do perfil inicial da colisão é um passo fundamental. Como perfil inicial considera-se um *kink* um *antikink* viajante e completa-se este perfil escolhendo-se adequadamente umas das soluções (5.4) ou (5.5) que se comportará como uma "barreira" e garantirá a condição de contorno em $x = 0$. Para a escolha adequada da soluções "barreira" devemos considerar que, em geral, colisões de defeitos são realizadas com soluções de diferentes sinais da equação de primeira ordem. Por exemplo, se o *kink* é solução para o sinal '+' da equação de primeira ordem, ele deverá colidir com a solução do sinal '-', que no caso do modelo ϕ^4 , é o *antikink*. Com essa observação, consideramos que o perfil inicial deve ser formado por soluções de diferentes sinais da equação de primeira ordem (5.2). Como já vimos, cada solução "barreira" está associado um $X_0(H)$ ou $X_1(H)$, e assim o H pode ficar restrito a ser positivo ou negativo, este é caso das soluções (5.4) e (5.5). Assim o campo H também deve ser escolhido adequadamente. Verifica-se que para o modelo ϕ^4 , com condição de contorno, os possíveis perfis iniciais são:

- Para $H > 0$

$$\phi(x, 0) = -\tanh(\gamma(x - x_0)) + \phi_1(x) + 1,$$

isto é,

$$\phi(x, 0) = -\tanh(\gamma(x - x_0)) + \tanh(x - X_0) + 1, \quad (5.25)$$

onde $\gamma = (1 - v_i^2)^{-\frac{1}{2}}$. Note que o primeiro termo é um *antikink* viajante, enquanto que o segundo termo é uma solução "barreira" que se mantém fixa com o tempo e garante a condição de contorno em $x = 0$. Outro perfil possível para $H > 0$ é:

$$\phi(x, 0) = \tanh(\gamma(x - x_0)) + \phi_3(x) - 1,$$

ou seja,

$$\phi(x, 0) = \tanh(\gamma(x - x_0)) - \coth(x - X_1) - 1, \quad (5.26)$$

dessa vez o primeiro termo é um *kink* viajante, enquanto que o segundo termo é fixo.

- **Para $H < 0$**

$$\phi(x, 0) = \tanh(\gamma(x - x_0)) + \tilde{\phi}_1(x) - 1,$$

isto é,

$$\phi(x, 0) = \tanh(\gamma(x - x_0)) - \tanh(x - X_0) - 1. \quad (5.27)$$

O outro perfil adequado para $H < 0$ é:

$$\phi(x, 0) = -\tanh(\gamma(x - x_0)) + \tilde{\phi}_3(x) + 1,$$

isto é,

$$\phi(x, 0) = -\tanh(\gamma(x - x_0)) + \coth(x - X_1) - 1. \quad (5.28)$$

É importante comentar aqui, que devido à simetria do modelo ϕ^4 , existe uma relação de equivalência entre os resultados dessas configurações iniciais. Como pode ser verificado, os resultados da configuração (5.25) são equivalentes aos resultados da configuração (5.27), e os resultados obtidos pela configuração (5.26) são equivalentes aos obtidos pela configuração (5.28). Por essa razão, precisa-se realizar colisões para apenas duas dessas configurações, que obteremos todos os comportamentos possíveis para esse modelo.

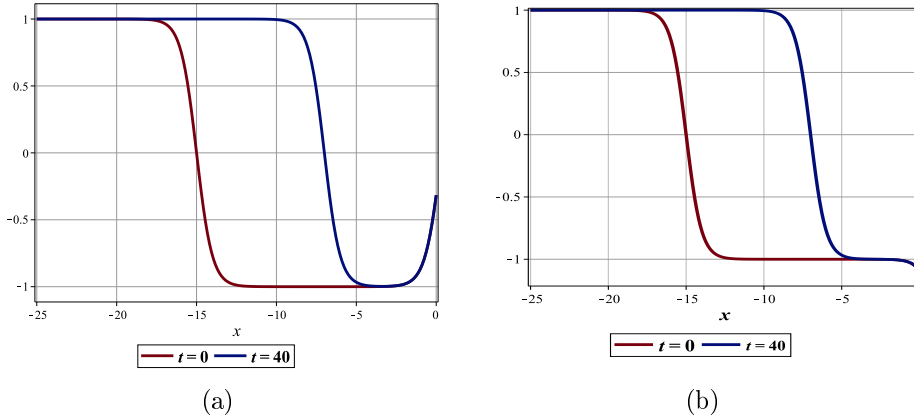
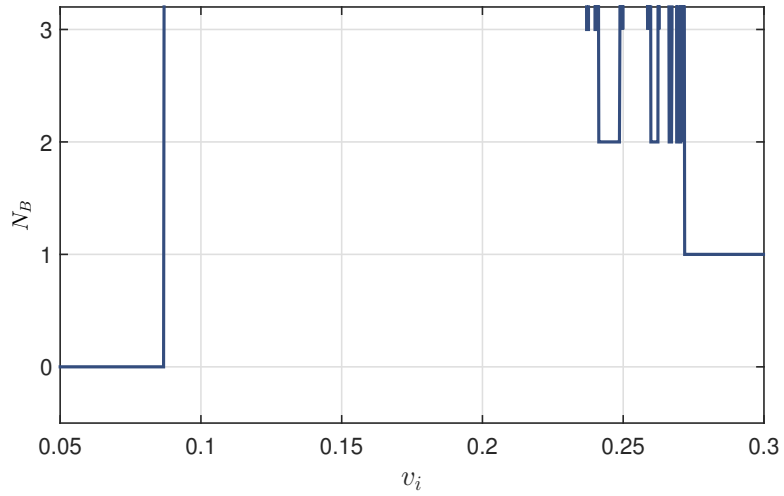


Figura 5.5: Configurações iniciais para a) $H > 0$ dada por (5.25). b) $H < 0$ dada por (5.28).

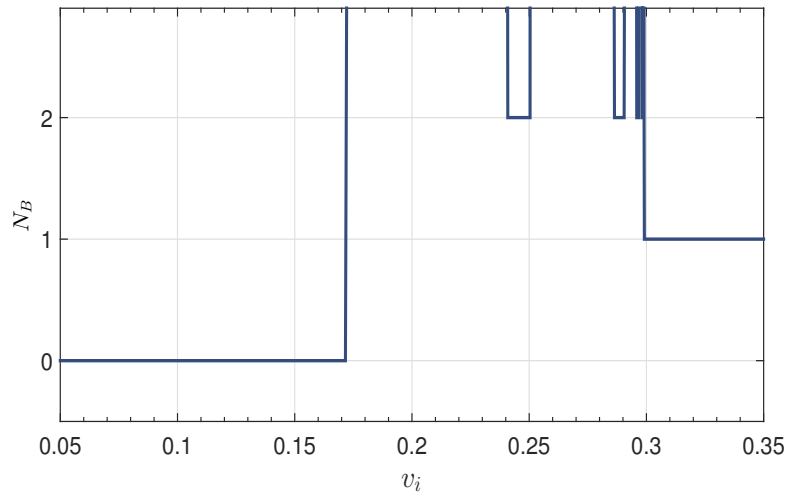
Neste trabalho, apenas as configurações (5.25) ($H > 0$) e (5.28) ($H < 0$) são utilizadas. Para ambas as configurações, considera-se que o *kink* ou *antikink* viajante parte inicialmente de uma posição $x_0 = -10$ viajando em direção a fronteira com velocidade $v_i > 0$.

Para resolver o sistema numericamente, definimos um intervalo de comprimento L e, colocamos a condição de contorno de Neumann em $x = 0$ e uma condição de Dirichlet em $x = -L$. Utilizamos um método de diferenças finitas de quarta ordem em uma grade com 2048 nós com $L = 100$, logo o passo veio a ser $\delta x \approx 0.05$; para a discretização no domínio do tempo, foi usado o método de Runge-Kutta de quarta ordem com passos de $\delta t = 0.002$.

