

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Elvis Johel Aquino Curi

Férmions em uma parede de Bloch

São Luís
2017

Elvis Johel Aquino Curi

Férmions em uma parede de Bloch

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Luis Rafael Benito Castro

São Luís
2017

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a)
autor(a).

Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Aquino Curi, Elvis Johel.

Férmions em uma parede de Bloch / Elvis Johel Aquino Curi - 2017
72 f.

Orientador: Luis Rafael Benito Castro

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós Graduação em Física / ccet,
Universidade Federal do Maranhão, UFMA, 2017.

1. Defeitos Topológicos. 2. Energia de modo zero. 3. Estados de espalhamento.
4. Estados ligados. 5. Potencial Hiperbólico de Scarf. I. Benito Castro,
Luis Rafael. II. Título.

Férmions em uma parede de Bloch

Elvis Johel Aquino Curi

Aprovado em de 2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. Luis Rafael Benito Castro (Orientador)
Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão

Prof. Fabiano de Carvalho Simas
Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão

Prof. Rodolfo Alván Casana Sifuentes
Doutor em Física - Universidade Federal do Maranhão

Prof. Marcelo Batista Hott
Doutor em Física - Universidade Estadual Paulista (Campus de Guaratinguetá)

São Luís
2017

Esta dissertação está dedicada à minha família pelo sua grande apoio.

Agradecimentos

Enquanto estudava no programa de mestrado, eu tive grande sorte de conhecer grandes pessoas que indiretamente contribuíram na minha formação e que portanto, termina com a apresentação desta dissertação. Assim, é o meu grande prazer de aproveitar esta oportunidade de agradecê-los.

Agradeço a meu orientador o Prof. Dr. Luis Benito por sugerir-me este problema, por me ajudar com este trabalho ao longo dos últimos dois anos. Estou agradecido por seu apoio constante, orientação, paciência e dedicação.

Estou profundamente agradecido a esta universidade por me dar a chance de entrar para o programa de mestrado.

Estou especialmente grato ao prof. Dr. Rodolfo Casana por todo seu apoio. Agradeço por me fornecer o computador para desenvolver esta dissertação e também pelas interessantes aulas de Eletrodinâmica.

Sou grato aos professores que conheci do Departamento de Física da UFMA, em especial ao Prof. Dr. Edilberto Oliveira por suas aulas agradáveis de Física Estatística.

Gratidão à todos bons colegas de pós-graduação pelas conversas sobre física e também sou grato pela sua paciência por entender meu mau português.

Sou grato aos funcionários do curso de pós-graduação pela assistência.

Eu acredito que eu preciso agradecer a este interessante país, especialmente ao estado do Maranhão por me receber. Mesmo que o sol brilhe sempre, eu aprendi a lidar com ele nesta colorida cidade.

Agradeço ao Dr. Luis E. Arroyo, que considero um irmão e amigo. Agradeço pelas discussões sobre física e o tempo que passamos andando pelas ruas a noite.

Aproveito em agradecer ao meus pais Cerefino Aquino e Norma Curi e aos meus irmãos Boris e John por seu amor e me ajudar a terminar minha carreira de física.

Finalmente agradeço à CAPES pelo indispensável apoio financeiro.

Gracias totales!

*Não se preocupe com falhas, se preocupar com as chances de você perder quando você
nem sequer tentar*

(Jack Canfield)

Resumo

Nesta dissertação apresentamos o estudo dos estados de espalhamento e estados ligados para campos de férmions acoplados a dois campos escalares reais em $(1 + 1)$ dimensões. Este campo *background* é normalmente chamado parede de Bloch e ela surge como uma solução topológica de equações diferenciais parciais não-lineares. Este tipo de parede é amplamente utilizada e é também bem conhecida, não só no marco teórico, mas também no contexto experimental (PÁTEK; TOMÁŠ; BOHÁČEK, 1990). Uma forma possível de introduzir a interação entre os campos fermiônicos e os campos escalares é através de um acoplamento de Yukawa, isto é, a interação é dada pelo termo $\eta\bar{\Psi}(\phi + \chi)\Psi$. Neste trabalho, primeiramente procuramos as equações de movimento do campo fermiônico aplicando o princípio da Hamilton. Logo, para encontrar as soluções estáticas das equações de campos escalares seguimos, as ideias desenvolvidas por (BOGOMOLNY, 1976; RAJARAMAN, 1979; BAZEIA et al., 2002). Por esta razão, revisamos alguns métodos e conceitos matemáticos básicos para entender como a parede Bloch surge a partir das soluções de campos clássicos. Em relação à equação de campo de férmions, como o espaço é $(1 + 1)$ dimensões, o procedimento é mapear o problema em uma equação tipo Schrödinger com um potencial do tipo Scarf II (Scarf hiperbólico), assim somos capazes de encontrar soluções analíticas utilizando a maquinaria matemática das funções hipergeométricas. Depois disso, estamos em posição de escrever tanto os estados ligados quanto os estados de espalhamento. Além disso, para férmions não massivos encontramos o estado de modo zero ($E = 0$), o qual dependerá do sinal da constante do acoplamento de Yukawa.

Abstract

This dissertation presents the study of the scattering and bound states for fermion fields coupled to two scalar real fields in $(1 + 1)$ dimensions. This scalar field background is usually called Bloch wall and it comes up as a topological solution to nonlinear partial differential equations. This type of wall is widely used and is also well-known not only in the theoretical framework but also in the experimental context (PÁTEK; TOMÁŠ; BOHÁČEK, 1990). The way to introduce an interaction between the fermion field and the scalar field is through a suitable Yukawa coupling, that is, the interaction field is given by $\eta\bar{\Psi}(\phi+\chi)\Psi$. In this work, we first find the fermionic field equations by applying Hamilton's principle. Then, in order to find the static solutions of the scalar field equations, we follow the ideas developed by (BOGOMOLNY, 1976; RAJARAMAN, 1979; BAZEIA et al., 2002). For this reason, we review some mathematical methods and basic concepts in order to understand how the Bloch wall arises from the classical field solutions. Regarding the fermion field equations, since we are working in $(1 + 1)$ dimensions, we resort by mapping our problem into a Schrödinger-like equation in a Scarf II potential (hyperbolic Scarf potential); hence, we are able to find analytic solutions by using the mathematical machinery of hypergeometric functions. After that, we are in position to write both the bound and scattering states. Also, we find massless fermion zero state $E = 0$, which will depend on the Yukawa coupling constant.

Lista de ilustrações

Figura 1 – O potencial ϕ^4	20
Figura 2 – (a) O kink. (b) O antikink com $x_0 = 0$	22
Figura 3 – Densidade de energia para o kink com $x_0 = 0$	23
Figura 4 – (a) Parede de Néel (b) Parede de Bloch	35
Figura 5 – O potencial Scarf	52
Figura 6 – O coeficiente de transmissão	56
Figura 7 – Densidade de probabilidade como função da posição, para $\eta = 1$ e $a = 0.4$	58

Lista de símbolos

Γ	Letra grega Gama
Λ	Lambda
ζ	Letra grega minúscula zeta
\in	Pertence

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
2	CAMPO ESCALAR REAL EM $(1 + 1)$ DIMENSÕES	17
2.1	Conceitos Fundamentais	17
2.2	Carga Topológica	19
2.3	O <i>kink</i> ϕ^4	20
2.4	A energia do <i>Kink</i> ϕ^4	22
2.5	Carga Topológica do <i>Kink</i> ϕ^4	24
2.6	Estabilidade linear	25
3	O MÉTODO DE BOGOMOL'NYI	27
3.1	O método de Bogomol'nyi	27
3.2	Equação de Bogomol'nyi para o modelo ϕ^4 (Kink Z_2)	28
3.3	Equação de Bogomol'nyi para o potencial supersimétrico	30
3.4	O método de Bogomol'nyi para dois campos escalares	31
3.5	Estabilidade linear para soluções BPS	33
3.6	Paredes de domínio	34
3.6.1	Tipos de Paredes	34
3.7	As equações de uma parede de Bloch	35
4	FÉRMIONS NA PRESENÇA DE BÓSONS	38
4.1	Equação de Dirac	38
4.2	Matrizes Gama	39
4.3	Transformações de Lorentz para espinores	41
4.4	Solução da equação livre de Dirac em $(3 + 1)$ dimensões	43
4.5	A equação de Dirac unidimensional	45
4.6	Campos de interação	46
4.7	Acoplamento Bóson-Férmion	47
5	FÉRMIONS EM UMA PAREDE DE DOMÍNIO DE BLOCH	48
5.1	Revisão do acoplamento entre bósons e férmions em $(1 + 1)$ dimensões	48
5.2	Interação com férmions	50
5.3	Férmions numa parede de Bloch	51
5.3.1	Estados de espalhamento	52
5.3.2	Estados ligados	56
5.3.3	Solução de modo zero	57

Considerações Finais	60
REFERÊNCIAS	61
APÊNDICES	66
APÊNDICE A – APÊNDICE MÉTODO DA ÓRBITA-TENTATIVA	67
APÊNDICE B – APÊNDICE FUNÇÃO HIPERGEOMÉTRICA . .	70

1 Introdução

Quando queremos descrever um fenômeno físico ou formular leis fundamentais da natureza para algum tipo de problema, em alguma área da física, tais como por exemplo: física de estado sólido, dinâmica de fluídos, física de plasma, cosmologia, ciência dos materiais, entre outras, nós temos que lidar com equações diferenciais parciais não-lineares. A procura de soluções de equações diferenciais parciais não-lineares tem sido uma área ativa de pesquisa, pois as soluções exatas podem nos dar uma melhor compreensão do mecanismo do fenômeno físico. Por exemplo, uma solução conhecida é a solução de sóliton¹. Por sóliton queremos dizer que um *lump*² de energia move-se a uma velocidade constante e sem mudar de forma. Historicamente, este objeto foi chamado assim por Zabusky e Kruskal (ZABUSKY; KRUSKAL, 1965) depois de obter numericamente algumas ondas que não modificavam sua forma e velocidade após uma colisão com outro sóliton. A principal característica de tais soluções é a sua estabilidade. Aplicações de sólitons podem ser encontradas em diferentes contextos e elas estão relacionadas a diversas áreas como: cosmologia, física nuclear, física de altas energias, física da matéria condensada (GOLDSTONE; WILCZEK, 1981) e até mesmo em nano-tecnologia e modelagem do DNA (ENGLANDER et al., 1980).

Existem dois tipos diferentes de sólitons, eles podem ser do tipo topológico ou do tipo integrável. Entre eles existem alguns pontos em comum: todos os sólitons são localizados espacialmente, são estáveis e são soluções do tipo *lump* (RAJARAMAN, 1982) de equações diferenciais parciais não-lineares. Da mesma forma, existem algumas diferenças. Sólitons integráveis devem sua estabilidade aos detalhes locais da equação da evolução, isso significa que o sistema solitônico em estudo pode reduzir-se a um número finito de operações algébricas e portanto, ser completamente integrável. Uma das consequências desta característica é que as soluções solitônicas integráveis de tais sistemas têm um número infinito de quantidades conservadas, e este por sua vez é responsável pela estabilidade do sóliton. Além disso, sólitons integráveis ocorrem quando existe um adequado equilíbrio entre o termo dispersivo e o termo não-linear na equação³, só neste caso o *lump* pode mover-se sem alterar a forma. O equilíbrio será destruído pela adição de um termo que vai perturbar a equação de evolução. De maneira oposta aos sólitons integráveis, os sólitons topológicos devem sua existência ao papel desempenhado pelo aspetos globais do campo (sua topologia). Quando impomos condições para que o campo tenha um único

¹ Em 5 de setembro de 2016, um novo sóliton foi descrito na revista Nature Physics (YANG et al., 2016)

² (RUBAKOV, 2009) e (COLEMAN,) utilizam essa palavra para definir o sóliton. De acordo com o dicionário (MICHAELIS, 2008), sóliton é um pulso.

³ Em ótica pode-se produzir sólitons quando na equação de um pulso de luz, o termo não-linear cancela o termo dispersivo. Este efeito é conhecido como efeito Kerr (REMOISSENET, 2013)

valor finito na sua energia, obtêm-se restrições no seu comportamento assintótico o que implica que deverá haver um *lump* solitônico em algum lugar no espaço.

Sólitons topológicos têm muitas aplicações em áreas como na física da matéria condensada e física de partículas. Por exemplo, em física da matéria condensada, sólitons são usados para modelar deslocamentos de cristais, paredes de domínio magnético, pulsos de onda em fibras ópticas (GEDALIN; SCOTT; BAND, 1997). Por outro lado, o sóliton topológico mais simples em $(1 + 1)$ dimensões é chamado de *kink*, em $(2 + 1)$ dimensões temos vórtices e os monopólos e skyrmions em $(3 + 1)$ dimensões.

Neste ponto, precisamos explicar o que a palavra topologia⁴ significa: a topologia é o ramo da matemática que está interessada em estudar as formas e as propriedades do espaço que são invariantes sob deformações contínuas. Por exemplo, um defeito topológico pode ser um nó que existe na estrutura microscópica de um material (TKALEC et al., 2011). Em metais, os defeitos surgem durante a transição de fase e os defeitos resultantes podem ser defeitos tipo ponto, linha ou planares. Por outro lado, na física teórica, é esperado que os defeitos topológicos surjam sempre que houver uma transição de fase e em particular após de uma quebra espontânea de simetria. Estes novos objetos se originam devido à degenerescência do estado fundamental da teoria. Além disso, esses interessantes objetos topológicos desempenham um papel importante em vários ramos da física. Tais defeitos, por exemplo, podem surgir como *kinks*, vórtices em superfluidos (BRUCKMANN, 2007) e monopólos magnéticos em teorias de Yang Mills (BELAVIN et al., 1975). Entretanto, as paredes de domínio topológicos (*kinks* em 2D), surgem como uma solução solitônica de um campo escalar e deram um impulso à ciência teórica e fenomenológica nos últimos anos. Extensas investigações foram feitas em paredes de domínio, pois elas podem representar uma interface entre materiais magnéticos em matéria condensada. Na cosmologia, eles podem explicar transições de fase no início do universo (VILENKIN; SHELLARD, 2000). Além disso, pesquisas sobre sistemas fermiônicos em uma parede de domínio tanto em $(1 + 1)$ e $(2 + 1)$ dimensões têm sido capazes de explicar o fenômeno da carga fracionária e a condutividade de alguns materiais, como o poliacetileno (JACKIW; REBBI, 1976) e o grafeno (HOU; CHAMON; MUDRY, 2007), respetivamente.

A parede de Bloch possui um vasto estudo teórico, sendo explorada em diversas áreas da física, por exemplo, em materiais magnéticos (ZHU, 2005). Por outro lado, na literatura podemos encontrar que soluções de modo zero são de grande importância, por exemplo, o modo zero é usado para colocar férmions quirais em estruturas discretas⁵ (KAPLAN, 1992). Além disso, na área de materiais ferromagnéticos, o estado de modo zero é responsável pelo efeito Hall quântico semi-inteiro para o grafeno (FUJITA; SUZUKI, 2016). Embora seja fácil calcular o modo zero, estados ligados e estados de espalhamento não são

⁴ O Prêmio Nobel de Física de 2016 foi concedido a David Thouless, Michael Kosterlitz e Duncan Haldane por seu trabalho pioneiro em topologia associada com estados exóticos da matéria.

⁵ Em *lattice gauge theory*, estas estruturas são uma rede de pontos do espaço-tempo.

tão simples. No último caso, eles têm gerado muita atenção no campo da matéria condensada, especialmente na produção de isolantes topológicos e além disso tem uma relevância teórica para estudos de problemas de valores próprios (TAKHTADZHIAN; FADDEEV, 1974). Ademais, estados ligados desempenham um papel importante para construir as transformações inversas do espalhamento, as quais podem ser usadas para descrever a evolução de soluções solitônicas.

Nesta dissertação estudamos a interação de férmions num defeito topológico tipo parede de Bloch. O campo de férmions e os campos escalares são acoplados através de um acoplamento de Yukawa geral, o qual será essencial para determinar o estado de modo zero. Escolhendo a forma da interação entre férmions e bósons como a soma das soluções solitônicas da parede de Bloch, o problema pode ser mapeado numa equação tipo Schrödinger com um potencial tipo Scarff II (SCARF, 1958). Vale a pena mencionar que a solução do nosso problema é obtida de forma analítica. Assim podemos calcular completamente os coeficientes de transmissão e reflexão, assim como também os estados ligados e o modo zero. A fim de alcançar o nosso objetivo, esta dissertação é estruturada da seguinte forma. No capítulo 2, discutimos os conceitos fundamentais, por isso estudamos o campo escalar real em $(1 + 1)$ dimensões. Encontramos as condições necessárias que um campo deve satisfazer para obter o mínimo de energia e, portanto, para encontrar soluções topológicas. Depois disso, estudamos o número quântico chamado de carga topológica. Em seguida, estudamos o modelo ϕ^4 , e estudaremos a estabilidade das soluções estáticas do campo escalar. No capítulo 3, apresentamos o método Bogomol'nyi que permite encontrar equações de primeira ordem e também permite minimizar a energia. Então, como um exemplo, aplicamos o método de Bogomol'nyi para o modelo ϕ^4 , que contém um campo escalar. Além disso, nós aplicamos o mesmo método para dois campos escalares. No capítulo 4, apresentamos a equação de Dirac e revemos algumas ideias básicas desta equação. Em seguida, discutimos as principais características das matrizes gama. Depois disso, nós estudamos a solução da equação de Dirac para uma partícula livre. Finalmente, mostramos o formalismo que descreve a interação entre campos de bósons e férmions. O capítulo 5 é dedicado a resolver o nosso problema e alcançar os nossos objetivos. Aqui, vamos usar todas as técnicas que aprendemos nos capítulos anteriores. Por fim, terminamos o capítulo 6 com as conclusões.

Neste trabalho estamos usando o sistema natural de unidades com $\hbar = c = 1$, onde $\hbar = h/2\pi$, sendo h a constante de Planck e c a velocidade da luz. A métrica do espaço tempo de Minkowski é dada por $(+, -, -, -)$.

2 Campo Escalar Real em $(1 + 1)$ dimensões

Um campo escalar é uma função que relaciona um único número para cada ponto no espaço, por isso, o campo escalar é uma função que tem um valor diferente em cada ponto do espaço. Em física, o campo escalar pode ser interpretado como a informação sob alguma distribuição no espaço. Pode-se dizer que teorias que usam campos escalares são pedagogicamente importantes para o estudo de conceitos que envolvem a física. Por exemplo, em cosmologia se usa um campo escalar chamado ínflaton para modelar a expansão do espaço-tempo no início do universo (GUTH, 1998). Também, campos escalares podem ser usados para descrever o fenômeno de quebra espontânea de simetria (MANTON; SUTCLIFFE, 2004). Outro exemplo do uso do campo escalar pode ser na distribuição da temperatura no espaço, e na distribuição da pressão em um fluido. Em teoria quântica de campos, as partículas de spin zero estão representadas por um campo escalar (WACHTER, 2010).

