Universidade Federal do Maranhão - UFMA
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia CCET
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGMAT
Dissertação de Mestrado

Soluções para um Problema Parabólico com uma Fonte Não Linear Localizada

João Batista Coelho Junior

São Luís - MA
2017

Soluções para um Problema Parabólico com uma Fonte Não Linear Localizada

João Batista Coelho Junior

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Profª. Drª. Renata de Farias Limeira Carvalho.

São Luís - MA
2017

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Coelho Junior, João Batista.
Soluções para um Problema Parabólico com uma Fonte Não Linear Localizada / João Batista Coelho Junior. - 2017.
45 f.

Orientador(a): Renata de Farias Limeira Carvalho.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2017.

1. Equação do Calor semilinear. 2. Existência e unicidade. 3. Função de Green. I. Carvalho, Renata de Farias Limeira. II. Título.

Soluções para um Problema Parabólico com uma Fonte Não Linear Localizada

João Batista Coelho Junior

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovado em:

_____ /_____ / __________.

Banca examinadora:

Profª. Drª. Renata de Farias Limeira Carvalho (Orientadora)
UFMA

Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo
UFMA

Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira
UFPI

A minha mãe, tia, irmã, namorada, amigos e professores pela paciência e incentivo.

"O livro da natureza foi escrito exclusivamente com figuras e símbolos matemáticos."

(Galileu Galilei)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por tudo.

À minha Mãe Janete Amorim, minha tia Maria Amorim e minha irmã Jarlene Coelho, pelo amor, incentivo e apoio incondicional, sem eles, certamente não conseguiria chegar até aqui. A minha namorada Suellen Santos pelo incentivo, apoio nos momentos delicados e pelo amor. Um obrigado não bastaria.

À minha orientadora professora Renata Carvalho, pela paciência, disponibilidade, confiança e conselhos. Além do suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções e incentivos.

Agradeço à todos os professores do PPGMAT, em especial aos professores Adecarlos Carvalho, Ivaldo Nunes, José Marão e Marcos Araújo que dividiram um pouco dos seus conhecimentos que foram fundamentais para o meu crescimento profissional e pessoal.

Aos amigos do PPGMAT, dos quais destaco: Alan Kardec, Caio Renan, Geilson Reis, Geovan Carlos, Francisco José (Dedé), Felipe Ferreira, Jadevilson e Jadevaldo Cruz, Leomar Veras, Marlon Cesar, Ronaldo Ferreira e Washington Menezes pelos momentos de descontração, incentivos e pelas conversas sobre Matemática.

Finalmente, agradeço a CAPES pelo auxílio financeiro que permitiu desenvolver este trabalho.

Resumo

Neste trabalho, dissertamos sobre o artigo “A Semilinear Heat Equation with a Localized Nonlinear Source and Non-continuos Initial Data” devido a Lucas Ferreira e Elder Villamizar-Roa. Neste artigo eles consideram o problema de Cauchy para a Equação do Calor semilinear com um termo não linear apresentando uma fonte não linear centrada em uma região fechada de um domínio espacial. Nestas condições, eles provam que este problema admite solução local e que esta solução depende continuamente dos dados iniciais e é positiva.

Palavras-chave: Equação do Calor semilinear, Função de Green, Existência e unicidade.

Abstract

In this paper, we discussed the article "The Semilinear Heat Equation with a Localized Nonlinear Source and Non-Continuous Initial Data" due to Lucas Ferreira and Elder Villamizar-Roa. In this paper they consider the Cauchy problem for the Semilinear Heat Equation with a nonlinear term presenting a nonlinear source centered on a closed region of a spatial domain. Under these conditions, they prove that this problem admits local solution and that this solution depends continuously on the initial data and is positive.

Keywords: Nonlinear heat equation; Green function, Existence and uniqueness.

Sumário

Notação

$\mathcal{X}_A$ função característica definida por $\mathcal{X}_A(x) = 1$, se $x \in A$ e $\mathcal{X}_A(x) = 0$, se $x \notin A$;

$\overline{E}$ o fecho do subconjunto E no espaço topológico X;

Ω domínio limitado do $\mathbb{R}^n$;

$U_T = (0, T] \times \Omega$;

$C_1^2(U_T) = \{u : U_T \to \mathbb{R}; u, D_x u, D_x^2 u, u_t \in C(U_T)\}$;

$\overline{\Omega}$ fecho de Ω em $\mathbb{R}^N$;

$\omega \subset\subset \Omega$ se $\overline{\omega} \subset \Omega$ e $\overline{\omega}$ compacto;

$\partial_t u = u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$;

$\partial_i u = u_{x_i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$;

$\Delta = \displaystyle\sum_{i=i}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$;

$C_c(\Omega) = C_c(\Omega, \mathbb{R})$ ou $C_c(\Omega, \mathbb{C})$;

$C_b(\Omega) = C_b(\Omega, \mathbb{R})$ ou $C_b(\Omega, \mathbb{C})$;

$C(\overline{\Omega})$ o espaço das funções contínuas $\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ (ou $\overline{\Omega} \to \mathbb{C}$). $C(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach munido com a norma L^∞;

$\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ o espaço de Fréchet de C^∞ das funções $\Omega \to \mathbb{R}$ (ou $\Omega \to \mathbb{C}$) com suporte compacto em Ω, equipado com a topologia da convergência uniforme com todas as derivadas com subconjuntos compactos em Ω;

$C_0(\Omega)$ o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $L^\infty(\Omega)$;

$\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço das distribuições em Ω, sendo o dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$;

Capítulo 1

Introdução

As Equações Diferenciais Parciais têm um papel relevante na ligação e interação com outras Ciências, desde sua origem em problemas ligados à Física e recentemente como ferramenta indispensável à Biologia. Em particular, as equações parabólicas ocorrem em importantes problemas da Teoria da Combustão, em Medicina e Biologia. Esta interação é amplamente estudada e podemos destacar os trabalhos de Bebernes et al., Childress et al. e Bellman.

O objetivo deste trabalho consiste em obter soluções locais para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = & \dfrac{\partial \mathcal{X}_B(x)}{\partial \nu} f(u(x,t)) \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,T] \\ u(x,0) = & u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

com B a bola centrada na origem de raio R tal que $\overline{B} \subsetneq \Omega$ e Ω um domínio limitado espacial complementado com a condição homogênea no bordo

$$\begin{cases} u(x,t) = & 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T], \quad \text{ou} \\ u(x,t) \to & 0 \quad \text{quando} \quad |x| \to \infty, 0 < t \leq T. \end{cases}$$

Pretendemos estudar a existência da solução local usando o argumento do ponto fixo de Banach, quando u_0 é dada. Nos baseamos no trabalho "A Semilinear Heat Equation with a Localized Nonlinear Source and Non-continuos Initial Data" desenvolvido por Lucas Ferreira e Elder Villamizar-Roa.

No capítulo 3 serão apresentados um estudo sobre alguns resultados clássicos de análise funcional, sobre integração vetorial, bem como suas definições e propriedades para integrabilidade. Ainda no capítulo 1, será apresentada as funções Gama e Beta de Euler que serão úteis nas demonstrações do teorema de existência de solução. Por fim, apresentamos o Teorema do ponto fixo de Banach que nos auxiliará na demonstração deste teorema.

No capítulo 4, abordaremos a equação do calor em $\mathbb{R}^n$ dando ênfase a sua notoriedade em problemas físicos. Construiremos a solução fundamental, indispensável para tratar de casos mais gerais. Faremos uma apresentação sobre o problema de valor inicial, para casos homogêneos e não homogêneos, construindo suas respectivas soluções. Complementamos esse capítulo com a definição e propriedades da função de Green bem como suas estimativas.

O capítulo 4 é destinado ao teorema de existência de solução local para o problema (1.1). Apresentamos também a demonstração da unicidade, dependência contínua em relações aos dados iniciais e a positividade dessa solução.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo apresentamos definições e noções básicas de Análise Funcional e de Análise não linear, bem como alguns teoremas e proposições que nos auxiliarão como pré-requisitos necessários para melhor compreensão dos capítulos subsequentes. Desse modo, não nos preocuparemos nas demonstrações de possíveis resultados utilizados preliminarmente, pois mencionaremos as referências bibliográficas onde poderão ser encontradas.

2.1 Resultados de Análise Funcional

Proposição 2.1.1 (Desigualdade de Young)**.** *Seja* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r} + 1$ *com* $1 \leq p, q, r, \leq \infty$*. Então*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

onde $f * g$ *é a convolução de* f *e* g*.*

Demonstração. Veja [6]. □

Proposição 2.1.2 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam* $p, q > 1$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *e* (X, M, μ) *um espaço de medida. Se* $f \in L^p(X, M, \mu)$ *e* $g \in L^q(X, M, \mu)$*, então* $f \cdot g \in L^1(X, M, \mu)$ *e*

$$||f \cdot g||_1 \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$$

,

Demonstração. Veja [5]. □

Teorema 2.1.1. *Suponha que* (X, M, μ) *e* (Y, N, ν) *são espaços de medida* σ*-finito e* $1 < q < \infty$*. Seja* K *uma função mensurável definida em* $X \times Y$ *tal que, para algum*

$C > 0$, temos $[K(x,\cdot)]_q \le C$ para $x \in X$ q.t.p e $[K(\cdot,y)]_q \le C$ para $y \in Y$ q.t.p. Se $1 \le p < \infty$ e $f \in L^p(\nu)$ a integral

$$Tf(x) = \int K(x,y)f(y)d\nu(y)$$

converge absolutamente para $x \in X$ q.t.p, e o operador T assim definido é do tipo fraco $(1,q)$ e tipo forte (p,r) para todo p,r tal que $1 < p < r < \infty$ e $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1} + 1$. Mais precisamente, exite uma constante B_p independente de K tal que

$$[Tf] \le B_1 C||f||_1, \quad ||Tf||_r \le B_p C||f||_p \quad (p > 1, r^{-1} = p^{-1} + q^{-1} - 1 > 0).$$

Demonstração. Veja [11]. □

2.2 Distribuições e Derivadas Fracas

Nesta seção, apresentamos uma breve descrição dos aspectos da teoria das distribuições que são relevantes para o nosso propósito. Daremos atenção especial à noção de derivada fraca de uma função integrável.

Definição 2.2.1. Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^n$. Uma sequência de funções $\{\phi_n\} \in C_0^\infty(\Omega)$ converge no sentido de $\mathcal{D}(\Omega)$ para a função $\phi \in C_0^\infty$ quando as seguintes condições são satisfeitas:

i) Quando existe $K \subset\subset \Omega$ tal que $\text{supp}(\phi_n - \phi) \subset K$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

ii) $\lim_{n\to\infty} D^\alpha \phi_n(x) = D^\alpha \phi(x)$ converge uniformemente em K para cada multi-índice α.

Existe uma topologia localmente convexa no espaço vetorial C_0^∞ em relação a qual um funcional linear T é contínuo se, e somente se, $T(\phi_n) \to T(\phi)$ em $\mathbb{R}$ sempre que $\phi_n \to \phi$ no sentido de $\mathcal{D}(\Omega)$. Este espaço vetorial topológico $\mathcal{D}(\Omega)$ é denominado *espaço das funções testes em* Ω e seus elementos são chamados de *funções testes*. Uma observação a ser feita sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ é que este espaço não é normado. Para mais detalhes, consulte [19].

Definição 2.2.2. O espaço dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ é dito espaço das distribuições ou espaço de Schwartz $\mathcal{D}'(\Omega)$. Em resumo, as operações de espaço vetorial e convergência de operadores em $\mathcal{D}'(\Omega)$ são definidas do seguinte modo: Se $S, T, T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $c \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned}(S+T)(\phi) &= S(\phi) + T(\phi), \quad && \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ (cT)(\phi) &= cT(\phi) && \phi \in \mathcal{D}(\Omega),\end{aligned}$$

$T_n \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se, e somente se, $T_n(\phi) \to T(\phi)$ em $\mathbb{R}$ para todo $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 2.2.3. Uma função u definida em quase toda parte em Ω é dita localmente integrável em Ω se $u \in L^1(A)$ para todo conjunto mensurável $A \subset\subset \Omega$. Neste caso, escrevemos $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Exemplo 2.2.1. Para cada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ existe uma distribuição $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ associada a u, definida por

$$T_u(\phi) \quad = \quad \int_\Omega u(x)\phi(x)dx, \quad \phi \in D(\Omega). \tag{2.1}$$

Podemos verificar que T_u, assim definido, é um funcional linear em $\mathcal{D}(\Omega)$. Para verificar que T_u é contínuo, consideremos $\phi_n \to \phi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então, exite $K \subset\subset \Omega$ tal que supp$(\phi_n - \phi) \subset K$ para $n = 1, 2, ...$, assim,

$$|T_u(\phi_n) - T_u(\phi)| \leq \sup_{x \in K} |\phi_n(x) - \phi(x)| \int_\Omega |u(x)|dx.$$

Quando $n \to \infty$ temos que $\sup\limits_{x \in K} |\phi_n(x) - \phi(x)| \to 0$ e assim, $\phi_n \to \phi$ uniformemente em K.

Lema 2.2.1 (de Du Bois Raymond)**.** *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se $u = 0$ quase sempre em Ω.*

Demonstração. Ver [17]. $\square$

Exemplo 2.2.2. Seja x_0 um ponto de Ω e definamos a função $\delta_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\delta_{x_0}(\phi) = \phi(x_0).$$

É fácil verificar que δ_{x_0} é uma distribuição, conhecida por *Distribuição de Dirac*. No entanto, a distribuição δ_{x_0} não é definida por (2.1) com $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. De fato, suponha que δ_{x_0} seja definida por (2.1) para alguma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então

$$\delta_{x_0}(\phi) = \int_\Omega u(x)\phi(x)dx = \phi(x_0) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ definida por

$$\varphi(x) = ||x - x_0||^2\phi(x)$$

temos,

$$\varphi(x_0) = \delta_{x_0}(\varphi) = \int_\Omega u(x)||x - x_0||^2\phi(x)dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Pelo lema de Du Bois Raymond temos que $u(x)||x - x_0||^2 = 0$ quase sempre em Ω, logo $u(x) = 0$ quase sempre em Ω. Assim, $\delta_{x_0}(\phi) = \phi(x_0) = 0$ para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, que é uma contradição.