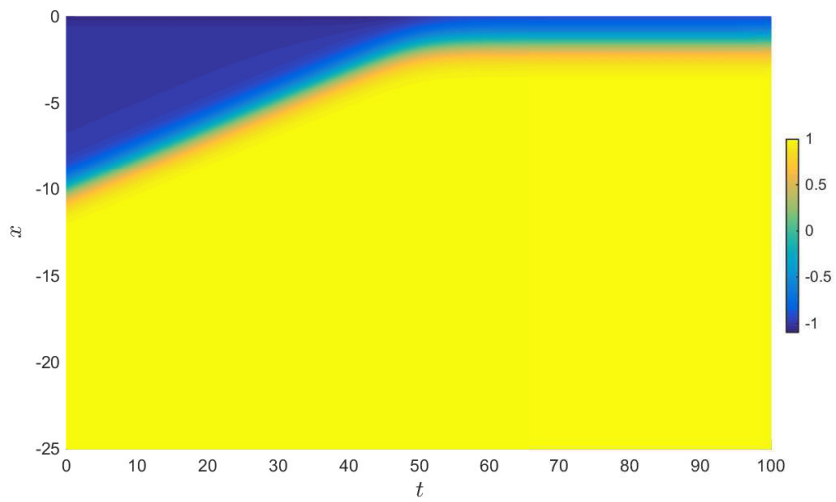
Nossas simulações reproduziram os resultados obtidos no trabalho [15] onde foram apresentadas ricas características, dentre elas, alguns fenômenos sobre os quais não havia na literatura. Falaremos agora sobre os principais fenômenos encontrados para este modelo. Estes encontram-se resumidos nas figuras 5.6, 5.8 e 5.9.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.6: Número de *bounces* por v_i para a) $H = -0.1$, b) $H = -0.2$. Em c) temos o *antikink* na velocidade crítica de repulsão para $H = -0.2$; $v_i = 0.171992022$.

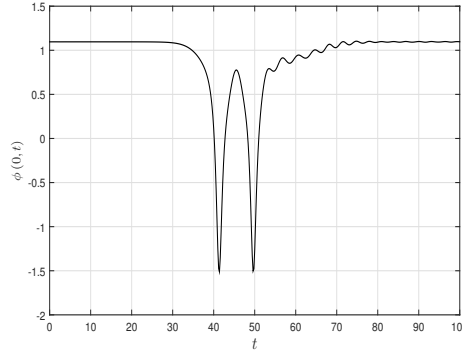
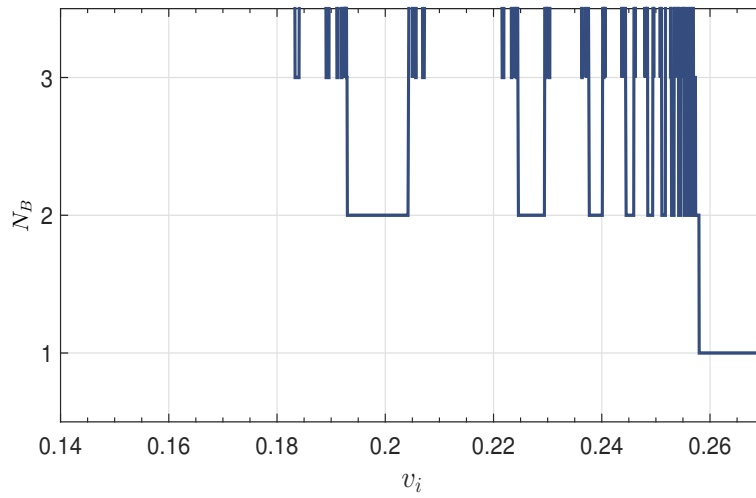


Figura 5.7: Janela zero. Não existe nenhuma oscilação entre os dois grandes mínimos.

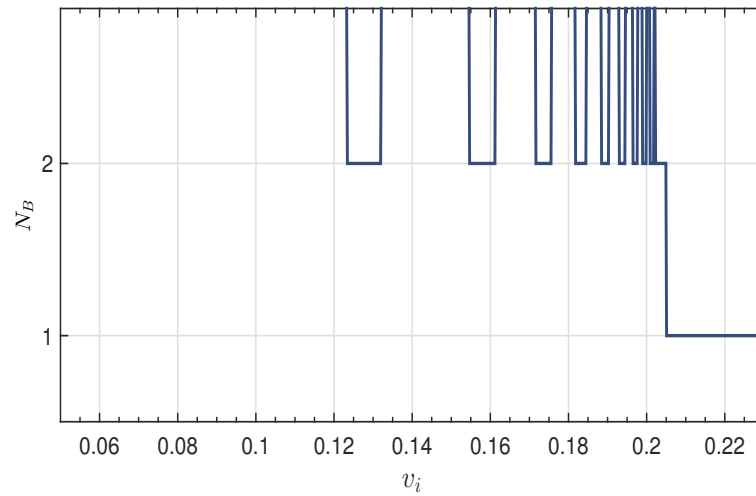
Como esperado, a partir da expressão da força estática (apêndice B), para $H < 0$ a força é inicialmente repulsiva. Como consequência, se o *antikink* viaja com uma velocidade inicial pequena, ele não consegue se aproximar o suficiente da barreira, sendo refletido de forma elástica para $-\infty$. À medida que sua velocidade v_i aumenta, o *antikink* consegue chegar cada vez mais próximo do contorno, até que atinge uma certa velocidade de equilíbrio, onde o *antikink* não chega a fronteira, mas também não é refletido, e dessa forma ele fica em um estado de equilíbrio, veja as Figs. (5.6b) e (5.6c) para $H = -0.2$. Chamamos tal velocidade de *velocidade crítica de repulsão* v_{crp} . Para velocidades $v_i > v_{crp}$ o *antikink* consegue vencer a força repulsiva, colidindo na fronteira. Aumentando ainda mais a sua velocidade, ele alcança a velocidade crítica de escape v_{cr} , onde sempre escapará para $-\infty$ após a primeira colisão.

Outra característica importante do modelo para valores de $H < H_c$ é a “resurreição” de uma janela de *two-bounce* que Campbell percebeu estar ausente em seu trabalho, [3]. Esta janela pode ser ilustrada na figura 5.6b, estando centrada em torno de $v_i = 0.245$. Vamos chamar esta janela de *janela zero*, pelo fato de esta se localizar antes daquela que conhecemos como primeira janela. Na figura 5.7, mostramos uma colisão com $v_i = 0.244$ nas proximidades do centro da janela. Ver-se que o nome se justifica, pelo fato de entre as duas colisões haver *zero* oscilações.

Para $H > 0$, temos duas características principais: Para valores de $H < H_c \approx 0.6$, observamos (Fig. 5.8) uma estrutura de janelas *multi-bounces* com a mesma estrutura do modelo ϕ^4 , no



(a)



(b)

Figura 5.8: Número de *bounces* versus v_i : a) $H = 0$ reproduz o modelo ϕ^4 ; b) $H = +0.2$

entanto a medida que aumentamos o valor de H a velocidade crítica de escape vai se tornando menor que o valor padrão $v_{cr} = 0.2598$ e, em consequência a estrutura vai ficando cada vez mais comprimida. Para $H = 0$ a estrutura de *multi-bounces* do modelo ϕ^4 (Fig. 4.7b) é perfeitamente recuperada.

Por fim, para valores de $H > H_c$ observamos em nossas simulações, o mesmo comportamento encontrado [15]. São novos comportamentos que podem ser vistos na figura 5.9. Na figura 5.9a percebemos que após a colisão a fronteira permanece em um estado de agitação, isso acontece devido a fronteira está com a energia próximo de seu valor máximo. Nessa situação a colisão do antikink pode ocasionar a criação de um novo kink a partir da fronteira. Na figura 5.9b observamos que a colisão do *antikink* com a fronteira; nessa situação o novo par $K\bar{K}$ colide por um certo número de vezes e depois se separam; já para a velocidade $v_i = 0.39$ o *kink* originado da fronteira fica preso ao *antikink* inicial e viajam com velocidades praticamente iguais, formando um *bulk oscillon*.