2.1 Conceitos Fundamentais

Nesta seção apresentamos os conceitos teóricos básicos para entender a origem das soluções do tipo *kink*. Considere um campo escalar real $\phi(x, t)$ com a seguinte densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, t) = \frac{1}{2} (\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2} (\phi')^2 - V(\phi), \quad (2.1.1)$$

onde $\phi' = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ e $\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t}$. O potencial é uma função positiva dependente do campo, isto é, $V(\phi)$.

A ação do sistema (2.1.1) é escrita como

$$S = \int dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \mathcal{L}(x, t). \quad (2.1.2)$$

O princípio da mínima ação requer que a ação S seja estacionária; isto significa que,

$$\delta \left(\int dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \mathcal{L}(x, t) \right) = 0. \quad (2.1.3)$$

A equação de movimento obtida a partir da eq. (2.1.3) é dada por

$$\ddot{\phi} - \phi'' = -\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}, \quad (2.1.4)$$

se considerarmos soluções estáticas (RUBAKOV, 2009) para o campo escalar, isto é, soluções que para algum sistema de referência não dependem do tempo, a eq. (2.1.4) reduz-se

a

$$\phi'' = \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}. \quad (2.1.5)$$

Para resolver esta equação diferencial, necessitamos das seguintes condições de contorno

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) \equiv \phi_{\pm} = \pm v. \quad (2.1.6)$$

onde $\pm v$ são os mínimos do potencial. Se $\phi_+ = \phi_-$, então o campo ϕ pode ser continuamente deformado a uma solução com energia zero. Por outro lado, se $\phi_+ \neq \phi_-$, nesse caso, o campo ϕ não pode ser continuamente deformado a uma solução com energia zero (MANTON; SUTCLIFFE, 2004).

A outra condição de contorno adicional é dada por

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) = 0. \quad (2.1.7)$$

A relação (2.1.6) garante que $\phi(x)$ tenda assintoticamente para um dos zeros do potencial de maneira que $V(\pm v) = 0$.

A energia total em (1+1) dimensões é definida por (VACHASPATI, 2006)

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varepsilon(x, t) \quad (2.1.8)$$

onde $\varepsilon(x, t)$ é a densidade de energia.

O tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ é definido como (RUBAKOV, 2009)

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - V(\phi) \right] \quad (2.1.9)$$

e a componente T^{00} representa a densidade de energia do sistema, assim temos que

$$\varepsilon(x, t) = T^{00} = \frac{1}{2} (\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2} (\phi')^2 + V(\phi) \quad (2.1.10)$$

substituindo (2.1.10) em (2.1.8) obtemos que

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2} (\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2} (\phi')^2 + V(\phi) \right]. \quad (2.1.11)$$

Da eq. (2.1.11) vemos que a energia $E[\phi]$ está dada por uma soma de termos positivos e é zero só quando $\phi = \pm v$. Estes são os mínimos absolutos da energia e eles são chamados vácuos clássicos. Além disso, a energia total E será conservada se satisfaz as seguintes condições

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (\text{quando } |x| \rightarrow \infty) \quad (2.1.12)$$

e também $V(\phi) = 0$ para $\phi = \pm v$. Se o potencial V tem somente um zero, então não existem soluções independentes do tempo com energia finita. Isto significa que a energia do sistema físico não é finita em alguma região do espaço e não cai a zero rapidamente no infinito e não teremos objetos topológicos, tais como *kinks*. Por outro lado, se V tem vários zeros, a teoria possui vários estados de vácuo.

2.2 Carga Topológica

O teorema de Noether nos diz que, se um sistema é invariante sob certas transformações, então existe uma ou mais quantidades conservadas. Essas quantidades são chamadas carga de Noether e correntes de Noether, e desempenham um papel essencial na física. É importante observar que esse teorema é definido para os sistemas que passam por transformações globais e locais. Por outro lado, existe outro tipo de quantidade conservada, que nada tem a ver com o teorema de Noether, e chama-se carga topológica, isto significa que a sua existência depende do comportamento nas condições de fronteira do sistema dado.

A corrente topológica em (1+1) dimensões pode ser definida como (RAJARAMAN, 1982)

$$j^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \quad (2.2.1)$$

onde $\mu, \nu = 0, 1$ e $\varepsilon^{\mu\nu}$ é um tensor antisimétrico, com $\varepsilon^{01} = 1, \varepsilon^{10} = -1$ e $\varepsilon^{00} = \varepsilon^{11} = 0$. Pode ser mostrado que a equação (2.2.1) obedece a seguinte condição

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2.2.2)$$

Este último resultado nos diz que a corrente topológica é conservada. É claro que a corrente j^μ não está relacionada com a invariância da Lagrangiana sob alguma transformação. Além disso, pode-se ver que a equação (2.2.2) é obtida sem o uso das equações de movimento. A carga topológica é definida pela integral em todo o espaço da componente temporal da corrente topológica, isto é

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2v} \int_{-\infty}^{+\infty} dx j^0 = \frac{1}{2v} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varepsilon^{0\nu} \partial_\nu \phi \\ Q &= \frac{1}{2v} \int_{-\infty}^{+\infty} dx (\varepsilon^{00} \partial_0 \phi + \varepsilon^{01} \partial_1 \phi) \\ Q &= \frac{1}{2v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = \frac{1}{2v} \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi \end{aligned}$$

assim, chega-se a

$$Q = \frac{1}{2v} (\phi(+\infty) - \phi(-\infty)) \quad (2.2.3)$$

essa última expressão indica que a carga topológica só depende das propriedades assintóticas do campo ϕ . Vemos que quando $\phi(+\infty) \neq \phi(-\infty)$ a carga Q terá valor diferente de zero, isto implica que existem soluções não triviais do campo que interligam dois mínimos distintos do potencial. Quando $\phi(+\infty) = \phi(-\infty)$ a carga topológica Q é nula, significa que as soluções constantes (vácuo trivial) do campo conectam ao mesmo mínimo. Além disso, tomando a derivada de Q temos $dQ/dt = 0$, isso implica que a carga topológica é conservada.

2.3 O *kink* ϕ^4

Começamos esta seção estudando um modelo que surge em diversos contextos e é usado para desenvolver sistemas altamente complexos. O modelo ϕ^4 tem atraído a atenção em uma vasta abrangência na área de física. Os *kinks* são objetos topológicos e são definidos pelas condições de fronteira no infinito. Para o modelo ϕ^4 , o *kink* surge como uma solução de uma equação diferencial não-linear, sendo conhecido como *kink* Z_2 (VACHASPATI, 2006). Em função da Langrangiana original deste modelo, o *kink* é invariante sob $\phi \rightarrow -\phi$. Aqui, o modelo ϕ^4 baseia-se na utilização de um campo escalar real ϕ , em (1 + 1) dimensões. Uma característica interessante deste modelo é que o potencial tem um termo quártico em ϕ . Por conseguinte, o modelo ϕ^4 possuirá dois estados de vácuo. A densidade Lagrangiana tem a forma da eq. (2.1.1), e o potencial (veja figura 1) pode ser escrito como

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} \left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 \quad (2.3.1)$$

onde λ e m^2 são constantes positivas.

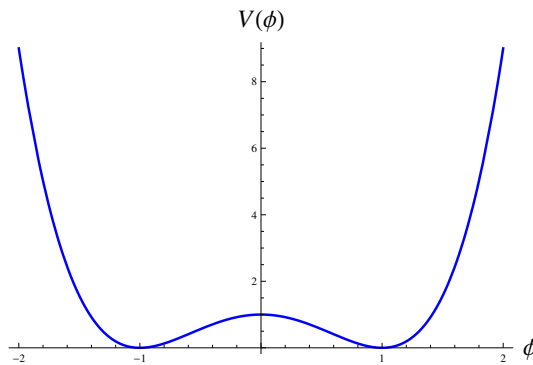


Figura 1 – O potencial ϕ^4

Uma condição necessária para a existência do *kink* é que o potencial tem que ter pelo menos dois mínimos. Historicamente, o modelo ϕ^4 foi usado pela primeira vez por Ginzburg e Landau na teoria de transições de fase (LANDAU; GINZBURG, 1950). É importante mencionar que o *kink* do modelo ϕ^4 em determinados cenários pode ser visto como uma partícula e podemos ter um melhor entendimento sobre certos comportamentos das soluções, como por exemplo, podemos usar conceitos de dispersão de partículas (GOODMAN; HABERMAN, 2005). No estudo da supercondutividade, podemos encontrar *kinks* em óxidos de metais de transição (GRAF et al., 2006), tanto em supercondutores de baixa temperatura com energias de 40-70 meV, como também em supercondutores de alta temperatura com energias maiores a 150 meV. Este tipo de pesquisa experimental é feita usando o método de espectroscopia eletrônica como podemos ver em (BYCZUK et al., 2007).

Para calcular os mínimos do potencial (2.3.1) procedemos da seguinte forma: calculando

a derivada de $V(\phi)$ em relação a ϕ e fazendo igual a zero. Assim, temos que

$$\frac{dV(\phi)}{d\phi} = \lambda\phi \left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right) = 0$$

e os mínimos são $\phi \equiv \pm v = \pm \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}} \equiv \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$, ou seja, o potencial tem dois mínimos. Se multiplicarmos a (2.1.5) por ϕ' obtemos

$$\phi' \phi'' = \phi' \frac{dV(\phi)}{d\phi}$$

e integrando na coordenada x , temos

$$\begin{aligned} \int dx \phi' \phi'' &= \int dx \phi' \frac{dV(\phi)}{d\phi} \\ \int dx \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \phi' \right)^2 &= \int dx \frac{dV(\phi)}{dx} \\ \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 &= 2V(\phi) \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

e tomando a raiz quadrada em ambos termos, a eq. (2.3.2) pode ser reescrita como

$$dx = \pm \frac{d\phi}{\sqrt{2V(\phi)}},$$

logo, integrando obtemos

$$x - x_0 = \pm \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{d\phi}{\sqrt{2V(\phi)}} \quad (2.3.3)$$

onde $\phi(x_0)$ é um parâmetro arbitrário para um ponto x_0 e este pode ser qualquer número entre os dois zeros do potencial $V(\phi)$. Substituindo o potencial (2.3.1) em (2.3.3), obtemos

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \pm \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{2\lambda}{4} \left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)}} \\ x - x_0 &= \pm \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi \right) \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

invertendo a eq. (2.3.4), consegue-se a seguinte expressão

$$\operatorname{arctanh} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi \right) = \pm \frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0)$$

$$\phi(x) = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \quad (2.3.5)$$

onde assumimos que $\phi(x_0) = 0$ (RAJARAMAN, 1982). A constante de integração x_0 nos dá a posição do centro de kink, ou seja, x_0 representa o centro da configuração do campo $\phi(x)$. A solução referida à eq. (2.3.5) com o sinal “+” é representada na figura 2a¹, e será chamada de *kink*. Por outro lado, a solução com o sinal “-” será um *antikink*, ver figura 2b. Como o modelo ϕ^4 é simétrico, pode-se escolher $x_0 = 0$ (KAKU, 1993).

¹ Veja que o campo ϕ varia em uma pequena faixa ao longo do eixo x

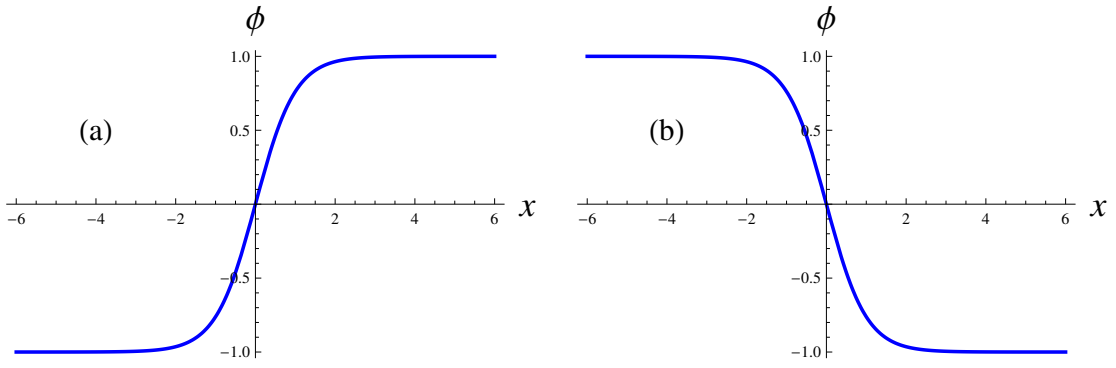


Figura 2 – (a) O kink. (b) O antikink com $x_0 = 0$

Um fato interessante a notar é que o *kink* instala-se em um estado em que a metade do campo habita em um vácuo e a outra metade no outro, isto também acontece com o *anti-kink*. Em outras palavras o *kink* e *anti-kink* conectam os dois mínimos do potencial, quer dizer que o *kink* vai de $\phi(x \rightarrow -\infty) = -v$ até $\phi(x \rightarrow +\infty) = +v$, no entanto o *anti-kink* vai de $\phi(x \rightarrow -\infty) = +v$ até $\phi(x \rightarrow +\infty) = -v$.

Lembramos que a solução (2.3.5) foi obtida para soluções estáticas, por conseguinte, soluções dependentes do tempo são alcançadas após um *boost* de Lorentz à eq. (2.3.5). Para isso, precisamos ter em mente que o campo ϕ é um escalar e é invariante sob um *boost*, devido a esse fato necessitamos apenas transformar a variável x dada em (2.3.5). Desse modo, o *kink* em movimento será

$$\phi(x, t) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}} \frac{(x - x_0 - ut)}{\sqrt{1 - u^2}} \right] \quad (2.3.6)$$

onde o parâmetro u representa a velocidade do *kink*, e encontra-se em $-1 < u < 1$. Aqui, x_0 é a posição do centro do *kink* em $t = 0$.

No limite não relativístico, isto é, quando $|u| \ll 1$, o *kink* em movimento torna-se a

$$\phi(x, t) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0 - ut) \right]$$

2.4 A energia do *Kink* ϕ^4

Para avaliar a energia, consideremos que o *kink* seja estacionário, ou seja, vamos encontrar a energia do campo ϕ que é independente do tempo.

A densidade de energia foi escrita na eq. (2.1.10) como

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi)$$

Note que o primeiro termo na equação acima representa a densidade da energia cinética, a soma dos outros termos são chamados densidade da energia estática. Se considerarmos

a condição $\frac{d\phi}{dt} = 0$, teremos

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi). \quad (2.4.1)$$

Agora, considerando a eq. (2.3.2), podemos reescrever a equação acima como

$$\varepsilon(x) = 2V(\phi) = 2 \frac{\lambda}{4} \left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2. \quad (2.4.2)$$

Como a energia precisa ser finita, o potencial $V(\phi)$ deve ir a um dois mínimos (vácuos) quando $x \rightarrow \pm\infty$, pois de outro modo, se substituirmos os dois termos da eq. (2.4.1) na expressão da energia total (veja eq. (2.1.8)) ela divergiria. Ou seja, como $E = 2V(\phi_i) \int_{-\infty}^{\infty} dx$, então, vemos que para obter soluções fisicamente aceitáveis devemos ter que o potencial assintoticamente deve ser $V(\phi_i) = 0$. Substituindo (2.3.5) em (2.4.2), obtemos

$$\varepsilon(x) = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{m^2}{\lambda} \tanh^2 \frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 = \frac{\lambda m^4}{2 \lambda^2} \left(\tanh^2 \frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) - 1 \right)^2,$$

portanto, a densidade de energia para o *kink* é

$$\varepsilon(x) = \frac{m^4}{2\lambda} \operatorname{sech}^4 \frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0). \quad (2.4.3)$$

Vemos que a distribuição de densidade de energia $\varepsilon(x)$ está concentrada em torno de x_0 . (Veja-se a figura 2.4). Além disso, encontramos que $\varepsilon(x)$ é finita tanto para o *kink* quanto para o *antikink*.

Observe que a densidade de energia do *kink* é máxima, e igual a $m^4/2\lambda$, no ponto x_0 . Por esse motivo, o ponto x_0 representa a posição do centro do *kink*. Ademais, note que quando $|x - x_0| \gg \sqrt{2}/m$ a densidade de energia cai rapidamente a zero.

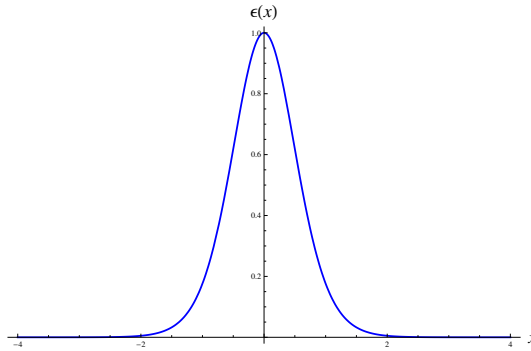


Figura 3 – Densidade de energia para o kink com $x_0 = 0$

Se considerarmos que o campo ϕ representa a magnetização de um ferromagneto, então para encontrar a energia total² do kink, é necessário substituir a eq. (2.4.2) na eq. (2.1.8), assim temos

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx 2V(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi \frac{dx}{d\phi} 2V(\phi)$$

² a densidade de energia para este sistema vai ser dada por (2.4.1), e o $V(\phi)$ é o potencial do modelo ϕ^4

$$E[\phi] = \int_{-v}^{+v} 2V(\phi) \frac{dx}{d\phi} d\phi,$$

logo, usando a equação (2.3.2), obtemos

$$E = \int_{-v}^{+v} 2V(\phi) \frac{1}{\sqrt{2V(\phi)}} d\phi = \int_{-v}^{+v} \sqrt{2V(\phi)} d\phi. \quad (2.4.4)$$

Ao colocarmos o potencial dado por (2.3.1) em (2.4.4) teremos

$$E = \int_{-v}^{+v} \sqrt{2 \frac{\lambda}{4} \left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2} d\phi = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_{-v}^{+v} \left| \phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right| d\phi,$$

o valor absoluto garante que a energia seja positiva, logo

$$E = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left| \left(\frac{\phi^3}{3} - \frac{m^2}{\lambda} \phi \right) \right|_{-v}^{+v} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left| \frac{v^3}{3} - \frac{m^2}{\lambda} v - \left(\frac{(-v)^3}{3} + \frac{m^2}{\lambda} (-v) \right) \right|,$$

$$E = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left| \frac{v^3}{3} - \frac{m^2}{\lambda} v + \frac{v^3}{3} - \frac{m^2}{\lambda} v \right| = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left| \frac{2v^3}{3} - 2 \frac{m^2}{\lambda} v \right|,$$

substituindo o valor de $v = m/\sqrt{\lambda}$, vamos ter que

$$E = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left| \frac{2}{3} \frac{m^3}{\lambda^{3/2}} - \frac{2}{\lambda} m^2 \frac{m}{\lambda^{1/2}} \right| = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \frac{4m^3}{3\lambda^{3/2}}. \quad (2.4.5)$$

Assim, a energia total está dada por

$$E = \frac{2\sqrt{2} m^3}{3 \lambda},$$

que corresponde à massa do *kink*. Como a energia do *kink* é finita, quer dizer que ele existe.