Seja $u \in C^1(\Omega)$ e $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Uma vez que ϕ é identicamente nula fora de algum subconjunto compacto de Ω, usando integração por partes na variável x_j, obtemos

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u(x) \right) \phi(x) dx = - \int_\Omega u(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \phi(x) \right) dx.$$

Similarmente, se $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ então, usando integração por partes $|\alpha|$ vezes, temos

$$\int_\Omega \left(D^\alpha u(x) \right) \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) D^\alpha \phi(x) dx.$$

Isto motiva seguinte definição da derivada de uma distribuição:

Definição 2.2.4. Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e α um multi-índice. A derivada de ordem α de T é a aplicação linear $D^\alpha T$ definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ dada por

$$(D^\alpha T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi).$$

Proposição 2.2.1. *Se $D^\alpha \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ onde $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ então $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω.*

Demonstração. Claramente, $D^\alpha T$ é um funcional linear sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Mostraremos que $D^\alpha T$ é contínuo. Para isso, suponha que $\phi_n \to \phi$ em $D(\Omega)$. Então

$$\operatorname{supp}(D^\alpha(\phi_n - \phi)) \subset \operatorname{supp}(\phi_n - \phi) \subset K$$

para algum $K \subset\subset \Omega$. Além disso,

$$D^\beta[D^\alpha(\phi_n - \phi)] = D^{\beta+\alpha}(\phi_n - \phi)$$

converge para zero em K quando $n \to \infty$ para cada multi-índice β, assim, $D^\alpha \phi_n \to D^\alpha \phi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Como $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, segue que

$$D^\alpha T(\phi_n) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi_n) \to (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi) = D^\alpha T(\phi)$$

em $\mathbb{R}$. Portanto, $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. □

Mostramos assim que toda distribuição em $\mathcal{D}'(\Omega)$ possui derivadas de ordem arbitrárias em $\mathcal{D}'(\Omega)$ em vista da Definição 2.2.4. Além disso, a aplicação $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ é contínua. Assim, se $T_n \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, então

$$D^\alpha T_n(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T_n(D^\alpha \phi) \to (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi) = D^\alpha T(\phi).$$

Exemplo 2.2.3. Seja $\delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ a distribuição delta de Dirac definido no Exemplo 2.2.2, então $D^\alpha \delta_{x_0}$ é dado por

$$D^\alpha \delta_{x_0}(\phi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \phi(x_0).$$

Exemplo 2.2.4. Sejam $\Omega = \mathbb{R}$ e $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ a *função de Heaviside* definida por

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{se} \quad x < 0, \end{cases}$$

então a derivada $(T_H)'$ é δ_0 do Exemplo 2.2.2. De fato, para $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ com suporte contido no intervalo $[-a, a]$, então

$$(T_H)'(\phi) = -T_H(\phi') = -\int_0^a \phi'(x)dx = \phi(0) = \delta_0(\phi).$$

2.3 Integração Vetorial

Apresentaremos nesta seção conceitos e resultados da teoria de integração vetorial. Para isto, definiremos alguns tipos de funções e demonstraremos o Teorema de Bochner e suas consequências. Para tal consideremos um espaço de Banach X e um espaço de medida (I, Σ, μ) onde $I \subset \mathbb{R}$, μ é a medida de Lebesgue e para cada conjunto mensurável $A \in \Sigma$, a função característica de A é denotada por $\mathcal{X}_A$.

Definição 2.3.1. Uma função $\varphi : I \to X$ é uma *função simples mensurável* se existem conjuntos mensuráveis $A_1, ..., A_k \in \Sigma$ com $\mu(A_j) < \infty$ para $j = 1, \ldots, k$, tais que $A_i \cap A_j = \varnothing$ sempre que $i \neq j$, e vetores $b_1, \ldots, b_k \in X$ tais que

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{X}_{A_i} b_i.$$

Definimos a integral de uma função simples mensurável $\varphi : I \to X$ por:

$$\int_I \varphi dt = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) b_i.$$

Definição 2.3.2. Uma função $f : I \to X$ é *mensurável* se existe uma sequência $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ de funções simples mensuráveis tais que

$$\varphi_n \to f \ \mu\text{-quase sempre.}$$

A verificação de que uma função é mensurável pela definição não é tarefa muito fácil. O teorema abaixo remedia em parte esta dificuldade cuja demonstração encontra-se em [5].

Teorema 2.3.1 (Teorema da mensurabilidade de Pettis)**.** *As seguintes afirmações são equivalentes para uma função $f : I \to X$.*

i) f é mensurável;

ii) $\|f\| : I \to \mathbb{R}$ é mensurável.

Definição 2.3.3. Dizemos que a função mensurável $f : I \to X$ é *Bochner-integrável* se existir uma sequência de funções simples mensuráveis $\varphi_n : I \to X$, $n \in \mathbb{N}$, tais que $\varphi_n \to f$ μ-quase sempre e

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|\varphi_n(t) - f(t)\| \, dt = 0. \tag{2.2}$$

Notemos que

$$\int_I \|\varphi_n(t) - f(t)\| \, dt$$

faz sentido, pois a função

$$\|\varphi_n - f\| : I \to \mathbb{R}$$

é uma função não negativa e pelo Teorema de Pettis é mensurável.

Lema 2.3.1. *Seja $f : I \to X$ uma função Bochner-integrável. Então existe um vetor $i(f) \in X$ tal que para toda sequência $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ de funções simples mensuráveis que verifica (2.2), tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n(t) dt = i(f). \tag{2.3}$$

o limite (2.3) acima é tomado com respeito à norma de X.

Demonstração. Seja $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções simples mensuráveis que verifica

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|\varphi_n(t) - f(t)\| \, dt = 0. \tag{2.4}$$

Como,

$$\begin{aligned} \left\| \int_I \varphi_n(t)dt - \int_I \varphi_p(t)dt \right\| &\leq \int_I \|\varphi_n(t) - \varphi_p(t)\| \, dt \\ &\leq \int_I \|\varphi_n(t) - f(t)\| \, dt + \int_I \|\varphi_p(t) - f(t)\| \, dt, \end{aligned} \tag{2.5}$$

a sequência $\displaystyle\int_I \varphi_n(t)dt$ é de Cauchy. Existe, portanto, um vetor $i(f) \in X$ que verifica (2.3), como queríamos demonstrar. □

Note tais parcelas em (2.5) podem ser tomadas tão pequenas quanto se queira, uma vez que tal propriedade verifica-se para funções simples mensuráveis. Além disso, tal limite independe da sequência escolhida, ou seja, qualquer sequência de funções simples mensuráveis que verifica (2.2) terá o mesmo limite. De fato, seja $(\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ uma outra sequência de funções simples mensuráveis,

$$\begin{aligned}\left\|\int_I \psi_n(t)dt - i(f)\right\| &\leq \left\|\int_I \psi_n(t)dt - \int_I f(t)dt\right\| + \left\|\int_I \varphi_n(t)dt - \int_I f(t)dt\right\| + \\ &+ \left\|\int_I \varphi_n(t)dt - i(f)\right\| \\ &\leq \int_I \|\psi_n(t) - f(t)\|\, dt + \int_I \|\varphi_n(t) - f(t)\|\, dt + \\ &+ \left\|\int_I \varphi_n(t)dt - i(f)\right\|.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Portanto, a sequência $\int_I \psi_n(t)dt \to i(f)$, quando $n \to \infty$.

Definição 2.3.4. O elemento $i(f)$ construído no Lema 2.3.1 é chamado de integral de f em I,

$$i(f) = \int_I f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n(t)dt.$$

Se $I = (a, b)$ definimos:

$$\int_I f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Se f for uma função com valores reais, definimos:

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt, \text{se } a > b.$$

Para cada conjunto mensurável $A \in \Sigma$, definimos a *integral de Bochner da função f sobre A* por:

$$\int_A f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_I \mathcal{X}_A(t)\varphi_n(t)dt.$$

Teorema 2.3.2 (Bochner)**.** *Seja $f : I \to X$ uma função mensurável. Então f é integrável a Bochner se, e somente se, $\|f\| : I \to \mathbb{R}$ é integrável. Além disso,*

$$\left\|\int_I f(t)dt\right\| \leq \int_I \|f(t)\|\, dt.$$

Demonstração. Se f é integrável a Bochner, então consideremos a sequência de funções simples $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|\varphi_n(t) - f(t)\|\, dt = 0.$$

Devemos mostrar que $\int_I \|f(t)\|\, dt < \infty$.

Como $\|f(t)\| \leq \|\varphi_n(t)\| + \|\varphi_n(t) - f(t)\|$, dessa forma temos que $\|\varphi_n(t)\| : I \to \mathbb{R}$ é integrável, pois se $\varphi_n = \sum\limits_{i=1}^{m_n} \varphi_i \mathcal{X}_{B_i}$, então $\sum\limits_{i=1}^{m_n} \|\varphi_i\| \, \mu(B_i) < \infty$.

Além disso, $\|\varphi_n - f\| : I \to \mathbb{R}$ também é integrável, pois como $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_I \|\varphi_n(t) - f(t)\| \, dt = 0$ então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, $\int_I \|\varphi_n(t) - f(t)\| \, dt < \infty$. Portanto, $\|f(t)\|$ é integrável.

Reciprocamente, suponhamos f mensurável e que $\|f(t)\|$ é integrável. Seja uma sequência de funções simples $g_n : I \to \mathbb{R}$ tal que $g_n \to \|f\|$ em $L^1(I)$ e ainda $|g_n| \leq g$ para alguma $g \in L^1(I)$ ambas as condições valendo em quase toda parte. Seja $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções simples mensuráveis $\varphi_n : I \to X$ tal que $\varphi_n \to f$ quase sempre. Então considere a seguinte sequência de funções dada por

$$h_n = \frac{\varphi_n \, |g_n|}{\|\varphi_n\| + \frac{1}{n}},$$

para todo $t \in I$.

Observamos que h_n é uma função simples mensurável e integrável com $\|h_n\| \leq g$. De fato,

$$\begin{aligned} \|h_n\| &= \left\| \frac{\varphi_n \, |g_n|}{\|\varphi_n\| + \frac{1}{n}} \right\| \\ &= \frac{\|\varphi_n\|}{\|\varphi_n\| + \frac{1}{n}} \cdot |g_n| \leq g, \quad \text{quase sempre} \end{aligned}$$

e que $h_n \to f$ em X quase sempre. Seja $\alpha_n = \dfrac{|g_n|}{\|\varphi_n\| + 1/n}$, assim $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$. Consideremos,

$$\begin{aligned} \|h_n - f\| &= \|\alpha_n \varphi_n - f\| \\ &= \|\alpha_n \varphi_n - \alpha_n f + \alpha_n f - f\| \\ &\leq |\alpha_n| \cdot \|\varphi_n - f\| + |\alpha_n - 1| \cdot \|f\| \\ &\leq 2 \cdot \|\varphi_n - f\| + |\alpha_n - 1| \cdot \|f\|. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \|h_n(t) - f(t)\| = 0$.

Como $\|h_n - f\| \leq \| \, h_n\| + \|f\| \leq g + \|f\| \in L^1(I)$, então a função $\|h_n - f\| : I \to \mathbb{R}$ é mensurável e integrável.

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada em $\mathbb{R}$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|h_n(t) - f(t)\| \, dt = \int_I \lim_{n\to\infty} \|h_n(t) - f(t)\| \, dt = 0.$$

Portanto, f é integrável no sentido de Bochner. Finalmente,

$$\begin{aligned}\left\|\int_I f(t)dt\right\| &= \left\|\lim_{n\to\infty}\int_I h_n(t)dt\right\| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\|\int_I h_n(t)dt\right\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\int_I \|h_n(t)\|\,dt \\ &= \int_I \lim_{n\to\infty}\|h_n(t)\|\,dt \\ &= \int_I \left\|\lim_{n\to\infty} h_n(t)\right\| dt \\ &= \int_I \|f(t)\|\,dt.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left\|\int_I f(t)dt\right\| \leq \int_I \|f(t)\|\,dt.$$

□

O espaço $L^1(X)$ é o espaço das funções $f : I \to X$ Bochner - integrável.

Corolário 2.3.1 (Teorema da Convergência Dominada em $L^1(X)$)**.** *Seja* $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ *uma sequência de funções integráveis* $\varphi_n : I \to X$*, e sejam* $f : I \to X$ *mensurável e* $g \in L^1(I)$*. Se*

$$\begin{cases}\|\varphi_n(t)\| \leq g(t) \\ \lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t) = f(t)\end{cases} \quad \textit{para quase todo } t \in I \textit{ e } \forall n \in \mathbb{N}$$

então f *é integrável e*

$$\int_I f(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_I \varphi_n(t)dt.$$

Demonstração. Basta mostrar que $\|f\|$ é integrável. Por hipótese, sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t) = f(t)$, então $\lim\limits_{n\to\infty}\|\varphi_n(t)\| = \|f(t)\|$, como $\|\varphi_n(t)\| \leq g(t)$ isso implica que $\|f(t)\| \leq g(t) \in L^1(I)$. Portanto, $\|f\|$ é integrável e pelo Teorema de Bochner, f é integrável. Além disso,

$$\|\varphi_n(t) - f(t)\| \leq \|\varphi_n(t)\| + \|f(t)\| \leq 2g(t) \in L^1(I),$$

isto é, a função $\|\varphi_n - f\| : I \to \mathbb{R}$ é integrável. Assim, usando o Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\lim_{n\to\infty}\int_I \|\varphi_n(t) - f(t)\|\,dt = \int_I \lim_{n\to\infty}\|\varphi_n(t) - f(t)\|\,dt.$$

Portanto,

$$\int_I f(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_I \varphi_n(t)dt.$$

□

Corolário 2.3.2. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear limitado. Se $f : I \to X$ é uma função integrável, então a função $T \circ f : I \to Y$ é integrável e vale*

$$\int_I (T \circ f)(t)dt = T\left(\int_I f(t)dt\right).$$

Demonstração. Seja $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções simples integráveis tais que

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n(t) - f(t)\| = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_I \|\varphi_n(t) - f(t)\| = 0 \end{cases} \quad \text{quase toda parte.}$$

Aplicando o operador T em cada elemento da sequência obtemos uma nova sequência $(T\circ\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ que é uma sequência de funções simples e portanto integrável. Pela linearidade e continuidade de T, temos

$$\begin{aligned} \int_I (T \circ \varphi_n)(t)dt &= \int_I T(\varphi_n(t))dt \\ &= T\left(\int_I \varphi_n(t)dt\right) \end{aligned}$$

Portanto, $T \circ f : I \to Y$ é uma função mensurável. Como f é integrável, então $\|f\|$ é integrável. Sendo T limitada e $\|T(f(t))\| \leq \|T\| \cdot \|f(t)\| \in L^1(I)$, então $\|T(f(t))\|$ é integrável e pelo Teorema de Bochner, $T \circ f$ também é integrável. Além disso, usando o fato de que

$$\|T(\varphi_n(t)) - T(f(t))\| \leq \|T\| \cdot \|\varphi_n(t) - f(t)\|$$

segue

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_I \|T(\varphi_n(t)) - T(f(t))\|\, dt &\leq \lim_{n\to\infty} \int_I \|T\| \cdot \|\varphi_n(t) - f(t)\|\, dt \\ &= \|T\| \cdot \lim_{n\to\infty} \int_I \|\varphi_n(t) - f(t)\|\, dt = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

e pela Definição 2.3.4., temos

$$\begin{aligned} \int_I (T \circ f)(t)dt &= \lim_{n\to\infty} \int_I (T \circ \varphi_n)(t)dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_I T(\varphi_n(t))dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(T \int_I \varphi_n(t)\right) dt \\ &= T\left(\lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n(t)dt\right) \\ &= T\left(\int_I f(t)dt\right). \end{aligned}$$

□

2.4 A Função Gama e Beta

Nesta seção, apresentaremos algumas definições e propriedades básicas das funções Gama e Beta de Euler.