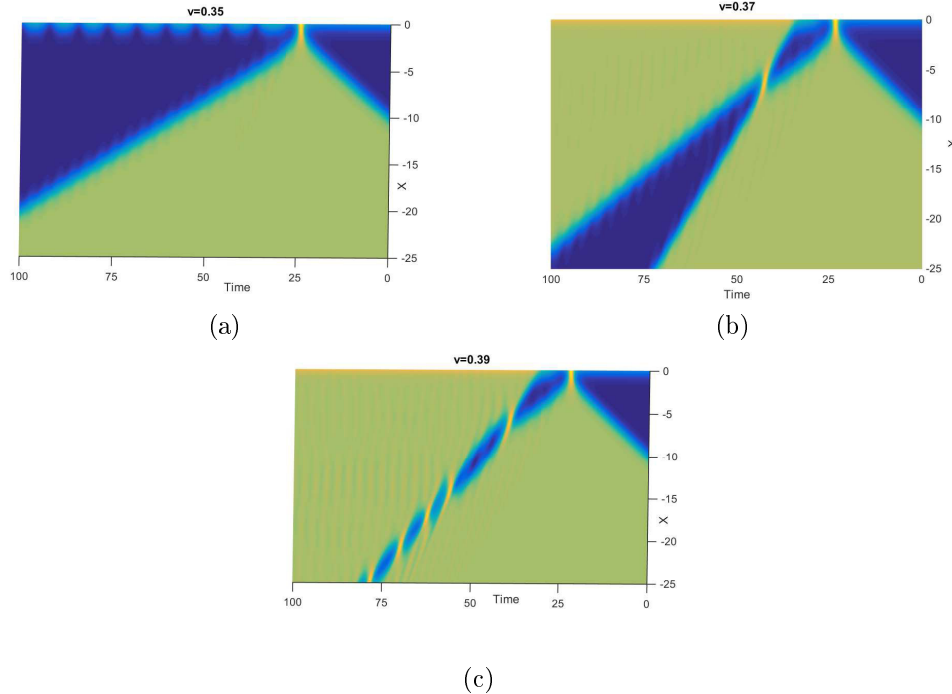


Figura 5.9: Colisão *antikink*-fronteira para $H = 0.9$. a) $v_i = 0.35$, b) $v_i = 0.37$ formação de um par $K\bar{K}$ c) $v_i = 0.39$ Formação de um *bulk oscillon*.

5.3 Modelo ϕ^6

O passo seguinte ao que se tem estudado até aqui é o estudo de colisões *kinks*-fronteira para o modelo ϕ^6 . A principal motivação para este estudo é a comparação com os resultados obtidos para o modelo ϕ^4 com condição de contorno. Já vimos na seção 4.3 que o estudo de colisões no ϕ^6 proporcionou uma nova abordagem, em relação ao ϕ^4 , para o entendimento das estruturas de ressonância. Da mesma forma, nesta seção estudamos colisões *kinks* do modelo ϕ^6 em uma semi-linha verificando as semelhanças e possíveis novos comportamentos nesse contexto de maior não-linearidade.

5.3.1 Soluções e condição de contorno

Iniciamos com as soluções estáticas para as equações de primeira ordem do modelo ϕ^6

$$\phi_x = \pm (\phi - \phi^3). \quad (5.29)$$

O sinal superior, $\phi_x = (\phi - \phi^3)$, tem as seguintes soluções

$$\phi_{1\pm}(x) = \pm \sqrt{\frac{1 + \tanh(x - X_0)}{2}}, \quad \phi_{2\pm}(x) = \pm \sqrt{\frac{1 + \coth(x - X_0)}{2}} \quad (5.30)$$

Para o sinal inferior, $\phi_x = \phi^3 - \phi$, têm-se as soluções

$$\phi_{3\pm}(x) = \pm \sqrt{\frac{1 - \tanh(x - X_1)}{2}}, \quad \phi_{4\pm}(x) = \pm \sqrt{\frac{1 - \coth(x - X_1)}{2}}, \quad (5.31)$$

onde novamente $X_0(H)$ e $X_1(H)$ são obtidos a partir da condição de Neumann em $x = 0$.

Como já visto na seção 4.3, o modelo ϕ^6 possui dois setores topológicos. Para os fins de nossa investigação, vamos estudar colisões somente para o setor que compreende os mínimos 0 e 1. Por isso, nesta seção nos interessam somente as soluções que interpoem entre esses dois mínimos. Analisando as soluções (5.30) e (5.31), vemos que $\phi_{1+}(x)$ e $\phi_{3+}(x)$ são as únicas soluções que interpolam no setor topológico considerado, isso implica que as duas podem ser consideradas para o uso da condição de contorno de Neumann. Primeiramente, vamos considerar a fronteira como sendo a solução $\phi_{1+}(x)$. A aplicação da condição de Neumann para esta solução nos leva

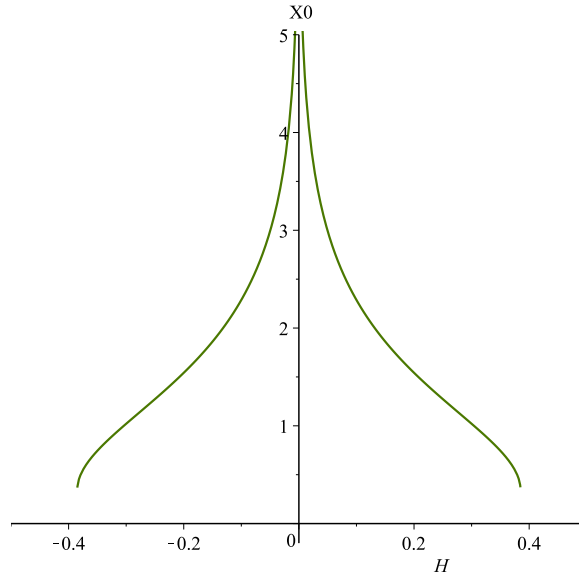


Figura 5.10: X_0 em função de H no modelo ϕ^6

uma equação transcendental para X_0 , dada por

$$\frac{e^{2X_0}}{(1 + e^{2X_0})^{\frac{3}{2}}} = H. \quad (5.32)$$

Logo, nesse caso $X_0(H)$ é obtido numericamente. A figura 5.10 mostra o seu comportamento em função do campo H . Na seção 5.1 o valor máximo do parâmetro H , com $H > 0$, foi $H_{max} = 1$. A partir da equação (5.32), vemos que campo H agora está restrito ao intervalo

$$0 < |H| < \frac{2}{9}\sqrt{3} = H_{max} \quad (5.33)$$

5.3.2 Energias na Fronteira

Lembrando que para o potencial ϕ^6 $W = \frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^4}{4}$, e a equação (5.9), neste caso, é dada por

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm (\phi - \phi^3). \quad (5.34)$$

A solução $\phi_{1+}(x)$ satisfaz o sinal superior, além do que em $x = 0$, deve valer que

$$H = \phi_1(0) - \phi_1^3(0), \quad (5.35)$$

e assim a energia de $\phi_{1+}(x)$ será

$$E[\phi_1] = \left(\frac{1}{2}\phi_1^2(0) - \frac{1}{4}\phi_1^4(0) \right) - \frac{1}{2}\phi_1^2(-\infty) + \frac{1}{4}\phi_1^4(-\infty) - H\phi_1(0, t). \quad (5.36)$$