2.5 Carga Topológica do *Kink* ϕ^4

De acordo a equação (2.2.3), encontramos

$$Q = \frac{1}{2v} (\phi(+\infty) - \phi(-\infty)) \quad (2.5.1)$$

Para o *kink*, temos que $\phi(+\infty) = v$ e $\phi(-\infty) = -v$, portanto $Q = +1$ e para o *antikink* temos que $\phi(-\infty) = v$ e $\phi(+\infty) = -v$, logo $Q = -1$.

Note que ao contrário de uma solução constante, isto é, quando $\phi(-\infty) = \phi(+\infty) = v$, temos $Q = 0$, quer dizer que o estado do vácuo tem carga igual a zero. Também, Vemos que a carga Q é um número discreto, portanto, Q não pode ser transformado continuamente. Quando as soluções possuem $Q \neq 0$, dizemos que a solução é topológica. Do contrário, quando $Q = 0$, dizemos que a solução é não topológica.

2.6 Estabilidade linear

Nesta seção vamos investigar a estabilidade das soluções estáticas da equação de movimento para o campo $\phi(x)$. O procedimento dado por (JACKIW, 1977), nos diz que devemos introduzir pequenas perturbações de primeira ordem em torno das soluções. Ou seja, vamos supor que a solução da eq. (2.1.4) é da forma:

$$\phi(x, t) = \phi(x) + \eta(x, t), \quad (2.6.1)$$

onde $\phi(x)$ é solução da equação estática (2.1.5) e $\eta(x, t)$ é uma pequena perturbação em torno desta solução. Substituindo a eq. (2.6.1) em (2.1.4) encontramos que,

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} - \frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{d^2\eta}{dx^2} + \left. \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi=\phi(x,t)} = 0. \quad (2.6.2)$$

Fazendo uma expansão de Taylor para o potencial em torno de $\phi(x)$,

$$\left. \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi=\phi(x,t)} = \left. \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi=\phi(x)} + \eta \left. \frac{d^2V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi(x)} + \frac{\eta^2}{2} \left. \frac{d^3V}{d\phi^3} \right|_{\phi=\phi(x)} + \dots, \quad (2.6.3)$$

considerando termos até primeira ordem da eq. (2.6.3) e substituindo na eq. (2.6.2), obtemos,

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} - \frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{d^2\eta}{dx^2} + \left. \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi=\phi(x)} + \eta \left. \frac{d^2V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi(x)} = 0. \quad (2.6.4)$$

Os segundo e quarto termos da equação acima se anulam, se considerarmos a eq. (2.1.5). Portanto, ficamos com a seguinte expressão

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} - \frac{d^2\eta}{dx^2} + u(x)\eta = 0, \quad (2.6.5)$$

onde $u(x) = \left. (d^2V/d\phi^2) \right|_{\phi=\phi(x)}$. Usando a separação de variáveis para obter uma solução para a eq. (2.6.5), ou seja, vamos supor uma solução do tipo

$$\eta(x, t) = \eta(x)T(t), \quad (2.6.6)$$

então a última equação torna-se em

$$T''(t)\eta(x) - \eta''(x)T(t) + u(x)\eta(x)T(t) = 0, \quad (2.6.7)$$

dividindo a eq. (2.6.7) por (2.6.6) obtemos

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\eta''(x)}{\eta(x)} - u(x). \quad (2.6.8)$$

Notamos que o lado esquerdo desta expressão depende só da variável t , enquanto o lado direito depende de x . Isto quer dizer, que ambos lados da eq. (2.6.8) devem ser iguais a uma constante. Seja $-\omega_n^2$ a constante, então a última equação torna-se em

$$T''(t) + \omega_n^2 T(t) = 0 \quad (2.6.9)$$

e

$$-\eta''(x) + u(x)\eta(x) = \omega_n^2\eta(x). \quad (2.6.10)$$

A equação (2.6.9) é do tipo oscilar harmônico e sua solução é escrita como

$$T(t) = T_0 \cos(\omega_n t). \quad (2.6.11)$$

A equação (2.6.10) é uma equação de autovalores tipo Schrödinger, a qual é expressa da seguinte forma

$$\widehat{H}\eta_n(x) = \omega_n^2\eta_n(x), \quad (2.6.12)$$

onde $\widehat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$ é o operador Hamiltoniano, ω_n^2 são os autovalores e $\eta_n(x)$ representa o conjunto de autofunções do operador \widehat{H} . Notamos que se tivermos $\omega_n^2 < 0$, então ω_n é imaginário e nossa perturbação não seria pequena, isto é, teremos uma solução instável. Entretanto, se $\omega_n^2 > 0$, temos que ω_n é real, resultando em uma solução estável. Quando $\omega_n^2 = 0$, a solução é estável com perturbação constante no tempo.

3 O Método de Bogomol'nyi

No capítulo 2, encontramos que a solução de uma equação diferencial não-linear (defeito topológico) de segunda ordem para um campo escalar pode ser obtida resolvendo a equação de movimento de Euler-Lagrange (GOLDSTEIN, 1965). No entanto, há um método alternativo descoberto por (BOGOMOLNY, 1976) que encontra soluções de equações diferenciais não-lineares de segunda ordem. Este método consiste na redução da equação diferencial de segunda ordem para um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem. Geralmente, as equações de campo de primeira ordem são chamadas equações Bogomol'nyi, embora eles foram derivados por Belavin e Polyakov para um modelo da teoria de Yang-Mills SU(2) (BELAVIN et al., 1975). Por exemplo, os monopólos em \mathbb{R}^3 são soluções de uma equação diferencial parcial de primeira ordem que é uma equação de Bogomol'nyi (SUTCLIFFE, 1997). Como as equações de Bogomol'nyi não envolvem derivadas temporais, suas soluções são configurações solitônicas estáticas ou multi-solitônicas. Modelos de campo que satisfazem as equações de Bogomol'nyi podem ser encontrados em instantons de Yang Mills (VAINSHTEIN et al., 1982; IVANOVA, 2016), modelos sigma gravitacionais (FORGÁCS; HORVATH; HORVATHY, 1994), e vários tipos de buracos negros acoplados à matéria (BRADEN; VARELA, 1998). Por outro lado, as soluções de Bogomol'nyi podem reproduzir os resultados experimentalmente de massas nucleares como o He⁴. Sem a equação de Bogomol'nyi, seria difícil compreender o cancelamento exato entre a força magnética e força escalar, quando temos dois monopólos separados (MANTON; SUTCLIFFE, 2004).

Para obter as equações de Bogomol'nyi, o primeiro passo consiste em reescrever de uma forma conveniente a energia funcional, e assim pode-se evitar a resolução de equações Euler-Lagrange. Logo, impomos a condição de que a energia é mínima avaliando os termos presentes na energia funcional. Finalmente, obteremos a equação Bogomol'nyi. A ideia principal do presente método baseia-se em que o potencial V tem que ser não negativo e tem que ter pelo menos dois valores mínimos. Na seguinte seção, vamos aplicar o método Bogomolny para o modelo ϕ^4 .

3.1 O método de Bogomol'nyi

Temos que a energia funcional é escrita como (veja eq. (2.1.11))

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] \quad (3.1.1)$$

como estamos interessados em soluções estáticas, a eq. (3.1.1) se reduz a

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right]. \quad (3.1.2)$$

Completando quadrados a expressão em (3.1.2), pode ser reescrita como

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \mp \sqrt{2V(\phi)} \right)^2 \right] \pm \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{d\phi}{dx} \sqrt{2V(\phi)}, \quad (3.1.3)$$

onde os sinais são usados para os *kinks* (superior) e *antikinks* (inferior). Como procuramos o mínimo da energia, requeremos que

$$\frac{d\phi}{dx} \mp \sqrt{2V(\phi)} = 0. \quad (3.1.4)$$

Note que a eq. (3.1.4) é uma equação diferencial de primeira ordem e ela é chamada equação de Bogomol'nyi.

Aplicando (3.1.4) em (3.1.3), temos que

$$E_{min} = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{d\phi}{dx} \sqrt{2V(\phi)}, \quad (3.1.5)$$

isto quer dizer que a energia é mínima e chamada também energia Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfield (energia BPS). Por outro lado, note que a eq. (3.1.5) é válida sempre que o potencial for positivo.

Se diferenciarmos (3.1.4) respeito à variável x , temos

$$\phi'' = \pm \frac{1}{\sqrt{2V}} \frac{dV}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} = \frac{dV}{d\phi}. \quad (3.1.6)$$

A eq. (3.1.6) é a equação de movimento (2.1.5) que foi calculada para soluções estáticas. Portanto, podemos concluir que as soluções da equação (3.1.4) são também soluções da equação de movimento (2.1.5). Na seguinte seção, aplicaremos o método de Bogomol'nyi para o modelo ϕ^4 .

3.2 Equação de Bogomol'nyi para o modelo ϕ^4 (Kink Z_2)

Usando a equação (3.1.2) e o potencial dado pela eq. (2.3.1), a funcional de energia pode ser expressa como

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} \left(\frac{m^2}{\lambda} - \phi^2 \right)^2 \right]. \quad (3.2.1)$$

Onde o potencial para o modelo ϕ^4 foi reescrito (ver (VACHASPATI, 2006)), para obter soluções de campo escalar com os sinais corretos tanto para os *kinks* quanto para os

antikinks. Completando quadrados na equação (3.2.1), obteremos

$$E[\phi] = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \mp \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left(\frac{m^2}{\lambda} - \phi^2 \right) \right)^2 \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \frac{d\phi}{dx} \left(\frac{m^2}{\lambda} - \phi^2 \right) \right] \quad (3.2.2)$$

reescrevendo o segundo termo do lado direito de (3.2.2)

$$E[\phi] = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right) \right)^2 \mp \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{\phi^3}{3} - \frac{m^2\phi}{\lambda} \right) \right]. \quad (3.2.3)$$

Integrando o segundo termo da eq. (3.2.3), obtemos

$$E[\phi] = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right) \right)^2 \right] \mp \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left[\frac{\phi^3}{3} - \frac{m^2\phi}{\lambda} \right]_{\phi(x=-\infty)}^{\phi(x=+\infty)}, \quad (3.2.4)$$

onde os termos $\phi(x = +\infty)$ e $\phi(x = -\infty)$ são os mínimos do potencial que já foram discutidos na seção 2.3. Avaliando o segundo termo para uma solução tipo *kink*, temos que

$$\frac{1}{3}\phi^3(x = +\infty) - \frac{m^2}{\lambda}\phi(x = +\infty) - \frac{1}{3}\phi^3(x = -\infty) + \frac{m^2}{\lambda}\phi(x = -\infty) = -\frac{4m^3}{3\lambda^{3/2}}.$$

Substituindo essa última expressão em (3.2.4), temos que

$$E[\phi] = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right) \right)^2 \right] \mp \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left(-\frac{4m^3}{3\lambda^{3/2}} \right).$$

Considerando sinais acima nesta última equação, obtemos

$$E[\phi] = \frac{1}{2} \int dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx} + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right) \right)^2 \right] + \frac{2\sqrt{2}m^3}{3\lambda}. \quad (3.2.5)$$

Agora, nós requeremos atingir o mínimo de E , para isso precisamos fazer o primeiro termo igual a zero, isto é

$$\frac{d\phi}{dx} + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right) = 0. \quad (3.2.6)$$

A solução da eq. (3.2.6) é chamada *kink* (vide eq. (2.3.5)). Assim, as soluções que satisfazem as equações de primeira ordem possuem energia mínima e é dada por

$$E_{min} = \frac{2\sqrt{2}m^3}{3\lambda}. \quad (3.2.7)$$

Em geral, a energia pode ser escrita em função da carga topológica Q , isto é

$$E_{min} = \frac{2\sqrt{2}m^3}{3\lambda} |Q| \quad (3.2.8)$$

3.3 Equação de Bogomol'nyi para o potencial supersimétrico

Aqui vamos aplicar o método para Bogomol'nyi para um superpotencial. Estes superpotenciais estão referidos a funções contínuas do campo que são usados em teorias supersimétricas (EDELSTEIN et al., 1998). Lembre-se que as soluções de Bogomol'nyi são válidas para modelos com potencial não negativos e que apresenta pelo menos dois mínimos. O potencial é escrito em função do superpotencial W como:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2 \quad (3.3.1)$$

onde $W_\phi = dW/d\phi$. Usando as considerações da seção 3.2, podemos escrever a energia como

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2 \right] \quad (3.3.2)$$

$$E[\phi] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{d\phi}{dx} \mp \frac{dW}{d\phi} \right)^2 \pm \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dW}{d\phi} \frac{d\phi}{dx}, \quad (3.3.3)$$

observe que o primeiro termo da integral é realmente positivo. A eq. (3.3.3) pode ser reescrita como

$$E[\phi] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{d\phi}{dx} \mp \frac{dW}{d\phi} \right)^2 \pm \int_{-\infty}^{+\infty} dW, \quad (3.3.4)$$

e a energia será mínima quando

$$\frac{d\phi}{dx} \mp \frac{dW}{d\phi} = 0, \quad (3.3.5)$$

ou seja, temos obtido um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem. A equação (3.3.5) também pode ser expressa como uma equação diferencial de segunda ordem. Para conseguir isso, temos que diferenciar em função de x a eq. (3.3.5)

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \pm \frac{d}{dx} \left(\frac{dW}{d\phi} \right) = \frac{d^2W}{d\phi^2} \frac{d\phi}{dx} = \frac{dW}{d\phi} \frac{d^2W}{d\phi^2} = W_\phi W_{\phi\phi}. \quad (3.3.6)$$

Portanto, a equação de movimento independente do tempo para um potencial supersimétrico é dada por (3.3.6). Por outro lado, se a equação (3.3.5) de primeira ordem for satisfeita, então a energia BPS (3.3.4) será dada por

$$E = |W(\phi(+\infty)) - W(\phi(-\infty))| = |\Delta W|. \quad (3.3.7)$$

Assim, vemos que para avaliar o valor da energia do sistema só necessitamos calcular o superpotencial $W(\phi)$ e avaliar nos seus limites assintóticos.

A relação (3.3.1) pode reescrever-se como

$$\frac{dW}{d\phi} = \sqrt{2V},$$

inserindo o potencial ϕ^4 nesta última equação, temos

$$\begin{aligned}\frac{dW}{d\phi} &= \sqrt{2\frac{\lambda}{4}(v^2 - \phi^2)^2} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(v^2 - \phi^2) \\ \int dW &= \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int (v^2 - \phi^2) d\phi \\ W &= \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left(v^2\phi - \frac{\phi^3}{3} \right)\end{aligned}$$

onde $v = m/\sqrt{\lambda}$. Lembre-se que $\phi(\pm\infty) = \pm v$, então a energia será

$$\begin{aligned}E &= |W(+v) - W(-v)| = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left(v^2\phi - \frac{\phi^3}{3} \right)_{\phi=-v}^{\phi=+v} \\ E &= \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \left(v^2v - \frac{v^3}{3} - v^2(-v) + \frac{(-v)^3}{3} \right) \\ E &= \frac{2\sqrt{2}m^3}{3\lambda}\end{aligned}$$

a qual é a mesma obtida na eq. (3.2.7), mas neste caso, a energia foi calculada a partir do superpotencial do modelo ϕ^4 .

3.4 O método de Bogomol'nyi para dois campos escalares

Nesta seção aplicamos o método de Bogomol'nyi para o caso de dois campos escalares acoplados estáticos. Neste caso, o potencial $V(\phi, \chi)$ pode ser escrito em função do superpotencial $W(\phi, \chi)$ como

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}W_\phi^2 + \frac{1}{2}W_\chi^2 \quad (3.4.1)$$

onde $W_\phi = \frac{\partial W}{\partial \phi}$, $W_\chi = \frac{\partial W}{\partial \chi}$ e $W(\phi, \chi)$ é uma função suave dos campos ϕ e χ .

Similarmente ao procedimento mostrado para calcular a energia de um campo escalar, escrevemos a energia para o potencial dado por (3.4.1)

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + V(\phi, \chi) \right], \quad (3.4.2)$$

substituindo o potencial dado por (3.4.1) em (3.4.2) temos

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + (W_\phi)^2 + (W_\chi)^2 \right], \quad (3.4.3)$$

aproveitando o método que já conhecemos de completar quadrados, a equação acima escreve-se como

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \mp W_\phi \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} \mp W_\chi \right)^2 \right] \pm$$

$$\pm \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} 2dx \left[\frac{d\phi}{dx} W_\phi + \frac{d\chi}{dx} W_\chi \right], \quad (3.4.4)$$

como queremos que a energia seja mínima, devemos impor que o primeiro termo entre colchetes será igual a zero, portanto temos duas equações de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} \mp W_\phi = 0, \quad (3.4.5)$$

$$\frac{d\chi}{dx} \mp W_\chi = 0, \quad (3.4.6)$$

por conseguinte a energia será

$$\begin{aligned} E &= \pm \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{d\phi}{dx} W_\phi + \frac{d\chi}{dx} W_\chi \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{dW}{dx} \right] = |\Delta W(\phi, \chi)| \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

onde

$$\Delta W(\phi, \chi) = W[(\phi(+\infty), \chi(+\infty))] - W[(\phi(-\infty), \chi(-\infty))]. \quad (3.4.8)$$

Novamente obtivemos o valor da energia e ela depende dos valores assintóticos do superpotencial. A energia BPS será escrita como

$$E_{BPS} \equiv |\Delta W(\phi, \chi)|. \quad (3.4.9)$$

Como temos duas equações para resolver (3.4.5) e (3.4.6), necessitamos impor as condições de contornos aos campos e às suas derivadas, isto é similar ao que foi feito quando se tinha um único campo real. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) \equiv \phi_\pm = \pm v_1 \quad (3.4.10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \chi(x) \equiv \chi_\pm = \pm v_2 \quad (3.4.11)$$

e também

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} \right) = 0 \quad (3.4.12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{d\chi}{dx} \right) = 0 \quad (3.4.13)$$

onde v_1 e v_2 são os pontos mínimos do potencial $V(\phi, \chi)$.