Definição 2.4.1. A função Gama de Euler, denotada por $\Gamma(z)$ é definida pela integral de Euler de segundo tipo

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\Re(z) > 0) \tag{2.8}$$

onde $t^{z-1} = e^{(z-1)\log(t)}$. Esta integral é convergente $\forall z \in \mathbb{C}, (\Re(z) > 0)$.

Usando integração por partes em (2.8) obtemos a seguinte equação reduzida para a função gama de Euler

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\Re(z) > 0). \tag{2.9}$$

A partir de (2.9) a função gama de Euler pode ser estendida para o semi-plano $\Re(z) \leq 0$ por

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n} \quad (\Re(z) > -n; \quad n \in \mathbb{N}; z \notin \mathbb{Z}_0^- := \{0, -1, -2, \dots\}), \tag{2.10}$$

onde $(z)_n$ é o *símbolo de Pochhammer*, definido para todo complexo $z \in \mathbb{C}$ e não negativo inteiro $n \in \mathbb{N}_0$ por

$$(z)_0 = 1 \quad \text{e} \quad (z)_n = z(z+1)\cdots(z+n-1), \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

Combinando as expressões (2.9) e (2.11), temos

$$\Gamma(n+1) = (1)_n = n! \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.12}$$

com $0! = 1$. Segue da equação (2.10) que a função gama é analítica em todo plano complexo, exceto nos pontos $z = 0, -1, -2, \cdots$, onde $\Gamma(z)$ tem pólos simples e é representado pela fórmula assintótica

$$\Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{z+k}[1 + O(z+k)] \quad (z \to -k; \quad k \in \mathbb{N}_0).$$

Definição 2.4.2. A *função beta* é definida como a integral de Euler de primeiro tipo dada por

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt \quad (\Re(z) > 0, \Re(w) > 0). \tag{2.13}$$

É fácil provar que a função beta é simétrica, isto é, $B(z,w) = B(w,z)$. A conexão entre a função beta e a função gama de Euler é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 2.4.1. *Sejam $z, w \in \mathbb{C}$ tais que $\Re(z) > 0$ e $\Re(w) > 0$ então*

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \tag{2.14}$$

Demonstração. Da expressão (2.8), temos

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \int_0^\infty s^{w-1}e^{-s}ds = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{z-1}s^{w-1}e^{-(t+s)}dtds.$$

Aplicando a mudança de variáveis $t = xy$ e $s = x(1-y)$ na integral dupla e observando que $t+s = x$ e que $0 < t < \infty$ e $0 < s < \infty$ então $0 < x < \infty$ e $0 < y < 1$. O Jacobiano dessa transformação é dado por

$$\frac{\partial(t,s)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ 1-y & -x \end{vmatrix} = -xy - x + xy = -x.$$

Uma vez que $x > 0$, então $dtds = \left|\frac{\partial(t,s)}{\partial(x,y)}\right| dxdy = xdxdy$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^1 \int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}y^{z-1}x^{w-1}(1-y)^{v-1}dxdy \\ &= \int_0^\infty e^{-x}x^{z+w-1}dx \int_0^1 y^{z-1}(1-y)^{w-1}dy = \Gamma(z+w)B(z,w) \end{aligned}$$

e portanto,

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

□

Se fizermos a seguinte mudança de variável $t = cos^2\phi$ na expressão (2.13), obtemos

$$B(z,w) = \int_0^{\pi/2} (\cos\phi)^{2z-1}(\operatorname{sen}\phi)^{2w-1}d\phi, \quad (\Re(z) > 0, \Re(w) > 0). \tag{2.15}$$

Exemplo 2.4.1. Seja $z = w = \frac{1}{2}$, por (2.14), obtemos que

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Por outro lado, usando a expressão (2.15), temos

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\pi/2} d\phi = 2\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Portanto,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Exemplo 2.4.2. Sejam $\delta_1, \delta_2 > -1$ então a integral $\int_0^t (t-\tau)^{\delta_1}\tau^{\delta_2} d\tau$ pode ser calculada através da função beta. De fato, se considerarmos a seguinte mudança de variável $\tau = ts$, temos que $d\tau = tds$ e que $\tau = 0$ e $\tau = t$ implicam, respectivamente, que $s = 0$ e $s = 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-\tau)^{\delta_1}\tau^{\delta_2} d\tau &= \int_0^1 (t-ts)^{\delta_1}(ts)^{\delta_2} tds \\ &= t^{1+\delta_1+\delta_2}\int_0^1 s^{\delta_2}(1-s)^{\delta_1} ds \\ &= t^{1+\delta_1+\delta_2} B(\delta_2+1, \delta_1+1). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Portanto,

$$\int_0^t (t-\tau)^{\delta_1}\tau^{\delta_2} d\tau = Ct^{1+\delta_1+\delta_2},$$

onde $C = B(\delta_2+1, \delta_1+1)$.

2.5 Teorema do ponto fixo de Banach

Os teoremas de ponto fixo constituem uma ferramenta muito útil da Análise Funcional garantindo existência e unicidade de soluções para equações diferenciais, além de outras aplicações.

Definição 2.5.1. Sejam M_1 e M_2 espaços métricos. Uma aplicação $f : M_1 \to M_2$ é uma contração, se existir uma constante $k < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \text{ para todo } x, y \in M_1.$$

Teorema 2.5.1 (Teorema do ponto fixo de Banach)**.** *Sejam M um espaço métrico completo e $f : M \to M$ uma contração. Então existe um único ponto $x_0 \in M$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

Demonstração. Seja $k < 1$ a constante da contração f. Consideremos o número não negativo

$$i = inf\left\{d(f(x), x) : x \in M\right\}.$$

Inicialmente verificamos que $i = 0$. De fato, caso contrário teríamos $k^{-1}i > i$, e então existiria $x \in M$ tal que $d(f(x), x) < k^{-1}i$. Teríamos assim

$$d(f(f(x)), f(x)) \leq kd(f(x), x) < i$$

que é incompatível com o fato de i ser o ínfimo. Sabendo que $inf\left\{d(f(x), x) : x \in M\right\} = 0$, podemos tomar uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M tal que $d(f(x_n), x_n) \to 0$. Pela desigualdade triangular, podemos estimar

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(f(x_n), x_n)) + d(f(x_m), x_m)) + d(f(x_n), f(x_m)) \\ &\leq d(f(x_n), x_n)) + d(f(x_m), x_m)) + kd(x_n, x_m) \end{aligned}$$

para todos $n, m \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{1}{1-k} [d(f(x_n), x_n) + d(f(x_m), x_m)] \to 0,$$

quando $n, m \to \infty$. Isso prova que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e, como M é completo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um certo $x_0 \in M$. Da continuidade de f temos $f(x_n) \to f(x_0)$, e da continuidade da métrica segue que

$$d(f(x_0), x_0) = \lim_{n\to\infty} d(f(x_n), x_n) = 0,$$

provando que x_0 é um ponto fixo para f. A unicidade segue da seguinte observação: se x_0 e x_1 são pontos fixos, então

$$d(x_0, x_1) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq kd(x_0, x_1).$$

$\square$

Se definimos a seguinte sequência recursivamente como sendo $x_1 = f(x_0)$ e $x_{n+1} = f(x_n)$ onde f é uma função nas condições das hipóteses do Teorema do Ponto, nessas condições pode ser provado (ver [2], Teorema 1.1) que $x_0 = f(x_0)$ e portanto, o ponto fixo é atrator, isto é, x_0 é limite de uma sequência de iteradas.

Capítulo 3

A Equação do Calor

O objetivo deste capítulo é apresentar a Equação do Calor homogênea e não homogênea bem como suas soluções no sentido mais clássico, aqui temos como referência [9]. Falaremos também sobre a função de Green e suas estimativas que serão importantes no desenvolvimento da demonstração do resultado central deste trabalho.

3.1 A equação do calor $\mathbb{R}^n$

Chamaremos de Equação do calor homogênea e não homogênea, respectivamente, as seguintes equações:

$$u_t - \Delta u = 0 \tag{3.1}$$

e

$$u_t - \Delta u = f \tag{3.2}$$

sujeitas às devidas condições iniciais e de contorno. Aqui $t > 0$ e $x \in \Omega$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. A incógnita desconhecida é $u : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $u = u(x, t)$, e o Laplaciano Δ é tomado no que diz respeito às variáveis espaciais $x = (x_1, ..., x_n)$: $\Delta u = \Delta_x u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$. Em (3.2) a função $f : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é dada. Por conseguinte, o nosso desenvolvimento em grande parte é paralelo à teoria correspondente para a equação de Laplace.

Interpretação Física.

A equação do calor, também conhecida como a *equação de difusão*, em aplicações típicas descreve a evolução no tempo da densidade u tais como alguma quantidade de calor, a concentração química, etc. Se $V \subset \Omega$ é qualquer sub-região lisa, a taxa de variação da quantidade total V é igual ao negativo do fluxo líquido através de ∂V:

$$\frac{d}{dt}\int_V u dx = -\int_{\partial V} F \cdot \nu dS,$$

F sendo a densidade de fluxo. Assim,

$$u_t = -\text{div}F, \tag{3.3}$$

pois V é arbitrário. Em muitas situações, F é proporcional ao gradiente de u, mas com pontos em sentido contrário (uma vez que o fluxo sai a partir de regiões de maior concentração para de mais baixa):

$$F = -aDu \ (a > 0). \tag{3.4}$$

Substituindo (3.4) em (3.3), obtemos a seguinte equação diferencial parcial

$$u_t = a\text{div}(Du) = a\Delta u,$$

para a = 1 temos a equação de calor (3.1). A equação do calor aparece frequentemente, por exemplo, no estudo do movimento Browniano.

3.2 Solução Fundamental

3.2.1 Derivação da Solução Fundamental

Observa-se que a equação do calor envolve uma derivada em relação à variável tempo t, mais duas derivadas com relação às variáveis espaciais x_i $(i = 1, ..., n)$. Consequentemente, vemos que, se u resolve (3.1), então o mesmo acontece com $u(\lambda^2 t, \lambda x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Este *scaling* indica que o raio $\frac{r^2}{t}$ $(r = \|x\|)$ é importante para a equação do calor e sugere a procura de uma solução de (3.1) que tem a forma $u(x,t) = v(\frac{r^2}{t}) = v(\frac{\|x\|^2}{t})$ $(t > 0, x \in \mathbb{R}^n)$, para alguma função v ainda indeterminada.

Embora essa abordagem leve ao que nós queremos, é mais rápido procurar uma solução u tendo a estrutura especial

$$u(t,x) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right), \tag{3.5}$$

sendo $t > 0, x \in \mathbb{R}^n$, e as constantes α, β, bem como a função $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a serem determinadas. Chegamos a (3.5) se olharmos para uma solução u da equação do calor invariante pelo *scaling de dilatação*

$$u(x,t) \mapsto \lambda^\alpha u(\lambda t, \lambda^\beta x).$$

Isto é, pedimos que

$$v(t,x) = \lambda^\alpha u(\lambda t, \lambda^\beta x)$$

para todo $\lambda > 0$, $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Escreva $\lambda = t^{-1}$ derivamos (3.5) e definamos $v(y) := u(1, y)$. Vamos inserir (3.5) em (3.1), e posteriormente, calculamos

$$\alpha t^{-(\alpha+1)}v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)}y \cdot Dv(y) + t^{-(\alpha+2\beta)}\Delta v(y) = 0 \tag{3.6}$$

para $y := t^{-\beta}x$. Para transformar (3.6) em uma expressão envolvendo apenas a variável y, tomamos $\beta = \dfrac{1}{2}$. Em seguida, os termos com t são idênticos, e assim (3.6) se reduz a

$$\alpha v + \frac{1}{2}y \cdot Dv + \Delta v = 0. \tag{3.7}$$

Simplificaremos ainda mais v sabendo que ela é radial, isto é, $v(y) = w(|y|)$ para alguma $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Então (3.7) se torna

$$\alpha w + \frac{1}{2}rw' + w'' + \frac{n-1}{r}w' = 0, \tag{3.8}$$

para $r = |y|$, $' = \dfrac{d}{dr}$. Agora, se nós ajustamos $\alpha = \dfrac{n}{2}$, isso simplifica (3.8) e teremos

$$\left(r^{n-1}w'\right)' + \frac{1}{2}\left(r^n w\right)' = 0.$$

Assim

$$r^{n-1}w' + \frac{1}{2}r^n w = a.$$

para alguma constante a. Assumindo $\lim\limits_{r\to\infty} w,\ w' = 0$, concluímos $a = 0$; de onde

$$w' = -\frac{1}{2}rw,$$

e para alguma constante b, temos

$$w = be^{-\frac{r^2}{4}}. \tag{3.9}$$

Combinando (3.5), (3.9) e as nossas escolhas para α, β, concluímos que $\dfrac{b}{t^{n/2}}e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$ resolve a equação de calor (3.1).

Este cálculo motiva o seguinte

Definição 3.2.1. A função

$$\Phi(x,t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n, t < 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

é chamada de solução fundamental da equação de calor.