Multiplicando (5.35) por $\phi_1(0)$, obtemos que

$$H\phi_1(0) = \phi_1(0)^2 - \phi_1(0)^4 \quad (5.37)$$

Agora, fazendo uso da relação (5.37) em (5.36), obtêm-se a energia na forma

$$E[\phi_1] = \frac{\phi_1^2(0)}{2} - \frac{\phi_1^4(0)}{4} - \frac{\phi_1^2(-\infty)}{2} + \frac{\phi_1^4(-\infty)}{4} - \phi_1(0)^2 + \phi_1(0)^4,$$

e como $\phi_1(-\infty) = 0$, obtemos a energia de $\phi_{1+}(x)$ como sendo

$$E[\phi_1] = \frac{3}{4}\phi_1^4(0) - \frac{1}{2}\phi_1^2(0) \quad (5.38)$$

5.4 Colisão *Antikink*-Fronteira

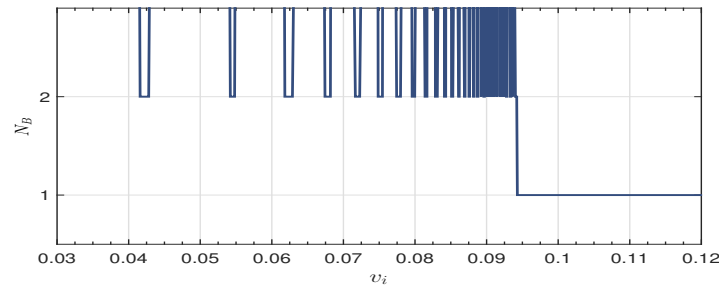
Nesta seção apresentamos os resultados das nossas simulações para $H > 0$. A fim de estabelecer uma comparação com os resultados obtidos na seção 5.1, mostramos os resultados para as mesmas proporções do H_{max} . Lembrando que para o ϕ^4 , $H_{max} = 1.0$ e que para modelo ϕ^6 , H_{max} é dado por 5.33. Consideramos um *antikink*, em uma posição inicial $x_0 = -20$, viajando em direção a fronteira com velocidade $v_i > 0$. Novamente em $x = 0$, existe a condição de Neumann. A configuração inicial para a qual calculamos a evolução da equação de movimento é dada por:

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \tanh(x - X_0))} + \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \tanh(\gamma(x - x_0)))} \quad (5.39)$$

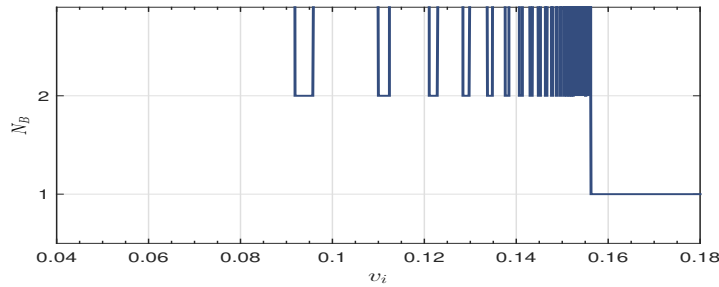
O método numérico é o mesmo utilizado na seção 5.1. Usamos uma grade com 2048 nós com $L = 100$. Como nesse modelo o sistema precisa de mais tempo para evoluir, realizamos nossas simulação com o intervalo de tempo $0 < t < 600$.

5.4.1 Resultados e Discussão

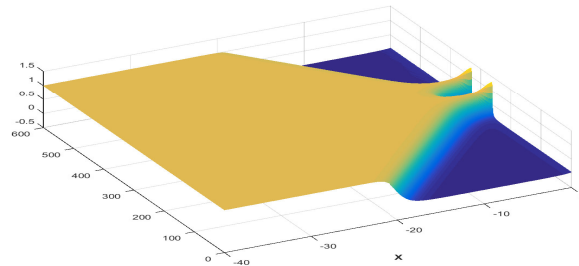
Mostramos nas figuras 5.11 a estrutura de ressonância do modelo simulado. Podemos perceber que para esses valores de H existe uma estrutura de janelas *multi-bounces* e portanto esperamos que exista um mecanismo de troca de energia para esta configuração. No que se refere ao valor da velocidade crítica v_{cr} , observamos um comportamento diferente em relação a v_{cr} no modelo ϕ^4 com condição de contorno ; a estrutura de janelas de *two-bounces* avança para valores maiores de v_{cr} , fazendo nesse aspecto, um movimento contrário ao observado na seção 5.1. Na figura 5.11c, mostramos o aspecto da colisão para a velocidade $v_i = 0.06242$ com o campo $H = 0.1H_{max}$.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.11: Estrutura de *two-bounce* para: a) $H = 0.1H_{max}$, b) $H = 0.2H_{max}$. Em c) vemos uma colisão do tipo *two-bounce* quando $v_i = 0.06242$ e $H = 0.1H_{max}$.

Nossos resultados mostram que também existe o fenômeno de “ressureição” ou restauração de janelas de *two-bounces*. Em colisões *antikink-kink* do ϕ^6 , (4.30), a primeira janela é $n = 11$ [14], enquanto que na figura 5.12a, no modelo ϕ^6 na semi-linha, quando $H = 0.2H_{max}$, observamos que para a primeira janela $n = 4$. Também realizamos simulações para grandes valores de H , com $H = 0.9H_{max}$. Neste caso notamos que os novos fenômenos, observados no modelo ϕ^4 com condição de contorno, também são encontrados no presente modelo. A figura 5.12b mostra o fenômeno *bulk oscillon* para $v_i = 0.3$.

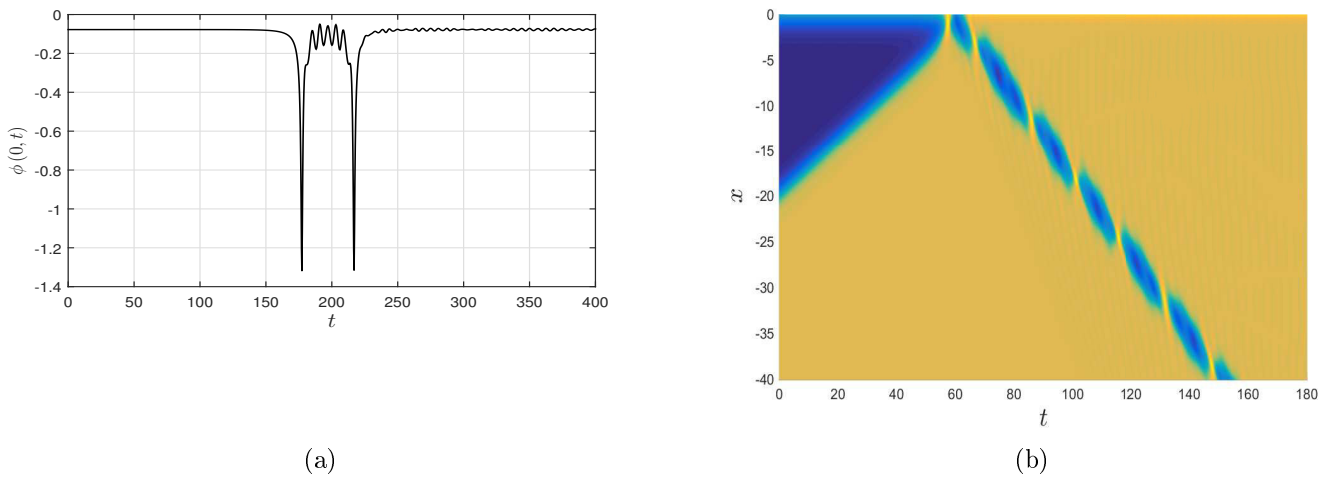


Figura 5.12: a) Primeira janela de *two-bounce* para $H = 0.2H_{max}$. b) Formação de um *bulk oscillon* para $v_i = 0.3$, com $H = 0.9H_{max}$.

Nesta seção, apresentamos os principais resultados que temos obtidos para o modelo ϕ^6 na semi-linha. Ainda nos restam algumas análises para que possamos fundamentar nossas explicações sobre os comportamentos observados. A principal dessas análises consiste em estudar o setor perturbativo da configuração *antikink-fronteira*. Na seção 4.3 vimos que os *kinks* do modelo ϕ^6 não possuem modos internos de vibração, logo o aparecimento de uma estrutura de *two-bounces* possivelmente se deve ao surgimento de modos internos de vibração para a configuração *antikink-fronteira*. A não integrabilidade do modelo juntamente com a maior não-linearidade da equação de movimento dão um caráter não-trivial para tais análises.