Se o modelo que estamos estudando possui um conjunto discreto de n mínimos, isto é, $(\phi_1, \chi_1), (\phi_2, \chi_2), \dots, (\phi_n, \chi_n)$. Cada par de mínimos forma um setor topológico. Se alguns dos setores topológicos tiverem soluções que obedecem as equações de primeira ordem, então, eles serão chamados setores BPS. Além disso, cada setor BPS é identificado com a energia do setor topológico. Assim, a configuração $\Delta W_{i,j} = |W(\phi_i, \chi_i) - W(\phi_j, \chi_j)|$ corresponde à densidade de energia para uma parede de domínio BPS, onde o subscrito indica a transição do i -ésimo vácuo ao j -ésimo vácuo.

3.5 Estabilidade linear para soluções BPS

O problema da estabilidade linear será analisado utilizando os resultados obtidos na seção 2.6. Quando as soluções são do tipo BPS, podemos reescrever o operador hamiltoniano \widehat{H} da eq. (2.6.12) como

$$\widehat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2V}{d\phi^2} = -\frac{d^2}{dx^2} + W_{\phi\phi}^2 + W_{\phi}W_{\phi\phi\phi}, \quad (3.5.1)$$

onde usamos (3.3.1) e ainda utilizamos $\frac{dV}{d\phi} = \frac{1}{2}\frac{dW_{\phi}^2}{d\phi} = W_{\phi}W_{\phi\phi}$. Devemos dizer que \widehat{H} possui apenas autovalores positivos.

Seja dois operadores S_+ e S_- (SOUZA et al., 2012) escritos como

$$S_{\pm} = -\frac{d}{dx} \pm [W_{\phi\phi}]_{\phi=\phi_s}, \quad (3.5.2)$$

e

$$(S_{\pm})^{\dagger} = \frac{d}{dx} \pm [W_{\phi\phi}]_{\phi=\phi_s}, \quad (3.5.3)$$

onde S_{\pm}^{\dagger} representa o conjugado hermitiano de S_{\pm} . Isto, nos permite definir os hamiltonianos

$$\widehat{H}_{\pm} = S_{\pm}^{\dagger} S_{\pm}. \quad (3.5.4)$$

Agora, aplicamos \widehat{H} sob um autoestado ξ . Assim,

$$\widehat{H}_+\xi = (S_+)^{\dagger} S_+\xi = \left(\frac{d}{dx} + W_{\phi\phi}\right) \left(-\frac{d\xi}{dx} + W_{\phi\phi}\xi\right). \quad (3.5.5)$$

Portanto,

$$\widehat{H}_+ = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{dW_{\phi\phi}}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} + W_{\phi\phi}^2 = -\frac{d^2}{dx^2} + W_{\phi\phi}^2 + W_{\phi\phi\phi}W_{\phi}. \quad (3.5.6)$$

Onde utilizamos a eq. (3.3.5). Similarmente, obtemos

$$\widehat{H}_- = -\frac{d^2}{dx^2} + W_{\phi\phi}^2 - W_{\phi\phi\phi}W_{\phi}. \quad (3.5.7)$$

Os operadores \widehat{H}_+ e \widehat{H}_- são chamados parceiros supersimétricos. Vemos que unicamente a eq. (3.5.6) reproduz a eq. (3.5.1) e se fatoriza como a eq. (3.5.4). Por isto, \widehat{H}_+ é um operador não negativo. Devemos lembrar que a eq. (2.6.12) é dada por

$$\widehat{H}\eta = w^2\eta, \quad (3.5.8)$$

multiplicando por η^{\dagger} pela esquerda e integrando, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta^{\dagger} \widehat{H} \eta dx = \int_{-\infty}^{\infty} w^2 \eta^{\dagger} \eta dx = \int_{-\infty}^{\infty} \eta^{\dagger} S_+^{\dagger} S_+ \eta dx, \quad (3.5.9)$$

ou seja, temos que

$$w^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |S_+\eta|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\eta|^2 dx}. \quad (3.5.10)$$

Assim, vemos que $w^2 \geq 0$, isto quer dizer que todos os modos são positivos ou nulos. Por conseguinte, as soluções BPS são linearmente estáveis sob pequenas perturbações.

3.6 Paredes de domínio

Um termo bastante usado em física do ferromagnetismo e cosmologia que têm desempenhado um papel importante no entendimento de alguns fenômenos é a parede de domínio (*Domain Wall*). As paredes de domínio são sólitons topológicos que aparecem como soluções em equações de campos não-lineares. Estes objetos matemáticos tem aplicações em diversas áreas da ciência e apresentam-se como transições de fase em diversos sistemas. Por exemplo, supomos que no início do universo as paredes de domínio separavam o universo em várias regiões não conectadas, isto é devido a que o universo sofreu uma quebra de simetria (CARTER; HARTLE, 2012). No entanto, uma ideia bastante intrigante é que talvez, a matéria escura e a energia escura podem encontrarse dentro de paredes de domínios formadas no início do universo (POSPELOV et al., 2013). Em magnetismo, existem regiões onde os dípolos magnéticos estão separados por uma fronteira a qual chamamos parede de domínio magnético ou simplesmente parede de domínio. Dentro deste domínio os dípolos magnéticos realizam uma transição suave na sua orientação. Um experimento interessante para observar tais domínios pode ver-se em (TONOMURA et al., 1980). No estudo de branas, as paredes de domínio são consideradas como um objeto de dimensão 2 (RUBAKOV; SHAPOSHNIKOV, 1983). Por outro lado, quando uma parede de domínio é formada, estas se podem dobrar, chocar, ou/e aniquilar (VACHASPATI, 2006).

3.6.1 Tipos de Paredes

A ideia para entender o ordenamento dos momentos magnéticos em materiais ferromagnéticos¹ levou ao físico francês Pierre Weiss a introduzir a existência de domínios magnéticos, isto é, os domínios magnéticos minimizam a energia dos materiais. Sem dúvida, como cada domínio é um sistema que possui uma magnetização uniforme, surge a pergunta de porque o campo magnético dentro de cada domínio não atraem ou repelem aos outros domínios. Então, Weiss sugeriu que dois domínios adjacentes estariam separados através de uma região (parede de domínio) de distância finita onde ocorre uma transição na orientação dos momentos magnéticos. Desta forma, a magnetização muda de orientação de um domínio para o outro domínio. Assim, quando um campo magnético externo é aplicado sobre um material ferromagnético, a parede de domínio tem a minimizar a energia magnética do sistema e leva a uma configuração mais favorável do sistema. No estudo de domínios magnéticos, há dois tipos de estruturas, estes são:

(a) **Parede de Néel:**

Entre duas regiões magnéticas, há uma faixa onde os momentos magnéticos viram progressivamente a partir de uma certa orientação de um primeiro domínio à outra

¹ Ver (CHIKAZUMI; GRAHAM, 2009)

orientação do segundo domínio. Na figura 4a, temos um material com largura w e espessura d . Quando $w \rightarrow 0$, a magnetização gira ao longo do eixo z no plano $y - z$. Isto significa que na parede de Néel, os alinhamentos dos spins ocorrem em um plano paralelo a superfície do material. Este tipo de parede é usado em fitas delgadas de materiais ferromagnéticos.

(b) **Parede de Bloch:**

Esta parede é uma estrutura que está situada entre dois domínios com diferentes momentos magnéticos, isto é, existem duas regiões com spins opostos. A parede de Bloch é um tipo de parede onde os spins giram em um plano normal ao longo do eixo z , isto é a magnetização gira no plano $x - y$ (veja a figura 4b, que foi obtida de (DEJONG; LIVESEY, 2015)). Uma aplicação muito interessante para formar uma parede de Bloch por meio de dispositivos ópticos, pode ver-se na área da ótica (IZÚS; MIGUEL; SANTAGIUSTINA, 2000).

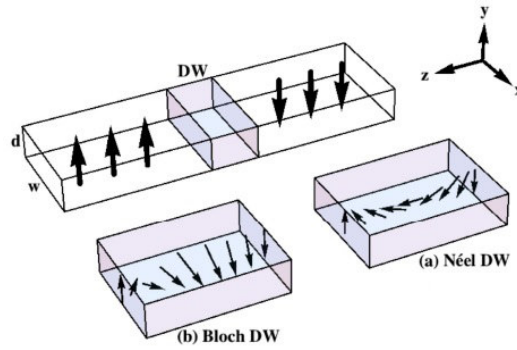


Figura 4 – (a) Parede de Néel (b) Parede de Bloch

3.7 As equações de uma parede de Bloch

Nesta seção, a fim de encontrar as soluções para dois campos escalares acoplados, seguimos as idéias desenvolvidas por (ALONSO-IZQUIERDO et al., 2013). Em unidades naturais, a ação é dada por

$$S = \int d^{\mu}x \left[\frac{1}{2} \partial_{\mu}\phi \partial^{\mu}\phi + \frac{1}{2} \partial_{\mu}\chi \partial^{\mu}\chi - V(\phi, \chi) \right], \quad (3.7.1)$$

onde $\mu = 0, 1$. Portanto, a densidade Lagrangiana para o nosso sistema em termos de dois campos escalares reais ϕ e χ está definida como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_{\mu}\phi \partial^{\mu}\phi + \frac{1}{2} \partial_{\mu}\chi \partial^{\mu}\chi - V(\phi, \chi). \quad (3.7.2)$$

Consideremos um modelo com um superpotencial dado por (SHIFMAN, 1998)

$$W(\phi, \chi) = \phi - \frac{1}{3} \phi^3 - a\phi\chi^2, \quad (3.7.3)$$

onde a é um parâmetro real positivo. As equações de movimento para soluções estáticas $\phi = \phi(x)$ e $\chi = \chi(x)$ são resolvidas pelas equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm(1 - \phi^2 - a\chi^2), \quad (3.7.4)$$

$$\frac{d\chi}{dx} = \mp 2a\phi\chi, \quad (3.7.5)$$

onde usamos as equações (3.4.5) e (3.4.6) respectivamente. Doravante, vamos considerar as equações com o sinal positivo. Enquanto as equações com sinal negativo serão obtidas pela troca de sinal, já que o potencial na eq. (3.4.1) é simétrico. Como as condições de contorno (3.4.12) e (3.4.13) devem ser cumpridas, então vemos que os mínimos do potencial são satisfeitos quando $W_\phi = 0$ e $W_\chi = 0$, ou seja, as duas equações acopladas (3.7.4) e (3.7.5) tornam-se

$$1 - \phi^2 - a\chi^2 = 0$$

e

$$2a\phi\chi = 0$$

Na última relação, é claro que se a função ϕ é diferente de zero, então a função χ será zero. Por isso, vemos que os mínimos do potencial são obtidos quando $\phi = \pm 1$ e $\chi = 0$. Outra possibilidade é quando $\phi = 0$ e $\chi = \pm 1/\sqrt{a}$. Em resumo, encontramos os seguintes pares de mínimos para essa teoria

$$(\bar{\phi} = \pm 1, \bar{\chi} = 0) \quad \text{e} \quad (\bar{\phi} = 0, \bar{\chi} = \pm \frac{1}{\sqrt{a}}),$$

para $a > 0$. Se inserimos a eq. (3.7.3) na eq. (3.4.9), podemos encontrar a energia para as configurações de vácuo. Assim, escrevemos os setores BPS como:

- Setor BPS(1): $(\pm 1, 0) \rightarrow E_{BPS} = |W(1, 0) - W(-1, 0)| = \frac{4}{3}$
- Setor BPS(2): $(-1, 0) - (0, -\frac{1}{\sqrt{a}}) \rightarrow E_{BPS} = |W(-1, 0) - W(0, -\frac{1}{\sqrt{a}})| = \frac{2}{3}$
- Setor BPS(2): $(-1, 0) - (0, \frac{1}{\sqrt{a}}) \rightarrow E_{BPS} = |W(-1, 0) - W(0, \frac{1}{\sqrt{a}})| = \frac{2}{3}$
- Setor BPS(2): $(1, 0) - (0, -\frac{1}{\sqrt{a}}) \rightarrow E_{BPS} = |W(1, 0) - W(0, -\frac{1}{\sqrt{a}})| = \frac{2}{3}$
- Setor BPS(2): $(1, 0) - (0, \frac{1}{\sqrt{a}}) \rightarrow E_{BPS} = |W(1, 0) - W(0, \frac{1}{\sqrt{a}})| = \frac{2}{3}$
- Setor não BPS(3) $(0, \pm \frac{1}{\sqrt{a}}) \rightarrow E_{BPS} = |W(0, \frac{1}{\sqrt{a}}) - W(0, -\frac{1}{\sqrt{a}})| = 0$

Como o setor BPS(3) tem energia nula, esse setor não apresenta um defeito do tipo BPS conectando os dois vácuos do potencial. O setor BPS(2) não é muito interessante embora ele possua soluções BPS (veja apêndice A). Além disso, as soluções deste setor quando são acopladas ao campo fermiônico não nos leva a obter soluções analíticas. Portanto,

o primeiro setor é o mais interessante, onde pode ser utilizado o método das órbitas (BAZEIA et al., 2002), esse método consiste em escolher uma órbita para desacoplar as equações de movimento de dois campos, usando a seguinte relação (ver apêndice A)

$$\phi^2 + \frac{a}{1-2a}\chi^2 = 1. \quad (3.7.6)$$

Para que a solução acima seja real temos que $a \in (0, 1/2)$. Esta equação da órbita identifica segmentos elípticos que conectam os mínimos $(\pm 1, 0)$. Neste caso temos as seguintes soluções

$$\phi(x) = \tanh(2ax), \quad (3.7.7)$$

$$\chi(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{a} - 2} \operatorname{sech}(2ax), \quad (3.7.8)$$

as quais são conhecidos como paredes de Bloch. Discussões detalhadas podem ser encontradas nas referências (SARKER; TRULLINGER; BISHOP, 1976; MONTONEN, 1976). Note-se que quando $a \rightarrow 1/2$ as soluções para dois campos transformam-se em uma solução de um único campo, e esse tipo de configuração é chamada parede de Ising (CHAIKIN; LUBENSKY; WITTEN, 1995).

4 Férmions na presença de Bósons

Desde que a equação de Dirac apareceu em 1928, ela tem sido usada em muitas áreas da física. Os campos fermiônicos desempenham um papel importante, especialmente quando eles estão acoplados a campos bosônicos (escalares). Por exemplo, hoje em dia, a localização de férmions em cenários mundos-brana (que usa paredes de Bloch em 5D) é um área bastante interessante, não só porque permite obter resultados cosmológicos interessantes, mas também porque aborda questões teóricas importantes, tal como o problema de hierarquia (RANDALL; SUNDRUM, 1999). Outro fato importante no estudo do campo fermiônico foi dado, quando Jackiw e Rebbi estudaram a interação de férmions não massivos com sólitons (*kinks*) em $(1 + 1)$ dimensões, eles descobriram que o vácuo adquire um número fermiônico fracionário (carga fracionada). Isto permitiu compreender a condutividade do poliacetileno (JACKIW; REBBI, 1976). Por outro lado, o estudo da interação de férmions com campos bosônicos são geralmente analisadas considerando que os campos escalares são externos e clássicos. Por conseguinte, o campo de Dirac é estudado naquele *background*. Este tipo de descrição só é válida se considerarmos a energia dos bósons maior que a energia dos férmions. Isso significa que para investigar a interação entre campos bosônicos e fermiônicos, primeiro nós devemos construir a solução de bósons, ignorando a presença de férmions, e em seguida considerarmos os férmions no *background* dos bósons.

4.1 Equação de Dirac

Quando Dirac propôs sua equação, o que ele estava procurando é livrar-se das duas dificuldades (BJORKEN; DRELL, 1964) que encontrou na equação de Klein Gordon (RYDER, 1996). Isto é, ele resolveu o problema de interpretação da densidade de probabilidade negativa e energia negativa. Para superar tais problemas, ele construiu uma nova equação de onda que contém apenas a primeira derivada tanto temporal e espacial, similar à equação de Schrödinger. Assim, a equação de Dirac é de primeira ordem, e fornece uma descrição de partículas com spin $1/2$, como por exemplo, o elétron. Como a relatividade especial trata o tempo e o espaço de maneira simétrica, ou seja, uma equação que contém apenas a primeira derivada temporal, também deve conter só primeiras derivadas espaciais, isto quer dizer que a equação de Dirac é relativisticamente covariante. Por isso, Dirac escreveu sua nova equação de onda relativística da seguinte forma

$$i\partial_t\psi = \widehat{H}\psi = (\alpha \cdot \widehat{p} + \beta m)\psi \quad (4.1.1)$$

onde α e β são coeficientes. Elevando ao quadrado ambos os lados da eq. (4.1.1) e lembrando que \widehat{H}^2 deve ter a forma da energia relativística (GREINER et al., 1990)

$$\widehat{p}^2 + m^2 = \sum_i \alpha_i^2 \widehat{p}_i^2 + \sum_{i,j} (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) \widehat{p}_i \widehat{p}_j + m \sum_i (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \widehat{p}_i + \beta^2 m^2$$

esta equação só será verdadeira se

$$\alpha_i^2 = 1, \quad \beta^2 = 1 \quad (4.1.2)$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad (4.1.3)$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, \quad (4.1.4)$$

vemos que os coeficientes α_i e β se fossem apenas números, eles comutam. Portanto, os únicos objetos matemáticos que satisfazem as relações acima, são matrizes.

4.2 Matrizes Gama

Multiplicando a eq. (4.1.1) pela esquerda por β , obtemos

$$(i\beta\partial_t - \beta\alpha \cdot \widehat{p} - \beta^2 m)\psi = 0. \quad (4.2.1)$$

Definindo outro conjunto de matrizes

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta\alpha_i, \quad i = 1, 2, 3$$

e usando $\widehat{p} = -i\vec{\nabla}$ a eq. (4.2.1) pode ser reescrita como

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (4.2.2)$$

onde as matrizes γ^μ são também chamadas matrizes gama de Dirac.