Note-se que Φ é singular no ponto $(0,0)$. Nós, às vezes, escrevemos $\Phi(x,t) = \Phi(\|x\|, t)$ para enfatizar que a solução fundamental é radial na variável x. A escolha da constante de normalização $(4\pi)^{-n/2}$ é determinada pelo seguinte

Lema 3.2.1 (Integral da Solução fundamental)**.** *Para cada tempo $t > 0$, temos*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)dx = 1.$$

Demonstração. Calculemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} dx \\
&= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|z\|^2} dz \\
&= \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_i^2} dz_i \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

3.2.2 O Problema de Valor Inicial

Agora usaremos Φ para obter uma solução para o problema de valor inicial (ou de Cauchy)

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases} \tag{3.11}$$

Notemos a que função $(x,t) \mapsto \Phi(x,t)$ resolve a equação do calor longe da indeterminação $(0,0)$ e, portanto, o mesmo acontece com $(x,t) \mapsto \Phi(x-y,t)$ para cada $y \in \mathbb{R}^n$ fixo. Por conseguinte, a função

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)u_0(y)dy \\
&= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}} u_0(y)dy \qquad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

deve também ser uma solução para equação do calor (3.11).

Teorema 3.2.1 (Solução para o Problema de Valor Inicial)**.** *Assuma que $u_0 \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, e defina u por (3.12). Então*

i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$;

ii) $u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$;

iii) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,t)\to(x^0,0) \\ t>0, x\in\mathbb{R}^n}} u(x,t) = u_0(x^0)$ *para cada ponto* $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. *i*) Uma vez que a função

$$\frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \tag{3.13}$$

é infinitamente diferenciável, com derivadas uniformemente limitadas em todas as ordens em $\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty)$ para cada $\delta > 0$, vemos que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$.
ii) Observamos que

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^n} [(\Phi_t - \Delta_x \Phi)(x-y,t)]\, u_0(y) dy \\ &= 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

uma vez que Φ já resolve a equação do calor.
iii) Fixe $x^0 \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$. Escolhamos $\delta > 0$ tal que

$$\left| u_0(y) - u_0(x^0) \right| < \varepsilon \quad \text{se} \quad \left\| y - x^0 \right\| < \delta, \;\; y \in \mathbb{R}^n. \tag{3.14}$$

Então se $\|x - x^0\| < \dfrac{\delta}{2}$, temos de acordo com o Lema 3.2.1

$$\begin{aligned} \left| u(x,t) - u_0(x^0) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) \left[u_0(y) - u_0(x^0) \right] dy \right| \\ &\leq \int_{B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t) \left| u_0(y) - u_0(x^0) \right| dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t) \left| u_0(y) - u_0(x^0) \right| dy \\ &:= I + J. \end{aligned}$$

Agora

$$I \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) dy = \varepsilon,$$

devido a (3.14) e ao Lema 3.2.1. Além disso, se $\|x - x^0\| \leq \dfrac{\delta}{2}$ e $\|y - x^0\| \geq \delta$, então

$$\left\| y - x^0 \right\| \leq \|y - x\| + \frac{\delta}{2} \leq \|y - x\| + \frac{1}{2} \left\| y - x^0 \right\|.$$

Assim, $\|y - x\| \geq \dfrac{1}{2} \left\| y - x^0 \right\|$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} J &\leq 2 \left\| u_0 \right\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t) dy \\ &\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0,\delta)} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}} dy \\ &\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0,\delta)} e^{-\frac{\left\| y - x^0 \right\|^2}{16t}} dy \\ &= \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1} dr \to 0 \quad \text{quando } t \to 0^+. \end{aligned}$$

Portanto, se $\|x - x^0\| < \dfrac{\delta}{2}$ e $t > 0$ é suficientemente pequeno, $|u(x,t) - u_0(x^0)| < 2\varepsilon$. $\square$

Observação 3.2.1. *i*) Em vista do Teorema 3.2.1 podemos escrever

$$\begin{cases} \Phi_t - \Delta\Phi = & 0, \text{em } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ \Phi = & \delta_0, \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{cases} \tag{3.15}$$

onde δ_0 denota a medida de Dirac no $\mathbb{R}^n$ dando unidade de massa para o ponto 0.
ii) Observe que, se u_0 é limitada, contínua, $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$, então

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}} u_0(y)dy \tag{3.16}$$

é, de fato, positiva para todos os pontos $x \in \mathbb{R}^n$ e o tempo $t > 0$. Interpretamos esta observação dizendo que a equação do calor tem uma pertubação quando a força de velocidade propaga-se para o infinito. Se a temperatura inicial é não negativa e é em algum lugar positivo, a temperatura em qualquer momento posterior (não importa quão pequena) é positiva em toda parte.

3.2.3 O Problema Não Homogêneo

Agora vamos voltar nossa atenção para o problema de valor inicial da equação do calor não homogênea

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u_0(x) = 0, & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{cases} \tag{3.17}$$

Como podemos produzir uma fórmula para a solução? Se lembrarmos a motivação que leva até (3.12), notamos que a função $(x,t) \mapsto \Phi(x-y, t-s)$ é ainda uma solução da equação do calor (para um dado $y \in \mathbb{R}^n, 0 < s < t$).

Agora para s fixo, a função

$$u = u(x,t;s) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(x-y, t-s) f(y,s)dy \tag{3.18}$$

resolve

$$\begin{cases} u_t(\cdot,s) - \Delta u(\cdot,s) = & 0, \text{em } \mathbb{R}^n \times (s,\infty) \\ u(\cdot,s) = & f(\cdot,s), \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t=s\}, \end{cases} \tag{3.19}$$

que é apenas um problema de valor inicial da forma (3.11), com o tempo de partida $t = 0$ substituído por $t = s$, e u_0 substituída por $f(\cdot, s)$. Assim $u(\cdot, s)$ não é, certamente, uma solução de (3.17).

No entanto *Princípio Duhamel* consulte [9], afirma que podemos construir uma solução de (3.17), por meio da integração com respeito a s dentre as soluções teremos solução de (3.19). A ideia é a de considerar

$$u(x,t) = \int_0^t u(x,t;s)ds \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0).$$

Reescrevendo, temos

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)f(y,s)dyds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4(t-s)}} f(y,s)dyds \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t>0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Para confirmar que a fórmula (3.20) funciona, vamos por simplicidade assumir que $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ e f com suporte compacto.

Teorema 3.2.2 (Solução para o Problema Não homogêneo)**.** *Defina u por (3.20). Então*

i) $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$*;*

ii) $u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \qquad (x \in \mathbb{R}^n, t>0)$*;*

iii) $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x^0,0)\\ x\in\mathbb{R}^n, t>0}} u(x,t) = 0$ *para cada ponto* $x^0 \in \mathbb{R}^n$*.*

Demonstração. $i)$ Desde que Φ tem uma singularidade em $(0,0)$, não podemos justificar diretamente por meio de derivação sob o sinal de integração. Em vez disso avançaremos um pouco como na prova do Teorema 2.1.3. Em primeiro lugar, mudaremos as variáveis, e escrevemos

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y), sf(x-y,t-s)dyds \tag{3.21}$$

Como $f \in C_1^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ e tem suporte compacto e $\Phi = \Phi(y,s)$ é suave perto de $s = t > 0$, calculemos

$$u_t(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) f_t(x-y,t-s)dyds + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t)f(x-y,0)dy$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} f(x-y.t-s)dyds \quad (i,j = 1,...,n). \tag{3.22}$$

Assim u_t, $D_x^2 u$ e, da mesma forma u, $D_x u$ pertencem a $C(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.

$ii)$ Calculemos

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) f(x-y,t-s)\right] dyds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t)f(x-y,0)dy \\ &= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_y\right) f(x-y,t-s)\right] dyds \\ &\quad + \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_y\right) f(x-y,t-s)\right] dyds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t)f(x-y,0)dy \\ &:= I_\varepsilon + J_\varepsilon + K. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Agora

$$|J_\varepsilon| \le \left(\|f_t\|_{L^\infty} + \left\|D^2 f\right\|_{L^\infty}\right) \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s)dyds,$$

pelo Lema 3.2.1. Integrando por partes, também encontramos

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_y\right) \Phi(y,s)\right] f(x-y,t-s)dyds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon)dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t) f(x-y,0)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon)dy - K, \end{aligned} \tag{3.24}$$

uma vez que Φ resolve a equação do calor. Combinando (3.23)-(3.24), verificamos

$$\begin{aligned} u(x,t) - \Delta u(x,t) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon)dy \\ &= f(x,t) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \end{aligned}$$

o limite quando $\varepsilon \to 0$ é calculado da mesma forma que no Teorema 3.2.1.

iii) Finalmente notemos que $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le t\,\|f\|_{L^\infty} \to 0$.

Observação 3.2.2. Podemos combinar os Teoremas 3.2.1 e 3.2.2 para descobrir que

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) u_0(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) f(y,s)dyds$$

é, de acordo com as hipóteses sobre u_0 e f como descrito acima, uma solução de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = & f, \text{em } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = & u_0, \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{cases}$$

□

3.3 A função de Green

A função de Green é uma ferramenta muito útil na resolução de Equações Diferenciais Parciais. Nesta seção, apresentaremos definições e propriedades que serão úteis no decorrer do texto.

Consideremos a equação calor, com as condições iniciais e no bordo

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \\ u(x,0) &= f(x) \quad \text{para } x \in \Omega \\ u(x,t) &= 0 \qquad \text{para } (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]. \end{aligned} \tag{3.25}$$

A função de Green associada a esse problema é obtida como solução do seguinte problema

$$\begin{aligned} G_t(x,t;\xi,\tau) - \Delta G(x,t;\xi,\tau) &= \delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \quad \text{para} \quad x,\xi \in \Omega, t > \tau \in \mathbb{R}, \\ G(x,t;\xi,\tau) &= 0 \quad \text{para} \quad x,\xi \in \Omega, t < \tau \in \mathbb{R}, \\ G(x,t;\xi,\tau) &= 0 \quad \text{para} \quad x \in \partial\Omega, \xi \in \Omega, t,\tau \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

No caso em que $\Omega = \mathbb{R}^n$ a última condição de bordo é substituída pela seguinte condição:

$$G(x,t;\xi,\tau) \to 0 \quad \text{quando} \quad ||x|| \to \infty \quad \text{para} \quad \xi \in \Omega, \quad \text{e} \quad t,\tau \in \mathbb{R}.$$

Se $\Omega = \mathbb{R}^n$, a função de Green $G(x,t;\xi,\tau)$ é dada por

$$G(x,t;\xi,\tau) = \begin{cases} \dfrac{(t-\tau)^{-n/2}}{2^n \pi^{n/2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}, & t > \tau \\ 0, & t < \tau. \end{cases} \tag{3.26}$$

Por outro lado, se Ω é um domínio limitado, a função de Green $G(x,t;\xi,\tau)$ pode ser expressa através de uma expansão de autofunções, para vermos isto, consideremos o seguinte problema de autovalores

$$\Delta\phi + \lambda\phi = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \quad \phi = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \tag{3.27}$$

É bem sabido que existe uma sequência positiva de autovalores $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_i \le \cdots$ para (3.27) com $\lambda_i \to \infty$ com $i \to \infty$ cujo correspondente conjunto de autofunções reais $\{\phi\}_{i=1}^{\infty}$ é ortogonal e completo. Então a expansão da função em autofunções (ver [20] pg. 213-214) é dada por

$$G(x,t;\xi,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x)\phi_i(\xi)e^{-\lambda_i(t-\tau)},$$

e satisfaz a seguinte estimativa,

$$G(x,t;\xi,\tau) \le \frac{(t-\tau)^{-n/2}}{2^n \pi^{n/2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}, \quad \forall t > \tau, \quad \text{e} \quad x,\xi \in \Omega.$$

No caso em que $\Omega = \mathbb{R}^n$ ou Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$ a função de Green $G(x,t;\xi,\tau)$ definida e contínua para $(x,t;\xi,\tau) \in \overline{\Omega} \times \Omega \times \{0 < \tau < T\}, t > \tau$, é única, positiva e para qualquer função f contínua em Ω com suporte compacto, a função

$$u(x,t) = \int_\Omega G(x,t;\xi,0)f(\xi)d\xi$$

é uma solução para o problema (3.25) em $\Omega \times [0,T]$.

3.4 Estimativas para a função de Green

Nesta seção, provaremos três lemas que serão importantes no desenvolvimento da demonstração do Teorema central deste trabalho. Começamos provando estimativas para as L^p-normas da função de Green associada a Equação do Calor num domínio limitado Ω do $\mathbb{R}^n$ com a condição homogênea no bordo.

Seja $B \subsetneq \Omega$ a bola centrada na origem de raio R.

Lema 3.4.1. *Seja $1 \leq p < \infty$. Então existem constantes C_1 e C_2 tais que*

$$\sup_{x\in\Omega} ||G(x,t;\xi,\tau)||_{L^p(\partial B, d\sigma(\xi))} \leq C_1(t-\tau)^{\frac{n-1}{2p}-\frac{n}{2}}, \tag{3.28}$$

$$\sup_{\xi\in\partial B} ||G(x,t;\xi,\tau)||_{L^p(\Omega, dx))} \leq C_2(t-\tau)^{\frac{n}{2p}-\frac{n}{2}}, \tag{3.29}$$

para todo $0 \leq \tau < t$.