Capítulo 6

Conclusão

Nesta dissertação podemos perceber as diferenças existentes entre modelos integráveis e não-integráveis, no contexto de colisões do tipo *kink-antikink*. Para modelos integráveis, realizamos o estudo de colisões de defeitos no modelo sine-Gordon. No cenário que estudamos, observamos que de fato, não existe perda de energia por radiação e desta forma os sólitons apenas mudam por uma fase, indo para um outro estado de vácuo da teoria após a colisão. Este comportamento também se deve, segundo o que acreditamos atualmente, à ausência de um modo vibracional, uma vez que o modelo sine-Gordon possui apenas a solução de modo zero.

No capítulo 4 realizamos colisões de *kinks* em modelos de natureza não-integráveis. Estes modelos se assemelham ao sine-Gordon no aspecto de que também possuem soluções topológicas. No entanto, eles se mostraram muito diferentes no que se refere à dinâmica da colisão. Para o modelo ϕ^4 , observamos que, para baixas velocidades, após a colisão o *kink* fica preso ao *antikink* formando um estado de longa vida - o *bion*; para velocidades acima de uma certa velocidade crítica, o *kink* sempre se separa do *antikink* após uma colisão. No entanto, observamos a existência de algumas faixas de velocidades $v_{ia} < v_i < v_{ib}$ com $v_{ia}, v_{ib} < v_{cr}$, em que o *kink* consegue escapar para o infinito após colidir uma segunda vez, mesmo estando com velocidade menor que a velocidade crítica de escape v_{cr} . À essas faixas de velocidades denominamos *janelas de two-bounces*. Mostramos através da figura 4.7b que existem um número grande dessas janelas entre $0.192575 < v_i < v_{cr}$. A colisão para uma velocidade que pertence a uma janela de *two-bounce* obedece à uma condição de ressonância dada pela equação (4.14); verificamos que as janelas obtidas em nossas simulações, de fato, obedecem ao mecanismo de troca de energia, isto é demonstrado pela figura 4.7a. Dessa foram, reproduzimos os principais

resultados descritos na literatura, acerca de colisões neste modelo. Também concluímos que o novo comportamento do modelo ϕ^4 em relação ao sine-Gordon se deve ao armazenamento de energia pelo modo vibracional do *kink*, que acontece após a primeira colisão; sendo que na segunda colisão a energia armazenada no modo vibracional é devolvida ao modo de translação do *kink* permitindo dessa forma que ele escape. Ainda no capítulo 4, estudamos o modelo duplo sine-Gordon. Este modelo apresenta dois tipos de soluções *kinks* para $\eta < -\frac{1}{4}$: a solução *large kink* e a solução *small kink*; apenas a solução *small kink* apresenta um modo vibracional interno capaz de armazenar energia. Janelas de *multi-bounces* foram observadas apenas para colisões entre *small-kinks*. Desta forma, este modelo serve como um segundo exemplo, demonstrando, novamente, o sucesso do mecanismo de troca de energia para explicar a existência das janelas de *multi-bounces*.

Estudamos também colisões entre *kinks* no modelo ϕ^6 . Neste modelo observamos que os *kinks* não têm um modo interno de vibração, possuindo apenas um modo relacionado à translação. Todavia para a configuração (4.30) as janelas de *multi-bounces* estão presentes de forma muito semelhante as janelas de colisões *kink-antikink* do modelo ϕ^4 . Desta forma, após o estudo deste modelo, concluímos que não é suficiente buscar soluções de estados ligados apenas para as soluções topológicas em suas formas individuais, mas também para as configurações iniciais, tais como (4.29) e (4.30).

No capítulo 5, estudamos o espalhamento de *kinks* por uma por fronteira, existente devido a uma condição de contorno de Neumann em $x = 0$. Primeiramente, seguimos o estudo recente [15] estudando a colisão de um *antikink* com a fronteira para a teoria ϕ^4 . Para pequenos valores do campo magnético H , percebemos que a estrutura de janelas de *two-bounces* é modificada de forma diferentes para $H > 0$ e $H < 0$. Para pequenos valores do campo H positivo, as estrutura de janelas *multi-bounces* são muito semelhantes àquelas do modelo estudado na seção 4.1, sendo igual quando $H = 0$. Na figura 5.7 vemos uma colisão no intervalo da janela *zero*, que é uma janela anterior a primeira janela da fig. 4.4b, que não foi observada em colisões de *kink-antikink* do modelo ϕ^4 . Para grandes valores de H positivo temos um novo intrigante fenômeno: nessa situação, a barreira em $x = 0$ tem um valor de energia próximo do máximo permitido, então a colisão do *antikink* é capaz de induzir o surgimento de um novo *kink* a partir da fronteira. Foi observado que esse novo par, $K\bar{K}$, pode colidir por um número finito de vezes, se separando logo em seguida ou que o par pode ainda ficar preso um ao outro formando um

bulk oscillon.

Na seção 5.3 mostramos o espalhamento com condição de contorno para o modelo ϕ^6 considerando $H > 0$. Nossas simulações mostraram que o padrão de janelas *multi-bounces* observado para colisões *antikink kink* no modelo ϕ^6 , é mantido. Quando fazemos $H = 0$, recuperamos a estrutura de janelas do modelo ϕ^6 fig. 4.18. Até agora podemos concluir que os principais fenômenos observados no estudo do ϕ^4 com condição de contorno, também são observados no modelo ϕ^6 . Por exemplo, a formação de *bulk oscillon* foi também observada, sendo que neste modelo, estas estruturas são ainda mais frequentes. Para pequenos valores de $H > 0$, foi observada a restauração de janelas de *two-bounces* de ordem menor, que não aparecem em colisões *antikink-kink* do modelo ϕ^6 na linha completa.

Sobre as perspectivas futuras deste trabalho, esperamos continuar o estudo da seção 5.3, uma vez, que ainda existem análises pendentes. O próximo passo é realizar a análise perturbativa, tendo por objetivo entender de que forma a condição de contorno modifica os modos normais de vibração. Como observamos, para pequenos valores do campo H , a estrutura de janelas se assemelha àquela do modelo ϕ^6 . Então esperamos encontrar modos vibração na colisão de um *antikink* com a fronteira no modelo ϕ^6 . Isto será interessante pois, como já estudamos, o *antikink* no modelo ϕ^6 não possui modo interno de vibração.

Certamente, os conhecimentos teóricos desta área da Física, além do aprendizado com métodos numéricos, adquiridos durante este trabalho, nos ajudarão muito em trabalhos futuros. Trabalhar com métodos numéricos é uma tarefa que exige atenção e olhar crítico. Atualmente, trabalhos que envolvem simulação, na mesma linha deste trabalho, têm exigido métodos cada vez mais precisos. Por isso, outra perspectiva deste trabalho é o estudo de outros métodos numéricos.