Agora, multiplica-se a eq. (4.2.2) por $(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)$, então

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\psi(x) = (-\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu - 2im\gamma^\mu \partial_\mu + m^2)\psi = 0 \quad (4.2.3)$$

e usando o fato que $\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$, a eq. (4.2.3) pode ser reescrita como

$$\left(\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \partial_\mu \partial_\nu + m^2\right)\psi = 0 \quad (4.2.4)$$

a expressão acima deve ser a igual a equação de Klein Gordon (RYDER, 1996), portanto as matrizes γ devem satisfazer a álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (4.2.5)$$

onde $\eta^{\mu\nu}$ é a componente (μ, ν) do tensor métrico no espaço tempo de Minkowski. Para avaliar o traço da eq. (4.2.5), primeiro fazemos $\mu = \nu$, assim temos que

$$\gamma^\mu \gamma^\mu = \eta^{\mu\mu}.$$

Se multiplicamos a relação acima por γ^ν em ambos lados, obteremos

$$\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\mu = \gamma^\nu \eta^{\mu\mu}$$

logo, aplicando o traço

$$\text{tr}(\gamma^\nu) = \frac{1}{\eta^{\mu\mu}} \text{tr}(\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\mu) = -\frac{1}{\eta^{\mu\mu}} \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\mu) = -\frac{1}{\eta^{\mu\mu}} \text{tr}(\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\mu) = -\text{tr}(\gamma^\nu)$$

portanto $\text{tr}(\gamma^\nu) = 0$. Também, veja que

$$(\gamma^0)^2 = I \quad , \text{válido para } \mu = \nu = 0$$

$$(\gamma^i)^2 = -I \quad , \text{válido para } \mu = \nu = i.$$

Para $\mu \neq \nu$ temos que

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = -I \gamma^\nu \gamma^\mu \tag{4.2.6}$$

onde I é a matriz identidade $N \times N$. Aplicando o determinante a (4.2.6) temos

$$\det(\gamma^\mu) \det(\gamma^\nu) = \det(-I) \det(\gamma^\nu) \det(\gamma^\mu), \tag{4.2.7}$$

como os determinantes são simplesmente números ordinários, arranjando a expressão acima obtemos

$$\begin{aligned} \det(\gamma^\mu) \det(\gamma^\nu) &= \det(\gamma^\mu) \det(\gamma^\nu) \det(-I) \\ \det(\gamma^\mu) \det(\gamma^\nu) - \det(\gamma^\mu) \det(\gamma^\nu) \det(-I) &= 0 \\ \det(\gamma^\mu) \det(\gamma^\nu) (1 - \det(-I)) &= 0 \\ 1 = \det(-I) &= (-1)^N, \end{aligned}$$

quer dizer que N é par, ou seja, a dimensão da matriz gama é par.

Assim, as matrizes gama de menor dimensão serão matrizes 2×2 de traço nulo. Nós sabemos que as matrizes de Pauli são de dimensão 2×2 e elas são de traço nulo, então só necessitamos usar duas matrizes quando trabalhamos em $(1 + 1)$ dimensões. Consequentemente, em $(1 + 1)$ dimensões as matrizes a usar são

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.2.8}$$

Por outro lado, em $(3 + 1)$ dimensões, precisamos de 4 matrizes. Sabemos que as três matrizes de Pauli não comutam. Poderíamos usar a matriz identidade para ter em total 4 matrizes, mas ela comuta com as matrizes de Pauli, e além disso tem o traço diferente de zero, portanto, a relação de anticomutação (4.2.5) não é satisfeita. Quer dizer que em

(3+1) dimensões, a dimensão das matrizes γ^ν deve ser maior que 2. Assim, Dirac observou que a matriz γ^ν deve ser de dimensão 4, por conseguinte na equação de Dirac¹, o espinor² ψ deve ser uma matriz coluna de quatro componentes.

Uma representação das matrizes γ^μ é dada por

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}$$

onde σ_i , ($i = 1, 2, 3$) são as matrizes de Pauli. Multiplicando a γ^i por β , temos $\beta\gamma^i = \gamma^0\gamma^i = \beta\alpha_i = \alpha_i$. Então

$$\alpha_i = \gamma^0\gamma^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.9)$$

que explicitamente são dadas por:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.10)$$

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.11)$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.12)$$

$$\beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.2.13)$$

4.3 Transformações de Lorentz para espinores

Se considerarmos a equação de Dirac em dos sistemas de referencia x e x' , as quais estão relacionadas pela transformação de Lorentz Λ . Utilizando a eq. (4.2.2) temos

$$i\gamma^\mu \frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\mu} - m\psi(x) = 0, \quad (4.3.1)$$

$$i\gamma^\mu \frac{\partial\psi'(x')}{\partial x'^\mu} - m\psi'(x') = 0, \quad (4.3.2)$$

¹ Matematicamente, a equação de Dirac é um sistema de 4 equações acopladas

² Um espinor é o objeto matemático que pode ser transformado por transformações de Lorentz.

onde $x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu}$, e estamos usando o símbolo prima para indicar as novas coordenadas. Observamos que as matrizes γ^{μ} não mudam com respeito aos sistemas de referência x e x' , porque elas são matrizes que possuem valores numéricos. Então, podemos relacionar o novo espinor com o antigo espinor através da seguinte transformação

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x). \quad (4.3.3)$$

Substituindo a eq. (4.3.3) em (4.3.2), obtemos

$$\begin{aligned} i\gamma^{\mu} \frac{\partial S(\Lambda)\psi(x)}{\partial x'^{\mu}} - mS(\Lambda)\psi(x) &= 0, \\ i\gamma^{\mu} \frac{\partial S(\Lambda)\psi(x)}{\Lambda_{\nu}^{\mu} \partial x^{\nu}} - mS(\Lambda)\psi(x) &= 0, \\ i\gamma^{\mu} \Lambda_{\mu}^{\nu} S(\Lambda) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^{\nu}} - mS(\Lambda)\psi(x) &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando a última equação desde esquerda pela expressão S^{-1} e comparando-la com a eq. (4.3.1), encontramos que $S(\Lambda)$ deve satisfazer a seguinte relação

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}\Lambda_{\mu}^{\nu}S(\Lambda) = \gamma^{\nu}, \quad (4.3.4)$$

onde $S(\Lambda)$ é uma matriz 4×4 . Se a matriz S satisfaz eq. (4.3.4), então a equação de Dirac será covariante. Para uma transformação infinitesimal

$$\Lambda_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}, \quad (4.3.5)$$

onde $\omega_{\mu\nu}$ é anti-simétrico em seus dois índices. Além disso, precisamos que $S(\Lambda)$ seja linear em os parâmetros de transformação $\omega_{\mu\nu}$ e que reduza-se à transformação de identidade, quando $\omega_{\mu\nu} = 0$. Podemos escrever

$$S(\Lambda) = \mathbb{I} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}, \quad (4.3.6)$$

onde $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ são os geradores de transformação de Lorentz, a quais são escritas da seguinte maneira

$$\mathcal{S}^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]. \quad (4.3.7)$$

Os geradores de *boost* são

$$\mathcal{S}^{0i} = \frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^i] = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix}, \quad (4.3.8)$$

e os geradores de rotação são

$$\mathcal{S}^{ij} = \frac{i}{4}[\gamma^i, \gamma^j] = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & -\sigma_k \end{pmatrix}. \quad (4.3.9)$$

Usando a relação (4.3.4), vemos que $S^{\dagger}(\Lambda)\gamma^0 S(\Lambda) = \gamma^0$. Se substituirmos a eq. (4.3.6) nesta expressão, obtemos

$$(\mathcal{S}^{\mu\nu})^{\dagger}\gamma^0 = \gamma^0\mathcal{S}^{\mu\nu}. \quad (4.3.10)$$

Para escrever a densidade Lagrangiana para a teoria de Dirac, devemos multiplicar dois espinores de Dirac, tal que podamos obter um escalar de Lorentz. Obviamente o produto $\psi^\dagger\psi$ não é possível, já que não é um invariante de Lorentz. Uma possibilidade é definir

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0. \quad (4.3.11)$$

Sobre uma transformação de Lorentz infinitesimal, temos

$$\bar{\psi} \rightarrow \psi^\dagger \left(\mathbb{I} + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (\mathcal{S}^{\mu\nu})^\dagger \right) \gamma^0. \quad (4.3.12)$$

Considerando os geradores de rotação, onde μ e ν são diferente de zero, temos que $(\mathcal{S}^{\mu\nu})^\dagger = \mathcal{S}^{\mu\nu}$, portanto chegamos a obter a relação dada por (4.3.10). Assim mesmo, considerando os geradores de *boost*, onde μ ou ν é zero. Encontramos que $(\mathcal{S}^{\mu\nu})^\dagger = -\mathcal{S}^{\mu\nu}$, e $\mathcal{S}^{\mu\nu}$ anti-comuta com γ^0 . Ou seja, a matriz γ^0 encontra-se a esquerda de $\mathcal{S}^{\mu\nu}$. Em consequência, temos a seguinte lei de transformação

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} S^{-1}(\Lambda). \quad (4.3.13)$$

Logo, temos que

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) \rightarrow \psi^\dagger(x)\gamma^0\psi(x) = \psi^\dagger(\Lambda^{-1}x)S^\dagger(\Lambda)\gamma^0S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) = \psi^\dagger(\Lambda^{-1}x)\gamma^0\psi(\Lambda^{-1}x),$$

quer dizer que a quantidade $\bar{\psi}\psi$ é um escalar de Lorentz. Portanto, podemos escrever a densidade Lagrangiana livre para campos espinoriares da seguinte forma

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi. \quad (4.3.14)$$

4.4 Solução da equação livre de Dirac em (3 + 1) dimensões

As soluções de onda para a equação de Klein Gordon são do tipo onda plana, e como a função de onda Dirac deve satisfazer a equação KG, então, é natural procurar soluções da equação de Dirac na forma de onda plana. Portanto usamos o seguinte *ansatz*

$$\phi(x) = au(p)e^{-ix_\mu p^\mu}. \quad (4.4.1)$$

Aqui, a é uma constante de normalização, $p^\mu = (E, \mathbf{p})$, e u é um espinor de quatro componentes independentes da variável x . Se substituirmos a relação (4.4.1) na equação de Dirac, teremos

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0 \quad (4.4.2)$$

Usando a convenção de separar o espinor u em dois espinores u_A e u_B , cada um com duas componentes:

$$u = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \quad (4.4.3)$$

podemos avaliar a seguinte expressão

$$\gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} = E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{p}$$

deste modo

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu p_\mu - m)u &= \begin{pmatrix} E - m & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (E - m)u_A & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}u_B \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}u_A & -(E + m)u_B \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Logo, como as equações (4.4.2) e (4.4.4) são iguais a zero, então obtemos duas equações acopladas

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})u_B = (E - m)u_A \quad (4.4.5)$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})u_A = (E + m)u_B \quad (4.4.6)$$

ou seja,

$$u_A = \frac{1}{E - m}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})u_B, \quad u_B = \frac{1}{E + m}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})u_A \quad (4.4.7)$$

calculando $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \quad (4.4.8)$$

podemos encontrar as soluções (GREINER et al., 1990). Substituindo (4.4.8) em (4.4.7), obtemos

$$u_B = \frac{1}{E + m} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} u_A. \quad (4.4.9)$$

Agora, só precisamos fazer uma escolha adequada para u_A . Lembre-se que u_A é um espinor de duas componentes, assim

$$u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.4.10)$$

por conseguinte teremos

$$u_1 = N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad u_2 = N_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}, \quad (4.4.11)$$

onde N_1 e N_2 são fatores de normalização. Se $p = 0$ teremos soluções que correspondem a uma partícula em repouso, com $E = \sqrt{m^2 + p^2} > 0$. Repetindo o mesmo processo acima para u_B encontramos os outros espinores (ver (GRIFFITHS,))

$$u_3 = N_3 \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad u_4 = N_4 \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.4.12)$$

com $E = -\sqrt{m^2 + p^2} < 0$. Aqui N_3 e N_4 são também fatores de normalização. A eq. (4.4.12) pode ser escrita também como

$$u_3 = N_3 \begin{pmatrix} -\frac{p_z}{|E|+m} \\ -\frac{p_x + ip_y}{|E|+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad u_4 = N_4 \begin{pmatrix} -\frac{p_x - ip_y}{|E|+m} \\ \frac{p_z}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

onde $|E| = |-\sqrt{m^2 + p^2}|$.

4.5 A equação de Dirac unidimensional

Nesta seção vamos assumir que a equação de Dirac depende só da coordenada x . Portanto, a eq. (4.1.1) é dada por,

$$\widehat{H}\psi(x, t) = (-i\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \beta m)\psi(x, t). \quad (4.5.1)$$

Se considerarmos a função de onda escrita na seguinte forma (estado estacionário)

$$\psi(x, t) = \phi(x)\exp(-iEt), \quad (4.5.2)$$

e substituindo (4.5.2) em (4.5.1) obtemos

$$E\phi(x) = (-i\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \beta m)\phi(x), \quad (4.5.3)$$

a qual é uma equação de Dirac unidimensional independente do tempo. Substituindo

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix},$$

a eq. (4.2.10) e a matriz β em (4.5.3), teremos

$$E \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & -i\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & -i\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ -i\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix}$$

a qual fornece um sistema de quatro equações diferenciais acopladas de primeira ordem dadas por:

$$E\phi_1 = m\phi_1 - i\frac{\partial}{\partial x}\phi_4 \quad (4.5.4)$$

$$E\phi_2 = m\phi_2 - i\frac{\partial}{\partial x}\phi_3 \quad (4.5.5)$$

$$E\phi_3 = -m\phi_3 - i\frac{\partial}{\partial x}\phi_2 \quad (4.5.6)$$

$$E\phi_4 = -m\phi_4 - i\frac{\partial}{\partial x}\phi_1. \quad (4.5.7)$$

Se definirmos

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_4 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$$

as equações (4.5.4) e (4.5.7) podem ser reescritas em forma compacta como

$$E\Phi = -i\sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + m\sigma_3 \Phi \quad (4.5.8)$$

esta última expressão é a equação de Dirac unidimensional (STRANGE, 1998), ou seja, o número de componentes do espinor de Dirac é reduzido à metade. Comparando (4.5.3) com (4.5.8), concluímos que $\alpha_1 \rightarrow \sigma_1$ e $\beta \rightarrow \sigma_3$. Dessa forma, vemos que em uma dimensão unicamente precisamos uma função de onda com duas componentes, um deles relacionado ao componente superior e o outro a componente inferior. Similarmente se escrevermos em forma compacta as equações (4.5.5) e (4.5.6), chegamos a uma equação igual a (4.5.8).

4.6 Campos de interação

Geralmente, as teorias de campo livre são caracterizadas por um Lagrangiano quadrático, que ao aplicar o princípio de Hamilton, obtemos as equações de movimento; e estas equações têm soluções exatas. Na verdade, dois sistemas bastante conhecidos que possuem soluções exatas são o átomo de hidrogênio e o oscilador harmônico. As teorias de campos livres, nós da uma descrição aproximada das partículas encontradas na natureza. Para obter uma representação do mundo real, devemos incluir termos de interação na densidade Lagrangiana. Estes novos termos adicionais podem envolver o produto dos campos da teoria que estão sendo estudados.

A maneira de exemplo, vejamos dois tipos de interações importantes:

1. Teoria ϕ^4 :

Em física de partículas, o campo de auto interação de Higgs consiste na utilização de interações ϕ^4 . A densidade Lagrangiana para a a teoria ϕ^4 é expressa como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4, \quad (4.6.1)$$

onde λ é uma constante de acoplamento com $\lambda \ll 1$. Além disso, o último termo desta equação é o termo de interação.

2. Teoria Escalar de Yukawa:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - M^2 \varphi^* \varphi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \eta \varphi^* \varphi \phi, \quad (4.6.2)$$

com $\eta \ll M, m$. Esta teoria acopla um campo escalar complexo φ com o campo escalar real ϕ . Isto é, o termo de interação é $\varphi^* \varphi \phi$.

4.7 Acoplamento Bóson-Férmion

Para acoplar um campo escalar e um campo de férmions, é preciso utilizar o acoplamento de Yukawa. Este tipo de acoplamento foi introduzido pela primeira vez por Hideki Yukawa, ele usou um bóson sem spin (pion) para descrever a força nuclear entre os núcleons (férmions). Este tipo de acoplamento é também utilizado no modelo padrão para estudar o acoplamento entre o campo escalar de Higgs e quarks sem massa. Na seção 4.3 obtivemos que $\bar{\psi}\psi$ é um escalar de Lorentz. Se multiplicarmos essa expressão por um campo escalar, obteremos o termo de interação (veja eq. 4.6.2), que é também um escalar de Lorentz. Por conseguinte, a densidade Lagrangiana para o acoplamento entre um bosón e um férmion é expressa da seguinte forma

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}(\phi, \psi) = \eta \bar{\psi}(x) J(\phi) \psi(x),$$

onde o vetor coluna $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ e $J(\phi)$ uma função dependente de um campo escalar. Esta expressão é chamada interação de Yukawa e η é chamada constante de acoplamento de Yukawa, a qual indica a intensidade do acoplamento entre os campos bosônicos e fermiônicos. Assim, a densidade Lagrangiana de um campo escalar interagindo com um campo de Dirac é:

$$\mathcal{L}_{\text{total}} = \mathcal{L}_{\text{escalar}}^{\text{campo}}(\phi) + \mathcal{L}_{\text{fermiônico}}^{\text{campo}}(\psi) + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}(\phi, \psi).$$

Como exemplo, vamos ver a densidade Lagrangiana para um campo de escalar real interagindo com o campo de Dirac:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{escalar}}^{\text{campo}} &= \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi) \\ \mathcal{L}_{\text{Dirac}} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \\ \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &= -\eta \bar{\psi} J(\phi) \psi \end{aligned}$$

então a densidade Lagrangiana total será

$$\mathcal{L}_{\text{Total}} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi) + \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \eta \bar{\psi} J(\phi) \psi.$$

Para o caso de um sistema de dois campos escalares reais interagindo com um campo de Dirac, o termo da interação dependerá dos dois campos e a densidade Lagrangiana total será dada por

$$\mathcal{L}_{\text{Total}} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} \partial^\mu \chi \partial_\mu \chi - V(\phi, \chi) + \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \eta \bar{\psi} J(\phi, \chi) \psi.$$

5 Férmions em uma parede de domínio de Bloch

Nas últimas décadas tem havido uma miríade de pesquisas que estudam o comportamento dos férmions em diferentes *backgrounds* topológicos. Em uma dimensão espacial, o campo solitônico (campo *background*) pode ser o *kink*. O vórtice de Abrikosov-Nielsen-Olesen (JACKIW; ROSSI, 1981) e o monopólo de Hoof't-Polyakov são *backgrounds* solitônicos em duas e três dimensões, respectivamente. Sempre que o campo de Dirac é resolvido nesses *backgrounds*, além das soluções de energia positiva e negativa, podem existir energia zero se o férmion é não massivo, o que implica que pode ser encontrado os modos zero normalizáveis. As implicações físicas dos modos zero são muito surpreendentes em QCD (HOOFT, 1976), além da sua utilidade em explorar a supercondutividade de cordas cósmicas (POLCHINSKI, 2005). O sistema férmion-sóliton em uma dimensão espacial é particularmente interessante, já que pode ser verificado na física da matéria condensada como um sistema de elétrons na presença de uma parede de domínio, uma aplicação deste sistema foi encontrada no poliacetileno. Recorrendo à discussão apresentada na seção 3.7 sobre a solução de dois campos escalares reais acoplados, neste capítulo, procuramos a solução do campo de férmions em uma parede de Bloch, isto é, procuramos soluções de modo zero, estados ligados e estados de espalhamento .