Demonstração. Tomemos $\xi = zR$ onde $z \in S^{n-1}$, $\xi \in \partial B$ e R é o raio da bola aberta B. Então $d\sigma(\xi) = R^{n-1} d\sigma(z)$. Além disso, sabemos que

$$G(x,t;\xi,\tau) \leq \frac{(t-\tau)^{-n/2}}{2^n \pi^{n/2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}.$$

Então

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\Omega} ||G(x,t;\xi,\tau)||_{L^p(\partial B, d\sigma(\xi))} &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\left| \frac{(t-\tau)^{-n/2}}{2^n\pi^{n/2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}} \right|\right|_{L^p(\partial B, d\sigma(\xi))} \qquad (3.30)\\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(\int_{\partial B} \left(\frac{(t-\tau)^{-n/2}}{2^n\pi^{n/2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}\right)^p d\sigma(\xi) \right)^{1/p}\\
&= \frac{(t-\tau)^{-n/2}}{2^n\pi^{n/2}} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(\int_{\partial B} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}p} d\sigma(\xi) \right)^{1/p}\\
&= \frac{(t-\tau)^{-n/2}}{2^n\pi^{n/2}} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(\int_{S^{n-1}} e^{-\frac{|x-Rz|^2}{4(t-\tau)}p} R^{n-1} d\sigma(z) \right)^{1/p}\\
&= \frac{(t-\tau)^{-n/2}}{2^n\pi^{n/2}} R^{\frac{n-1}{p}} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(\int_{S^{n-1}} e^{-\frac{|x-Rz|^2}{4(t-\tau)}p} d\sigma(z) \right)^{1/p} \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Notemos que $\displaystyle\int_{S^{n-1}} e^{-\frac{|x-Rz|^2}{4(t-\tau)}p} d\sigma(z)$ é invariante por rotação em x pois a norma é preservada por rotação. Então, podemos escolher uma direção para tomarmos o supremo da integral, isto é, $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}^n}$ pode ser substituído por $\displaystyle\sup_{x\in A_1}$, onde

$$A_1 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \geq 0 \quad \text{e} \quad x_i = 0, i \neq 1\}.$$

Note ainda que o supremo sobre $x \in A_1 \cap B^c$ é atingindo em $x \in \partial B$; sendo assim, o valor máximo da integral (3.31) é atingindo em algum $x \in A_1 \cap \overline{B}$. Seja $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in$

S^{n-1} e $x_d = (Rd, 0, \ldots, 0)$, com $0 \leq d \leq 1$, o ponto máximo correspondente. Assim, temos

$$\begin{aligned} |x_d - Rz|^2 &= \langle x_d - Rz, x_d - Rz \rangle \\ &= \langle (Rd - Rz_1, -Rz_2, \ldots, -Rz_n), (Rd - Rz_1, -Rz_2, \ldots, -Rz_n) \rangle \\ &= (Rd - Rz_1)^2 + R^2 z_2^2 + \cdots + R^2 z_n^2 \\ &= R^2 d^2 - 2R^2 d z_1 + R^2 z_1^2 + R^2 z_2^2 + \cdots + R^2 z_n^2 \\ &= R^2 (d^2 - 2dz_1 + z_1^2 + \cdots + z_n^2) \\ &= R^2 (d^2 - 2dz_1 + 1) \\ &= R^2 (d^2 + 1)\big(1 - \frac{2d}{d^2+1} z_1\big) \\ &\geq R^2 (1 - |z_1|). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Portanto, o segundo membro de (3.31) pode ser majorado por

$$\begin{aligned} & \frac{(t-\tau)^{-n/2}}{2^n \pi^{n/2}} R^{\frac{n-1}{p}} \sup_{x \in A_1 \cap \overline{B}} \left(\int_{S^{n-1}} e^{-\frac{|x - Rz|^2}{4(t-\tau)} p} d\sigma(z) \right)^{1/p} \\ = & \frac{(t-\tau)^{-n/2}}{2^n \pi^{n/2}} R^{\frac{n-1}{p}} \left(\int_{S^{n-1}} e^{-\frac{|x_d - Rz|^2}{4(t-\tau)} p} d\sigma(z) \right)^{1/p} \\ \leq & \frac{(t-\tau)^{-n/2}}{2^n \pi^{n/2}} R^{\frac{n-1}{p}} \left(\int_{S^{n-1}} e^{-\frac{R^2(1-|z_1|)p}{4(t-\tau)}} d\sigma(z) \right)^{1/p} && (3.33) \\ = & C(t-\tau)^{-\frac{n}{2}} R^{\frac{n-1}{p}} \left(\int_{-1}^{1} e^{-(\frac{R^2 p}{4(t-\tau)})(1-|s|)} (\sqrt{1-s^2})^{n-3} ds \right)^{1/p}, && (3.34) \end{aligned}$$

onde (3.34) foi obtida usando a mudança de variável no Apêndice D.3 de [14] em (3.33). Trataremos agora a integral em (3.34) considerando dois casos:

Primeiro caso ($n = 2$):

Tomemos $n = 2$ em (3.34). Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} e^{-(\frac{R^2 p}{4(t-\tau)})(1-|s|)} (\sqrt{1-s^2})^{n-3} ds &= \int_{-1}^{1} e^{-(\frac{R^2 p}{4(t-\tau)})(1-|s|)} (\sqrt{1-s^2})^{-1} ds \\ &= \int_{-1}^{1} e^{-(\frac{R^2 p(1-|s|)}{4(t-\tau)})} (1-s^2)^{\frac{1}{2}-1} ds \\ &= 2 \int_{0}^{1} e^{-(\frac{R^2 p(1-s)}{4(t-\tau)})} (1-s^2)^{-1/2} ds, \end{aligned} \tag{3.35}$$

pois $|s|$ é uma função par. Agora, observemos que $1 - s \leq 1 - s^2, \forall s \in [0, 1]$; Então $(1-s^2)^{-1} \leq (1-s)^{-1}, \forall s \in [0, 1)$; Portanto, a integral em (3.35) pode ser majorada por

$$2 \int_{0}^{1} e^{-(\frac{R^2 p(1-s)}{4(t-\tau)})} (1-s^2)^{-1/2} ds \leq 2 \int_{0}^{1} e^{-(\frac{R^2 p(1-s)}{4(t-\tau)})} (1-s)^{-1/2} ds.$$

Fazendo a seguinte mudança de variável, $u=\alpha(1-s)$ onde $\alpha=\frac{R^2p}{4(t-\tau)}$, temos

$$\begin{aligned}
2\int_0^1 e^{-(\frac{R^2p(1-s)}{4(t-\tau)})}(1-s)^{-1/2}ds &= 2\Big(\frac{R^2p}{4(t-\tau)}\Big)^{-1+\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{R^2p}{4(t-\tau)}} e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}du \\
&\leq 2\Big(\frac{R^2p}{4(t-\tau)}\Big)^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty} e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}du \\
&= 2\left(\frac{4(t-\tau)}{R^2p}\right)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= 4\frac{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}{Rp^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\pi} \\
&= \tilde{C}R^{-1}(t-\tau)^{1/2}. \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

Agora, a partir das estimativas (3.35) e (3.36) podemos concluir que para $n=2$

$$\begin{aligned}
CR^{\frac{n-1}{p}}(t-\tau)^{-\frac{n}{2}}\left(\int_{-1}^1 e^{-(\frac{R^2p}{4(t-\tau)})(1-|s|)}(\sqrt{1-s^2})^{n-3}ds\right)^{1/p} &\leq CR^{\frac{n-1}{p}}(t-\tau)^{-\frac{n}{2}} \\
&\quad\times\Big(\tilde{C}R^{-1}(t-\tau)^{1/2}\Big)^{1/p} \\
&= C\tilde{C}^{\frac{1}{p}}R^{\frac{2-2}{p}}(t-\tau)^{-1+\frac{1}{2p}} \\
&= C_1(t-\tau)^{-1+\frac{1}{2p}}. \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

Segundo caso ($n\geq 3$):

Observe que $1+s\leq 2$ para $s\leq 1$ e, portanto, uma estimativa para a integral em (3.34) é dada por

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 e^{-(\frac{R^2p}{4(t-\tau)})(1-|s|)}(\sqrt{1-s^2})^{n-3}ds &= 2\int_0^1 e^{-(\frac{R^2p}{4(t-\tau)})(1-s)}(\sqrt{(1-s)(1+s)})^{n-3}ds \\
&\leq 2^{\frac{n-3}{2}}2\int_0^1 e^{-(\frac{R^2p}{4(t-\tau)})(1-s)}(1-s)^{\frac{n-3}{2}}ds \\
&= 2^{\frac{n-1}{2}}\int_0^1 e^{-(\frac{R^2p}{4(t-\tau)})(1-s)}(1-s)^{\frac{n-3}{2}}ds.
\end{aligned}$$

Usando o mesmo argumento de mudança de variável do caso $n=2$, temos

$$\begin{aligned}
2^{\frac{n-1}{2}}\int_0^1 e^{-(\frac{R^2p}{4(t-\tau)})(1-s)}(1-s)^{\frac{n-3}{2}}ds &= 2^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{R^2p}{4(t-\tau)}\right)^{-1-\left(\frac{n-3}{2}\right)}\int_0^{\frac{R^2p}{4(t-\tau)}} e^{-u}u^{\frac{n-3}{2}}du \\
&= 2^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{R^2p}{4(t-\tau)}\right)^{-\frac{n-1}{2}}\int_0^{\frac{R^2p}{4(t-\tau)}} e^{-u}u^{\frac{n-3}{2}}du \\
&\leq 2^{\frac{3(n-1)}{2}}\left(\frac{(t-\tau)}{R^2p}\right)^{\frac{n-1}{2}}\int_0^{\infty} e^{-u}u^{\frac{n-3}{2}}du \\
&= CR^{-(n-1)}(t-\tau)^{\frac{n-1}{2}}\int_0^{\infty} e^{-u}u^{\frac{n-3}{2}}du \\
&= CR^{-(n-1)}(t-\tau)^{\frac{n-1}{2}}. \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

Portanto, a estimativa (3.38) implica

$$C(t-\tau)^{-\frac{n}{2}}R^{\frac{n-1}{p}}\left(\int_{-1}^{1}e^{-(\frac{R^2p}{4(t-\tau)})(1-|s|)}(\sqrt{1-s^2})^{n-3}ds\right)^{1/p} \leq C_1(t-\tau)^{\frac{(n-1)}{2p}-\frac{n}{2}}. \quad (3.39)$$

Assim, a estimativa (3.28) segue das estimativas (3.31), (3.34) e (3.37) para $n=2$ e de (3.31), (3.34) e (3.39) para $n\geq 3$.

Agora, provaremos a desigualdade (3.29). Usando novamente a estimativa da função de Green, temos

$$\begin{aligned}
\|G(x,t;\xi,\tau)\|_{L^p(\Omega,dx)} &\leq \sup_{\xi\in\partial B}\left\|\frac{(t-\tau)^{-\frac{n}{2}}}{2^n\pi^{n/2}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}\right\|_{L^p(\Omega,dx)} \\
&\leq \sup_{\xi\in\partial B}\left\|(t-\tau)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n,dx)} \\
&= (t-\tau)^{-\frac{n}{2}}\sup_{\xi\in\partial B}\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}p}\right)^{1/p} \\
&= C_2(t-\tau)^{\frac{n}{2p}-\frac{n}{2}}.
\end{aligned}$$

□

Lema 3.4.2. *Sejam $1<d\leq\tilde{r},\tilde{q}<\infty$. Então existem constantes C_3, C_4 tais que*

$$\left\|\int_\Omega G(x,t;\xi,\tau)\varphi(\xi)d\xi\right\|_{L^{\tilde{r}}(\Omega,dx)} \leq C_3(t-\tau)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{\tilde{r}}\right)}||\varphi||_{L^d(\Omega)}, \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned}
\left\|\int_\Omega G(x,t;\xi,\tau)\varphi(\xi)d\xi\right\|_{L^{\tilde{q}}(\partial B,d\sigma(x))} &\leq C_4(t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{(n-1)}{2}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{\tilde{q}}\right)} \\
&\quad\times\max\left\{1,(t-\tau)^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tilde{q}}-\frac{1}{d}+1\right)}\right\}||\varphi||_{L^d(\Omega)} \quad (3.41)
\end{aligned}$$

para todo $0\leq\tau<t$ e $\varphi\in L^d(\Omega)$.

Demonstração. Observemos que

$$\left\|\int_\Omega G(x,t;\xi,\tau)\varphi(\xi)d\xi\right\|_{L^{\tilde{r}}(\Omega)} \leq \left\|\int_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}|\mathcal{X}_{\Omega(\xi)}\varphi(\xi)|d\xi\right\|_{L^{\tilde{r}}(\Omega)}.$$

Seja $1\leq l<\infty$ tal que $\dfrac{1}{\tilde{r}}=\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{d}-1$; Então usando a desigualdade de Young, temos

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}|\mathcal{X}_{\Omega(\xi)}\varphi(\xi)|d\xi\right\|_{L^{\tilde{r}}(\Omega)} \leq C\left\|(t-\tau)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t-\tau)}}\right\|_{L^l(\mathbb{R}^n)}||\mathcal{X}_\Omega\varphi||_{L^d(\mathbb{R}^n)}.$$

Usando agora a estimativa (3.41) do Lema 3.4.1, temos

$$\begin{aligned}
C\left\|(t-\tau)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4(t-\tau)}}\right\|_{L^l(\mathbb{R}^n)}||\mathcal{X}_\Omega\varphi||_{L^d(\mathbb{R}^n)} &\leq C_3(t-\tau)^{-\frac{n}{2}+\frac{n}{2l}}\|\varphi\|_{L^d(\Omega)} \\
&= C_3(t-\tau)^{-\frac{n}{2}(-\frac{1}{l}+1)}\|\varphi\|_{L^d(\Omega)} \\
&= C_3(t-\tau)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{d}-\frac{1}{\tilde{r}})}\|\varphi\|_{L^d(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Para provar a estimativa (3.14), tomamos desta vez $\dfrac{1}{\tilde{q}} = \dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{d} - 1$. Do Lema 3.4.1, sabemos que a integral sobre Ω da função de Green é limitada. Portanto, usando o Teorema 2.1.1, temos

$$
\begin{aligned}
&\left|\left| \int_\Omega G(x,t;\xi,\tau)\varphi(\xi)d\xi \right|\right|_{L^{\tilde{q}}(\partial B, d\sigma(x))} \\
\leq \;& C\max\left\{ \sup_{\xi\in\Omega} ||G(x,t;\xi,\tau)||_{L^l(\partial B,d\sigma(x))}, \sup_{x\in\partial B} ||G(x,t;\xi,\tau)||_{L^l(\Omega,dx)} \right\} ||\varphi||_{L^d(\Omega)} \\
\leq \;& C\max\left\{ C_1(t-\tau)^{\frac{n-1}{2l}-\frac{n}{2}}, C_2(t-\tau)^{\frac{n}{2l}-\frac{n}{2}} \right\} ||\varphi||_{L^d(\Omega)} \\
\leq \;& C_4\max\left\{ (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{(n-1)}{2}\left(1-\frac{1}{l}\right)}, (t-\tau)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{l}\right)} \right\} ||\varphi||_{L^d(\Omega)} \\
\leq \;& C_4\max\left\{ (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{(n-1)}{2}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{\tilde{q}}\right)}, (t-\tau)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{\tilde{q}}\right)} \right\} ||\varphi||_{L^d(\Omega)} \\
= \;& C_4\max\left\{ 1, (t-\tau)^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tilde{q}}-\frac{1}{d}+1\right)} \right\} (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{(n-1)}{2}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{\tilde{q}}\right)} ||\varphi||_{L^d(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

□

Lema 3.4.3. *Sejam $1 < d \leq \tilde{q}, \tilde{r} < \infty$. Então existem constantes C_5, C_6 tais que*

$$
\begin{aligned}
\left|\left| \int_{\partial B} G(x,t;\xi,\tau)\varphi(\xi)d\xi \right|\right|_{L^{\tilde{r}}(\Omega,dx)} &\leq C_5\max\left\{ 1, (t-\tau)^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tilde{r}}-\frac{1}{d}+1\right)} \right\} \\
&\quad \times (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{\tilde{r}}\right)} ||\varphi||_{L^d(\partial B)}, \quad (3.42) \\
\left|\left| \int_{\partial B} G(x,t;\xi,\tau)\varphi(\xi)d\xi \right|\right|_{L^{\tilde{q}}(\partial B,d\sigma(x))} &\leq C_6(t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{\tilde{q}}\right)} ||\varphi||_{L^d(\partial B)}, \quad (3.43)
\end{aligned}
$$

para todo $0 \leq \tau < t$ e $\varphi \in L^d(\partial B)$.