Referências Bibliográficas

- [1] Nivaldo A Lemos. *Mecânica analítica*. Editora Livraria da Física, 2007.
- [2] Valery Rubakov. *Classical theory of gauge fields*. Princeton University Press, 2009.
- [3] David K Campbell, Jonathan F Schonfeld, and Charles A Wingate. Resonance structure in kink-antikink interactions in φ^4 theory. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 9(1-2), 1983.
- [4] Peter Anninos, Samuel Oliveira, and Richard A. Matzner. Fractal structure in the scalar $\lambda(\varphi^2 - 1)^2$ theory. *Phys. Rev. D*, 44, 1991.
- [5] Nicholas Manton and Paul Sutcliffe. *Topological solitons*. Cambridge University Press, 2004.
- [6] T. I. Belova and Alexander Evgenyevich Kudryavtsev. Solitons and their interactions in classical field theory. *Phys. Usp.*, 40, 1997. [Usp. Fiz. Nauk167,377(1997)].
- [7] T.I. Belova and A.E. Kudryavtsev. Quasi-periodic orbits in the scalar classical $\hat{\mathbb{I}}^4$ field theory. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 32(1), 1988.
- [8] Roy H. Goodman and Richard Haberman. Kink-antikink collisions in the ϕ^4 equation: The n-bounce resonance and the separatrix map. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2005.
- [9] Tadao Sugiyama. Kink-antikink collisions in the two-dimensional $\hat{\mathbb{I}}^4$ model. *Progress of Theoretical Physics*, 61(5), 1979.
- [10] Mehrdad Moshir. Soliton-antisoliton scattering and capture in $\hat{\mathbb{I}}^4$ theory. *Nuclear Physics B*, 185(2), 1981.

- [11] M. J. Ablowitz, M D. Kruskal, and J. F. Ladik. Solitary wave collisions. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 36(3), 1979.
- [12] David K. Campbell, Michel Peyrard, and Pasquale Sodano. Kink-antikink interactions in the double sine-gordon equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 19(2), 1986.
- [13] V. A. Gani and A. E. Kudryavtsev. Kink-antikink interactions in the double sine-gordon equation and the problem of resonance frequencies. *Phys. Rev. E*, 60, 1999.
- [14] Patrick Dorey, Kieran Mersh, Tomasz Romanczukiewicz, and Yasha Shnir. Kink-antikink collisions in the ϕ^6 model. *Phys. Rev. Lett.*, 107, 2011.
- [15] James Mercer Tomasz Romanczukewicz Patrick Dorey, Aliaksei Halavanau and Yasha Shnir. Boundary scattering in the φ^4 model. 2015.
- [16] Zhang Fei, Yuri S. Kivshar, and Luis Vázquez. Resonant kink-impurity interactions in the sine-gordon model. *Phys. Rev. A*, 45, 1992.
- [17] Zhang Fei, Yuri S. Kivshar, and Luis Vázquez. Resonant kink-impurity interactions in the φ^4 model. *Phys. Rev. A*, 46, 1992.
- [18] H Goldstein and C Poole. J, safko, classical mechanics, 2001.
- [19] Lawrence M Widrow. Dynamics of thick domain walls. *Physical Review D*, 40(4), 1989.
- [20] Dionisio Bazeia. Defect structures in field theory. In *13th Jorge Andre Swieca Summer School on Particle and Fields Campos do Jordao, Brazil, January 9-22, 2005*, 2005.
- [21] EB Bogomolny. The stability of classical solutions. *Yad. Fiz.*, 24, 1976.
- [22] M. K. Prasad and Charles M. Sommerfield. Exact classical solution for the 't hooft monopole and the julia-zee dyon. *Phys. Rev. Lett.*, 35, 1975.
- [23] H. J. de Vega and F. A. Schaposnik. Classical vortex solution of the abelian higgs model. *Phys. Rev. D*, 14, 1976.
- [24] Jun John Sakurai and Jim Napolitano. *Modern quantum mechanics*. Addison-Wesley, 2011.

- [25] David Jeffery Griffiths. *Introduction to quantum mechanics*. Pearson Education India, 2005.
- [26] R. Jackiw. Quantum meaning of classical field theory. *Rev. Mod. Phys.*, 49, 1977.
- [27] Fabiano de Carvalho Simas. *Tópicos em Defeitos Topológicos: Colisões e Localização de Campos*. Tese de doutorado, 2015.
- [28] R. K. Bullough and P. J. Caudrey. *The Soliton and Its History*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1980.
- [29] Julio Rubinstein. Sine-gordon equation. *Journal of Mathematical Physics*, 11(1), 1970.
- [30] B. Piette and W. J. Zakrzewski. Scattering of sine-gordon breathers on a potential well. *Phys. Rev. E*, 79, 2009.
- [31] J Frenkel and T Kontorova. On the theory of plastic deformation and twinning. *Izv. Akad. Nauk, Ser. Fiz.*, 1, 1939.
- [32] A Barone, F Esposito, CJ Magee, and AC Scott. Theory and applications of the sine-gordon equation. *La Rivista del Nuovo Cimento (1971-1977)*, 1(2), 1971.
- [33] Roberto Menezes da Silva. *Defeitos Globais em Teoria de Campos e Aplicações*. PhD thesis, 2007.
- [34] David K. Campbell and Michel Peyrard. Solitary wave collisions revisited. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 18(1), 1986.
- [35] A. R. Gomes, R. Menezes, K. Z. Nobrega, and F. C. Simas. Kink-antikink collisions for twin models. *Phys. Rev. D*, 90, 2014.
- [36] F. C. Simas, Adalto R. Gomes, K. Z. Nobrega, and J. C. R. E. Oliveira. Suppression of two-bounce windows in kink-antikink collisions. *Journal of High Energy Physics*, 2016(9), 2016.
- [37] Kazumi Maki and Pradeep Kumar. Magnetic solitons in superfluid ^3He . *Phys. Rev. B*, 14, 1976.

- [38] C. A. Condat, R. A. Guyer, and M. D. Miller. Double sine-gordon chain. *Phys. Rev. B*, 27, 1983.
- [39] R K Dodd, R K Bullough, and S Duckworth. Multisoliton solutions of nonlinear dispersive wave equations not soluble by the inverse method. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 8(7), 1975.
- [40] M Remoissenet. Non-linear excitations in a compressible chain of dipoles. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 14(11), 1981.
- [41] Vakhid A. Gani, Alexander E. Kudryavtsev, and Mariya A. Lizunova. Kink interactions in the $(1 + 1)$ -dimensional φ^6 model. *Phys. Rev. D*, 89, 2014.
- [42] M. A. Lohe. Soliton structures in $p(\varphi)_2$. *Phys. Rev. D*, 20, 1979.
- [43] Robert Arthur, Patrick Dorey, and Robert Parini. Breaking integrability at the boundary: the sine-gordon model with robin boundary conditions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 49(16), 2016.
- [44] Thierry Dauxois and Michel Peyrard. *Physics of solitons*. Cambridge University Press, 2006.
- [45] Tanmay Vachaspati. *Kinks and domain walls: An introduction to classical and quantum solitons*. Cambridge University Press, 2006.
- [46] Jesús Cuevas-Maraver, Panayotis G Kevrekidis, and Floyd Williams. The sine-gordon model and its applications, 2014.
- [47] Yuri S Kivshar and Boris A Malomed. Dynamics of solitons in nearly integrable systems. *Reviews of Modern Physics*, 61(4), 1989.
- [48] D Bazeia, L Losano, JJ Rodrigues, and Rogério Rosenfeld. First-order formalism for dark energy and dust. *The European Physical Journal C*, 55(1), 2008.
- [49] Izrail Solomonovich Gradshteyn and Iosif Moiseevich Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Academic press, 2014.
- [50] Maciej Dunajski. Integrable systems. 2012.

- [51] Mark J. Ablowitz, David J. Kaup, Alan C. Newell, and Harvey Segur. Nonlinear-evolution equations of physical significance. *Phys. Rev. Lett.*, 31, 1973.
- [52] P.G. Kevrekidis. Integrability revisited: a necessary condition. *Physics Letters A*, 285(5â6), 2001.
- [53] Vanda Silveira. Dynamics of the $\lambda\phi^4$ kink. *Phys. Rev. D*, 38, 1988.
- [54] Philip G Drazin and Robin S Johnson. *Solitons: an introduction*, volume 2. Cambridge university press, 1989.
- [55] Dionisio Bazeia Filho. *Campos Escalares em ação*. PhD thesis, Tese apresentada para o Concurso de Professor Titular-UFPB, 2004.
- [56] Charles A Wingate. Numerical search for a ϕ^4 breather mode. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 43(1), 1983.
- [57] P. Sodano, M. El-Batanouny, and C. R. Willis. Eigenfunctions of the small oscillations about the double-sine-gordon kink. *Phys. Rev. B*, 34, 1986.
- [58] Ya. M. Shnir. Topological solitons. *Physics of Particles and Nuclei Letters*, 9(9), 2012.
- [59] George B Arfken, Hans J Weber, and Frank E Harris. *Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide*. Academic press, 2011.
- [60] V.G. Makhankov. Dynamics of classical solitons (in non-integrable systems). *Physics Reports*, 35(1), 1978.
- [61] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. Jhon Wiley & Sons, third edition, 1999.
- [62] R. M. Alford, K. R. Kelly, and D. M. Boore. Accuracy of finiteâdifference modeling of the acoustic wave equation. *GEOPHYSICS*, 39(6):834–842, 1974.
- [63] J. Douglas Faires Richard L. Burden. *Numerical Analysis*. Books/Cole, 2010.