5.1 Revisão do acoplamento entre bósons e férmions em $(1 + 1)$ dimensões

No capítulo anterior, encontramos soluções para dois campos escalares reais acoplados, os quais formam uma parede de Bloch. Estas soluções serão expressas pela função $F(\phi, \chi)$. No entanto, precisamos lembrar que os férmions podem obter massa através do mecanismo de Higgs (RUBAKOV, 2009). Uma maneira de fazer isso é considerar um acoplamento de Yukawa entre o férmion e o campo de Higgs. Para nosso caso, os dois campos escalares reais desempenham o papel do campo de Higgs. Quando os campos escalares adquirem o valor de vácuo (mínimo do potencial), estes campos se transformam em uma constante que multiplica o férmion e este termo é conhecido como termo de massa para o férmion. Portanto, para desenvolver nosso trabalho, consideraremos um campo fermiônico não massivo. Assim, nesta seção, vamos aplicar todas as ferramentas matemáticas que foram vistas até agora.

Considere uma densidade lagrangiana dada por

$$\mathcal{L}(x, t) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\phi, \chi) + \bar{\Psi} [i\gamma^\mu \partial_\mu - \eta J(\phi, \chi)] \Psi, \quad (5.1.1)$$

onde a função J depende de dois campos bosônicos e Ψ é o espinor de Dirac.

O potencial $V(\phi, \chi)$ de nosso interesse, é expresso em termos do superpotencial W por

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \chi} \right)^2, \quad (5.1.2)$$

onde o superpotencial $W = W(\phi, \chi)$ está dado por

$$W(\phi, \chi) = \phi - \frac{1}{3} \phi^3 - a\phi\chi^2. \quad (5.1.3)$$

Calculando as derivadas parciais de W com respeito aos campos ϕ e χ , o potencial será

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} (\phi^2 - 1)^2 - a\chi^2 + a(1 + 2a)\phi^2\chi^2 + \frac{1}{2}a^2\chi^4. \quad (5.1.4)$$

A ação em $(1 + 1)$ dimensões de um campo de Dirac interagindo com os campos escalares é

$$S = \int d^2x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\phi, \chi) + i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \eta \bar{\Psi} J(\phi, \chi) \Psi \right], \quad (5.1.5)$$

as matrizes γ representam as matrizes de Dirac. Ademais, η é o acoplamento constante entre férmions e campos escalares. A ação (5.1.5) pode separar-se em duas partes

$$S = \int d^2x \left(S_{\text{campo escalar}} \right) + \int d^2x \left(S_{\text{campo fermiônico}} \right),$$

onde a ação do campo escalar corresponde aos primeiros termos¹ e a ação do campo fermiônico corresponde aos últimos dois termos na equação (5.1.5), respetivamente.

Se considerarmos que os campos ϕ e χ não dependem do tempo, então podemos usar o método de Bogomol'nyi para dois campos escalares acoplados (veja seções 3.4 e 3.7). Por conseguinte, as equações de movimento para os campos ϕ e χ são

$$\frac{d\phi}{dx} = 1 - \phi^2 - a\chi^2, \quad \frac{d\chi}{dx} = -2a\phi\chi,$$

e as soluções das equações acima são

$$\phi = \pm \tanh 2ax \quad e \quad \chi = \pm \sqrt{\frac{1}{a} - 2} \operatorname{sech} 2ax, \quad (5.1.6)$$

as soluções (5.1.6) foram obtidas usando o método das órbitas dado por (BAZEIA et al., 2002).

Até agora, apenas temos encontrado as soluções dos campo escalares. Na seção seguinte, nos dedicamos a obtenção das soluções para o campo fermiônico.

¹ A parte bosônica é resolvida sem a presença do campo fermiônico, ver (JACKIW; REBBI, 1976)

5.2 Interação com férmions

Aplicando o princípio de mínima ação do Hamilton, isto é, se fizermos $\delta S = 0$ sob uma variação $\delta\bar{\Psi}$, obtemos

$$\delta S = \int d^2x \delta\bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \eta J(\phi, \chi) \Psi) = 0,$$

como esta relação é satisfeita para qualquer $\delta\bar{\Psi}$, então a expressão entre parênteses deve ser zero em todos os pontos do espaço-tempo em $(1 + 1)$ dimensões. Assim a equação do movimento é dada por

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - \eta J(\phi, \chi)) \Psi = 0. \quad (5.2.1)$$

Se compararmos as equações (5.2.1) e (4.2.2), notamos que a função $J(\phi(x), \chi(x))$ atua como massa fermiônica que depende do espaço. Como $J(\phi, \chi)$ é independente do tempo, podemos escrever $\Psi(x, t) = \psi(x) \exp(-iEt)$, onde E é a energia do férmion, de tal modo que a equação de Dirac independente do tempo torna-se

$$[\gamma^0 E + i\gamma^1 \partial_1 - \eta J(\phi, \chi)] \psi(x) = 0. \quad (5.2.2)$$

Para ter uma expressão explícita para as matrizes γ^0 e γ^1 , podemos escolher as matrizes 2×2 de Pauli. Pode-se escolher explicitamente $\gamma^0 = \sigma_1$ e $\gamma^1 = i\sigma_3$. O espinor pode ser escrito como $\psi^T = (\psi_+ \ \psi_-)$, de tal modo que a equação de Dirac dá origem a duas equações de primeira ordem acopladas

$$\frac{d\psi_+}{dx} + \eta J(\phi, \chi) \psi_+ = E \psi_- \quad (5.2.3)$$

$$\frac{d\psi_-}{dx} - \eta J(\phi, \chi) \psi_- = -E \psi_+. \quad (5.2.4)$$

Em termos de ψ_+ e ψ_- , o espinor é normalizado como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx (|\psi_+|^2 + |\psi_-|^2) = 1, \quad (5.2.5)$$

assim ψ_+ e ψ_- são funções quadráticas integráveis. O acoplamento entre as componentes inferior e superior do espinor de Dirac pode ser eliminado formalmente para $E \neq 0$, assim as eqs. (5.2.3) e (5.2.4) podem ser escritas como um par de equações diferenciais de segunda ordem

$$-\frac{d^2\psi_\pm}{dx^2} + (\eta^2 J^2 \mp \eta J') \psi_\pm = E^2 \psi_\pm. \quad (5.2.6)$$

Estes últimos resultados nos dizem que a solução para este tipo de problema consiste na procura de soluções para duas equações do tipo Schrödinger. Não se deve esquecer, ainda que as equações para ψ_+ ou ψ_- não são de fato independentes, porque E^2 aparece em ambas equações. Até agora, temos considerado soluções para $E \neq 0$, no entanto, também pode obter possíveis soluções de energia nula (soluções de modo zero). Estas soluções

de modo zero podem ser obtidas diretamente a partir das equações de primeira ordem (5.2.3)-(5.2.4). Pode-se observar que as componentes superior e inferior do modo zero da solução são

$$\psi_+ = N_+ \exp(-\eta\mathcal{J}) \quad (5.2.7)$$

$$\psi_- = N_- \exp(\eta\mathcal{J}), \quad (5.2.8)$$

onde N_+ and N_- são constantes de normalização e

$$\mathcal{J} = \int_0^x dy J(\phi(y), \chi(y)). \quad (5.2.9)$$

A fim de garantir a condição de normalização (5.2.5) para as soluções de modo zero, o integrando da condição de normalização deve ser convergente, isto é,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[|N_+|^2 \exp(-2\eta\mathcal{J}) + |N_-|^2 \exp(2\eta\mathcal{J}) \right] < \infty. \quad (5.2.10)$$

Este resultado mostra claramente que a normalização do modo zero é decidida pelo comportamento assintótico de $\mathcal{J}(x)$. Pode-se verificar que é impossível ter ambas componentes do espinor diferentes de zero simultaneamente como soluções fisicamente aceitáveis. Agora que conhecemos as equações principais que descrevem a interação de férmions com uma parede de Bloch, estamos em condição de utilizar a maquinaria matemática desenvolvida acima, a fim de resolver a equação de Dirac para um acoplamento de Yukawa, onde encontraremos soluções analíticas.

5.3 Férmions numa parede de Bloch

Já que estamos procurando soluções analíticas para a equação (5.2.6), vamos definir a forma da função $J(\phi, \chi)$ simplesmente como uma soma dos campos, isto é, $J(\phi, \chi) = \phi + \chi$. Se pudéssemos ter escolhido a função J como os produtos dos campos ϕ e χ , não obteremos soluções analíticas quando J é substituída na eq. (5.2.6). Portanto, se considerarmos a primeira opção, a eq. (5.2.6) torna-se

$$-\frac{d^2\psi_{\pm}}{dx^2} + V_{\text{eff}}^{(\pm)}\psi_{\pm} = E_{\text{eff}}\psi_{\pm}, \quad (5.3.1)$$

onde E_{eff} e V_{eff} são convenientemente escritos como

$$E_{\text{eff}} = E^2 - \eta^2, \quad (5.3.2)$$

$$V_{\text{eff}}^{(\pm)} = V_1^{(\pm)} \text{sech}^2(2ax) + V_2^{(\pm)} \tanh(2ax) \text{sech}(2ax), \quad (5.3.3)$$

com

$$V_1^{(\pm)} = \eta \left[\eta \left(\frac{1}{a} - 3 \right) \mp 2a \right], \quad (5.3.4)$$

$$V_2^{(\pm)} = 2\eta(\eta \pm a) \sqrt{\frac{1}{a} - 2}. \quad (5.3.5)$$

A solução da eq. (5.3.1) para o potencial (5.3.3) é precisamente a solução conhecida da equação do Schödinger para o potencial Scarf hiperbólico (ou Scarf II), ver figura 5. É instrutivo notar, porém, que os parâmetros η e a do potencial efetivo Scarf hiperbólico não são parâmetros livres. Veja figura 5 que $E_{\text{eff}} < 0$ corresponde a estados ligados e $E_{\text{eff}} > 0$ corresponde a estados de espalhamento. O número de aplicações do

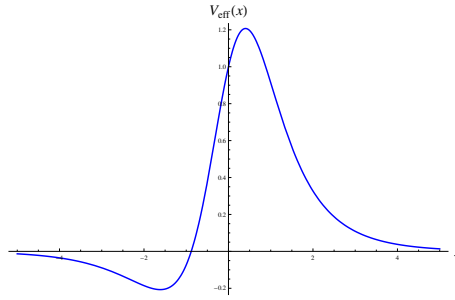


Figura 5 – O potencial Scarf

potencial Scarf II varia desde física de estado sólido, física de partículas até a eletrodinâmica. Assim, por exemplo na física do estado sólido, esse potencial é usado para modelar potenciais periódicos (EGRIFES; DEMIRHAN; BUYUKKILIC, 2000). Na eletrodinâmica, o potencial Scarf hiperbólico aparece em problemas com potencial não centrais (ALVAREZ-CASTILLO; KIRCHBACH, 2007).

5.3.1 Estados de espalhamento

Os estados de espalhamento são também conhecidos como estados não ligados (PHILLIPS, 2013), ocorrem quando uma partícula não tem seu movimento limitado, isto deve-se a que a energia da partícula é maior que a energia de um potencial dado, ou seja, a partícula não é confinada pelo potencial. Um exemplo típico de estado não ligado é uma partícula livre movendo-se na direção x . O espectro de energia destes estados é contínuo, isto é, os autovalores de energia dos estados de espalhamento formam um conjunto não enumerável e os autoestados são não localizados, isso implica que as autofunções destes estados são não normalizáveis.

Para resolver a eq. (5.3.1), definimos uma nova variável $z = i \sinh 2ax$. Assim, a eq. (5.3.1), para a componente ψ_+ , pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{d^2\psi_+}{dz^2} - \frac{z}{1-z^2} \frac{d\psi_+}{dz} + \frac{\beta^2 - \varepsilon^2 - i\gamma^2 z + \varepsilon^2 z^2}{(1-z^2)^2} \psi_+ = 0, \quad (5.3.6)$$

com

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\sqrt{V_1^{(+)}}}{2a}, \\ \gamma &= \frac{\sqrt{V_2^{(+)}}}{2a}, \\ \varepsilon &= \frac{\sqrt{E_{eff}}}{2a}.\end{aligned}\tag{5.3.7}$$

Observe que a eq. (5.3.6) é uma equação diferencial ordinária do tipo $y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0$, onde os coeficientes $P(x)$ e $Q(x)$ são funções racionais, que possuem pontos singulares. Para procurar uma solução da equação diferencial de segunda ordem, devemos utilizar o método de Frobenius, ou seja, devemos escrever uma solução na forma de série de potencia em torno os pontos singulares.

Agora, tendo em conta os pontos de singularidade da eq. (5.3.6) em $z = 1$ e $z = -1$, postulamos o *ansatz*

$$\psi_+ = (1-z)^{\frac{1}{4}+\frac{\mu}{2}}(1+z)^{\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}}F(z).\tag{5.3.8}$$

Então, a eq. (5.3.6) é levada a

$$(1-z^2)F''(z) + [\nu - \mu - (\mu + \nu + 2)z]F'(z) - \frac{1}{2}(2\varepsilon + \mu + \nu + 1) \left[\mu + \nu + 1 - \frac{1}{2}(2\varepsilon + \mu + \nu + 1) \right] F(z) = 0,\tag{5.3.9}$$

onde $F'(z)$ significa derivada em relação a z , e os parâmetros μ e ν estão definidos da seguinte forma

$$\mu = -\frac{1}{2}\sqrt{1 - 4\beta^2 + 4i\gamma^2}, \quad \nu = -\frac{1}{2}\sqrt{1 - 4\beta^2 - 4i\gamma^2}.\tag{5.3.10}$$

As duas soluções linearmente independentes de (5.3.9) são funções de Jacobi $P_n^{(a,b)}(y)$ que também podem ser expressas por funções hipergeométricas² ${}_2F_1(a, b, c, y)$ (ver apêndice B). Por conseguinte, uma solução geral para o componente superior do espinor pode ser escrito como uma combinação linear destas duas soluções independentes de espalhamento, de tal modo que a eq. (5.3.8) é expressa como

$$\psi_+ = \alpha_1 f_1(z) + \alpha_2 f_2(z),\tag{5.3.11}$$

onde

$$f_1(z) = (1+z)^{-\frac{s-i\lambda}{2}}(1-z)^{-\frac{s+i\lambda}{2}} {}_2F_1\left(-s-ik, -s+ik, i\lambda-s+\frac{1}{2}, \frac{1+z}{2}\right)\tag{5.3.12}$$

$$f_2(z) = (1+z)^{\frac{s+1-i\lambda}{2}}(1-z)^{-\frac{s+i\lambda}{2}} \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}-i\lambda-ik, \frac{1}{2}-i\lambda+ik, s+\frac{3}{2}-i\lambda, \frac{1+z}{2}\right),\tag{5.3.13}$$

² Veja (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964)

com $s = -(\mu + \nu + 1)/2$, $\lambda = i(\mu - \nu)/2$ e $k = \varepsilon$. Aproveitando a seguinte fórmula assintótica da função hipergeométrica (ver apêndice B) :

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} {}_2F_1(a, b, c, y) = \Gamma(c) \left(\frac{\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-y)^{-a} + \frac{\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-y)^{-b} \right) \quad (5.3.14)$$

e o limite elementar $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sinh x = \pm \frac{1}{2} \exp(\pm x)$, podemos obter o comportamento de f_1 e f_2 em $x \rightarrow \pm\infty$, assim para o caso de $x \rightarrow \infty$, temos que para f_1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = a_{1+} e^{2iakx} + b_{1+} e^{-2iakx} \quad (5.3.15)$$

com

$$a_{1+} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}(\lambda-k+is)}}{2^{s+2ik}} \frac{\Gamma(i\lambda - s + \frac{1}{2})\Gamma(2ik)}{\Gamma(-s + ik)\Gamma(\frac{1}{2} + i\lambda + ik)}, \quad (5.3.16)$$

$$b_{1+} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}(\lambda+k+is)}}{2^{s-2ik}} \frac{\Gamma(i\lambda - s + \frac{1}{2})\Gamma(-2ik)}{\Gamma(-s - ik)\Gamma(\frac{1}{2} + i\lambda - ik)}. \quad (5.3.17)$$

Da mesma forma, para o caso de $x \rightarrow -\infty$ para f_1 encontramos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = a_{1-} e^{2iakx} + b_{1-} e^{-2iakx} \quad (5.3.18)$$

com

$$a_{1-} = e^{\pi(\lambda+k+is)} b_{1+}, \quad (5.3.19)$$

$$b_{1-} = e^{\pi(\lambda-k+is)} a_{1+}. \quad (5.3.20)$$

O procedimento é repetido para a segunda solução f_2 , com o seguintes resultados

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = a_{2+} e^{2iakx} + b_{2+} e^{-2iakx} \quad (5.3.21)$$

onde

$$a_{2+} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}(\lambda+k+i(s+1))}}{2^{i\lambda+2ik-\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma(-i\lambda + s + \frac{3}{2})\Gamma(2ik)}{\Gamma(-i\lambda + ik + \frac{1}{2})\Gamma(ik + s + 1)}, \quad (5.3.22)$$

$$b_{2+} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}(\lambda-k+i(s+1))}}{2^{i\lambda-2ik-\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma(-i\lambda + s + \frac{3}{2})\Gamma(-2ik)}{\Gamma(-i\lambda - ik + \frac{1}{2})\Gamma(-ik + s + 1)}, \quad (5.3.23)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = a_{2-} e^{2iakx} + b_{2-} e^{-2iakx}, \quad (5.3.24)$$

onde

$$a_{2-} = e^{-\pi(\lambda-k+i(s+1))} b_{2+}, \quad (5.3.25)$$

$$b_{2-} = e^{-\pi(\lambda+k+i(s+1))} a_{2+}. \quad (5.3.26)$$

Finalmente, o componente superior do espinor é expressa como

$$\psi_+(x \rightarrow \pm\infty) = A_{\pm} e^{2iakx} + B_{\pm} e^{-2iakx}, \quad (5.3.27)$$

com $A_{\pm} = \alpha_1 a_{1\pm} + \alpha_2 a_{2\pm}$ e $B_{\pm} = \alpha_1 b_{1\pm} + \alpha_2 b_{2\pm}$. A componente inferior $\psi_-(x \rightarrow \pm\infty)$ pode ser obtido através da substituição da solução assintótica (5.3.27) na eq. (5.2.3).