Demonstração. Tomemos $1 \leq l < \infty$ satisfazendo $\dfrac{1}{\tilde{r}} = \dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{d} - 1$. Aplicando o Teorema 2.1.1 e o Lema 3.4.1 obtemos,

$$
\begin{aligned}
&\left|\left| \int_{\partial B} G(x,t;\xi,\tau)\varphi(\xi)d\xi \right|\right|_{L^{\tilde{r}}(\partial B, d\sigma(x))} \\
\leq \;& C\max\left\{ \sup_{x\in\Omega} ||G(x,t;\xi,\tau)||_{L^l(\partial B,d\sigma(\xi)}, \sup_{\xi\in\partial B} ||G(x,t;\xi,\tau)||_{L^l(\Omega,dx))} \right\} ||\varphi||_{L^d(\partial B)} \\
\leq \;& C\max\left\{ C_1(t-\tau)^{\frac{n-1}{2l}-\frac{n}{2}}, C_2(t-\tau)^{\frac{n}{2l}-\frac{n}{2}} \right\} ||\varphi||_{L^d(\partial B)} \\
\leq \;& C_5\max\left\{ (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{(n-1)}{2}\left(1-\frac{1}{l}\right)}, (t-\tau)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{l}\right)} \right\} ||\varphi||_{L^d(\partial B)} \\
\leq \;& C_5\max\left\{ (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{(n-1)}{2}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{\tilde{r}}\right)}, (t-\tau)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{\tilde{r}}\right)} \right\} ||\varphi||_{L^d(\partial B)} \\
= \;& C_5\max\left\{ 1, (t-\tau)^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tilde{r}}-\frac{1}{d}+1\right)} \right\} (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{(n-1)}{2}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{\tilde{r}}\right)} ||\varphi||_{L^d(\partial B)}.
\end{aligned}
$$

Agora para provar a estimativa (3.16), tomamos $\dfrac{1}{\tilde{q}} = \dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{d} - 1$, e usando novamente o Teorema 2.1.1, temos

$$
\begin{aligned}
&\left|\left| \int_{\partial B} G(x,t;\xi,\tau)\varphi(\xi)d\xi \right|\right|_{L^{\tilde{q}}(\partial B, d\sigma(x))} \\
\leq \quad & C \max\left\{ \sup_{x\in\partial B} ||G(x,t;\xi,\tau)||_{L^l(\partial B, d\sigma(\xi))}, \sup_{\xi\in\partial B} ||G(x,t;\xi,\tau)||_{L^l(\partial B, d\sigma(\xi))} \right\} ||\varphi||_{L^d(\partial B)}.
\end{aligned}
$$

Observe que $\partial B \subset \Omega$, pois $B \subset \Omega$ e além disso, $G(x,t;\xi,\tau)$ é uma função contínua em seus argumentos. Portanto,

$$
\begin{aligned}
& C \max\left\{ \sup_{x\in\partial B} ||G(x,t;\xi,\tau)||_{L^l(\partial B, d\sigma(\xi))}, \sup_{\xi\in\partial B} ||G(x,t;\xi,\tau)||_{L^l(\partial B, d\sigma(\xi))} \right\} ||\varphi||_{L^d(\partial B)} \\
\leq \quad & C \max\left\{ \sup_{x\in\Omega} ||G(x,t;\xi,\tau)||_{L^l(\partial B, d\sigma(\xi))}, \sup_{\xi\in\Omega} ||G(x,t;\xi,\tau)||_{L^l(\partial B, d\sigma(\xi))} \right\} ||\varphi||_{L^d(\partial B)} \\
\leq \quad & C \max\left\{ C_1(t-\tau)^{\frac{n-1}{2l}-\frac{n}{2}}, C_1(t-\tau)^{\frac{n-1}{2l}-\frac{n}{2}} \right\} ||\varphi||_{L^d(\partial B)} \\
= \quad & C_6(t-\tau)^{\frac{n-1}{2l}-\frac{n}{2}} ||\varphi||_{L^d(\partial B)} \\
= \quad & C_6(t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{(n-1)}{2}\left(1-\frac{1}{l}\right)} ||\varphi||_{L^d(\partial B)} \\
= \quad & C_6(t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{(n-1)}{2}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{\tilde{q}}\right)} ||\varphi||_{L^d(\partial B)}.
\end{aligned}
$$

□

Capítulo 4

A Equação do Calor Semilinear com uma Fonte Não-Linear Localizada

Seja $T > 0$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira suave ou o espaço todo $\mathbb{R}^n, n \geq 2$. Consideremos a bola aberta $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < R\}$ de raio R, centrada na origem com fronteira ∂B e tal que $\overline{B} \subsetneq \Omega$. Consideremos também $\mathcal{X}_B(x)$ a função característica do conjunto B e seja $\nu(x)$ o vetor normal unitário em $x \in \partial B$ apontando para dentro da bola. Estamos interessados em estudar o problema de valor inicial para a equação do calor com uma fonte localizada não linear:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = & \dfrac{\partial \mathcal{X}_B(x)}{\partial \nu} f(u(x,t)) \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, T] \\ u(x, 0) = & u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

complementado com a condição homogênea no bordo

$$\begin{cases} u(x,t) = & 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0, T], \quad \text{ou} \\ u(x,t) \to & 0 \quad \text{quando} \quad |x| \to \infty, 0 < t \leq T, \end{cases} \tag{4.2}$$

dependendo do tipo de domínio Ω. Em (4.1), o vetor normal $\nu(x)$ pode ser estendido a um campo de vetores definido em todo espaço Ω, consulte [7].

Neste capítulo estudaremos a existência e unicidade de soluções para a equação (4.1) e a condição no bordo (4.2) usando o argumento do ponto fixo de Banach. Assumiremos que $u_0 \in L^r(\Omega)$, isto nos permite considerar uma classe maior de dados iniciais e assim, somos capazes de tomar dados não contínuos. Assumiremos também que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz

$$f(0) = 0 \quad \text{e} \quad |f(a_2) - f(a_1)| \leq \eta |a_2 - a_1| \big(|a_2|^{\rho - 1} + |a_1|^{\rho - 1} \big)$$

para todo $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ onde $0 < \rho < \infty$ e η é uma constante positiva. Esta escolha f é motivada pela correspondência com a Equação do Calor não homogênea.

Usando o *Princípio de Duhamel*, integração por partes e o Teorema da Divergência, obtemos a formulação integral para o problema (4.1)-(4.2):

$$u(x,t) = \int_\Omega G(x,t;\xi,0)u_0(\xi)d\xi + \int_0^t \int_{\partial B} G(x,t;\xi,\tau)f(u(\xi,\tau))d\xi d\tau. \tag{4.3}$$

Agora, descrevemos o espaço funcional onde provaremos a existência de solução para o problema (4.1)-(4.2). Em vista da formulação integral (4.3) e da natureza da fonte não linear localizada $\dfrac{\partial \mathcal{X}_B(x)}{\partial \nu}$, precisamos de um espaço que incluem informações sobre u restrita ao bordo de B. De acordo com nosso interesse de tomar dados $u_0 \in L^r(\Omega)$, consideraremos um espaço sem exigir regularidade positiva. Sejam $1 < q, b < \infty$ e $B \subsetneq \Omega$ como acima. Considere os espaços de medidas $(\Omega, \mathcal{L}_\Omega, dx)$ e $(\partial B, \mathcal{L}_{\partial B}, d\sigma)$, onde dx é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ e $d\sigma$ é a medida $(n-1)$-Hausdorff em ∂B. Seja $\mathcal{A}$ o conjunto das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que f e $f|_{\partial B}$ são funções mensuráveis em $\mathcal{L}_\Omega$ e $\mathcal{L}_{\partial B}$, respectivamente. Para $f, g \in \mathcal{A}$ definimos a seguinte relação de equivalência, $f \sim g$ se, e somente se, $f(x) = g(x)$ q.t.p. em $(\Omega, \mathcal{L}_\Omega, dx)$ e $f|_{\partial B} = g|_{\partial B}$ q.t.p. em $(\partial B, \mathcal{L}_{\partial B}, d\sigma)$. Definimos o espaço $X_{b,q}$ como o conjunto de todas $f \in \mathcal{A}/\sim$ tal que

$$\begin{aligned} ||f||_{X_{b,q}} &= \left(\int_\Omega |f(x)|^b dx \right)^{\frac{1}{b}} + \left(\int_{\partial B} |f(x)|^q d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= ||f||_{L^b(\Omega)} + ||f||_{L^q(\partial B)} < \infty. \end{aligned} \tag{4.4}$$

O espaço $X_{b,q}$ com a norma (4.4) pode ser identificado isometricamente isomorfo com o espaço $L^b(\Omega) \times L^q(\partial B)$ e que o par $(X_{b,q}, ||f||_{X_{b,q}})$ é um espaço de Banach.

Definimos agora, o espaço funcional dependente do tempo, onde procuraremos por soluções para a expressão (4.3). Denotamos $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)$, para $1 < r, q, b < \infty$. Sejam $\beta \geq 0$ e $\varepsilon_{b,q}^{r,T}$ o espaço de Banach das funções mensuráveis $u : (0,T) \to X_{b,q}$ Bochner-integráveis tal que

$$t^\beta \in C((0,T); L^b(\Omega)) \quad \text{e} \quad t^\alpha \in C((0,T) : L^q(\partial B)),$$

equipado com a norma

$$||u||_{\varepsilon_{b,q}^{r,T}} = \sup_{0<t<T} t^\beta ||u(\cdot,t)||_{L^b(\Omega)} + \sup_{0<t<T} t^\alpha ||u(\cdot,t)||_{L^q(\partial B)}.$$

Na sequência, provaremos que o problema de valor inicial (4.1)-(4.2) admite solução.

Teorema 4.0.1 (FERREIRA;VILLAMIZAR-ROA)**.** *Suponha que* $n \geq 2, 1 < r < b, q < \infty$ *e* $1 < \rho < \min\left\{\frac{1}{\alpha}, \frac{2r+n-1}{r+n-1}, q\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{b}\right)\right\}$ *com* $\beta \geq \frac{n}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)$ *e* $\beta > \left(\frac{r+n-1}{2r}\rho - \frac{b+n-1}{2b}\right)$*. Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfazendo* $f(0) = 0$ *e* $|f(a_2) - f(a_1)| \leq \eta |a_2 - a_1|\left(|a_2|^{\rho-1} + |a_1|^{\rho-1}\right)$ *para todo* $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ *e* $u_0 \in L^r(\Omega)$*. Então,*

i) (Existência e Unicidade): Existe $T^* = T^*(u_0) > 0$ *e uma única solução* u *para o problema (4.3) pertencendo a* $\varepsilon_{b,q}^{r,T^*}$*.*

ii) (Dependência contínua das condições iniciais): Se $u_0(x)$ *e* $v_0(x)$ *são condições iniciais em* $L^r(\Omega)$*, então as respectivas soluções* $u(x,t)$ *e* $v(x,t)$ *satisfazem*

$$||u - v||_{\varepsilon_{b,q}^{r,T^*}} \leq C||u_0 - v_0||_{L^r(\Omega)}$$

iii) (Positividade): Assumindo que $f(z) \geq 0$ *onde* $z \geq 0$*. Se* $u_0 \geq 0$ *q.t.p. em* Ω*, então* $u(x,t) \geq 0$ *q.t.p em* Ω *e* $t \in (0, T^*)$*.*

4.1 Existência e Unicidade

Para provar a existência de solução em $\varepsilon_{b,q}^{r,T}$, usaremos o argumento de contração para encontrarmos um ponto fixo. Para $u \in \varepsilon_{b,q}^{r,T}$, seja $\Phi : \varepsilon_{b,q}^{r,T} \to \varepsilon_{b,q}^{r,T}$ um operador linear definido por

$$\Phi(u)(x,t) = \int_{\Omega} G(x,t;\xi,0)u_0(\xi)d\xi + \int_0^t \int_{\partial B} G(x,t;\xi,\tau)f(u(\xi,\tau))d\xi d\tau. \quad (4.5)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} ||\Phi(u)(\cdot,t)||_{L^b(\Omega)} &= \left|\left| \int_{\Omega} G(x,t;\xi,0)u_0(\xi)d\xi + \int_0^t \int_{\partial B} G(x,t;\xi,\tau)f(u(\xi,\tau))d\xi d\tau \right|\right|_{L^b(\Omega)} \\ &\leq \left|\left| \int_{\Omega} G(x,t;\xi,0)u_0(\xi)d\xi \right|\right|_{L^b(\Omega)} + \int_0^t \left|\left| \int_{\partial B} G(x,t;\xi,\tau)f(u(\xi,\tau))d\xi \right|\right|_{L^b(\Omega)} d\tau. \end{aligned}$$