Apêndice A

Métodos Numéricos

A.1 Diferenças Finitas

O método de diferenças finitas para resolver uma equação diferencial ordinária (E D O), consiste em substituir cada uma das derivadas por sua respectiva aproximação numérica em série [63]. A discretização aqui utilizada foi implementada através do esquema de **diferenças centradas** de 4^a ordem. Iniciamos considerando as seguintes aproximações em 4^a ordem:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x) + \frac{h^4}{24}u''''(x) + \dots \quad (\text{A.1})$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(x) + \frac{h^4}{24}u''''(x) + \dots \quad (\text{A.2})$$

A partir das equações (A.1) e (A.2), e considerando termos até segunda ordem, obtêm-se $u''(x)$ somando as duas aproximações, ou seja,

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}. \quad (\text{A.3})$$

Multiplicando (A.2) por (-1) e somando com (A.1), obtemos

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}. \quad (\text{A.4})$$

A discretização de 4^a ordem consiste em somar (A.1) e (A.2), que resulta em

$$u''(x) = -\frac{h^2}{12}u''''(x) + \frac{1}{h^2}[u(x+h) - 2u(x) + u(x-2h)], \quad (\text{A.5})$$

e usando a aproximação (A.3) com o fato de que

$$u''''(x) = \frac{d^2}{dx^2}u''(x), \quad (\text{A.6})$$

temos que

$$u''''(x) = \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \right] = \left[\frac{u''(x+h) - 2u''(x) + u''(x-h)}{h^2} \right]. \quad (\text{A.7})$$

Assim, usando novamente a aproximação (A.3) para cada um dos três termos de (A.7). Obtêm-se

$$u''''(x) = [u(x+2h) - 4u(x+h) + 6u(x) - 4u(x-h) + u(x-2h)], \quad (\text{A.8})$$

que substituída em (A.5), resulta na seguinte aproximação para $u''(x)$:

$$u''(x) = -\frac{1}{12h^2}[u(x+2h) - 16u(x+h) + 30u(x) - 16u(x-h) + u(x-2h)]. \quad (\text{A.9})$$

Na obtenção do operador $u'(x)$ de 4^a ordem, segue-se um procedimento semelhante, subtraindo-se (A.1) de (A.2), para obter que

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}u''''(x). \quad (\text{A.10})$$

O próximo passo, consiste em reescrever o termo de maior derivada como

$$\frac{h^2}{6}u''''(x) = \frac{h^2}{6} \frac{d}{dx}u''(x) = \frac{h^2}{6} \frac{d}{dx} \left[\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \right] = \frac{1}{6}[u'(x+h) - 2u'(x) + u'(x-h)] \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{h^2}{6}u'''(x) = \frac{1}{6} \left\{ \left[\frac{u(x+2h) - u(x)}{2h} \right] - 2 \left[\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \right] + \left[\frac{u(x) - u(x-2h)}{2h} \right] \right\}$$

$$\frac{h^2}{6}u'''(x) = \frac{1}{12h^2} [u(x+2h) + 2u(x-h) - 2u(x+h) - u(x-2h)], \quad (\text{A.12})$$

novamente a expressão (A.3) foi usada para substituir $u''(x)$ e (A.4) para substituir $u'(x)$. Agora após substituir (A.12) em (A.10), obtêm-se $u'(x)$ como sendo

$$u'(x) = -\frac{1}{12h} [u(x+2h) + 8u(x-h) - 8u(x+h) - u(x-2h)]. \quad (\text{A.13})$$

A existência presença $u(x+2h)$ e $u(x-2h)$, exige que o *grid* tenha dois pontos adicionais em ambas as extremidades. Os primeiros pontos são obtidos a partir de uma condição inicial para a função $u(x)$, ou seja, $u(x-2h) = u(x) = \alpha$, com $\alpha \equiv \text{const.}$ (Condição de Dirichlet); enquanto que os dois últimos pontos podem ser obtidos a partir de uma condição sobre a derivada de $u(x)$, ou seja, $u'(x) = \beta$ (condição de Neumann) e, utilizando as expressões:

$$u(x+h) = u(x-h) + 2h\beta + \frac{h^3}{3}u'''(x) \quad (\text{A.14})$$

e

$$u(x+2h) = u(x-2h) - 12h\beta + 8u(x+h) - 8u(x-h) \quad (\text{A.15})$$

Apêndice B

Força Estática

B.1 Modelo ϕ^4

B.1.1 Força estática de interação kink-antikink no modelo ϕ^4 .

Nesta seção temos o objetivo de calcular a força de interação entre um antikink ϕ_1 e um kink ϕ_2 , estando o centro de ϕ_1 em $x = -a$ e o centro de ϕ_2 em $x = a$. Seguimos o procedimento da referencia [5], sendo que o mesmo resultado é obtido em outras referências, como por exemplo [45]. Esse procedimento, consiste em obter a força a partir da variação temporal do momento. O momento do campo é dado pela equação 2.11. Então, o momento em um intervalo semi-infinito, $(-\infty, b]$, é

$$P = - \int_{-\infty}^b T_{0i} dx = - \int_{-\infty}^b \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx.$$

Derivando em relação ao tempo, obtêm-se a força

$$F = \dot{P} = - \int_{-\infty}^b \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] dx$$

$$F = \dot{P} = - \int_{-\infty}^b \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] dx.$$

Usando a equação de movimento (2.6) para substituir $\ddot{\phi}(x)$, e também com as igualdades

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \text{ e } \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2. \text{ A expressão acima se torna}$$

$$F = - \int_{-\infty}^b \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 dx - \int_{-\infty}^b \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx + \int_{-\infty}^b \frac{dV}{dx} dx.$$

Agora, integrando a diferencial total no intervalo de integração

$$F = \left[-\frac{1}{2} \left(\dot{\phi}^2 + \phi'^2 \right) + V(\phi) \right]_{-\infty}^b. \quad (\text{B.1})$$

Observando a equação (2.10), podemos interpretar a força entre os kinks em dado intervalo, como sendo a diferença de pressão entre os pontos limites desse intervalo.

Vamos agora considerar a forma do perfil inicial, que é uma configuração estática dada por

$$\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x) + 1,$$

sendo

$$\phi_1(x) = -\tanh(x+a)$$

e

$$\phi_2(x) = \tanh(x-a),$$

assim a equação (B.1) se torna

$$F = \left[-\frac{1}{2} (\phi_1'^2 + \phi_2'^2)^2 + V(\phi_1 + \phi_2 + 1) \right]_{-\infty}^b.$$

O ponto b está entre o centro do antikink e o centro do kink, e também muito longe de ambos, ou seja, $-a \ll b \ll a$. Assim, durante todo o intervalo de integração, temos que a soma $\phi_2 + 1$ tende a zero. Então podemos linearizar os termos do campo ϕ_2 . Fazendo assim e também expandindo $V(\phi)$ em torno de ϕ_1 , obtemos da equação acima.

$$F = \left[-\frac{1}{2} \phi_1'^2 - \phi_1' \phi_2' + V(\phi_1) + (1 + \phi_2) \frac{dV}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_1} \right]_{-\infty}^b.$$

A derivada temporal se anulou, devido o perfil inicial ser estático. Agora podemos usar a expressão de Bolgomol'nyi (2.19) e perceber que o primeiro e terceiro termo da expressão

acima se anulam entre si. Resultando

$$F = [-\phi_1' \phi_2' + (1 + \phi_2) \phi_1''^b]_{-\infty} \quad (\text{B.2})$$

onde também usamos a equação de movimento estática para substituir o último termo.