$$\left(\frac{d\psi_+}{dx}\right) + \eta J \psi_+ = E \psi_- \quad (5.3.28)$$

$$\frac{d}{dx} (A_{\pm} e^{2iakx} + B_{\pm} e^{-2iakx}) + \eta J (A_{\pm} e^{2iakx} + B_{\pm} e^{-2iakx}) = E \psi_- \quad (5.3.29)$$

$$A_{\pm} 2iak e^{2iakx} - 2iak B_{\pm} e^{-2iakx} + \eta J A_{\pm} e^{2iakx} + \eta J B_{\pm} e^{-2iakx} = E \psi_- \quad (5.3.30)$$

Se considerarmos uma partícula incidente desde a esquerda, na (5.3.27) devemos fazer $B_+ = 0$. Isto nós fornece o seguinte vínculo $\alpha_1 b_{1+} = -\alpha_2 b_{2+}$. E a eq. (5.3.30) torna-se em

$$A_{\pm} \frac{2iak}{E} e^{2iakx} + \eta \frac{J}{E} A_{\pm} e^{2iakx} = \psi_-, \quad (5.3.31)$$

portanto, tem-se

$$\psi_- = A_{\pm} \frac{2iak + \eta J}{E} e^{2iakx}. \quad (5.3.32)$$

Então, o espinor é dado por

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_+ e^{2iakx} \\ A_+ l e^{2iakx} \end{pmatrix} = A_+ \begin{pmatrix} 1 \\ l \end{pmatrix} e^{2iakx}, \quad (5.3.33)$$

onde $l = \frac{2iak + \eta J}{E}$. Assim, o comportamento assintótico do espinor é representado pelas seguintes soluções

$$\psi(x \rightarrow +\infty) = A_+ \begin{pmatrix} 1 \\ l \end{pmatrix} e^{2iakx}, \quad (5.3.34)$$

$$\psi(x \rightarrow -\infty) = A_- \begin{pmatrix} 1 \\ l \end{pmatrix} e^{2iakx} + B_- \begin{pmatrix} 1 \\ l^* \end{pmatrix} e^{-2iakx}. \quad (5.3.35)$$

Desta forma, é possível a construção da corrente de Dirac e o coeficiente de transmissão é expresso como

$$T = \frac{|A_+|^2}{|A_-|^2} = \frac{\sinh^2(2\pi k)}{[\cosh(2\pi k) - \cos(2\pi s)] [\cosh(2\pi \lambda) + \cos(2\pi k)]}$$

O comportamento do coeficiente de transmissão é mostrado na seguinte figura.

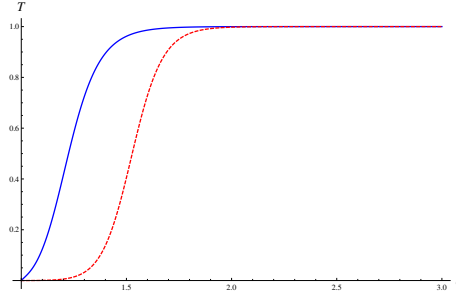


Figura 6 – O coeficiente de transmissão

5.3.2 Estados ligados

Na mecânica quântica, um estado ligado (GRIFFITHS; HARRIS, 1995) descreve um sistema onde a partícula está localizada numa região do espaço, devido a um potencial. Este potencial pode ser externo, ou ser resultado da presença de outra partícula. Por exemplo, um próton e um elétron podem mover-se separadamente, quando isso acontece, a energia total do centro de massa é positiva, portanto tem-se um átomo ionizado. Se o elétron começa a orbitar ao redor do próton, a energia torna-se negativa, e forma-se um estado ligado que é conhecido como o átomo de hidrogênio. Como um estado ligado existe dentro de uma região, a densidade de probabilidade deve ser finita. Além disso, as funções dos estados ligados caem rapidamente ($\psi(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$) de modo que a probabilidade de encontrá-la em regiões distantes do espaço é desprezível. Matematicamente, um estado ligado é um estado no espaço de Hilbert e ao conjunto de estados ligados temos associado um espectro discreto de energia, isto é, estados ligados são autoestados de energia de quadrado integrável. Por isso, a função de onda de um estado ligado deve satisfazer

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx < \infty.$$

A solução de estado ligado pode ser obtido da eq. (5.3.9) através dos polinômios de Jacobi $P_n^{(a,b)}(y)$, o qual pode ser expresso pela função hipergeométrica. Assim a solução da eq. (5.3.9) é dada por

$$F(z) \propto {}_2F_1\left(-s - i\tilde{k}, -s + i\tilde{k}, i\lambda - s + \frac{1}{2}, \frac{1+z}{2}\right).$$

Onde $\tilde{k} = i\kappa$, com $\kappa = \frac{\sqrt{-E_{\text{eff}}}}{2a}$. Lembrando que para estados ligados temos que $E_{\text{eff}} < 0$, portanto $\kappa \in \mathbb{R}$. Substituindo o valor de \tilde{k} na última equação, obtemos

$$F(z) \propto {}_2F_1\left(-s + \kappa, -s - \kappa, i\lambda - s + \frac{1}{2}, \frac{1+z}{2}\right). \quad (5.3.36)$$

A finitude da função de onda exige que $F(z)$ deve virar um polinômio. Isto poderá ser alcançado, desde que

$$\kappa - s = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.3.37)$$

ou seja, $\kappa = s - n$. Como κ é um número real positivo, então temos que $n < s$. Isso quer dizer que o número quântico $n = 0, 1, 2, \dots < s$. Logo da eq. (5.3.37) temos que

$$\kappa^2 = (s - n)^2.$$

Desde o qual temos que

$$-\frac{E_{\text{eff}}}{4a^2} = (s - n)^2.$$

Logo

$$E_{\text{eff}} = -4a^2(s - n)^2. \quad (5.3.38)$$

Substituindo (5.3.2) em (5.3.38) chega-se a

$$E_n = \pm \sqrt{\eta^2 - 4a^2(s - n)^2}. \quad (5.3.39)$$

Como é esperado, vemos que a energia é finita, isto nos indica que o número de estados ligados dentro do potencial Scarf hiperbólico é finito. Isto concorda com o que é visto na figura 5 sobre o fato de que o potencial de Scarf II pode ter um número limitado de estados discretos. Veja que a energia E_n é simétrica com respeito ao valor de $E = 0$. Também, devemos dizer que energias com sinal “+” representam as energias das partículas e energias com sinal “-” representam energias das antipartículas.

5.3.3 Solução de modo zero

Uma solução de modo zero é aquele estado que possui autovalor de energia zero. Matematicamente, se temos um operador \hat{O} que atua sob uma função, isto é, $\hat{O}\psi_j = \lambda_j\psi_j$, para algum autovalor λ_j , a solução de modo zero é dada quando $\lambda_j = 0$. Isto é, o operador \hat{O} aniquila a autofunção ψ_j dando um autovalor igual a zero.

Considerando a solução para $E = 0$ nas equações (5.2.3) e (5.2.4), obtem-se as seguintes relações

$$\frac{d\psi_{\pm}}{dx} = \mp \eta J(\phi, \chi) \psi_{\pm}, \quad (5.3.40)$$

que facilmente podemos integrar, dando

$$\psi_{\pm} = N_{\pm} e^{\mp \eta \int_0^x J(\phi, \chi) dy}. \quad (5.3.41)$$

Considerando, $J(\phi, \chi) = \phi + \chi$, e integrando \mathcal{J}

$$\mathcal{J} = \int_0^x (\phi + \chi) dy = \int_0^x \left[\tanh(2ay) + \sqrt{\frac{1}{a} - 2 \operatorname{sech}(2ay)} \right] dy. \quad (5.3.42)$$

Portanto, temos

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2a} \{ \arctan [\sinh(2ax)] + \ln [\cosh(2ax)] \}. \quad (5.3.43)$$

Para este caso, o integrando em (5.2.10) pode ser expresso como

$$I = |N_+|^2 \exp(-2\eta \mathcal{J}) + |N_-|^2 \exp(2\eta \mathcal{J}), \quad (5.3.44)$$

O comportamento da eq. (5.3.44) quando $|x| \rightarrow \infty$ é

$$I \rightarrow |N_+|^2 \exp(-2\eta|x|) + |N_-|^2 \exp(2\eta|x|). \quad (5.3.45)$$

Este resultado mostra claramente que a solução de modo zero é normalizada para $\eta > 0$ e $N_- = 0$ ou $\eta < 0$ e $N_+ = 0$.

Note que as componentes superior e inferior do modo zero são $\psi_{\pm} = N_{\pm} e^{\mp\eta\mathcal{J}}$, ou seja o espinor pode ser escrito como

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = \begin{cases} N_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\eta\mathcal{J}}, & \text{para } \eta > 0 \\ N_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+\eta\mathcal{J}}, & \text{para } \eta < 0. \end{cases} \quad (5.3.46)$$

Vemos que a densidade de probabilidade para o modo zero cai suavemente quando $|x| \rightarrow \infty$

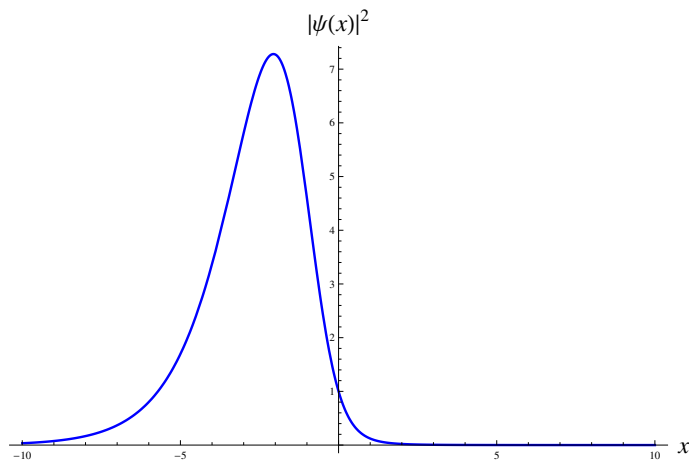


Figura 7 – Densidade de probabilidade como função da posição, para $\eta = 1$ e $a = 0.4$

Considerações Finais

Nesta dissertação estudamos um modelo que descreve a interação entre um campo de Dirac e dois campos escalares reais em $(1 + 1)$ dimensões. Estes campos escalares formam um domínio topológico que é conhecido como uma parede de Bloch. Consequentemente, os campos fermiônicos admitem soluções onde a parede de Bloch é considerada como um campo de *background*.

Primeiro, nós deduzimos o modelo matemático que descreve a interação dos férmions com a parede de Bloch, este modelo é determinado pela equação de Dirac na parede de Bloch em $(1 + 1)$ dimensões. Devido à redução unidimensional da equação de Dirac, encontramos que o espinor tem só duas componentes as quais encontram-se acopladas. Para desacoplar tais equações, tivemos que expressar uma componente em função da outra. Assim, obtemos uma equação diferencial tipo Schrödinger com um potencial Scarf hiperbólico para cada componente do espinor. É importante referir que o potencial Scarf hiperbólico e suas soluções exatas são entidades matemáticas interessantes, com várias aplicações em física, que vão desde a mecânica quântica supersimétrica até teoria de campo.

Fazendo uma mudança de variável, podemos solucionar a equação tipo Schrödinger. Isto nos levou a encontrar facilmente uma equação diferencial hipergeométrica cujas soluções analíticas exatas já são conhecidas. Em consequência, os autovalores e autofunções do campo fermiônico foram encontradas sem necessidade de usar alguma aproximação ou algum outro método já conhecido na literatura, tal como o método Nikiforov-Uvarov (NIKIFOROV; UVAROV, 1988).

Vale a pena mencionar que neste estudo dos férmions interagindo com uma parede de Bloch apresentam três classes de soluções, as quais são soluções de espalhamento, soluções de estados ligados e o estado de modo zero ($E = 0$). Em relação aos estados de espalhamento, quando o férmion encontra-se nas regiões afastadas ($x \rightarrow \pm\infty$) da influência do potencial Scarf II, encontramos soluções tipo onda plana (partícula livre), o que já é esperado dado que o potencial Scarf II é nulo nessas regiões. Além disso, no estudo dos estados de espalhamento, que não são normalizáveis, calculamos o coeficiente de transmissão.

Em relação às soluções de estados ligados encontramos o espectro de energia para os férmions armadilhados na parede de Bloch. Este espectro é descrito por um conjunto discreto e finito de valores n inteiros não-negativos. Finalmente, quando abordamos o caso de soluções de modo zero, mostramos que é impossível ter ambas componentes do espinor diferentes de zero ao mesmo tempo como soluções físicas aceitáveis. Neste caso a solução

de modo zero é normalizada para $\eta > 0$ e $N_- = 0$ ou $\eta < 0$ e $N_+ = 0$. Um trabalho futuro pode ser feito se considerarmos o efeito de *back-reaction*, ou seja, o efeito do campo fermiônico na solução solitônica (parede de Bloch). Esse processo é importante quando estudam-se modelos solitônicos supersimétricos.

Referências

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. [S.l.]: Courier Corporation, 1964. v. 55. Citado na página 53.
- ALONSO-IZQUIERDO, A. et al. New models for two real scalar fields and their kink-like solutions. *Advances in High Energy Physics*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2013, 2013. Citado na página 35.
- ALVAREZ-CASTILLO, D.; KIRCHBACH, M. Exact spectrum and wave functions of the hyperbolic scarf potential in terms of finite romanovski polynomials. *Revista mexicana de física E*, Sociedad Mexicana de Física, v. 53, n. 2, p. 143–154, 2007. Citado na página 52.
- BAZEIA, D. et al. Topological defects and the trial orbit method. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 17, n. 29, p. 1945–1953, 2002. Citado 5 vezes nas páginas 8, 9, 37, 49 e 67.
- BELAVIN, A. A. et al. Pseudoparticle solutions of the yang-mills equations. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 59, n. 1, p. 85–87, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 27.
- BJORKEN, J. D.; DRELL, S. D. *Relativistic quantum mechanics*. [S.l.]: Mcgraw-Hill College, 1964. Citado na página 38.
- BOGOMOLNY, E. B. The stability of classical solutions. *Sov. J. Nucl. Phys.*, v. 24, n. 4, p. 449–454, 1976. Disponível em: <<http://cds.cern.ch/record/406760>>. Citado 3 vezes nas páginas 8, 9 e 27.
- BRADEN, H.; VARELA, V. Bogomol’nyi equations and solutions for einstein-yang-mills-dilaton- σ models. *Physical Review D*, APS, v. 58, n. 12, p. 124020, 1998. Citado na página 27.
- BRUCKMANN, F. Topological objects in qcd. *The European Physical Journal Special Topics*, Springer, v. 152, n. 1, p. 61–88, 2007. Citado na página 15.
- BYCZUK, K. et al. Kinks in the dispersion of strongly correlated electrons. *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 3, n. 3, p. 168–171, 2007. Citado na página 20.
- CARTER, B.; HARTLE, J. B. *Gravitation in Astrophysics: Cargèse 1986*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 156. Citado na página 34.
- CHAIKIN, P. M.; LUBENSKY, T. C.; WITTEN, T. A. Principles of condensed matter physics. *Physics Today*, v. 48, p. 82, 1995. Citado na página 37.
- CHIKAZUMI, S.; GRAHAM, C. D. *Physics of Ferromagnetism 2e*. [S.l.]: Oxford University Press on Demand, 2009. Citado na página 34.
- COLEMAN, S. *Aspects of Symmetry (Cambridge, 1985)*. [S.l.]: Ch. Citado na página 14.

- DEJONG, M.; LIVESEY, K. Analytic theory for the switch from bloch to néel domain wall in nanowires with perpendicular anisotropy. *Physical Review B*, APS, v. 92, n. 21, p. 214420, 2015. Citado na página 35.
- EDELSTEIN, J. D. et al. Kinks inside supersymmetric domain ribbons. *Physical Review D*, APS, v. 57, n. 12, p. 7561, 1998. Citado na página 30.
- EGRIFES, H.; DEMIRHAN, D.; BUYUKKILIC, F. Exact solutions of the schrodinger equation for the deformed hyperbolic potential well and the deformed four-parameter exponential type potential. *Physics Letters-Section A*, Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 1967-, v. 275, n. 4, p. 229–237, 2000. Citado na página 52.
- ENGLANDER, S. et al. Nature of the open state in long polynucleotide double helices: possibility of soliton excitations. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 77, n. 12, p. 7222–7226, 1980. Citado na página 14.
- FORGÁCS, P.; HORVATH, Z.; HORVATHY, P. Bogomolny-type equations for gravitating gauged sigma models. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 340, n. 4, p. 231–235, 1994. Citado na página 27.
- FUJITA, S.; SUZUKI, A. Theory of the half-integer quantum hall effect in graphene. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer, v. 55, n. 11, p. 4830–4840, 2016. Citado na página 15.
- GEDALIN, M.; SCOTT, T.; BAND, Y. Optical solitary waves in the higher order nonlinear schrödinger equation. *Physical review letters*, APS, v. 78, n. 3, p. 448, 1997. Citado na página 15.
- GOLDSTEIN, H. *Classical mechanics*. [S.l.]: Pearson Education India, 1965. Citado na página 27.
- GOLDSTONE, J.; WILCZEK, F. Fractional quantum numbers on solitons. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 47, p. 986–989, Oct 1981. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.47.986>>. Citado na página 14.
- GOODMAN, R. H.; HABERMAN, R. Kink-antikink collisions in the ϕ^4 equation: The n-bounce resonance and the separatrix map. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, SIAM, v. 4, n. 4, p. 1195–1228, 2005. Citado na página 20.
- GRAF, J. et al. *Universal high energy anomaly in the electron spectrum of high temperature superconductors by angle-resolved photoemission spectroscopy*. [S.l.], 2006. Citado na página 20.
- GREINER, W. et al. *Relativistic quantum mechanics*. [S.l.]: Springer, 1990. v. 3. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 44.
- GRIFFITHS, D. Introduction to elementary particles, 1987. *John Willey & Sons Inc.* Citado na página 44.
- GRIFFITHS, D. J.; HARRIS, E. G. Introduction to quantum mechanics. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 63, n. 8, p. 767–768, 1995. Citado na página 56.