Sabendo que $1 < r, \frac{q}{\rho} < b, q < \infty$, então podemos usar as estimativas (3.40) e (3.42) do Lema 3.4.2 e Lema 3.4.3, respectivamente, na desigualdade acima; Logo,

$$
\begin{aligned}
&\left|\left|\int_{\Omega} G(x,t;\xi,0)u_0(\xi)d\xi\right|\right|_{L^b(\Omega)} + \int_0^t \left|\left|\int_{\partial B} G(x,t;\xi,\tau)f(u(\xi,\tau))d\xi\right|\right|_{L^b(\Omega)} d\tau \\
\leq\ & C_3 t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right)}||u_0||_{L^r(\Omega)} \\
&+C_5\int_0^t \max\left\{1,(t-\tau)^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{\rho}{q}+1\right)}\right\}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{(n-1)}{2}\left(\frac{\rho}{q}-\frac{1}{b}\right)}||f(u(\tau))||_{L^{\frac{q}{\rho}}(\partial B)}d\tau \\
\leq\ & C_3 t^{-\beta}t^{\beta-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right)}||u_0||_{L^r(\Omega)} \\
&+C_5\max\left\{1,t^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{\rho}{q}+1\right)}\right\}\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{(n-1)}{2}\left(\frac{\rho}{q}-\frac{1}{b}\right)}||u(\tau)||^{\rho}_{L^q(\partial B)}d\tau \\
\leq\ & C_3 t^{-\beta}t^{\beta-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right)}||u_0||_{L^r(\Omega)} \\
&+C_5\max\left\{1,t^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{\rho}{q}+1\right)}\right\}\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{(n-1)}{2}\left(\frac{\rho}{q}-\frac{1}{b}\right)}\tau^{-\rho\alpha}d\tau \\
&\times\left(\sup_{0<\tau<t}\tau^{\alpha}||u(\tau)||_{L^q(\partial B)}\right)^{\rho} \qquad (4.6) \\
\leq\ & C_3 t^{-\beta}t^{\beta-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right)}||u_0||_{L^r(\Omega)} \\
&+\tilde{C}_1 C_5\max\left\{1,t^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{\rho}{q}+1\right)}\right\}t^{-\beta}t^{\frac{1}{2}+\beta-\rho\alpha-\frac{(n-1)}{2}\left(\frac{\rho}{q}-\frac{1}{b}\right)}\left(\sup_{0<\tau<t}\tau^{\alpha}||u(\tau)||_{L^q(\partial B)}\right)^{\rho} \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

onde em (4.6) usamos o fato de que $\rho < q\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{b}\right)$. temos $-\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2}\left(\frac{\rho}{q}-\frac{1}{b}\right) > -1$ e de $\rho < \alpha^{-1}$, temos que $-\rho\alpha > -1$. Portanto, podemos usar o fato de que $\int_0^t (t-\tau)^{\delta_1}\tau^{\delta_2}d\tau = Ct^{1+\delta_1+\delta_2}$ para $\delta_i > -1$ e obter a desigualdade (4.7). Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
t^{\beta}||\Phi(u)(\cdot,t)||_{L^b(\Omega)} \leq\ & C_3 t^{\beta-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right)}||u_0||_{L^r(\Omega)} \\
&+\tilde{C}_1 C_5\max\left\{1,t^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{\rho}{q}+1\right)}\right\}t^{\frac{1}{2}+\beta-\rho\alpha-\frac{(n-1)}{2}\left(\frac{\rho}{q}-\frac{1}{b}\right)} \\
&\times\left(\sup_{0<\tau<t}\tau^{\alpha}||u(\tau)||_{L^q(\partial B)}\right)^{\rho}. \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

Observemos que $\rho < q\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{b}\right)$ e $\beta \geq \frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right)$ implicam, respectivamente, que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{\rho}{q}+1\right) > 0 \quad e \quad \frac{1}{2}+\beta-\frac{n-1}{2}\left(\frac{\rho}{q}-\frac{1}{b}\right) > 0.$$

Portanto, podemos tomar o supremo na desigualdade (4.8) com $0 < t < T$; logo,

$$
\begin{aligned}
\sup_{0<t<T} t^{\beta}||\Phi(u)(\cdot,t)||_{L^b(\Omega)} \leq\ & C_3 T^{\beta-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right)}||u_0||_{L^r(\Omega)} \\
&+\tilde{C}_1 C_5\max\left\{1,T^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{\rho}{q}+1\right)}\right\}T^{\frac{1}{2}+\beta-\rho\alpha-\frac{(n-1)}{2}\left(\frac{\rho}{q}-\frac{1}{b}\right)} \\
&\times\left(\sup_{0<t<T}t^{\alpha}||u(t)||_{L^q(\partial B)}\right)^{\rho}. \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, observemos que

$$\begin{aligned}
||\Phi(u)(\cdot,t)||_{L^q(\partial B)} &= \left|\left| \int_\Omega G(x,t;\xi,0)u_0(\xi)d\xi + \int_0^t \int_{\partial B} G(x,t;\xi,\tau)f(u(\xi,\tau))d\xi d\tau \right|\right|_{L^q(\partial B)} \\
&\leq \left|\left| \int_\Omega G(x,t;\xi,0)u_0(\xi)d\xi \right|\right|_{L^q(\partial B)} + \int_0^t \left|\left| \int_{\partial B} G(x,t;\xi,\tau)f(u(\xi,\tau))d\xi \right|\right|_{L^q(\partial B)} d\tau,
\end{aligned}$$

e como $\rho\alpha < 1$ segue que $1 < \dfrac{q}{\rho} < q < \infty$. Então, a partir das estimativas (3.41) e (3.43) do Lema 3.4.2 e Lema 3.4.3, respectivamente, aplicadas na desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
& \left|\left| \int_\Omega G(x,t;\xi,0)u_0(\xi)d\xi \right|\right|_{L^q(\partial B)} + \int_0^t \left|\left| \int_{\partial B} G(x,t;\xi,\tau)f(u(\xi,\tau))d\xi \right|\right|_{L^q(\partial B)} d\tau \\
\leq\ & C_4 \max\left\{1, t^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}+1\right)}\right\} t^{-\frac{1}{2}-\frac{(n-1)}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)} ||u_0||_{L^r(\Omega)} \\
& + C_6 \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2}\left(\frac{\rho}{q}-\frac{1}{q}\right)} ||f(u(\tau))||_{L^{\frac{q}{\rho}}(\partial B)} d\tau \\
\leq\ & C_4 \max\left\{1, t^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}+1\right)}\right\} t^{-\alpha} ||u_0||_{L^r(\Omega)} + C_6 \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2}\left(\frac{\rho}{q}-\frac{1}{q}\right)} ||u(\tau)||^\rho_{L^q(\partial B)} d\tau \\
& C_4 \max\left\{1, t^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}+1\right)}\right\} t^{-\alpha} ||u_0||_{L^r(\Omega)} \\
& + C_6 \left(\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2}\left(\frac{\rho}{q}-\frac{1}{q}\right)} \tau^{-\rho\alpha} d\tau \right) \left(\sup_{0<\tau<t} ||u(\tau)||_{L^q(\partial B)} \right)^\rho \\
\leq\ & C_4 \max\left\{1, t^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}+1\right)}\right\} t^{-\alpha} ||u_0||_{L^r(\Omega)} \\
& + \tilde{C}_2 C_6 t^{-\alpha} t^{\frac{1}{2}-(\rho-1)\alpha-\frac{(n-1)}{2}\left(\frac{\rho-1}{q}\right)} \left(\sup_{0<\tau<t} ||u(\tau)||_{L^q(\partial B)} \right)^\rho,
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
t^\alpha ||\Phi(u)(\cdot,t)||_{L^q(\partial B)} &\leq C_4 \max\left\{1, t^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}+1\right)}\right\} ||u_0||_{L^r(\Omega)} \\
&\quad + \tilde{C}_2 C_6 t^{\frac{1}{2}-(\rho-1)\alpha-\frac{(n-1)}{2}\left(\frac{\rho-1}{q}\right)} \left(\sup_{0<\tau<t} ||u(\tau)||_{L^q(\partial B)} \right)^\rho, \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Agora, observemos que $\alpha < \frac{1}{\rho} < 1$ e $\rho < \frac{2r+n-1}{r+n-1}$. Assim, temos que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{\rho}{r} + 1\right) > 0 \quad e \quad \frac{1}{2} - (\rho-1)\alpha - \frac{(n-1)}{2}\left(\frac{\rho-1}{q}\right) > 0.$$

Portanto, podemos tomar o supremo na desigualdade (4.10) com $0 < t < T$; logo,

$$\begin{aligned}
\sup_{0<t<T} t^\alpha ||\Phi(u)(\cdot,t)||_{L^q(\partial B)} &\leq C_4 \max\left\{1, T^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}+1\right)}\right\} ||u_0||_{L^r(\Omega)} \\
&\quad + \tilde{C}_2 C_6 T^{\frac{1}{2}-(\rho-1)\alpha-\frac{(n-1)}{2}\left(\frac{\rho-1}{q}\right)} \left(\sup_{0<t<T} ||u(t)||_{L^q(\partial B)} \right)^\rho. \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Seja $\Lambda \in \mathbb{R}$ fixado tal que $\Lambda = \tilde{C}(T)||u_0||_{L^r(\Omega)}$ e consideremos a bola fechada

$$\mathcal{B}_{2\Lambda} = \left\{ u \in \varepsilon^{r,T}_{b,q}; ||u||_{\varepsilon^{r,T}_{b,q}} \leq 2\Lambda \right\},$$

onde $\tilde{C}(T) = C_3 T^{\beta - \frac{n}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)} + C_4 \max\left\{1, T^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} + 1\right)}\right\} > 0$. Denotamos

$$\begin{aligned} K(T) &= \tilde{C}_1 C_5 \max\left\{1, T^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} - \frac{\rho}{q} + 1\right)}\right\} T^{\frac{1}{2} + \beta - \rho\alpha - \frac{(n-1)}{2}\left(\frac{\rho}{q} - \frac{1}{b}\right)} \\ &\quad + \tilde{C}_2 C_6 T^{\frac{1}{2} - (\rho-1)\alpha - \frac{(n-1)}{2}\left(\frac{\rho-1}{q}\right)} \\ &:= K_1(T) + K_2(T), \end{aligned} \tag{4.12}$$

onde as constantes $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, C_5 e C_6 são das desigualdades (4.9) e (4.11). Então,

$$\begin{aligned} ||\Phi(u)(\cdot,t)||_{\varepsilon_{b,q}^{r,T}} &\leq \sup_{0<t<T} t^{\beta} ||\Phi(u)(\cdot,t)||_{L^b(\Omega)} + \sup_{0<t<T} t^{\alpha} ||\Phi(u)(\cdot,t)||_{L^q(\partial B)} \\ &\leq C_3 T^{\beta - \frac{n}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)} ||u_0||_{L^r(\Omega)} \\ &\quad + \tilde{C}_1 C_5 \max\left\{1, T^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} - \frac{\rho}{q} + 1\right)}\right\} T^{\frac{1}{2} + \beta - \rho\alpha - \frac{(n-1)}{2}\left(\frac{\rho}{q} - \frac{1}{b}\right)} \\ &\quad \times \left(\sup_{0<t<T} t^{\alpha} ||u(t)||_{L^q(\partial B)}\right)^{\rho} \\ &\quad + C_4 \max\left\{1, T^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} + 1\right)}\right\} ||u_0||_{L^r(\Omega)} \\ &\quad + \tilde{C}_2 C_6 T^{\frac{1}{2} - (\rho-1)\alpha - \frac{(n-1)}{2}\left(\frac{\rho-1}{q}\right)} \left(\sup_{0<t<T} ||u(t)||_{L^q(\partial B)}\right)^{\rho} \\ &\leq \tilde{C}(T) ||u_0||_{L^r(\Omega)} + K(T) \left(\sup_{0<t<T} ||u(t)||_{L^q(\partial B)}\right)^{\rho} \\ &\leq 2\tilde{C}(T) ||u_0||_{L^r(\Omega)} = 2\Lambda, \end{aligned} \tag{4.13}$$

provando assim que para $T > 0$ suficientemente pequeno temos $u \in \mathcal{B}_{2\Lambda}$, e portanto $\Phi(\mathcal{B}_{2\Lambda}) \subset \mathcal{B}_{2\Lambda}$. Agora, basta provarmos que a restrição de Φ sobre $\mathcal{B}_{2\Lambda}$ é uma contração. Para provar isto, tome $u, v \in \mathcal{B}_{2\Lambda}$, logo,

$$\begin{aligned} ||\Phi(u)(\cdot,t) + \Phi(v)(\cdot,t)||_{L^b(\Omega)} &\leq \left\| \int_0^t \int_{\partial B} G(x,t;\xi,\tau) |(f(u) - f(v))(\xi,\tau)| d\xi d\tau \right\|_{L^b(\Omega)} \\ &\leq \int_0^t \left\| \int_{\partial B} G(x,t;\xi,\tau) |(f(u) - f(v))(\xi,\tau)| d\xi \right\|_{L^b(\Omega)} d\tau \end{aligned}$$

$$\leq C \int_0^t \left\| \int_{\partial B} G(x,t;\xi,\tau) |u(\xi,\tau) - v(\xi,\tau)| \left(|u(\xi,\tau)|^{\rho-1} + |v(\xi,\tau)|^{\rho-1}\right) d\xi \right\|_{L^b(\Omega)} d\tau \tag{4.14}$$

usando a estimativa (3.42) do Lema 3.4.3 em (4.14), obtemos

$$\begin{aligned} &||\Phi(u)(\cdot,t) + \Phi(v)(\cdot,t)||_{L^b(\Omega)} \\ &\leq \int_0^t \Bigg(C_5 \max\left\{1, (t-\tau)^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} - \frac{\rho}{q} + 1\right)}\right\} (t-\tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{n-1}{2}\left(\frac{\rho}{q} - \frac{1}{b}\right)} \\ &\quad \times \left\| |u(\tau) - v(\tau)| \left(|u(\tau)|^{\rho-1} + |v(\tau)|^{\rho-1}\right) \right\|_{L^{\frac{q}{\rho}}(\partial B)} \Bigg) d\tau, \end{aligned} \tag{4.15}$$

note que,

$$
\begin{aligned}
& \left\| |u(\tau)-v(\tau)| \left(|u(\tau)|^{\rho-1}+|v(\tau)|^{\rho-1}\right) \right\|_{L^{\frac{q}{\rho}}(\partial B)} \\
= & \left(\int_{\partial B} |u(\tau)-v(\tau)|^{\frac{q}{\rho}} \left(|u(\tau)|^{\rho-1}+|v(\tau)|^{\rho-1}\right)^{\frac{q}{\rho}} d\sigma(x) \right)^{\frac{\rho}{q}} \qquad (4.16)\\
\leq & \left(\left(\int_{\partial B} |u(\tau)-v(\tau)|^{\frac{q}{\rho}\rho} d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{\rho}} \left(\int_{\partial B} \left(|u(\tau)|^{\rho-1}+|v(\tau)|^{\rho-1}\right)^{\frac{q}{\rho}\frac{\rho}{\rho-1}} d\sigma(x) \right)^{\frac{\rho-1}{\rho}} \right)^{\frac{\rho}{q}} \\
= & \|u(\tau)-v(\tau)\|_{L^q(\partial B)} \left(\int_{\partial B} \left(|u(\tau)|^{\rho-1}+|v(\tau)|^{\rho-1}\right)^{\frac{q}{\rho-1}} d\sigma(x) \right)^{\frac{\rho-1}{q}} \\
= & \|u(\tau)-v(\tau)\|_{L^q(\partial B)} \left\| |u(\tau)|^{\rho-1}+|v(\tau)|^{\rho-1} \right\|_{L^{\frac{q}{\rho-1}}(\partial B)} \\
\leq & \|u(\tau)-v(\tau)\|_{L^q(\partial B)} \left(\left\| u(\tau)^{\rho-1} \right\|_{L^{\frac{q}{\rho-1}}(\partial B)} + \left\| v(\tau)^{\rho-1} \right\|_{L^{\frac{q}{\rho-1}}(\partial B)} \right) \\
= & \|u(\tau)-v(\tau)\|_{L^q(\partial B)} \left(\|u(\tau)\|^{\rho-1}_{L^q(\partial B)} + \|v(\tau)\|^{\rho-1}_{L^q(\partial B)} \right), \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