Vamos analisar a contribuição dos limites de integração. Dado o perfil inicial, vemos que o limite inferior não contribui na expressão (B.2), pois a derivada primeira e segunda são nulas no infinito.. Em relação ao limite superior, considerando a seguinte série [49]

$$\tanh(x - a) = -1 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-2(1+k)(x+a)}, \quad (\text{B.3})$$

e lembrando que b está longe do kink e do antikink, observa-se que em b haverá somente o comportamento assintótico de ϕ_1 e ϕ_2 . Assim basta o primeiro termo da série (B.3) para representar a contribuição do limite superior, que é dada por

$$\phi_1(x) = -\tanh(x + a) \sim -1 + 2e^{-2(x+a)} \quad \phi_2(x) = \tanh(x - a) \sim -1 + 2e^{2(x-a)} \quad (\text{B.4})$$

Substituindo as expressões acima com suas respectivas derivadas na expressão (B.2), obtemos a força entre o antikink e kink

$$F = 32e^{-2R}, \quad (\text{B.5})$$

onde $R = 2a$ é a separação entre o kink e antikink.

B.1.2 Força de interação entre o antikink e a Fronteira

Tendo compreendido a seção B.1.1 estamos agora em condições de obter a força entre um soliton e a fronteira. Pelo mesmo procedimento descrito em [?], inicialmente temos um antikink localizado em $x = x_0 < 0$ e adicionamos uma espécie de kink “imagem” em $x = x_1 > 0$.

O perfil estático dessa configuração é:

$$\phi(x) = -\tanh(x - x_0) + \tanh(x - x_1) + 1. \quad (\text{B.6})$$

De acordo com a equação (B.5), a força para essa configuração é

$$F = 32e^{-2(x_1-x_0)} \quad (\text{B.7})$$

Pelas mesmas considerações feitas na seção anterior, vamos considerar o comportamento assintótico do perfil

$$\phi(x) \sim (-1 + 2e^{-2(x-x_0)}) + (-1 + 2e^{2(x-x_1)}) + 1, \quad (\text{B.8})$$

onde agora a forma assintótica acima vale se escolhermos $|x_1|, |x_0| \gg 1$.

O perfil (B.6) e sua forma assintótica devem satisfazer a condição de contorno de Neumann (5.3). Dessa forma, aplicando essa condição à (B.8), temos

$$H = -4e^{2x_0} + 4e^{-2x_1},$$

de onde vemos que

$$e^{-2x_1} = \frac{1}{4}H + e^{2x_0}. \quad (\text{B.9})$$

Substituindo a relação acima na equação (B.7), obtemos uma expressão para a força em termos do campo H e de x_0 .

$$F = 32 \left(\frac{1}{4}H + e^{2x_0} \right) e^{2x_0} \quad (\text{B.10})$$

Vemos que quando $H < 0$, a força é repulsiva longe da fronteira e, atrativa em sua proximidade.

B.2 Modelo ϕ^6

B.2.1 Força entre kinks.

Vamos agora calcular a força entre um kink e um antikink do modelo ϕ^6 . Novamente, eles devem está bem separados. O nosso ponto de partida é a já conhecida expressão para a força, dada pela equação (B.1), ou seja

$$F = \left[-\frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 + \phi'^2) + V(\phi) \right]_{-\infty}^b,$$

onde $V(\phi)$ é agora o potencial do modelo ϕ^6 . A configuração de perfil inicial é a seguinte: colocamos um antikink do tipo $\phi_{(1,0)}$ em uma posição $x = -a$ e colocamos um kink do tipo $\phi_{(0,1)}$ em uma posição $x = a$.

$$\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x), \quad (\text{B.11})$$

sendo

$$\phi_1(x) = \phi_{(1,0)}(x) = \sqrt{\frac{1}{2}[1 - \tanh(x+a)]} e \phi_2(x) = \phi_{(0,1)}(x) = \sqrt{\frac{1}{2}[1 + \tanh(x-a)]}.$$

Substituindo o perfil (B.11) na equação (B.1), obtemos

$$F = \left[-\frac{1}{2} (\phi_1'^2 + \phi_2'^2)^2 + V(\phi_1 + \phi_2) \right]_{-\infty}^b.$$

Novamente escolhemos o ponto b longe de ambos antikink $\phi_1(x)$ e kink $\phi_2(x)$, dessa forma agora percebemos que durante todo o intervalo de integração ocorre que $\phi_2(x) \rightarrow 0$, logo nesse intervalo esse campo pode ser bem descrito apenas em termos lineares. Novamente, expandimos $V(\phi)$ em torno de $\phi_1(x)$. Obtemos então a seguinte expressão

$$F = \left[-\frac{1}{2} \phi_1'^2 - \phi_1' \phi_2' + V(\phi_1) + \phi_2 \frac{dV}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_1} \right]_{-\infty}^b,$$

que em se tratando de solução da equação de primeira ordem se reduz a

$$F = [-\phi_1' \phi_2' + \phi_2 \phi_1'']_{-\infty}^b. \quad (\text{B.12})$$

Vamos analisar a contribuição dos limites de integração. Através do perfil inicial, vemos que o limite inferior não contribui na expressão (B.12), pois novamente a derivada primeira e segunda são nulas no infinito.. Em relação ao limite superior, temos que b o comportamento de $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ será assintótico. A forma assintótica no presente caso, se reduz a

$$\phi_1(x) \sim \sqrt{\frac{1 + (-1 + 2e^{-2(x+a)})}{2}} = e^{-(x+a)}, \quad (\text{B.13})$$

$$\phi_2(x) \sim \sqrt{\frac{1 + (-1 + 2e^{2(x-a)})}{2}} = e^{(x-a)}. \quad (\text{B.14})$$

Assim, após calcular as derivadas de (B.13) e (B.14) para substituir em (B.12), obtemos a expressão para a força entre dois kinks no potencial ϕ^6 .

$$F = 2e^{-R}. \quad (\text{B.15})$$

onde novamente, $R = 2a$ é a separação entre *kink* e *antikink*.

B.2.2 Força entre o kink e a Fronteira

Agora vamos repetir os passos que fizemos na seção B.1.2 para o caso de um kink do modelo ϕ^6 . Assim, inicialmente temos um antikink localizado em $x = x_0 < 0$ e adicionamos um kink “imagem” em $x = x_1 > 0$. O perfil estático dessa configuração é:

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{1}{2}[1 - \tanh(x - x_0)]} + \sqrt{\frac{1}{2}[1 + \tanh(x - x_1)]}. \quad (\text{B.16})$$

De acordo com a equação (B.15) a força para essa configuração fica.

$$F = 2e^{-(x_1 - x_0)}. \quad (\text{B.17})$$

No ponto no qual a força foi calculada, apenas o comportamento assintótico do perfil é relevante. O comportamento assintótico é dado por:

$$\phi(x) \sim e^{-(x-x_0)} + e^{(x-x_1)}. \quad (\text{B.18})$$

Esse perfil deve satisfazer a condição de Neumann

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=0} = H,$$

Então a partir da derivada do perfil em $x = 0$, obtemos

$$H = e^{-x_1} - e^{x_0}.$$

De onde temos a relação

$$e^{-x_1} = H + e^{x_0}. \quad (\text{B.19})$$

Substituindo agora essa relação na equação da força (B.17), obtemos a força entre o antikink e a fronteira em termo do campo H e da posição inicial do antikink

$$F = (H + e^{x_0}) e^{x_0}. \quad (\text{B.20})$$