- GUTH, A. H. *The inflationary universe: The quest for a new theory of cosmic origins*. [S.l.]: Random House, 1998. Citado na página 17.
- HOOFT, G. 't. Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudoparticle. *Physical Review D*, APS, v. 14, n. 12, p. 3432–3450, 1976. Citado na página 48.
- HOU, C.-Y.; CHAMON, C.; MUDRY, C. Electron fractionalization in two-dimensional graphene-like structures. *Phys. Rev. Lett.*, v. 98, p. 186809, 2007. Citado na página 15.
- IVANOVA, T. A. Scattering of instantons, monopoles and vortices in higher dimensions. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, World Scientific, v. 13, n. 03, p. 1650032, 2016. Citado na página 27.
- IZÚS, G.; MIGUEL, M. S.; SANTAGIUSTINA, M. Bloch domain walls in type ii optical parametric oscillators. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 25, n. 19, p. 1454–1456, 2000. Citado na página 35.
- JACKIW, R. Quantum meaning of classical field theory. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 49, n. 3, p. 681, 1977. Citado na página 25.
- JACKIW, R.; REBBI, C. Solitons with fermion number 1/2. *Physical Review D*, APS, v. 13, n. 12, p. 3398, 1976. Citado 3 vezes nas páginas 15, 38 e 49.
- JACKIW, R.; ROSSI, P. Zero modes of the vortex-fermion system. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 190, n. 4, p. 681–691, 1981. Citado na página 48.
- KAKU, M. *Quantum field theory*. [S.l.]: Oxford University Press Oxford, 1993. v. 378. Citado na página 21.
- KAPLAN, D. B. A method for simulating chiral fermions on the lattice. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 288, n. 3, p. 342–347, 1992. Citado na página 15.
- LANDAU, L. D.; GINZBURG, V. On the theory of superconductivity. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, v. 20, p. 1064, 1950. Citado na página 20.
- MANTON, N.; SUTCLIFFE, P. *Topological solitons*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 27.
- MICHAELIS, D. Disponível em: < <http://michaelis.uol.com.br> >. *Acesso em*, v. 28, 2008. Citado na página 14.
- MONTONEN, C. On solitons with an abelian charge in scalar field theories:(i) classical theory and bohr-sommerfeld quantization. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 112, n. 2, p. 349–357, 1976. Citado na página 37.
- NIKIFOROV, A. F.; UVAROV, V. B. *Special functions of mathematical physics*. [S.l.]: Springer, 1988. v. 205. Citado na página 59.
- PÁTEK, K.; TOMÁŠ, I.; BOHÁČEK, P. The process of magnetization of a single bloch wall with a single bloch line. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Elsevier, v. 87, n. 1-2, p. 11–15, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 9.
- PHILLIPS, A. C. *Introduction to quantum mechanics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013. Citado na página 52.

- POLCHINSKI, J. Introduction to cosmic f-and d-strings. In: *String Theory: From Gauge Interactions to Cosmology*. [S.l.]: Springer, 2005. p. 229–253. Citado na página 48.
- POSPELOV, M. et al. Detecting domain walls of axionlike models using terrestrial experiments. *Physical review letters*, APS, v. 110, n. 2, p. 021803, 2013. Citado na página 34.
- RAJARAMAN, R. Solitons of coupled scalar field theories in two dimensions. *Physical Review Letters*, APS, v. 42, n. 4, p. 200, 1979. Citado 3 vezes nas páginas 8, 9 e 67.
- RAJARAMAN, R. Solitons and instantons. 1982. Citado 3 vezes nas páginas 14, 19 e 21.
- RANDALL, L.; SUNDRUM, R. Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Physical Review Letters*, APS, v. 83, n. 17, p. 3370, 1999. Citado na página 38.
- REMOISSENET, M. *Waves called solitons: concepts and experiments*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado na página 14.
- RUBAKOV, V. *Classical theory of gauge fields*. [S.l.]: Princeton University Press, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 14, 17, 18 e 48.
- RUBAKOV, V.; SHAPOSHNIKOV, M. Do we live inside a domain wall? *Physics Letters B*, Elsevier, v. 125, n. 2-3, p. 136–138, 1983. Citado na página 34.
- RYDER, L. H. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge university press, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 39.
- SARKER, S.; TRULLINGER, S.; BISHOP, A. Solitary-wave solution for a complex one-dimensional field. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 59, n. 4, p. 255–258, 1976. Citado na página 37.
- SCARF, F. L. New soluble energy band problem. *Physical Review*, APS, v. 112, n. 4, p. 1137, 1958. Citado na página 16.
- SHIFMAN, M. Degeneracy and continuous deformations of supersymmetric domain walls. *Physical Review D*, APS, v. 57, n. 2, p. 1258, 1998. Citado na página 35.
- SOUZA, M. et al. Campos escalares reais e a quebra espontânea de simetria: Uma descrição analítica para defeitos topológicos. *Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol*, v. 6, n. 1, p. 47, 2012. Citado na página 33.
- STRANGE, P. *Relativistic Quantum Mechanics: with applications in condensed matter and atomic physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1998. Citado na página 46.
- SUTCLIFFE, P. M. Bps monopoles. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 12, n. 26, p. 4663–4705, 1997. Citado na página 27.
- TAKHTADZHIAN, L. A.; FADDEEV, L. D. Essentially nonlinear one-dimensional model of classical field theory. *Theoretical and Mathematical Physics*, Springer, v. 21, n. 2, p. 1046–1057, 1974. Citado na página 16.
- TKALEC, U. et al. Reconfigurable knots and links in chiral nematic colloids. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 333, n. 6038, p. 62–65, 2011. Citado na página 15.

- TONOMURA, A. et al. Direct observation of fine structure of magnetic domain walls by electron holography. *Physical Review Letters*, APS, v. 44, n. 21, p. 1430, 1980. Citado na página 34.
- VACHASPATI, T. *Kinks and domain walls: An introduction to classical and quantum solitons*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 18, 20, 28 e 34.
- VAINSHTEIN, A. et al. Abc of instantons. *Soviet Physics Uspekhi*, IOP Publishing, v. 25, n. 4, p. 195, 1982. Citado na página 27.
- VILENKIN, A.; SHELLARD, E. P. S. *Cosmic strings and other topological defects*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000. Citado na página 15.
- WACHTER, A. *Relativistic quantum mechanics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010. Citado na página 17.
- YANG, Q.-F. et al. Stokes solitons in optical microcavities. *Nature Physics*, Nature Research, 2016. Citado na página 14.
- ZABUSKY, N. J.; KRUSKAL, M. D. Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical review letters*, APS, v. 15, n. 6, p. 240, 1965. Citado na página 14.
- ZHU, Y. *Modern techniques for characterizing magnetic materials*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2005. Citado na página 15.

Apêndices

APÊNDICE A – Apêndice Método da Órbita-Tentativa

Para desacoplar equações de movimento para dois campos escalares em (1+1) dimensões, o método da órbita da tentativa (RAJARAMAN, 1979) é bastante útil. Este método procura encontrar uma curva chamada órbita, a qual vai estar definida por uma função dos campos. Além disso, essa órbita deve satisfazer as condições de contorno. Aqui, vamos seguir o procedimento desenvolvido por (BAZEIA et al., 2002), que nos indica a seguir os seguintes passos:

1. Seleccionamos um setor BPS, o qual vai estar dado pelos pares de mínimos (ϕ_i, χ_i) e (ϕ_j, χ_j) do superpotencial. Além disso, a energia BPS deve satisfazer $\Delta W_{ij} \equiv |W(\phi_i, \chi_i) - W(\phi_j, \chi_j)| \neq 0$.
2. Escolhemos como equação da órbita uma função F , tal que $F(\phi, \chi) = 0$, e esta função deve verificar os mínimos do sector BPS, isto é $F(\phi_i, \chi_i) = 0$, e $F(\phi_j, \chi_j) = 0$.
3. Fazemos o teste de compatibilidade entre a equação da órbita e das equações de primeira ordem. Este teste é obtida diferenciando a equação da órbita com respeito a x . Isto é

$$\frac{dF}{dx} \equiv F_\phi \frac{d\phi}{dx} + F_\chi \frac{d\chi}{dx} = 0. \quad (\text{A.0.1})$$

Usando as equações de primeira ordem, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} W_\phi + \frac{\partial F}{\partial \chi} W_\chi = 0. \quad (\text{A.0.2})$$

Matematicamente, esta última equação é equivalente a equação da órbita, isto é, a compatibilidade é verificada se a eq. (A.0.2) é satisfeita.

Um exemplo do método da órbita-tentativa:

Vamos rever o exemplo usado na seção 3.6. O superpotencial foi dado por

$$W(\phi, \chi) = \phi - \frac{1}{3} \phi^3 - r\phi\chi^2. \quad (\text{A.0.3})$$

As equações de primeira ordem são dadas por

$$\frac{d\phi}{dx} = 1 - \phi^2 - r\chi^2 \quad (\text{A.0.4})$$

$$\frac{d\chi}{dx} = -2r\phi\chi. \quad (\text{A.0.5})$$

Os pontos mínimos para o superpotencial que foram obtidos são

$$v_1 = (-1, 0), \quad v_2 = (1, 0), \quad (\text{A.0.6})$$

$$v_3 = (0, -\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}), \quad v_4 = (0, \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}), \quad (\text{A.0.7})$$

Caso I: $r < 0$

Para este caso o superpotencial tem os mínimos $v_{1,2} = (\pm 1, 0)$. Uma solução para este setor corresponde a $\phi(x) = \tanh(x)$ e $\chi = 0$, porém o modelo dado por (A.0.3) pode ser resolvido. As soluções não apresentam uma órbita que conecta os mínimos $(\pm 1, 0)$, ou seja, o sistema não tem soluções topológicas.

Caso II: $r > 0$

Como primeiro passo, escolhemos o setor BPS dado por $v_{1,2}(\pm 1, 0)$. Além disso, observamos que $W(1, 0) \neq W(-1, 0)$. O segundo passo nos disse que devemos selecionar uma órbita, e ela pode ser escrita como

$$1 + a\phi^2 + b\chi^2 = 0. \quad (\text{A.0.8})$$

Aplicando os pontos mínimos, encontramos que $1 + a = 0$, portanto a equação da órbita é $1 - \phi^2 + b\chi^2 = 0$. Para o terceiro passo, diferenciamos a equação da órbita com respeito à variável x , e obteremos $-\phi(d\phi/dx) + b\chi(d\chi/dx) = 0$. Nesta, última expressão inserimos as equações (A.0.4) e (A.0.5), assim:

$$-\phi(1 - \phi^2 - r\chi^2) + b\chi(-2r\phi\chi) = 0,$$

comparando com a equação da órbita (A.0.8) vemos que $b = r(2b - 1)$, ou seja, a equação da órbita está dada por

$$\phi^2 + \frac{r}{1 - 2r}\chi^2 = 1, \quad (\text{A.0.9})$$

e ela conecta os mínimos $(\pm 1, 0)$ para $0 < r < 1/2$. Substituindo a eq. (A.0.9) na eq. (A.0.4), obteremos

$$\frac{d\phi}{dx} = (1 - \phi^2) - (1 - \phi^2)(1 - 2r) = 2r(1 - \phi^2), \quad (\text{A.0.10})$$

cuja integração resulta em

$$\phi(x) = \tanh[2r(x - x_0)], \quad (\text{A.0.11})$$

substituindo a equação acima na equação da órbita (A.0.9) obtêm-se

$$\chi(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{r} - 2} \operatorname{sech}[2r(x - x_0)]. \quad (\text{A.0.12})$$

Desta última equação notamos dois detalhes: O primeiro se deve a que se r é negativo, então o campo χ não seria um campo real. Do fato, estaríamos no caso I. O segundo

detalhe, é quando $r \rightarrow 1/2$, portanto o campo $\chi = 0$ e $\phi(x) = \tanh(x)$, ou seja novamente teríamos a solução do caso I.

De outra parte, para o setor $v_{1,3}$, Bazeia nos disse que podemos considerar como órbita a seguinte equação

$$r\chi^2 = 1 - \phi, \quad \text{para } r = 1/4. \quad (\text{A.0.13})$$

Substituindo a equação acima em (A.0.4) e integrando, obtemos

$$\phi(x) = \pm \frac{1}{2} \left[1 + \tanh\left(\frac{x}{2}\right) \right]. \quad (\text{A.0.14})$$

Agora, levando a eq. (A.0.14) na equação da órbita (A.0.13), obtemos que o campo χ é

$$\chi(x) = \pm \sqrt{2 \left(1 - \tanh\left(\frac{x}{2}\right) \right)} \quad (\text{A.0.15})$$

APÊNDICE B – Apêndice Função Hipergeométrica

A equação diferencial hipergeométrica apresenta a seguinte forma

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + [c - (a+b+1)z]\frac{du}{dz} - abu = 0 \quad (\text{B.0.1})$$

onde os parâmetros a, b, c são independentes de z , e eles podem ser complexos. Note-se que a equação é invariante se $a \leftrightarrow b$. Esta equação diferencial tem três singularidades em $z = 0, 1, \infty$, e para resolvê-la usamos o método de série de potências desenvolvido por Frobenius, que consiste em assumir como solução:

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+s}, \quad (\text{B.0.2})$$

substituindo esta serie em (B.0.1), obtemos

$$(z-z^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s)(n+s-1) z^{n+s-2} + [c - (a+b+1)z] \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s) z^{n+s-1} - ab \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+s} = 0. \quad (\text{B.0.3})$$

Rearranjando os termos desta última equação na seguinte forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s)(n+s+c-1) z^{n+s-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(n+s)(n+s+a+b) + ab] z^{n+s} = 0. \quad (\text{B.0.4})$$

Redefinindo o índice somatório na primeira soma da eq. (B.0.4) e combinando os coeficientes que tem a mesma potencia em z , ou seja

$$a_0 s(s+c-1) z^{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \{ (n+s+1)(n+s+c) a_{n+1} - [(n+s+a+b)(n+s) + ab] a_n \} z^{n+s} = 0. \quad (\text{B.0.5})$$

Como esta equação é valida para qualquer valor de z , então os coeficientes de z devem ser iguais a zero. Assim,

$$s(s+c-1)a_0 = 0 \quad (\text{B.0.6})$$

e

$$a_{n+1} = \frac{(n+s)(n+s+a+b) + ab}{(n+s+1)(n+s+c)} a_n. \quad (\text{B.0.7})$$

Vemos que se $a_0 = 0$ na eq. (B.0.7), então $a_n = 0$ para todo valor de n e portanto temos como solução $u(z) = 0$. Para obter soluções não triviais temos que considerar $a_0 \neq 0$. Nesse caso, da eq. (B.0.6), se considerarmos $s = 0$, a eq. (B.0.7) torna-se

$$a_{n+1} = \frac{(n)(n+a+b) + ab}{(n+1)(n+c)} a_n = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+1)(n+c)} a_n. \quad (\text{B.0.8})$$

Os primeiros coeficientes são

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{ab}{c}a_0, \\ a_2 &= \frac{(a+1)(b+1)}{2(c+1)}a_1 = \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2c(c+1)}a_0, \\ a_3 &= \frac{(a+2)(b+2)}{3(c+2)}a_2 = \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3c(c+1)(c+2)}a_0. \end{aligned}$$

Note-se que o n -ésimo coeficiente é escrito como

$$a_n = \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)b(b+1)(b+2)\dots(b+n-1)}{n!c(c+1)(c+2)\dots(c+n-1)}a_0. \quad (\text{B.0.9})$$

Por conseguinte, obtemos a solução para a eq. (B.0.1)

$$u(z) = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)b(b+1)(b+2)\dots(b+n-1)}{n!c(c+1)(c+2)\dots(c+n-1)} z^n \right]. \quad (\text{B.0.10})$$

Usando o símbolo de Pochhammer

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, \quad (\text{B.0.11})$$

que está relacionado com a função gamma $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = z! = z(z-1)!$. Logo, a equação (B.0.11) pode reescrever-se como

$$u(z) = F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n. \quad (\text{B.0.12})$$

Esta função $F(a, b; c; z)$ que está definida mediante uma serie é conhecida como função hipergeométrica e ela é denotada por alguns autores por ${}_2F_1(a, b; c; z)$. A solução (B.0.12) faz sentido se nenhum dos termos do denominador é igual a zero, ou seja, a solução $F(a, b; c; z)$ existe se temos que $c \neq -n$. Também, devemos dizer que quando $a = -n$ ou $b = -n$ a série termina e define um polinómio de grau n .

Obtivemos uma solução dada por (B.0.10) quando consideramos $s = 0$. Para obter a segunda solução, devemos fazer $s = -c + 1$ (ver eq. (B.0.6)). Assim, rearranjando a eq. (B.0.7) obtemos que

$$a_{n+1} = \frac{[n + (2 - c) - 1][n + (2 - c) - 1 + a + b] + ab}{(n+1)(n+2-c)} a_n. \quad (\text{B.0.13})$$

Se escrevemos $c = 2 - c'$, então (B.0.13) torna-se em

$$a_{n+1} = \frac{(n + c' - 1 + a)(n + c' - 1 + b)}{(n+1)(n+c')} a_n. \quad (\text{B.0.14})$$

Comparando as equações (B.0.14) e (B.0.8) temos que $a' = 1 + a - c$ e $b' = 1 + b - c$. Portanto, a eq. (B.0.14) estará expressada como

$$a_{n+1} = \frac{(n + a')(n + b')}{(n+1)(n+c')} a_n. \quad (\text{B.0.15})$$

Assim, a segunda solução está dada por $u(z) = z^{1-c}F(1+a-c, 1+b-c; 2-c; z)$. A solução geral será uma combinação linear das soluções encontradas, isto é

$$u(z) = AF(a, b; c; z) + Bz^{1-c}F(1+a-c, 1+b-c; 2-c; z). \quad (\text{B.0.16})$$

Representações Integrais

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt \quad (\Re c > \Re b > 0) \quad (\text{B.0.17})$$

Esta integral representa uma função analítica no plano z que corta o eixo real desde 1 até ∞ . Outra integral importante é

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{2\pi i \Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{\infty}^{-\infty} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)} (z)^s ds \quad (\Re c > \Re b > 0) \quad (\text{B.0.18})$$

Transformações lineares

Das equações B.0.17 e B.0.18 podem-se obter muitas formulas de transformação. A continuação presentamos as formulas usadas nesta dissertação.

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} F(a, 1-c+a; 1-b+a; \frac{1}{z}) \\ + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-z)^{-b} F(b, 1-c+b; 1-a+b; \frac{1}{z}) \quad (|\arg(-z)| < \pi).$$

Quando $z \rightarrow \infty$ teremos

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-z)^{-b} \quad (\text{B.0.19})$$