onde em (4.16) usamos a Desigualdade de Hölder com ρ e $\frac{\rho}{\rho-1}$ sendo os conjugados de Lebesgue. Combinando a desigualdade (4.17) com (4.15) obtemos,

$$
\begin{aligned}
& ||\Phi(u)(\cdot,t)+\Phi(v)(\cdot,t)||_{L^b(\Omega)} \\
\leq & \int_0^t \left(C_5 \max\left\{1,(t-\tau)^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{\rho}{q}+1\right)}\right\} (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2}\left(\frac{\rho}{q}-\frac{1}{b}\right)} \right. \\
& \left. \times \|u(\tau)-v(\tau)\|_{L^q(\partial B)} \left(\|u(\tau)\|^{\rho-1}_{L^q(\partial B)} + \|v(\tau)\|^{\rho-1}_{L^q(\partial B)} \right) \right) d\tau \\
\leq & C_5 \max\left\{1,t^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{\rho}{q}+1\right)}\right\} \int_0^t \left((t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2}\left(\frac{\rho}{q}-\frac{1}{b}\right)} \tau^{-\rho\alpha}\tau^{\rho\alpha} \right. \\
& \left. \times \|u(\tau)-v(\tau)\|_{L^q(\partial B)} \left(\|u(\tau)\|^{\rho-1}_{L^q(\partial B)} + \|v(\tau)\|^{\rho-1}_{L^q(\partial B)} \right) \right) d\tau \\
\leq & C_5 \max\left\{1,t^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{\rho}{q}+1\right)}\right\} \left(\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2}\left(\frac{\rho}{q}-\frac{1}{b}\right)} \tau^{-\rho\alpha} d\tau \right) \left(\sup_{0<t<T} t^\alpha \|u(t)-v(t)\|_{L^q(\partial B)} \right) \\
& \times \left[\left(\sup_{0<t<T} t^\alpha \|u(t)\|_{L^q(\partial B)} \right)^{\rho-1} + \left(\sup_{0<t<T} t^\alpha \|v(t)\|_{L^q(\partial B)} \right)^{\rho-1} \right] \\
\leq & K_1(T) t^{-\beta} \left[(2\Lambda)^{\rho-1} + (2\Lambda)^{\rho-1} \right] \left(\sup_{0<t<T} t^\alpha \|u(t)-v(t)\|_{L^q(\partial B)} \right) \\
= & t^{-\beta} 2^\rho K_1(T) \Lambda^{\rho-1} \left(\sup_{0<t<T} t^\alpha \|u(t)-v(t)\|_{L^q(\partial B)} \right),
\end{aligned}
$$

portanto,

$$
t^\beta ||\Phi(u)(\cdot,t)+\Phi(v)(\cdot,t)||_{L^b(\Omega)} \;\leq\; 2^\rho K_1(T)\Lambda^{\rho-1} \left(\sup_{0<t<T} t^\alpha \|u(t)-v(t)\|_{L^q(\partial B)} \right). \qquad (4.18)
$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned}
& ||\Phi(u)(\cdot,t)+\Phi(v)(\cdot,t)||_{L^q(\partial B)} \\
\leq\ & C_6\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2}\left(\frac{\rho-1}{q}\right)}\|u-v\|_{L^q(\partial B)}\left(\|u\|^{\rho-1}_{L^q(\partial B)}+\|v\|^{\rho-1}_{L^q(\partial B)}\right)d\tau \\
\leq\ & C_6\left(\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2}\left(\frac{\rho-1}{q}\right)}\tau^{-\rho\alpha}d\tau\right)\left(\sup_{0<t<T} t^{\alpha}\|u(t)-v(t)\|_{L^q(\partial B)}\right) \\
& \times\left[\left(\sup_{0<t<T} t^{\alpha}\|u(t)\|_{L^q(\partial B)}\right)^{\rho-1}+\left(\sup_{0<t<T} t^{\alpha}\|v(t)\|_{L^q(\partial B)}\right)^{\rho-1}\right] \\
\leq\ & t^{-\alpha}K_2(T)\left(\sup_{0<t<T} t^{\alpha}\|u(t)-v(t)\|_{L^q(\partial B)}\right)\left[(2\Lambda)^{\rho-1}+(2\Lambda)^{\rho-1}\right] \\
=\ & t^{-\alpha}2^{\rho}K_2(T)\Lambda^{\rho-1}\left(\sup_{0<t<T} t^{\alpha}\|u(t)-v(t)\|_{L^q(\partial B)}\right),
\end{aligned}$$

e assim, obtemos que

$$t^{\alpha}||\Phi(u)(\cdot,t)+\Phi(v)(\cdot,t)||_{L^q(\partial B)} \leq 2^{\rho}K_2(T)\Lambda^{\rho-1}\left(\sup_{0<t<T} t^{\alpha}\|u(t)-v(t)\|_{L^q(\partial B)}\right). \quad (4.19)$$

Somando as estimativas (4.18) e (4.19) e usando (4.12), obtemos

$$\begin{aligned}
& t^{\beta}||\Phi(u)(\cdot,t)+\Phi(v)(\cdot,t)||_{L^b(\Omega)}+t^{\alpha}||\Phi(u)(\cdot,t)+\Phi(v)(\cdot,t)||_{L^q(\partial B)} \\
\leq\ & 2^{\rho}K(T)\Lambda^{\rho-1}\left(\sup_{0<t<T} t^{\alpha}\|u(t)-v(t)\|_{L^q(\partial B)}\right) \\
\leq\ & 2^{\rho}K(T)\Lambda^{\rho-1}\left(\sup_{0<t<T} t^{\beta}\|u(t)-v(t)\|_{L^b(\Omega)}+\sup_{0<t<T} t^{\alpha}\|u(t)-v(t)\|_{L^q(\partial B)}\right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$||\Phi(u)(\cdot,t)+\Phi(v)(\cdot,t)||_{\varepsilon^{r,T}_{b,q}} \leq 2^{\rho}K(T)\Lambda^{\rho-1}\|u(t)-v(t)\|_{\varepsilon^{r,T}_{b,q}}. \quad (4.20)$$

Tomando $T=T^*>0$ suficientemente pequeno tal que $2^{\rho}K(T)\Lambda^{\rho-1}<1$, concluímos a partir de (4.20) que $\Phi:\mathcal{B}_{2\Lambda}\to\mathcal{B}_{2\Lambda}$ é uma contração. Assim, Φ admite um único ponto fixo em $\mathcal{B}_{2\Lambda}$ o qual é solução de (4.3) em $\varepsilon^{r,T^*}_{b,q}$.

4.2 Dependência Contínua em relação aos Dados Iniciais

Suponhamos que $u,v\in\varepsilon^{r,T^*}_{b,q}$ sejam duas soluções de (4.3) associadas aos dados iniciais u_0 e v_0 respectivamente, então

$$\begin{aligned}
u(x,t)-v(x,t) =\ & \int_{\Omega} G(x,t;\xi,0)(u_0-v_0)(\xi)d\xi \\
& +\int_0^t\int_{\partial B} G(x,t;\xi,\tau)(f(u)-f(v)(\xi,\tau))d\xi d\tau,
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}\|u(x,t)-v(x,t)\|_{\varepsilon_{b,q}^{r,T^*}} &\leq \left\|\int_\Omega G(x,t;\xi,0)(u_0-v_0)(\xi)d\xi\right\|_{\varepsilon_{b,q}^{r,T^*}}\\ &+\left\|\int_0^t\int_{\partial B} G(x,t;\xi,\tau)(f(u)-f(v)(\xi,\tau))d\xi d\tau\right\|_{\varepsilon_{b,q}^{r,T^*}}. \quad (4.21)\end{aligned}$$

Usando os mesmos argumentos usados para provar as estimativas (4.18) e (4.19), obtemos que

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t\int_{\partial B} G(x,t;\xi,\tau)(f(u)-f(v)(\xi,\tau))d\xi d\tau\right\|_{\varepsilon_{b,q}^{r,T^*}} &\leq 2^\rho K(T^*)\Lambda^{\rho-1}\\ &\times\left(\sup_{0<t<T} t^\alpha\|u(t)-v(t)\|_{L^q(\partial B)}\right)\\ &\leq 2^\rho K(T^*)\Lambda^{\rho-1}\|u-v\|_{\varepsilon_{b,q}^{r,T^*}}, \quad (4.22)\end{aligned}$$

onde $K(T^*)$ é definido em (4.12) e $2^\rho K(T^*)\Lambda^{\rho-1}<1$.
Por outro lado,

$$\begin{aligned}\left\|\int_\Omega G(x,t;\xi,0)(u_0-v_0)(\xi)d\xi\right\|_{\varepsilon_{b,q}^{r,T^*}} &= \sup_{0<t<T^*} t^\beta\left\|\int_\Omega G(x,t;\xi,0)(u_0-v_0)(\xi)d\xi\right\|_{L^b(\Omega)}\\ &+\sup_{0<t<T^*} t^\alpha\left\|\int_\Omega G(x,t;\xi,0)(u_0-v_0)(\xi)d\xi\right\|_{L^q(\partial B)}\\ &\leq T^{*\beta}C_3T^{*-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right)}||u_0-v_0||_{L^r(\Omega)}\\ &+T^{*\alpha}C_4T^{*-\frac{1}{2}-\frac{(n-1)}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)}\\ &\times\max\left\{1,T^{*\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}+1\right)}\right\}||u_0-v_0||_{L^r(\Omega)}. \quad (4.23)\end{aligned}$$

Como $\alpha=\frac{1}{2}+\frac{(n-1)}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)$ segue de (4.21) - (4.23) que

$$||u-v||_{\varepsilon_{b,q}^{r,T^*}}\leq\frac{C_3T^{*-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right)}+C_4\max\left\{1,T^{*\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}+1\right)}\right\}}{1-2^\rho K(T^*)\Lambda^{\rho-1}}||u_0-v_0||_{L^r(\Omega)},$$

provando a dependência contínua em relação aos dados iniciais.

4.3 Positividade

A existência da solução $u\in\varepsilon_{b,q}^{r,T^*}$ para (4.3) foi obtida através do argumento do ponto fixo para contrações. Portanto, u é limite de uma sequência de iteradas, isto é,

$$\begin{aligned}u_1(x,t) &= \int_\Omega G(x,t;\xi,0)u_0(\xi)d\xi\\ u_{k+1}(x,t) &= \int_\Omega G(x,t;\xi,0)u_0(\xi)d\xi+\int_0^t\int_{\partial B} G(x,t;\xi,\tau)f(u_k(\xi,\tau))d\xi d\tau, \quad k\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Como a função de Green $G(x,t;\xi,\tau) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega \times (\tau, T]$. Segue que $u_1(x,t) \geq 0$, assumindo que $u_k(x,t) \geq 0$ para $k \in \mathbb{N}$, concluímos usando indução sobre k que $u_{k+1}(x,t) \geq 0$ pois $f(z) \geq 0$ para $z \geq 0$. Assim, o limite u da sequência u_k verifica $u(x,t) \geq 0$ pois a convergência na norma $\| \cdot \|_{\varepsilon_{b,q}^{r,T^*}}$ preserva positividade.

Referências

[1] ADAMS, R. *Sobolev spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[2] BARROS, Cícero Demétrio Vieira de. *O Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas Aplicações.* João Pessoa: Universidade Federal da Paraíba, 2013.

[3] BEBERNES, D. *Mathematical Problems from Combustion Theory.* Applied Math. Sciences, Springers, New York, 1989.

[4] BELLMAN R.*Mathematical methods in medicine*, World Scientific, Singapore, 1983.

[5] BOTELHO, G.; PELLEGRINO D.; TEIXEIRA, E. *Fundamentos de Análise Funcional.* Rio de Janeiro: SBM, 2012. 423p. (Coleção Textos Universitários; 13).

[6] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, New York, 2010.

[7] CHAN, C; TIAN, H. *Multi-dimensional explosion due to a concentrated nonlinear source.* Journal of Mathematics Analysis and Applications, 2004

[8] CHILDRESS, S.; PERCUS, J. *Mathematical Models in Developmental Biology* Courant Inst. of Math. Sciences, New York University, 1977-1978.

[9] EVANS, L.C. *Partial diferential equations.* 2.ed. New York: AMS, 1949.

[10] FERREIRA, L.; VILLAMIZAR-ROA, E. *A semilinear heat equation with a localized nonlinear source and non-continuous initial data.* Math. Meth. Appl. Sci., 34: 1910-1919. doi:10.1002/mma.1490, 2011.

[11] FOLLAND, G.*Real Analysis: modern techniques and their applications*-2nd ed. Jonh Wiley, 1999.

[12] FRIEDMAN, A. *Partial Differential Equations of Parabolic Type.* Prentice Hall: New Jersey, 1964.

[13] GARRONI, M; MENALDI, J. *Green Functions for Second Order Parabolic Integro-differential problems.* John Wiley: New York, 1992.

[14] GRAFAKOS, L.*Classical Fourier Analysis.* 3.ed, Springer. Columbia, 2014

[15] KILBAS, A; SRIVASTAVA, H; TRUJILLO, J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* v. 2, North-Holland Mathematics Studies, New York, NY, USA 2006.

[16] LAWRENCE, E. *Partial Differential Equations.* AMS: American Mathematical Society,1949, v.19. (Graduate studies in mathematics).

[17] MEDEIROS, L.; MIRANDA, M. *Espaços de Sobolev*: Iniciação aos Problemas Elíticos Não Homogêneos. Editora IM - UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.

[18] REED, M.; SIMON, B. *Methods of Modern Mathematical Physics. v. 1: Function Analysis.* New York: Academic Press, 1972.

[19] RUDIN, W.,*Functional analysis*, 2nd. Ed., McGraw Hill International Editions, 1991.

[20] STAKGOLD, I. *Boundary Value Problems of Mathematical Physics* v. 2. Classics in applied mathematics, New York, 2000.